



**T.C.**  
**MUğ ALPARSLAN ÜNGVERSİTESİ**  
**FEN BİGİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**CRANK-NICOLSON SONLU FARK YÖNTEMİNE BAĞLI STRANG  
PARÇALAMA (SPLITTING) METODU GLEBURGERS' DENKLEMİNİN  
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

**Aydın KAYA**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Haziran - 2019**  
**MUğ**  
**Her Hakkı Saklıdır**



T.C.  
MUĞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CRANK-NICOLSON SONLU FARK YÖNTEMİNE BAĞLI STRANG  
PARÇALAMA (SPLITTING) METODU GLEBURGERS' DENKLEMİNİN  
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Aydın KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

DANIŞMAN  
Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Haziran - 2019

MUĞ

Her Hakkı Saklıdır

## TEZ KABUL VE ONAYI

Aydın KAYA tarafından hazırlanan "Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemine Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile Burgers' Denkleminin Sayısal Çözümleri" adlı tez çalışması 18/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Doç. Dr. Erdal KORKMAZ  
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik



#### Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU  
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik



#### Üye

Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN  
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, MBFE, Matematik Eğitimi



Yukarıdaki sonuç;  
Enstitü Yönetim Kurulu 25/06/2019 Tarih ve 18/06/2019 nolu kararı  
ile onaylanmıştır.

  
Doç. Dr. Sedat BOZARI  
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

  
Aydın KAYA

Haziran -2019

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

# CRANK-NICOLSON SONLU FARK YÖNTEMİNE BAĞLI STRANG PARÇALAMA(SPLITTING) METODU GLEBURGERS' DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Aydın KAYA

Muğla Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

2019, 84 sayfa

Jüri

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN

Dört bölümden oluşan bu tez çalışmasında, Crank-Nicolson sonlu fark yöntemine bağlı Strang parçalama (splitting) metodu ile 1-boyutlu Burgers'' denkleminin sayısal çözümleri incelenmiştir.

Birinci bölümde 1-boyutlu Burgers'' denklemi hakkında literatürün bir özeti verilmiştir.

İkinci bölümde sonlu fark yöntemleri ve Taylor seri açılımı incelendi. Taylor seri açılımını kullanarak sonlu fark formülleri sunuldu. Burgers'' denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı verildi. Hopf-Cole dönüşümü kullanarak 1-boyutlu Burgers'' denkleminin iki model problem için analitik çözümleri sunuldu.

Üçüncü bölümde parçalama (splitting) yöntemi hakkında bilgi verildi. Buna bağlı Lie-Trotter ve Strang parçalama (splitting) metotları açıklanmış ve bu yöntemlerin yerel hataları sunulmuştur. Sonlu fark yöntemleri için lineerleştirme teknikleri sunulmuştur.

Dördüncü bölümde farklı lineerleştirme teknikleri ile Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımına bağlı Strang parçalama yöntemi kullanılarak model problemlerin sayısal çözümleri elde edildi. Sayısal çözümler analitik çözümlerle karşılaştırıldı.

**Anahtar Kelimeler:** Burgers denklemi, Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi, Strang parçalama (Splitting) metodu, Taylor seri açılımı.

## ABSTRACT

### MS THESIS

# NUMERICAL SOLUTIONS OF THE BURGERS' EQUATION WITH STRANG SPLITTING METHOD BASED ON CRANK-NICOLSON FINITE DIFERANCE SCHEME

Aydın KAYA

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUĞ  
ALPARSLAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
MATHEMATICS SCIENCE

Advisor: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

2019, 84 Pages

### Jury

Advisor : Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Jury Member: Doç.Dr. Erdal KORKMAZ

Jury Member: Dr. Öğr. Üyesi Erkan ÇİMEN

In this thesis, the numerical solutions of the 1-dimensional Burgers' equation obtained by Strang splitting method based on Crank-Nicolson finite difference scheme have been analyzed in four chapter.

In the first chapter, a summary of the literature about 1-dimensional Burgers' equation has been given.

In the second chapter, finite difference methods and Taylor series expansion are examined. Using the Taylor series expansion, the finite difference formulations are presented. Crank-Nicolson finite difference approach of the Burgers equation has been given. The analytical solution of the 1-dimensional Burgers' equation for two model problems has been obtained by using Hopf-Cole transformation.

In the third chapter, the Lie-Trotter and Strang splitting methods have been explained and their local errors have been presented. Different linearization technique has been presented for finite difference methods.

In the fourth chapter, the numerical solutions of the model problems have been obtained by using Strang splitting method based on the Crank-Nicolson finite difference method and different linearization technique. The numerical solutions have been compared with analytical solutions.

**Keywords:** Burgers' equation, Crank-Nicolson Finite difference methods, Strang splitting method, Taylor series expansion.

## ÖNSÖZ

Sahip olduğum azim çocuklarımın bana olan inançları ile birleşince bu zorlu maratona başayabildim. Bu maratonda benden tecrübelerini esirgemeyen danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU'na saygılarımı sunuyorum.

Aydın KAYA  
18/06/2019

## İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ.....	iii
ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
TABLOLAR LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	5
2.1. İki Değişkenli Taylor Seri Açılımı .....	5
2.2. Sonlu Fark Yöntemleri .....	7
2.3. Temel Kavramlar .....	9
2.3.1. Kararlılık .....	9
2.3.2. Fourier seri (von Neumann) Kararlılık Analizi Yöntemi.....	9
2.3.3. Crout Yöntemi.....	10
2.4. 1-Boyutlu Burgers'' Denkleminin Seri Çözümü .....	13
2.5. Hopf-Cole Dönüşümü.....	13
2.6. Model Problemler .....	15
Problem 2.1 .....	15
Problem 2.2.....	18
2.7. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY).....	19
2.7.1. 1-Boyutlu Burgers'' Denkleminin CNSFY Yaklaşım	19
Kararlılık Analizi .....	20
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	22
3.1. Parçalama (Splitting) Yöntemi .....	22
3.1.1. Lie-Trotter Parçalama (splitting) Metodu .....	24
3.1.2. Lie-Trotter Parçalama Yönteminde Hata Analizi .....	25
3.1.3. Strang Parçalama (Splitting) Metodu .....	26
3.1.4. Strang Parçalama Yönteminde Hata Analizi.....	27
3.2. 1-Boyutlu Burgers'' Denkleminin Parçalaması .....	28
3.2.1. Viskozitesiz Burgers'' Denkleminin Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşım	29
(CNSFY) .....	
3.2.2. Isı İletim Denkleminin Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşım (CNSFY) ....	32
3.3. Lineerleştirme Teknikleri .....	34
3.3.1. Viskozitesiz Burgers'' Denklemi için Robin-Graves Lineerleştirme Tekniği	34
(RGSFY) .....	
3.3.2. Viskozitesiz Burgers'' Denkleminin CNSFY1 Yaklaşım.....	35
3.3.3. Viskozitesiz Burgers'' Denkleminin CNSFY 2 Yaklaşım.....	36
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	38

4.1. Burgers" Denkleminin CNSFY ile Nümerik Çözümünün Sonuçları .....	38
4.2. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemine(CNSFY) Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri.....	45
4.2.1. Strang BAB (S-BAB) Yaklaşım .....	45
4.2.2. S-BAB için Nümerik Sonuçlar .....	45
4.2.3. Strang ABA (S-ABA) Yaklaşım.....	52
4.2.4. S-ABA için Nümerik Sonuçlar .....	52
4.2.5. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemine Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodunun ABA ve BAB Kalıplarının Karşılaştırılması.....	57
4.3. RGSFY "e Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri .....	59
4.4. CNSFY 1 Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri .....	65
4.5. CNSFY 2 Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denkleminin Nümerik Çözümleri .....	71
4.6. Parçalanmış Burgers" Denkleminin Değişik Lineerleştirme Teknikleri ile Elde Edilmiş Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması.....	77
<b>5. SONUÇLAR VE ÖNERGIER .....</b>	<b>79</b>
<b>KAYNAKÇA .....</b>	<b>80</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>85</b>

## ġEKĠLER LĠSTESĠ

ġekil 2.1.Düġüm Noktalarının Gösterimi.....	8
ġekil 4.1.Problem 2.1'in CNSFY ile $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t =0.00001$ , $v=1$ iken $t$ 'nin deġiġen deġerleri için çözüm grafiġi.....	41
ġekil 4.2.Problem 2.1'in CNSFY ile $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t =0.00001$ , $v=0.1$ iken $t$ 'nin deġiġen deġerleri için çözüm grafiġi.....	42
ġekil 4.3.Problem 2.1'in CNSFY ile $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t =0.00001$ , $v=0.01$ iken $t$ 'nin deġiġen deġerleri için çözüm grafiġi .....	42
ġekil 4.4. $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t = 0.00001$ , $v= 1$ deġiġkent deġerleri için Problem 2.1'in CNSFY'ine baġlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiġi.....	48
ġekil 4.5. $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t = 0.00001$ , $v= 0.1$ iken deġiġkent deġerleri için Problem 2.1'in CNSFY'ine baġlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiġi.....	49
ġekil 4.6. $\Delta x =0.0125$ , $\Delta t= 0.00001$ , $v=0.0$ 1 iken deġiġkent deġerleri için Problem 2.1'in CNSFY'ine baġlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiġi ....	49
ġekil 4.7. $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t = 0.00001$ , $v=1$ iken deġiġkent deġerleri için Problem 2.1'in RGSFY'ine baġlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiġi.....	61
ġekil 4.8. $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t = 0.00001$ , $v=0.1$ iken deġiġkent deġerleri için Problem 2.1'in RGSFY'ine baġlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiġi.....	62
ġekil 4.9. $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t = 0.00001$ , $v=0.0$ 1 iken deġiġkent deġerleri için Problem 2.1'in RGSFY'ine baġlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiġi ....	62
ġekil 4.10. $\Delta x =0.0125$ , $\Delta t= 0.00001$ , $v=1$ iken deġiġkent deġerleri için Problem 2.1'in CNSFY1'ine baġlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiġi.....	67
ġekil 4.11. $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t = 0.00001$ , $v=0.1$ iken deġiġkent deġerleri için Problem 2.1'in CNSFY1'ine baġlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiġi ..	68
ġekil 4.12. $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t = 0.00001$ , $v=0.0$ 1 iken deġiġkent deġerleri için Problem 2.1'in CNSFY1'ine baġlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiġi ..	68
ġekil 4.13. $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t = 0.00001$ , $v= 1$ iken deġiġkent deġerleri için Problem 2.1'in CNSFY2'ine baġlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiġi.....	73
ġekil 4.14. $\Delta x =0.0125$ , $\Delta t= 0.00001$ , $v=0.1$ iken deġiġkent deġerleri için Problem 2.1'in CNSFY2'ine baġlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiġi.....	74
ġekil 4.15. $\Delta x=0.0125$ , $\Delta t = 0.00001$ , $v=0.0$ 1 iken deġiġkent deġerleri için Problem 2.1'in CNSFY2'ine baġlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiġi ..	74

## TABLÖLAR LİSTESİ

<b>Tablo 4.1.</b> Problem 2.1'in CNSFY ile $t=0.1$ , $\Delta t =0.00001$ , $v=1$ iken $\Delta x$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	39
<b>Tablo 4.2.</b> Problem 2.1'in CNSFY ile $\Delta t =0.00001$ , $\Delta x =0.0125$ iken $v=1$ , $v=0.1$ , $v=0.01$ iÇin değişken t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri.....	40
<b>Tablo 4.3.</b> Problem 2.2'in CNSFY ile $t=0.1$ , $\Delta t=0.00001$ , $v=1$ iken $\Delta x$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	43
<b>Tablo 4.4.</b> Problem 2.2'in CNSFY ile $\Delta t =0.00001$ , $\Delta x =0.0125$ iken $v=1$ , $v=0.1$ , $v=0.01$ iÇin değişken t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri.....	44
<b>Tablo 4.5.</b> Problem 2.1'in CNSFY „ne bağlı Strang ParÇalama Metodu BAB'a göre $t=0.1$ , $\Delta t=0.00001$ , $v=1$ iken $\Delta x$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	46
<b>Tablo 4.6.</b> Problem 2.1'in CNSFY,ne bağlı Strang ParÇalama Metodu BAB'a göre $\Delta t=0.00001$ , $\Delta x =0.0125$ iken $v=1$ , $v=0.1$ , $v=0.01$ değerleri iÇin değişen t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri .....	47
<b>Tablo 4.7.</b> Problem 2.2 CNSFY „ne bağlı Strang ParÇalama Metodu BAB'a göre $t=0.1$ , $\Delta t=0.00001$ , $v=1$ iken $\Delta x$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri.....	50
<b>Tablo 4.8.</b> Problem 2.2'in CNSFY,ne bağlı Strang ParÇalama Metodu BAB'a göre $\Delta t=0.00001$ , $\Delta x =0.0125$ iken $v=1$ , $v=0.1$ , $v=0.01$ değerleri iÇin değişen t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri .....	51
<b>Tablo 4.9.</b> Problem 2.1'in CNSFY „ne bağlı Strang ParÇalama Metodu ABA'a göre $t=0.1$ , $\Delta t =0.00001$ , $v=1$ iken $\Delta x$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	53
<b>Tablo 4.10.</b> Problem 2.1'in CNSFY,ne bağlı Strang ParÇalama Metodu ABA'a göre $\Delta t = 0.00001$ , $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$ , $v=0.1$ , $v=0.01$ değerleri iÇin değişen t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri .....	54
<b>Tablo 4.11.</b> Problem 2.2'in CNSFY „ne bağlı Strang ParÇalama Metodu ABA'a göre $t=0.1$ , $\Delta t=0.00001$ , $v=1$ iken $\Delta x$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	55
<b>Tablo 4.12.</b> Problem 2.2'in CNSFY,ne bağlı Strang ParÇalama Metodu ABA'a göre $\Delta t =0.00001$ , $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$ , $v=0.1$ , $v=0.01$ değerleri iÇin değişen t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri .....	56
<b>Tablo 4.13.</b> $t=0.1$ , $\Delta t =0.00001$ , $v=1$ , $\Delta x=0.0125$ iken Problem 2.1'in Strang ParÇalama Metodunun ABA ve BAB çözümlerinin karşılaştırılması.....	57
<b>Tablo 4.14.</b> $t=0.1$ , $\Delta t =0.00001$ , $v=1$ , $\Delta x=0.0125$ iken Problem 2.2'in Strang ParÇalama Metodunun ABA ve BAB çözümlerinin karşılaştırılması.....	58
<b>Tablo 4.15.</b> Problem 2.1'in RGSFY ile $t=0.1$ , $\Delta t =0.00001$ , $v=1$ iken $\Delta x$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	59
<b>Tablo 4.16.</b> Problem 2.1'in RGSFY ile $\Delta t =0.00001$ , $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$ , $v=0.1$ , $v=0.01$ değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri.....	60

<b>Tablo 4.17.</b> Problem 2.2'nin RGSFY ile $t=0.1$ , $\Delta t=0.00001$ , $v=1$ iken $\Delta x$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	63
<b>Tablo 4.18.</b> Problem 2.2'nin RGSFY ile $\Delta t =0.00001$ , $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$ , $v=0.1$ , $v=0.01$ değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	64
<b>Tablo 4.19.</b> Problem 2.1'nin CNSFY1 ile $t=0.1$ , $\Delta t=0.00001$ , $v=1$ iken $\Delta x$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	65
<b>Tablo 4.20.</b> Problem 2.1'in CNSFY1 ile $\Delta t = 0.00001$ , $\Delta x= 0.0125$ iken $v=1$ , $v= 0.1$ , $v= 0.01$ değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	66
<b>Tablo 4.21.</b> Problem 2.2'nin CNSFY1 ile $t=0.1$ , $\Delta t=0.00001$ , $v=1$ iken $\Delta x$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	69
<b>Tablo 4.22.</b> Problem 2.2'in CNSFY1 ile $\Delta t=0.00001$ , $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$ , $v=0.1$ , $v=0.01$ değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	70
<b>Tablo 4.23.</b> Problem 2.1'in CNSFY2 ile $t=0.1$ , $\Delta t =0.00001$ , $v=1$ iken $\Delta x$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	71
<b>Tablo 4.24.</b> Problem 2.1'in CNSFY2 ile $\Delta t=0.00001$ , $\Delta x=0.0125$ iken $v=1$ , $v=0.1$ , $v=0.01$ değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	72
<b>Tablo 4.25.</b> Problem 2.2'nin CNSFY2 ile $t=0.1$ , $\Delta t=0.00001$ , $v=1$ iken $\Delta x$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri .....	75
<b>Tablo 4.26.</b> Problem 2.2'nin CNSFY2 ile $v=1$ , $v=0.1$ , $v=0.01$ $\Delta t=0.00001$ , $\Delta x=0.0125$ iken $t$ 'nin değişen değerleri iÇin analitik ve nümerik çözümleri.....	76
<b>Tablo 4.27.</b> $v=1$ , $t=0.1$ , $\Delta t=0.00001$ , $\Delta x=0.0125$ iken problem 2.1'in BAB, RGSFY, CNSFY1, CNSFY2'ün nümerik sonuçlarının karşılaştırması.....	77
<b>Tablo 4.28.</b> $v=1$ , $t=0.1$ , $\Delta t=0.00001$ , $\Delta x=0.0125$ iken problem 2.2'nin BAB, RGSFY, CNSFY1, CNSFY2'ün nümerik sonuçlarının karşılaştırması.....	78

## SİMGELER VE KISALTMALAR

### Simgeler

$U_m^n$	:	Analitik çözüm
$U_m^n$	:	Sayısal çözüm
$\Delta t$	:	$t$ yönünde zaman adım uzunluğu
$\Delta x$	:	$x$ yönünde konum adım uzunluğu
$(m\Delta x, n\Delta t)$	:	Düğüm noktası
$L_2$	:	Ortalama hata
$L_\infty$	:	Maksimum hata
$\nu$	:	Kinematik viskozite sayısı
$[\cdot, \cdot]$	:	Komütatör
$\ \cdot\ $	:	Öklid normu
$u(x, t)$	:	$x$ ve $t$ değişkenlibir fonksiyon
$t^n (\equiv t_n)$	:	$n$ . zaman adımı
$u^n$	:	$u^*$ 'nin $n$ . zaman adımındaki değeri
$u_t$	:	$u^*$ 'nin $t^*$ 'ye göre türevi
$u_x$	:	$u^*$ 'nin $x^*$ 'ye göre türevi

### Kısaltmalar

S-ABA	:	Strang parçalamasının ABA yaklaşım
S-BAB	:	Strang parçalamasının BAB yaklaşım

## 1. GİRİŞ

Bu çalışmada sayısal çözümlerini inceleyeceğimiz Burgers'' denklemi

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

ilk olarak Burgers'' tarafından türbülansın matematiksel modellenmesi için önerilmiştir (Burger, 1948). Bu denklem non-lineer konveksiyon ve viskoziteli difüzyon terimi içerdiğinden Navier-Stokes denkleminin basit bir formudur. Ses ve Gokdalga teorisi, elastik dalgalar, sayı teorisi, gaz dinamiği, ısı iletimi gibi birçok alanda bu denklem kullanılmıştır. Hopf ve Cole aynı dönemlerde fakat birbirinden bağımsız olarak (1.1) denklemini bazı bağılangç koşulları için Hopf-Cole dönüşümü olarak adlandırılan bir yöntem ile ısı iletim denklemine dönüştürüp analitik çözümünü sundular (Hopf, 1950; Cole, 1951).

Analitik çözümü bilinen Burgers'' denklemi, nümerik çözümün analitik çözüme ne kadar yakın olduğunu test edebilen bir non-lineer kısmi diferansiyel denklemdir. Bu yüzden (1.1) Burgers'' denkleminin yaklaşık çözümleri birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

Hon ve Maon (1998) çalışmasında uzay ayrıklaştırma metodu olarak multiküadrik ve zaman ayrıklaştırması için düşük mertebeden açık sonlu fark yaklaşım kullanılarak Burgers'' denkleminin yaklaşık çözümlerini sunmuştur. Kutluay ve ark. (2004) çalışmasında en küçük kareler kuadratik B-spline sonlu eleman metodu kullanılarak Burgers'' denkleminin nümerik çözümlerini elde etmiştir. Burgers'' denkleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için Kutluay ve Essen (2004) çalışmasında lineerleştirilmiş kapalı sonlu fark metodunu önermiştir. Öziğ ve ark. (2005) çalışmasında Hopf-Cole dönüşümü ile indirgenmiş Burgers'' denklemini yaklaşık olarak çözmek için Galerkin kuadratik B-spline sonlu eleman metodunu kullanmışlar Gülsu ve Öziğ (2005) çalışmasında Burgers'' denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için kısıtlanmış Taylor yaklaşım metodunu uygulamıştır. Burgers'' denklemini Aksan (2005) çalışmasında Galerkin sonlu eleman yöntemi ile yaklaşık olarak çözüştür. Kadalbajoo ve Awasthi (2006) çalışmasında Burgers'' denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark metodu ile elde edilmiş çözümlerini sunmuştur. Saka ve Dağ, Küartik B-spline kollokasyon metodunu kullanılarak Burgers'' denkleminin yaklaşık çözümlerini

sunmuştur (Saka ve Dağ, 2007). Burgers'' denkleminin sayısal çözümü için dördüncü ve altıncı mertebeye kompakt sonlu fark metodu sırası ile (Lao, 2008; Sari ve Gürarslan, 2009) çalışmada önerilmiştir. Pandey ve ark. (2009) çalışmada Burgers'' denklemini ısı denklemine indirgeyerek Douglas sonlu fark yöntemi ile çözmüştür. Burgers'' denkleminin yaklaşık çözümleri öngörme-düzeltilme yöntemi kullanılarak Zhang ve Wang (2012) yaptıkları çalışmada elde etmişlerdir. Jiware (2012) çalışmada Haar dalgacık yarı-lineer yaklaşım ile Burgers'' denkleminin nümerik çözümlerini sunmuştur. Çın ve Bahadır (2013) yaptıkları çalışmada Burgers'' denkleminin yaklaşık çözümleri için kapalı ve full kapalı üssel yöntemlerini önermiştir. Burgers'' denkleminin sayısal çözümü için Jiware (2015) çalışmada yazar Euler kapalı metoduna, yarı lineerleştirme ve düzgün Haar dalgacıklarına bağlı bir karma yaklaşım önermiştir. Jiware ve Alshomraniv (2017) yaptıkları çalışmada modifiye edilmiş trigonometrik kübik B-spline fonksiyonlarını kullanarak Burgers'' denkleminin yaklaşık çözümü için yeni bir algoritma önermiştir. Seydaoğlu (2019) çalışmada uzay ayrıklaştırması için multiküadratik radyal baz fonksiyonu ve zaman integrasyonu için Lie-Grup yöntemi kullanılarak Burgers'' denkleminin sayısal çözümlerini sunmuştur.

Marchuk (1968) çalışmada matematiksel fizik problemlerinin çözümü için parçalama metodlarının bazı uygulamalarını vermiştir. Strang (1968) çalışmada iki uzay değişkenli lineer olmayan bağımlı değer problemlerinin yaklaşık çözümleri için parçalama tekniğini önermiştir. Yoshida (1990) makalesinde Hamiltonyan sistemler için yüksek mertebeden parçalama metodları sunmuştur. Burgers'' denkleminin parçalama tekniği ve kübik spline metodu kullanılarak nümerik çözümlerini Jain ve ark. (1992) çalışmada elde etmişlerdir. Çakandar ve Mohsen (1992) yaptıkları çalışmada Burgers'' denkleminin yaklaşık çözümü için Crank-Nicolson sonlu fark yöntemine ve Picard yaklaşımına bağlı birinci mertebeye parçalama yöntemini önermiştir. Shankar ve Singh (1995) yaptıkları çalışmada Homojen olmayan iki boyutlu coupled Burgers'' denkleminin yaklaşık çözümlerini kübik spline fonksiyonları ile sonlu fark metodlarına bağlı parçalama metodu ile elde etmişlerdir. Rouhi ve Wright (1995) yaptıkları çalışmada ışık akımı, Boussinesq ve KdV denklemlerinin yaklaşık çözümü için tek çift parçalama olarak adlandırılan yeni bir parçalama metodunu önermiştir. Holden ve Karlsen (1999) çalışmada genelleştirilmiş KdV denklemi için birinci mertebeye parçalama metodunun yakınsaklık özelliklerini incelediler. Bhardwaj ve Shankar (2000) yazdıkları makalede Kuintik spline tekniğini ve parçalama metodunu kullanarak düzenli

uzun dalga (RLW) denklemi için yeni bir sonlu fark metodunu geliştirdiler. Blanes ve Moan (2000) çalışmasında zamana bağlı Schrödinger denklemi için yeni dördüncü merteye parçalama metodunu, Blanes ve Moan (2001) çalışmasında otonom olamayan Hamiltonyan denklemler için parçalama metodlarını sunmuşlardır. Muslu ve Erbay (2003) makalesinde Kompleks modifiye edilmiş KdV denkleminin Fourier dönüşüne bağlı üç farklı parçalama metodu ile sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Blanes ve Cases (2006) çalışmasında otonom olamayan ayrılabilir dinamik sistemler için yeni dördüncü ve altıncı mertebeden parçalama metodlarını sunmuşlardır. Lubich (2008) çalışmasında lineer olmayan Schrödinger denklemlerinin Strang parçalama metoduna bağlı hata analizini vermiştir. Hansen ve Osterman akış denklemleri için yüksek mertebeden parçalama metodlarını ve yakınsaklık analizlerini sunmuşlardır. Bir yıl sonra yine bu araştırmacılar Lie ve Piceman-Rachford parçalama metodlarının lineer olmayan akış denklemleri için yakınsaklık analizini sunmuşlardır (Hansen ve Ostermann, 2009; Hansen ve Ostermann, 2010). Kosinüs açılımına bağlı diferansiyel tümeleme metodu ve parçalama metodu kullanılarak KdV denklemini Saka (2009) çalışmasında sayısal olarak çözmüştür. Seydaoğlu (2010) çalışmasında parçalanmış Burgers'' denklemini sonlu fark yöntemlerini kullanarak sayısal çözümlerini elde etmiştir. Blanes ve Cases (2010) çalışmasında diferansiyel denklemler için pozitif reel kısma sahip altıncı merteye kompleks katsayılı parçalama metodlarını elde ettiler. Holden ve ark.(2011) çalışmasında KdV denkleminin Godunov ve Strang parçalama metodlarına bağlı yakınsaklığını göstermişlerdir. Holden ve Lubich 2013 yılında Burgers'' non-lineerliğine sahip kısmi diferansiyel denklemler için Strang parçalama metoduna bağlı yakınsaklık özelliklerini sundular (Holden ve Lubich, 2013). Blanes ve Seydaoğlu (2013) çalışmasında otonom olamayan ayrılabilir parabolik denklemler için pozitif reel kısma sahip yeni yüksek mertebeden parçalama metodlarını elde etmişlerdir. Seydaoğlu (2015) çalışmasında pertürbe edilmiş sistemler için üretilmiş yüksek mertebeden parçalama (splitting) metodlarını kullanarak farklı sınır koşulları altında 1-Boyutlu Burgers'' tipi kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini incelemiştir. Aynı araştırmacısında spektral, WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) sonlu fark metodlarını kullanmıştır. Seydaoğlu ve ark. (2016) çalışmasında Burgers'' denkleminin farklı sınır koşulları için Fourier dönüşüne, dördüncü merteye açık ve WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory) sonlu fark metodlarına bağlı yüksek mertebeden parçalama metodları ile yaklaşık çözümleri elde etmiştir. Seydaoğlu (2018) çalışmasında

filtreleme tekniği ile Crank-Nicolson sonlu fark metoduna ve Picard yaklağımına bağlı pertürbe edilmiğ denklemler için üretilen ikinci mertebe pozitif katsayılı simetrik parçalama metodu kullanılarak Burgers'' denkleminin sayısal çözümlerini sunmuğtur. Çelikkaya yaptığı çalığmada Burgers'', modifiye edilmiğ Burgers'' (mBE) ve düzenli dalga (RLW) denklemlerinin sayısal çözümlerini kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemlerine bağlı Strang, dördüncü ve altıncı mertebe ekstrapolasyon parçalama yöntemleri ile elde etmiğtir (Çelikkaya, 2018).

Bu çalığmada Burgers'' denkleminin iki farklı bağangıç ve sınır koğulları altında farklı lineerleştirme teknikleri kullanılarak Crank-Nicolson sonlu fark yöntemine bağlı Strang parçalama metodu ile sayısal çözümleri elde edilecek ve bu çözümler ile denklemin analitik çözümleri karşılağılacaktır.

## 2. KAYNAK ARAĞTIRMASI

### 2.1. Ėk Değiğkenli Taylor Seri Açılımı

$U(x, t)$ , fonksiyonunun  $(x + \Delta x, t + \Delta t)$  noktasındaki Taylor seri açılımı aşağıdaki gibidir.

$$U(x + \Delta x, t + \Delta t) = U(x, t) + \left[ \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} \right] + \frac{1}{2!} \left[ (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\Delta x \Delta t \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right] + \frac{1}{3!} \left[ (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + 3(\Delta x)^2 \Delta t \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + 3\Delta x (\Delta t)^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial t^2} + (\Delta t)^3 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right] + \dots$$

Yukarıdaki Taylor seri açılımında  $\Delta t = 0$  olarak alınırsa

$$U(x + \Delta x, t) = U(x, t) + \left[ \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{1}{2!} \left[ (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{3!} \left[ (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right] + \dots, \text{ olur.}$$

Yukarıdaki ifadede birinci türev çekilirse

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x + \Delta x, t) - U(x, t)}{(\Delta x)} - \frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{(\Delta x)^3}{4!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - \dots, \text{ ifadesi bulunur.}$$

$$O(\Delta x) = -\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - \frac{(\Delta x)^3}{4!} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - \dots, \text{ olarak alınır}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x + \Delta x, t) - U(x, t)}{(\Delta x)} + O(\Delta x) \text{ ifadesi elde edilir. Bu ifadede}$$

$U(x, t) = U_m^n$ ,  $U(x + \Delta x, t) = U_{m+1}^n$  olacak şekilde yerine yazarsak

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.1)$$

zaman sabit iki nokta ileri fark formülünü (türeğe yaklaşım formülü) bulmuş oluruz. Benzer şekilde  $\Delta x = 0$  olarak alınırsa yeni denklem aşağıdaki gibi olur.

$$U(x, t + \Delta t) = U(x, t) + \left[ \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} \right] + \frac{1}{2!} \left[ (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right] + \frac{1}{3!} \left[ (\Delta t)^3 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right] + \dots$$

Yukarıdaki ifadeden birinci türevi çekersek

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{(\Delta t)} - \frac{(\Delta t)}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t)^2}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{(\Delta t)^3}{4!} \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} - \dots, \text{ ifadesini buluruz.}$$

$$O(\Delta t) = -\frac{(\Delta t)}{2!} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t)^2}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{(\Delta t)^3}{4!} \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} - \dots, \text{ olarak alınır}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \text{ şeklinde bulunur. Bulduğumuz bu ifade}$$

$$U(x, t + \Delta x) = U_m^{n+1}, \quad U(x, t) = U_m^n \text{ olarak yerine yazılırsa}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (2.2)$$

iki nokta ileri zaman fark formülü (türeve yaklaşım formülü) olur.

Benzer bir şekilde  $U(x, t)$ 'nin  $(x \pm \Delta x, t \pm \Delta t)$  ve  $(x \pm 2\Delta x, t \pm 2\Delta t)$  noktalarındaki iki değişkenli Taylor seri açılımı yapılırsa aşağıdaki konum zaman fark formülleri diğer bir ifade ile türeve yaklaşım formülleri bulunur (Uçar, 2005).

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_m^n - 2U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2), \quad (2.9)$$

## 2.2. Sonlu Fark Yöntemleri

Analitik çözümleri bulunamayan denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak amacıyla araştırmacılar birçok nümerik yöntem geliştirmişlerdir. Bu yöntemler arasındaki üstünlük, yöntemin hassasiyetine ve hızına bağlıdır. Son zamanlarda çözümü analitik olarak bulunamayan diferansiyel denklemler doğruluk hassasiyeti yüksek olan bilgisayarlar yardımı ile nümerik yöntemlerle çözülmektedir.

Lineer veya lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin bulunmasında sonlu fark yöntemleri sıklıkla kullanılmaktadır. Yaygın olarak kullanılan sonlu fark yöntemleri Açık, Kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleridir (Özdoğan ve ark., 2017). Bu tezde sadece Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile ilgileneceğiz.

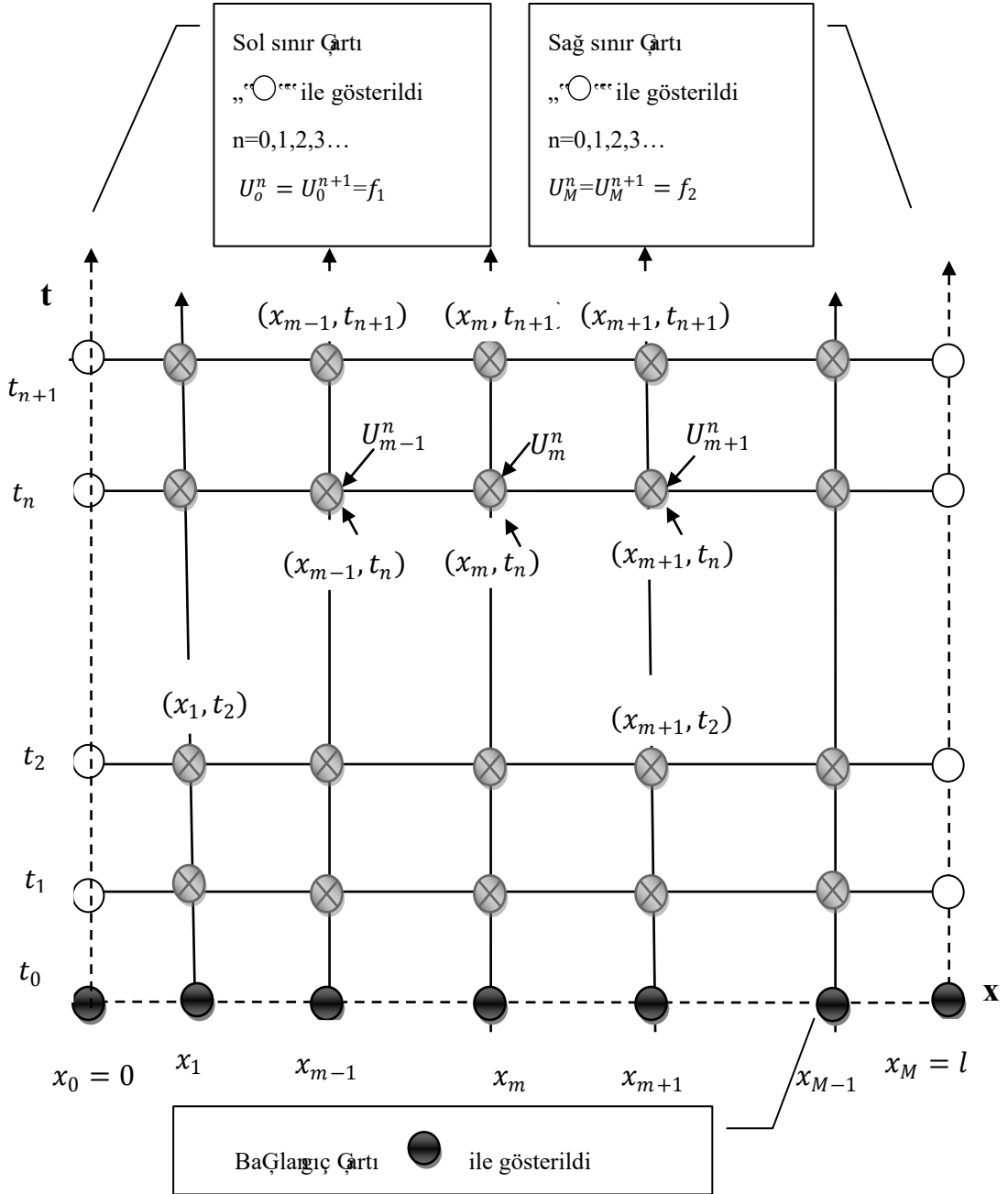
Bir kısmi diferansiyel denklemin sonlu fark yaklaşımını bulunurken öncelikle problemin çözüm bölgesi şekil 2.1’de gösterildiği gibi genellikle dikdörtgenel kafesler içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm noktaları üzerinde hesaplanır. Daha sonra diferansiyel denklemdaki türevler ve sınır şartları yerine uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece diferansiyel denklemlerden oluşan problem, klasik sonlu fark denklemlerinden oluşan bir cebirsel denklem sistemine indirgenmiştir.

$U$ ,  $x$  ve  $t$  değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun.  $[0, l] \times [0, \infty)$  yarı açık bölgesinde  $(x_m, t_n)$  olarak ifade edilen düğüm noktasında  $\Delta x$ ,  $x$  yönünde konum adım uzunluğu;  $\Delta t$ ,  $t$  yönünde zaman adım uzunluğunu gösterebilir.

$$x = x_m = m \Delta x, \quad m = 0(1)M, \quad l = M \cdot \Delta x$$

$$t = t_n = n \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$U(x_m, t_n) = U_m^n$  olarak ifade edilir.



Şekil 2.1. Düğüm Noktalarının Gösterimi

### 2.3. Temel Kavramlar

Bu bölümde konunun ilerleyen kısımlarında kullanacağımız kararlılık, von Neumann kararlılık analizi ve Crout yöntemi kavramlarını inceleyeceğiz.

#### 2.3.1. Kararlılık

Sonlu fark yöntemleri ile çözülen kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde meydana gelen hata miktarında ilerleyen zaman adımlarında artış gözlenmiyorsa kullanılan sonlu fark yöntemi kararlıdır denir (Öziğk ve ark., 2017).

#### 2.3.2. Fourier seri (von Neumann) Kararlılık Analizi Yöntemi

Bu yöntem diferansiyel denklemlerin sonlu fark yaklaşımları yazıldıktan sonra elde edilen denklemin hata yayılımına bağlı kararlılığını inceler.

$t \in [0, T]$  , zaman aralığında, konum adım uzunluğu  $\Delta x \rightarrow 0$  ve zaman adım uzunluğu  $\Delta t \rightarrow 0$  ,  $N \cdot \Delta t = T$  olmak üzere  $N \rightarrow \infty$  için iki zaman seviyeli  $U(x, t)$ 'nin sonlu fark yaklaşım denkleminde  $t = 0$  düğüm noktasındaki başlangıç değerleri Fourier seri veya von Neumann metodunun başlangıç değerini ifade eder. Kısmi diferansiyel denklemi değişkenler ayrılma metoduna benzer bir yöntemle  $t = 0$  için Fourier serisine indirgenen bir fonksiyon ele alalım. Bu fonksiyon Fourier seri formunda

$$\sum \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right], \text{ şekilde yazılabilir.}$$

$e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i \cdot \sin(n\pi)$ ,  $i^2 = -1$  eşliğinden dolayı yukarıdaki denklemi kolaylık olsun diye

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \text{ M. } \Delta x = l, \text{ } i^2 = -1, \text{ şekilde yazılabilir.}$$

$m = 0(1)M$ ,  $M \cdot \Delta x = l$  ve  $\theta_n = \frac{n\pi}{l}$  olarak alınırsa

$A_n e^{\frac{in\pi x}{l}} = A_n e^{i\theta_n m \Delta x}$  ifadesi elde edilecektir.  $t = 0$  pivot noktasına ait başlangıç değeri

$$U(x, 0) = U(m\Delta x, 0) = U_m^0 = \sum_{n=0}^M A_n e^{i\theta_n m \Delta x}, \text{ } m = 0(1)M, \text{ olarak tanımlanır.}$$

$M+1$  adet denklemin  $A_0, A_1, \dots, A_M$  bilinmeyen katsayılarını belirtsin. Bu katsayıların hepsi birer sabit sayı olduğu için ihmal edilebilir. Yani bağıngıç değeri kompleks üstel formada yazılabilir. Bunu gösterebilmek için

$\omega$ , genellikle bir karmağıksayı olmak üzere;

$e^{i\theta m \Delta x} = e^{i\theta m \Delta x + \omega t}$ ,  $t = n \cdot \Delta t$ , olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$e^{i\theta m \Delta x} \cdot e^{\omega t} = e^{i\theta m \Delta x} \cdot e^{\omega n \Delta t} = e^{i\theta m \Delta x} \cdot (e^{\omega \Delta t})^n = e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n$ , olarak bulunur.

Burada  $|\mu| = \mu = e^{\omega \Delta t}$  olarak alınır ve güçlendirme faktörü olarak adlandırılır.

Lax-Richtmyer tanımına göre sonlu fark denklemini kararlı olabilmesi için  $\Delta x \rightarrow 0$  ve  $\Delta t \rightarrow 0$  olduğunda  $n \leq N$  için bağıngıç şartını sağlayan  $\theta$  değerleri için  $|\mathbf{U}_m^n|$  ifadesi sabit olmalıdır. Sonlu fark denkleminin analitik çözümü zamana bağlı üstel biçimde artmıyorsa kararlılık için yeter şart  $|\mu| \leq 1$  dir.

Eğer  $|\mathbf{U}_m^n|$  zamana bağlı artıyorsa kararlılık için yeter ve gerek şart  $K > 0$  sayısı  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  ve  $\theta$  „dan bağımsız olmak üzere  $|\mu| \leq 1 + K\Delta t = 1 + O(\Delta t)$ , olmalıdır. Bu yöntem  $l$  periyotlu ve sabit katsayılı lineer denklemler için uygulanır.

Von Neumann şartı iki veya daha fazla bağımlı değışken sahip denklemler ile üç veya daha fazla zaman seviyeli denklemler için geçerlidir ancak yeterli olmayabilir (Smith, 1985).

### 2.3.3. Crout Yöntemi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.

.

.

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n,$$

denklem sisteminin katsayılar matrisi  $A$  olsun.  $L$  ve  $U$  sırası ile alt ve üst üçgensel matrisler olmak üzere  $A = LU$  olarak yazalım.

$Ax = b$ , denklem sisteminde  $A = LU$  olarak yazılırsa  $LUx = b$  denklem sistemi meydana gelir.  $Ly = b$ , denklem sistemi çözülerek  $y$  bulunur. Daha sonra

$Ux = y$  denklem sistemi çözülerek bilinmeyen  $x$ 'ler bulunur. Şimdi  $A = LU$  ayrıştırılmasının nasıl yapıldığına bakalım.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & a_{2n} \\ a_{31} & \cdot & a_{33} & \cdot & \dots & \cdot & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{(n-1)1} & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ L_{31} & \cdot & L_{33} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ L_{(n-1)1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & L_{n(n-1)} & L_{nn} \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} & U_{14} & \cdot & \cdot & \cdot & U_{1(n-1)} & U_{1n} \\ 0 & 1 & U_{23} & U_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & U_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & U_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & U_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & U_{45} & \cdot & \cdot & \cdot & U_{4n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & U_{5n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & U_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

1.adım:

$$L_{11} = a_{11}, L_{21} = a_{21}, \dots, L_{n1} = a_{n1} \quad (L\text{'nin 1.sütunu})$$

$$U_{12} = \frac{a_{12}}{L_{11}}, U_{13} = \frac{a_{13}}{L_{11}}, U_{14} = \frac{a_{14}}{L_{11}}, \dots, U_{1n} = \frac{a_{1n}}{L_{11}}, \quad (U\text{'nin 1. satırı})$$

2.adım:

$$L_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12} ,$$

$$L_{32} = a_{32} - L_{31}U_{12} ,$$

$$L_{42} = a_{42} - L_{41}U_{12} ,$$

$$L_{n2} = a_{n2} - L_{n1}U_{12} \quad (L^* \text{nin 2.sütunu}).$$

$$U_{23} = (a_{23} - L_{21}U_{13})/L_{22} ,$$

$$U_{24} = (a_{24} - L_{21}U_{14})/L_{22} ,$$

$$U_{2n} = (a_{2n} - L_{21}U_{1n})/L_{22} \quad (U^* \text{nun 2. satırı}).$$

3.adım:

$$L_{33} = a_{33} - L_{31}U_{13} - L_{32}U_{23} ,$$

$$L_{43} = a_{43} - L_{41}U_{13} - L_{42}U_{23} ,$$

$$L_{n3} = a_{n3} - L_{n1}U_{13} - L_{n2}U_{23} \quad (L^* \text{nin 3.sütunu}).$$

$$U_{34} = (a_{34} - L_{31}U_{14} - L_{32}U_{24})/L_{33},$$

$$U_{35} = (a_{35} - L_{31}U_{15} - L_{32}U_{25})/L_{33},$$

$$U_{3n} = (a_{3n} - L_{31}U_{1n} - L_{32}U_{2n})/L_{33} \quad (U^* \text{nun 3. satırı}).$$

n. adım:

$$L_{n1}U_{1n} + L_{n2}U_{2n} + L_{n3}U_{3n} + \dots + L_{nn}U_{nn} = a_{nn} , \quad (L^* \text{nin n.sütunu})$$

$$U_{nn} = 1 , \quad (U^* \text{nun n. satırı})$$

Daha genel bir ifadeyle

$$L_{ii} = 1 , L_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk} U_{ki} , j = i, i+1, i+2, \dots, n$$

$$U_{ji} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj})/L_{ii} , j = i+1, i+2, \dots, n \quad L_{ii} \neq 0$$

Örnekte gösterilir (Esen ve Bahadır, 1998).

## 2.4. 1-Boyutlu Burgers' Denklemine Seri Çözümü

$$U_t + UU_x = vU_{xx} , \quad -\infty < x < +\infty , \quad t > 0$$

Çıkardığımız Burgers denklemi non-lineer bir denklem olup seri çözümü vardır. Burgers (1948) çalışmasında,

$$U = \frac{S(Z)}{\sqrt{t}} , \quad Z = \frac{x}{\sqrt{4vt}}$$

dönüşümünü kullanarak bu denklemi adi diferansiyel denklem tipi olan

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y^2 + g(x)y + h(x) \text{ Ricatti denklemine indirgemeyi başardı.}$$

Hopf (1950) ise,

$$U = -2v \frac{\theta_x}{\theta} , \text{ dönüşümünü uygulayarak Burgers denklemini}$$

$\theta_t = v\theta_{xx}$  , Çıkardığımız ısı iletim denklemine indirgeyerek çözdü (Hopf, 1950; Cole, 1951).

Bu denklemin hiperbolik tanjant yöntemi ile çözümü için bkz. (Malfliet ve Hereman, 1996), (Mızrak ve Ertaç,2008). Ve gezinen dalga yöntemi ile çözümü için bkz. Doktora tezi (Aslan, 2007).

## 2.5. Hopf-Cole Dönüşümü

$$U_t + UU_x = vU_{xx} , \quad -\infty < x < +\infty , \quad t > 0$$

$$U(x, t) = U_0(x)$$

bağlı değer problemini ele alım.  $\theta$ ,  $x$  ve  $t$ 'ye bağlı bir fonksiyon olmak üzere Burgers denklemine

$$U = -2v \frac{\theta_x}{\theta} \text{ (Hopf-Cole) dönüşümünü uygulayalım.}$$

Hopf-Cole dönüğünün uygun türevleri:

$$U_t = -2v \frac{\theta_{xt}}{\theta} + 2v \frac{\theta_x \theta_t}{\theta^2},$$

$$U_x = -2v \frac{\theta_{xx}}{\theta} + 2v \frac{(\theta_x)^2}{\theta^2},$$

$$U_{xx} = -2v \frac{\theta_{xxx}}{\theta} + 6v \frac{\theta_x \theta_{xx}}{\theta^2} - 4v \frac{(\theta_x)^3}{\theta^3} \text{ dir.}$$

Bu ifadeler Burgers'' denkleminde yerine yazılırsa

$$U_t + UU_x - vU_{xx} = \frac{\theta_{xt}\theta - v\theta\theta_{xxx} - \theta_x\theta_t + v\theta_{xx}}{\theta^2} = 0,$$

$\theta_{tx} = \theta_{xt}$  olduğundan

$$\frac{\theta_{tx}\theta - v\theta\theta_{xxx} - \theta_x\theta_t + v\theta_{xx}}{\theta^2} = \left( \frac{\theta_t - v\theta_{xx}}{\theta} \right)_x = 0 \text{ ifadesi bulunur. Her tarafın } x''\text{e göre}$$

integrali alınırsa,

$$\int \left( \frac{\theta_t - v\theta_{xx}}{\theta} \right)_x dx = \int 0 \cdot dx,$$

$$\frac{\theta_t - v\theta_{xx}}{\theta} = c, \quad c = k(t),$$

ifadeleri elde edilir. Burada  $c = 0$  alınırsa

$$\theta_t - v\theta_{xx} = 0 \text{ olur.}$$

Bu denklem bir ısı denklemi olup Fourier dönüğümü metodu ile çözümü mevcuttur.

## 2.6. Model Problemler

### Problem 2.1

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \quad (\text{Burgers' denklemini})$$

$$\left. \begin{aligned} U(0, t) = f_1(t) = 0 \\ U(1, t) = f_2(t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{sınır Şartları})$$

$$U(x, 0) = f(x) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{baŞlangıç Şartı})$$

baŞlangıç ve sınır Şartlarına sahip Burgers'' denklemini Hopf-Cole dönüşümü ile ısı iletim denklemine dönüŞtürelim.

$$U(x, 0) = U_0(x) = -2\nu \frac{\theta_x(x, 0)}{\theta(x, 0)} \text{ dır. Bunu düzenlersek}$$

$$\frac{\theta_x(x, 0)}{\theta(x, 0)} = -\frac{1}{2\nu} U_0(x) \text{ olur. Bu ifadede } x' \text{ e göre integral alırsak}$$

$$\int \frac{\theta_x(x, 0)}{\theta(x, 0)} dx = \int -\frac{1}{2\nu} U_0(x) dx,$$

$$\ln(\theta(x, 0)) = -\frac{1}{2\nu} \int_0^x U_0(s) ds,$$

$$\theta(x, 0) = e^{-\frac{1}{2\nu} \int_0^x U_0(s) ds}, \quad (\text{baŞlangıç koŞulu})$$

$$\theta(x, 0) = e^{-\frac{1}{2\nu} \int_0^x \sin(\pi s) ds} = e^{-\frac{1}{2\nu} (-\cos(\pi x) + 1)} \text{ olur. Ayrıca,}$$

$$U(x, t) = -2\nu \frac{\theta_x(x, t)}{\theta(x, t)} \text{ olduğundan}$$

$$U(0, t) = -2\nu \frac{\theta_x(0, t)}{\theta(0, t)} = 0 \text{ ve } U(1, t) = -2\nu \frac{\theta_x(1, t)}{\theta(1, t)} = 0 \text{ olur. Öyleyse}$$

$$\theta_x(0, t) = 0 \text{ ve } \theta_x(1, t) = 0 \text{ (sınır koŞulları)}$$

elde edilir (Hopf, 1950), (Cole, 1951). Şimdi Burgers'' denklemini

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t > 0$$

$$\theta(x, 0) = e^{-\frac{1}{2\pi v}(-\cos(\pi x) + 1)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ (bağlantı Çatı)}$$

$$\theta_x(0, t) = 0 \text{ ve } \theta_x(1, t) = 0 \text{ (sınır Çatı)}$$

ısı denklemini formuna çevrilmiş oldu. şimdi bu denklemini çözelim. Değişken ayırma metoduna göre

$\theta(x, t) = X(x).T(t)$  olsun. Bu fonksiyonun aşağıdaki türevlerini

$$\theta_x(x, t) = X'(x).T(t),$$

$$\theta_{xx}(x, t) = X''(x).T(t),$$

$$\theta_t(x, t) = X(x).T'(t), \text{ ısı iletim denkleminde}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \text{ yerine yazarsak}$$

$X(x).T'(t) - v.X''(x).T(t) = 0$ , olarak bulunur. Bu ifadeyi yeniden düzenlersek

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ ifadesi elde edilir.}$$

Eğilimin bir tarafı  $t$ 'ye bağlı diğer tarafı  $x$ 'e bağlı olduğu için

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = k \text{ ve } k = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

olacak şekilde bir  $k$  sabiti vardır. Bu iki ifadeyi düzenlersek

$$T'(t) - kvT(t) = 0 \text{ ve } X''(x) - kX(x) = 0$$

olacak şekilde iki ayrı adi diferansiyel denklem elde edilir.  $-k$  sabit sayısı pozitif

( $-k > 0$  veya  $-k = \delta^2$ ) olmalıdır. Çünkü  $T'(t)$  ifadesini çözümü üstel bir ifadedir.

$k = -\delta^2$ , olarak alındığında bir çözüme sahip

$$T'(t) + \delta^2 v T(t) = 0 \text{ ve } X''(x) + \delta^2 X(x) = 0, \text{ denklemleri oluşur.}$$

Bu iki ifadeyi yeniden düzenleyip her iki tarafın integralini alalım.

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)} dt = \int -v\delta^2 dt \text{ ve } X''(x) + \delta^2 X(x) = 0, \text{ adi diferansiyel denklemlerin}$$

$T(t) = A. e^{-\delta^2 vt}$  ve  $X(x) = B. \sin(\delta x) + C. \cos(\delta x)$ ,  $\text{Ç}\ddot{\text{ö}}\text{z}\ddot{\text{ü}}\text{m}$ lerinde  $\text{ç}\ddot{\text{ö}}\text{z}\ddot{\text{ü}}\text{m}$ leri bulunur.

$\theta(x, t) = X(x).T(t)$ , olduğundan

$\theta(x, t) = A. e^{-\delta^2 vt} [B. \sin(\delta x) + C. \cos(\delta x)]$ ,  $\text{Ç}\ddot{\text{ö}}\text{z}\ddot{\text{ü}}\text{m}$ lerinde bir  $\text{ç}\ddot{\text{ö}}\text{z}\ddot{\text{ü}}\text{m}$  bulunur.

(A.B=E, A.C = F) olmak üzere yukarıdaki ifadenin  $x''$ 'e göre türevini alalım.

$$\theta_x(x, t) = e^{-\delta^2 vt} (E. \delta. \cos(\delta x) - F. \delta. \sin(\delta x))$$

$\text{Ç}\ddot{\text{ö}}\text{z}\ddot{\text{ü}}\text{m}$ lerine sınır değerlerini yazarsak

$$\theta_x(0, t) = e^{-\delta^2 vt} (E. \delta. \cos(0) - F. \delta. \sin(0)) = 0 \text{ olduğundan } E=0 \text{ olur.}$$

$$\theta_x(1, t) = e^{-\delta^2 vt} (E. \delta. \cos(\delta) - F. \delta. \sin(\delta)) = 0 \text{ olduğundan } \sin(\delta) = 0 \text{ olur.}$$

Buradan  $\delta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ , olduğu için  $\delta_n = \pm n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  olur. Yani;

$$\theta(x, t) = F. e^{-\delta^2 vt} . \cos(n\pi x) ,$$

$$\theta_n(x, t) = F_n . e^{-(n\pi)^2 vt} . \cos(n\pi x) , \quad n= 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

$$\theta_0(x, t) = F_0 . e^{-(0.\pi)^2 vt} . \cos(0. \pi x) = F_0 . e^0 . \cos(0) = F_0 ,$$

$$\theta(x, t) = \theta_0(x, t) + \theta_1(x, t) + \theta_2(x, t) + \dots = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n . e^{-(n\pi)^2 vt} . \cos(n\pi x)$$

oluğan  $\text{d}\ddot{\text{e}}\text{v}$ rimde  $F_0$  ve  $F_n$  katsayıları Fourier katsayıları olup

$$F_0 = \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\} dx ,$$

$$F_n = 2 \int_0^1 \exp\{-(2\pi v)^{-1} [1 - \cos(\pi x)]\} \cos(n\pi x) dx , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$\text{Ç}\ddot{\text{ö}}\text{z}\ddot{\text{ü}}\text{m}$ lidir (Cole, 1951; Hopf, 1950).

$U(x, t) = -2v \frac{\theta_x(x, t)}{\theta(x, t)}$ , olduğundan problemin analitik  $\text{ç}\ddot{\text{ö}}\text{z}\ddot{\text{ü}}\text{m}\ddot{\text{ü}}$

$$U(x, t) = \frac{2\pi v. \sum_{n=1}^{\infty} F_n . n. e^{-(n\pi)^2 vt} . \sin(n\pi x)}{F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n . e^{-(n\pi)^2 vt} . \cos(n\pi x)} \text{ dir.}$$

**Problem 2.2**

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \quad (\text{Burgers' denklemini})$$

$$\left. \begin{aligned} U(0, t) = f_1(t) = 0 \\ U(1, t) = f_2(t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{sınır Şartları})$$

$$U(x, 0) = f(x) = 4x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{baŞlangıç Şartı})$$

baŞlangıç ve sınır Şartlarına sahip problem 2.2'nin çözümü model problem 2.1'e benzer Şekilde yapılır. Bu probleme Hopf-Cole dönüşümünü uygularsak

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t > 0$$

$$\theta(x, 0) = e^{-\frac{1}{3v}x^2(3-2x)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{baŞlangıç Şartı})$$

$$\theta_x(0, t) = 0 \quad \text{ve} \quad \theta_x(1, t) = 0 \quad (\text{sınır Şartı})$$

Şeklinde ısı denklemini formuna çevrilmiştir. Şimdi bu denklemin değişken ayrıştırma metodu ile çözersek

$$\theta(x, t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot e^{-(n\pi)^2 vt} \cdot \cos(n\pi x), \quad \text{olarak bulunur.}$$

$$U(x, t) = -2v \frac{\theta_x(x, t)}{\theta(x, t)}$$

olduğundan problemin analitik çözümü

$$U(x, t) = \frac{2\pi v \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot n \cdot e^{-(n\pi)^2 vt} \cdot \sin(n\pi x)}{F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot e^{-(n\pi)^2 vt} \cdot \cos(n\pi x)} \quad \text{dir.}$$

Buradaki  $F_0$  ve  $F_n$  Fourier katsayıları olup,

$$F_0 = \int_0^1 \exp\{-x^2(3v)^{-1}[3-2x]\} dx,$$

$$F_n = 2 \int_0^1 \exp\{-x^2(3v)^{-1}[3-2x]\} \cos(n\pi x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{Şeklinde dirler.}$$

## 2.7. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi (CNSFY)

### 2.7.1. 1-Boyutlu Burgers' Denkleminin CNSFY Yaklaşım

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t},$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = U_m^n \frac{1}{2} \left( \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{2(\Delta x)^2},$$

ifadelerini (1.1)'deki Burgers'' denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + U_m^n \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \left( \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) \right] \\ & = v \left[ \left( \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} \right) + \left( \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{2(\Delta x)^2} \right) \right] \text{ ifadesi elde edilir.} \end{aligned}$$

Bu denklem yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{\Delta x U_m^n + 2v}{4(\Delta x)^2} \right) U_{m-1}^{n+1} + \left( \frac{(\Delta x)^2 + vk}{\Delta t \cdot (\Delta x)^2} \right) U_m^{n+1} + \left( \frac{\Delta x U_m^n - 2v}{4(\Delta x)^2} \right) U_{m+1}^{n+1} \\ & = \frac{U_m^n}{\Delta t} - \frac{U_m^n}{4\Delta x} (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) + \frac{v}{2(\Delta x)^2} (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$m = 1(1)M - 1$ ,  $n = 0(1)N$  yaklaşım elde edilir.

$r_1 = \frac{\Delta t}{4\Delta x}$ ,  $r = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}$  olarak alınır

$$\begin{aligned} & U_m^{n+1} + r_1 U_m^n (U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}) - rv (U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}) = \\ & U_m^n - r_1 U_m^n (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) + rv (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) \end{aligned} \quad (2.11)$$

denklemini elde edilir.

### Kararlılık Analizi

(2.11) denklemine von Neumann kararlılık analizini uygulamak için  $i^2 = -1$  olmak üzere

$$U_m^n = e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n$$

ifadelerini (2.11) denklemine yerine yazalım.

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} + r_1 \dot{U} [e^{i\theta (m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - e^{i\theta (m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)}] -$$

$$rv [e^{i\theta (m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - 2e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} + e^{i\theta (m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)}] =$$

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n - r_1 \dot{U} [e^{i\theta (m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^n - e^{i\theta (m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^n] +$$

$$rv [e^{i\theta (m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^n - 2e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n + e^{i\theta (m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^n] \text{ olarak bulunur.}$$

Uygun düzenleme yapılırsa,

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} [1 + r_1 \dot{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x}) - rv(e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})] =$$

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n [1 - r_1 \dot{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x}) + rv(e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})] \text{ olur.}$$

Buradan  $\mu$ 'yü çekersek

$$\mu = \frac{1 - r_1 \dot{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x}) + rv(e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})}{1 + r_1 \dot{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x}) - rv(e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})} \text{ oluşur.}$$

$$e^{i\theta \Delta x} = \cos(\theta \Delta x) + i \sin(\theta \Delta x),$$

$$e^{-i\theta \Delta x} = \cos(\theta \Delta x) - i \sin(\theta \Delta x), \text{ ifadelerinden}$$

$$e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x} = 2i \sin(\theta \Delta x) \text{ ve } e^{i\theta \Delta x} + e^{-i\theta \Delta x} = 2 \cos(\theta \Delta x) \text{ bulunur. Bu ifadeleri}$$

yerine yazarsak

$$\mu = \frac{1 - r_1 \dot{U} (2i \sin(\theta \Delta x)) + rv(2 \cos(\theta \Delta x) - 2)}{1 + r_1 \dot{U} (2i \sin(\theta \Delta x)) - rv(2 \cos(\theta \Delta x) - 2)} \text{ olur.}$$

Diğer taraftan

$\cos(\theta\Delta x) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta\Delta x}{2}\right)$  ifadesini yerine yazarsak

$$\mu = \frac{1 - 2r_1\hat{U}i \sin(\theta\Delta x) - 4rv \sin^2\left(\frac{\theta\Delta x}{2}\right)}{1 + 2r_1\hat{U}i \sin(\theta\Delta x) + 4rv \sin^2\left(\frac{\theta\Delta x}{2}\right)} \text{ olarak bulunur.}$$

$U_m^n = \hat{U}$  sabiti olarak alınmıştır.

$r_1 > 0$  ve  $r > 0$  için  $|\mu| \leq 1$ , ifadesi her zaman doğru olacaktır. Öyleyse Burgers'' denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımını Çatsız kararlıdır.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. Parçalama (Splitting) Yöntemi

Parçalama metotları denklemlerin farklı fiziksel özelliklere sahip alt denklemlere bölünmesi ve her bir denklemin orijinal denklemden daha kolay çözülebilmesi mantığına dayanır. Parçalama metotları hız, hassalık ve kararlılık gibi hesaplamalarda bir takım avantajlar sağlamaktadır. Genellikle açık metotlardır ve uygulanması kolaydır (Strang, 1968). Parçalanmamış denklemin yerine parçalanmış her bir denklemin sayısal olarak çözmek kısmi diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümleri için sıklıkla tercih edilmektedir (Blanes ve Casas, 2016).

$$\frac{du(t)}{dt} = \widehat{W}(u(t)) = \widehat{A}(u(t)) + \widehat{B}(u(t)), \quad u(0) = u_0, \quad t \in [0, T] \quad (3.1)$$

problemi aşağıdaki gibi

$$\frac{du(t)}{dt} = \widehat{A}(u(t)), \quad (3.2)$$

ve

$$\frac{du(t)}{dt} = \widehat{B}(u(t)), \quad (3.3)$$

alt denklemlere ayrılabilir. Burada  $u(t) \in \mathbb{R}^d$   $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{A} + \widehat{B}$  operatörleri sonlu ya da sonsuz Banach uzayında pozitif değerler için  $C^0$  yarı gruplarını gererler. (1.1)

Burgers" denkleminin yarı ayrıklaştırma sonucunda elde edilen formu (3.1)"e bir örnektir. Lineer olmayan (3.1) denklemin Lie operatörleri kullanılarak görünüme lineer formda yazılabilir.  $A$  ve  $B$  operatörleri

$$A = \widehat{A}(u(t)) \frac{\partial}{\partial u} \quad \text{ve} \quad B = \widehat{B}(u(t)) \frac{\partial}{\partial u}$$

şeklinde  $u(t)$ "ye uygulanan Lie operatörleri olsunlar. O halde (3.1) denklemin

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + Bu(t) \quad (3.4)$$

gibi lineer formada ifade edilebilir. (3.4) denklemi

$$\frac{du}{dt} = Au(t) \quad (3.5)$$

$$\frac{du}{dt} = Bu(t) \quad (3.6)$$

iki alt denkleme bölünsün.

$t = n\Delta t$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , için  $u_n$ , (3.1) denkleminin çözümü

$u(t) = \psi_W^t(u_0)$ 'ın yaklaşım olmak üzere,

(3.5) ve (3.6) denklemlerinin yeterince küçük  $\Delta t$  için akıçları sırası ile  $e^{\Delta t A}$ ,  $e^{\Delta t B}$  şeklinde tanımlansın. O halde zamana göre birinci mertebe Lie-Trotter parçalama metodu

$$u_{n+1} = e^{\Delta t A} \left( e^{\Delta t B} (u_n) \right) \text{ veya } u_{n+1} = e^{\Delta t B} \left( e^{\Delta t A} (u_n) \right) \quad (3.7)$$

ve ikinci mertebe Strang metodu

$$u_{n+1} = e^{\frac{\Delta t}{2} A} \left( e^{\Delta t B} \left( e^{\frac{\Delta t}{2} A} (u_n) \right) \right) \text{ veya } u_{n+1} = e^{\frac{\Delta t}{2} B} \left( e^{\Delta t A} \left( e^{\frac{\Delta t}{2} B} (u_n) \right) \right) \quad (3.8)$$

formlarında verilirler (Blanes ve Casas, 2016).

Öte yandan lineer olmayan durumlar için üstel fonksiyon gösterimine denk olan (3.2), (3.3) denklemlerinin yeterince küçük  $\Delta t$  için akıçları sırası ile  $\psi_{\hat{A}}^{\Delta t}$ ,  $\psi_{\hat{B}}^{\Delta t}$  dönüğümleri ile de tanımlanabilmektedir. Bu durumda (3.7) metoduna denk

$$u_{n+1} = \psi_{\hat{A}}^{\Delta t} \left( \psi_{\hat{B}}^{\Delta t} (u_n) \right) \text{ veya } u_{n+1} = \psi_{\hat{B}}^{\Delta t} \left( \psi_{\hat{A}}^{\Delta t} (u_n) \right)$$

$n = 0, 1, 2, 3 \dots$ , ve (3.8) metoduna denk olan

$$u_{n+1} = \psi_{\hat{A}}^{\frac{\Delta t}{2}} \left( \psi_{\hat{B}}^{\Delta t} \left( \psi_{\hat{A}}^{\frac{\Delta t}{2}} (u_n) \right) \right) \text{ veya } u_{n+1} = \psi_{\hat{B}}^{\frac{\Delta t}{2}} \left( \psi_{\hat{A}}^{\Delta t} \left( \psi_{\hat{B}}^{\frac{\Delta t}{2}} (u_n) \right) \right)$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , metotları yazılabilir. (1.1) Burgers'' denklemi için operatörler

$\hat{A}(u) = v u_{xx}$  ve  $\hat{B}(u) = u u_x$  şeklinde olurlar (Holden ve ark., 2013).

### 3.1.1. Lie-Trotter Parçalama (splitting) Metodu

$$\frac{du}{dt} = Wu(t), \quad u(0) = u_0,$$

$$t \in [t^n, t^{n+1}], \quad n = 0(1)N - 1$$

$$t^N = T \quad \text{ve} \quad t^0 = 0$$

Cauchy probleminde  $W=A+B$  olarak alırsa

$$\frac{du}{dt} = (A + B)u(t), \quad u(0) = u_0, \quad (3.9)$$

ifadesi olur. Bu ifadeyi ayrıklaştırıp yeniden düzenlersek aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\frac{d u_1(t)}{dt} = A u_1(t), \quad t \in [t^n, t^{n+1}]$$

$$u_1(t^n) = u_0 \quad (3.10)$$

ve

$$\frac{d u_2(t)}{dt} = B u_2(t), \quad t \in [t^n, t^{n+1}]$$

$$u_2(t^n) = u_1(t^{n+1}) \quad (3.11)$$

$$n=0,1,2,3, \dots, N-1, \quad t^N = T \quad \text{ve} \quad t^0 = 0$$

Birinci operatörü orijinal problemin bağımlı koşulu ile çözdükten sonra oluşan çözüm kümesi ikinci operatörün bağımlı koşulu olarak kabul edilir. İkinci operatör oluşan yeni bağımlı koşulu ile birlikte çözülmesi durumunda aslında orijinal problem çözülmüştür.

(3.10) ve (3.11) denklemlerini ardı ardına çözülmesi ile (3.9) denkleminin çözümü elde edilir.

### 3.1.2. Lie-Trotter Parçalama Yönteminde Hata Analizi

Bu kısımda Lie-Trotter parçalama yönteminin lokal hatasını inceleyeceğiz.

- i) Orijinal denklemin çözümü  $u(t) = e^{(A+B)t}$  dir.  
 ii) Lie-Trotter yöntemi ile parçaladığımız denklemin çözümü ise  $e^{At} \cdot e^{Bt}$  dir.

Yukarıdaki bu iki ifadenin farkı bize hata miktarını verir. Yani toplam hata

$$e^{(A+B)t} - e^{At} \cdot e^{Bt} \text{ olarak bulunur.} \quad (3.12)$$

$t^{n+1} - t^n = \Delta t$  olmak üzere  $t \rightarrow \Delta t$  olarak (3.12) denkleminde yerine yazalım.

Oluşan denklemi Taylor seri

$$\begin{array}{c} \frac{e^{(A+B)\Delta t}}{\quad} - \frac{e^{A\Delta t}}{\quad} \cdot \frac{e^{B\Delta t}}{\quad} \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} (A+B)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} (A)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} (B)^k \end{array}$$

formunda yazalım. Buradan da

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} (A+B)^k = (I + \Delta t (A+B) + \frac{\Delta t^2}{2!} (A+B)^2 + \dots + O(\Delta t^3)),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} (A)^k = (I + \Delta t A + \frac{\Delta t^2}{2!} A^2 + \dots + O(\Delta t^3)),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} (B)^k = (I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2!} B^2 + \dots + O(\Delta t^3)), \text{ dir.}$$

şimdi yukarıdaki denklemleri yeniden düzenlersek

$$(I + \Delta t (A+B) + \frac{\Delta t^2}{2!} (A+B)^2 + \dots + O(\Delta t^3)) - [(I + \Delta t A + \frac{\Delta t^2}{2!} A^2 + \dots + O(\Delta t^3))$$

$$(I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2!} B^2 + \dots + O(\Delta t^3))],$$

$$\Rightarrow (I + \Delta t (A+B) + \frac{\Delta t^2}{2!} (A+B)^2 + \dots + O(\Delta t^3)) - [I + \Delta t (A+B) +$$

$$\Delta t^2 (\frac{A^2}{2} + BA + \frac{A^2}{2}) + O(\Delta t^3) ],$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (I + \Delta t (A + B) + \frac{\Delta t^2}{2!} (A + B)^2 + \dots + O(\Delta t^3)) - \\
&[I + \Delta t (A + B) + \frac{\Delta t^2}{2} (A^2 + 2BA + B^2) + O(\Delta t^3)] \\
&= \frac{\Delta t^2}{2} ((A + B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2)) + O(\Delta t^3) \\
&= \frac{\Delta t^2}{2} [(A^2 + AB + BA + B^2) - (A^2 + 2BA + B^2)] + O(\Delta t^3) \\
&= \frac{\Delta t^2}{2} (AB - BA) + O(\Delta t^3) \text{ olarak bulunur.}
\end{aligned}$$

$[A, B] = AB - BA$  olduğundan toplam hata  $\frac{(\Delta t)^2}{2} [A, B] + O(\Delta t^3)$  olarak bulunur.

$H_n$  lokal hata olmak üzere toplam hata

$\Delta t \cdot H_n = \frac{(\Delta t)^2}{2} [A, B] + O(\Delta t^3)$  olur. Bu ifadeden lokal hatayı çekersek

$$H_n = \frac{\Delta t}{2} [A, B] u(t^n) + O(\Delta t^2) \quad (3.13)$$

olarak bulunur (Strang, 1968).

### 3.1.3. Strang Parçalama (Splitting) Metodu

Bu yöntemde zaman aralığı iki eşit parçaya bölünmüştür. Bu yöntemi uygulamak için sırası ile aşağıdaki adımlar gerçekleştirilir.

- i) Birinci zaman aralığında A operatörü ile
- ii) Tam zaman aralığında B operatörü ile
- iii) İkinci zaman aralığında A operatörü ile çözüm yapılır.

Strang parçalanması sistematığı aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d u_1(t)}{dt} = A u_1(t), \quad t \in [t^n, t^{n+1/2}]$$

$$u_1(t^n) = u_0 \quad (3.14)$$

$$\frac{d u_2(t)}{dt} = B u_2(t), \quad t \in [t^n, t^{n+1}]$$

$$u_2(t^n) = u_1(t^{n+1/2}) \quad (3.15)$$

$$\frac{d u_3(t)}{dt} = A u_3(t), \quad t \in [t^{n+1/2}, t^{n+1}]$$

$$u_3(t^{n+1/2}) = u_2(t^{n+1}), \quad (3.16)$$

$n=0,1,2,\dots,N-1$ ,  $t^0 = 0$ ,  $t^N = T$ ,  $t^{n+1} - t^n = \Delta t$  ve  $t^{n+1/2} - t^n = \frac{\Delta t}{2}$  dir.

(3.14) operatörü orijinal problemin bağımlı koşulu ile  $\frac{\Delta t}{2}$  için çözdükten sonra oluşan çözüm kümesi (3.15) operatörün bağımlı koşulu olarak kabul edilir.

(3.15) operatörü oluşturan yeni bağımlı koşulu ile  $\Delta t$  için çözülür. Oluşturulan yeni çözüm kümesi tekrar (3.16) operatörün bağımlı koşulu olarak kabul edilir.

(3.16) operatörü oluşturan yeni bağımlı koşulu ile  $\frac{\Delta t}{2}$  için çözülmesi ile oluşan çözüm orijinal denklemin yaklaşık çözümleridir.

### 3.1.4. Strang Parçalama Yönteminde Hata Analizi

Daha önce kullandığımız Lie-Trotter hata analizi yöntemini burada tekrar kullanacağız. Toplam hata

$$\Delta t \cdot H_n = e^{(A+B)\Delta t} - e^{\frac{A}{2}\Delta t} \cdot e^{B\Delta t} \cdot e^{\frac{A}{2}\Delta t} \quad (3.17)$$

dir. Yerel hata ise;

$$H_n = \frac{1}{\Delta t} [e^{(A+B)\Delta t} - e^{\frac{A}{2}\Delta t} \cdot e^{B\Delta t} \cdot e^{\frac{A}{2}\Delta t}] \text{ şeklindedir. şimdi bunu düzenleyelim}$$

$$e^{(A+B)\Delta t} = (I + \Delta t (A+B) + \frac{\Delta t^2}{2!} (A+B)^2 + \dots + O(\Delta t^3)),$$

$$e^{\frac{A}{2}\Delta t} = (I + \Delta t \frac{A}{2} + \frac{\Delta t^2}{2!} (\frac{A}{2})^2 + \dots + O(\Delta t^3)),$$

$e^{B\Delta t} = (I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2!} B^2 + \dots + O(\Delta t^3))$  ifadelerini (3.17)'de yerine yazarsak

$$(I + \Delta t (A+B) + \frac{\Delta t^2}{2!} (A+B)^2 + \dots + O(\Delta t^3)) - (I + \Delta t \frac{A}{2} + \frac{\Delta t^2}{2!} (\frac{A}{2})^2 + \dots + O(\Delta t^3)),$$

$$(I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2!} B^2 + \dots + O(\Delta t^3))(I + \Delta t \frac{A}{2} + \frac{\Delta t^2}{2!} (\frac{A}{2})^2 + \dots + O(\Delta t^3))$$
 denkleminin elde edildiği ifade düzenlenirse

Bu ifade düzenlenirse

$$H_n = \frac{\Delta t^2}{12} [B, [B, A]] u(t^n) - \frac{\Delta t^2}{24} [A, [A, B]] u(t^n) + O(\Delta t^3) \quad (3.18)$$

olarak bulunur (Strang, 1968).

### 3.2. 1-Boyutlu Burgers' Denkleminin Parçalaması

(1.1)'deki Burgers' denkleminin,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (\text{Viskozitesiz Burgers Denkleminin}) \quad (3.19)$$

ve

$$\frac{\partial U}{\partial t} = v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (\text{Isı İletim Denkleminin}) \quad (3.20)$$

gibi iki alt denkleme parçalayalım. Parçalanmış Burgers' denkleminin alt denklemleri art arda çözülür. Böylece orijinal denklemin yaklaşık çözümleri elde edilir. Burada operatörler

$$B(u) = U \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{ve} \quad A(u) = v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \text{şeklinde dir.}$$

### 3.2.1. Viskozitesiz Burgers' Denkleminin Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı (CNSFY)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} + O(\Delta x) ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x) ,$$

yukarıdaki iki denklemi taraf tarafa toplarsak

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right\} + O(\Delta x) \quad (3.21)$$

ifadesi elde edilir. (2.2) ve (3.21) ifadelerini  $O(\Delta t)$  ve  $O(\Delta x)$  ihmal etmek  $\Gamma$  ile (3.19)'daki viskozitesiz Burgers' denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + U_m^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right\} = 0 \quad \text{Çeklinde fark Çonması elde edilir.}$$

Burada  $r_1 = \frac{\Delta t}{4\Delta x}$  alıp, denklemi yeniden düzenleyip yazarsak

$$U_m^{n+1} + r_1 U_m^n (U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}) = U_m^n - r_1 U_m^n (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) \quad (3.22)$$

olacak Çekilde Crank-Nicolson sonlu fark yöntemini bulmuş oluruz (Smith, 1985).

Bu denklemi yeniden düzenlersek

$$U_{m-1}^{n+1} (-r_1 U_m^n) + U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1} (r_1 U_m^n) = U_{m-1}^n (r_1 U_m^n) + U_m^n + U_{m+1}^n (-r_1 U_m^n) \quad (3.23)$$

olarak bulunur. Burada  $m = 1(1)M - 1$ ,  $n = 0(1)N$  alınırsa aÇğıdaki denklem sistemi oluşur.



### Kararlılık Analizi

(3.22) denkleminin von Neumann kararlılık analizini uygulamak için  $i^2 = -1$  olmak üzere

$$U_m^n = e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n$$

ifadeleri (3.22) denkleminde yerine yazılırsa

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} + r_1 \hat{U} [e^{i\theta (m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - e^{i\theta (m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)}] =$$

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n - r_1 \hat{U} [e^{i\theta (m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^n - e^{i\theta (m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^n] \text{ olur. Buradan}$$

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} [1 + r_1 \hat{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x})]$$

$$= e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n [1 - r_1 \hat{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x})] \text{ olur.}$$

Yukarıdaki ifadeyi düzenlersek

$$\mu [1 + r_1 \hat{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x})] = [1 - r_1 \hat{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x})] ,$$

$$\mu = \frac{1 - r_1 \hat{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x})}{1 + r_1 \hat{U} (e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x})} \text{ bulunur.}$$

$$e^{i\theta \Delta x} = \cos(\theta \Delta x) + i \sin(\theta \Delta x),$$

$$e^{-i\theta \Delta x} = \cos(\theta \Delta x) - i \sin(\theta \Delta x),$$

Bilinen eGiliklerden

$$e^{i\theta \Delta x} - e^{-i\theta \Delta x} = 2i \sin(\theta \Delta x) \text{ ifadesi bulunur.}$$

Bu ifadeyi yerine yazarsak

$$\mu = \frac{1 - r_1 \hat{U} 2i \sin(\theta \Delta x)}{1 + r_1 \hat{U} 2i \sin(\theta \Delta x)} \text{ ifadesini bulmuş oluruz.}$$

$r_1 > 0$  için  $|\mu| \leq 1$  ifadesi her zaman doğru olacaktır. Öyleyse viskozitesiz Burgers'' denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşım Çatsız kararlıdır.

### 3.2.2. Isı Geleim Denkleminin Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı (CNSFY)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{2(\Delta x)^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{2(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \quad (3.24)$$

fark Geleimini yazalım. (2.2) ve (3.24) ifadelerini  $O(\Delta t)$  ve  $O(\Delta x^2)$  ihmal etmek Geleimi ile (3.20)“deki ısı denkleminde yerine yazalım.

$$U_m^{n+1} - U_m^n = \frac{1}{2} \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} (U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}) + \frac{1}{2} \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2} (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) \quad (3.25)$$

ifadesi olur. Burada  $r = \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2}$  olarak yeniden düzenlenirse

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (3.26)$$

$m = 1(1)M - 1$ ,  $n = 0(1)N$  denklemi elde edilir (Smith, 1985).

Bu denklemdede  $m=1, 2, 3, \dots, M-1$  yerine yazılırsa

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = 0 \\ -rU_0^{n+1} + (2+2r)U_1^{n+1} - rU_2^{n+1} = rU_0^n + (2-2r)U_1^n + rU_2^n, \\ -rU_1^{n+1} + (2+2r)U_2^{n+1} - rU_3^{n+1} = rU_1^n + (2-2r)U_2^n + rU_3^n, \\ \cdot \\ \cdot \\ -rU_{M-3}^{n+1} + (2+2r)U_{M-2}^{n+1} - rU_{M-1}^{n+1} = rU_{M-3}^n + (2-2r)U_{M-2}^n + rU_{M-1}^n, \\ -rU_{M-2}^{n+1} + (2+2r)U_{M-1}^{n+1} - rU_M^{n+1} = rU_{M-2}^n + (2-2r)U_{M-1}^n + rU_M^n, \\ f_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} U_0^n = U_0^{n+1} = f_1 \\ U_M^n = U_M^{n+1} = f_2 \end{array}$$

denklem sistemi bulunur. Denklem sistemi herhangi bir  $n$ -inci zaman adımı için matris formunda aGeleimdeki gibi yazalım.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (2+2r) - r & & & & \\ -r & (2+2r) & -r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -r & (2+2r) - r \\ & & & -r & (2+2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (2-2r) r & & & & \\ r & (2-2r) & r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r & (2-2r) r \\ & & & r & (2-2r) \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} r f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r f_2 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

veya  $A \underline{U}^{(n+1)} = B \underline{U}^{(n)} + \underline{b}$  olarak bulunur.

### Kararlılık Analizi

(3.25) denkleminde von Neumann kararlılık analizini uygulamak için  $t^2 = -1$  olmak üzere

$$U_m^n = e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n$$

ifadelerini (3.25) denkleminde yerine yazılırsa

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n =$$

$$\frac{rv}{2} [e^{i\theta(m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - 2e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} + e^{i\theta(m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)}] +$$

$$\frac{rv}{2} [e^{i\theta(m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^n - 2e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n + e^{i\theta(m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^n] \text{ bulunur. Buradan}$$

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - \frac{rv}{2} [e^{i\theta(m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} - 2e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} + e^{i\theta(m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)}]$$

$$= \frac{rv}{2} [e^{i\theta(m-1)\Delta x} \cdot (\mu)^n - 2e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n + e^{i\theta(m+1)\Delta x} \cdot (\mu)^n] + e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n \text{ olur.}$$

Yukarıdaki denklemi yeniden düzenlersek

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^{(n+1)} [1 - \frac{rv}{2} (e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})] =$$

$$e^{i\theta m \Delta x} \cdot (\mu)^n [1 + \frac{rv}{2} (e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})],$$

$$\mu [1 - \frac{rv}{2} (e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})] = [1 + \frac{rv}{2} (e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})] \text{ olur. Buradan da}$$

$$\mu = \frac{1 + \frac{rv}{2} (e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})}{1 - \frac{rv}{2} (e^{-i\theta \Delta x} - 2 + e^{i\theta \Delta x})} \text{ denklemi elde edilir.}$$

$$e^{i\theta \Delta x} = \cos(\theta \Delta x) + i \sin(\theta \Delta x),$$

$$e^{-i\theta \Delta x} = \cos(\theta \Delta x) - i \sin(\theta \Delta x),$$

Bilinen bu iki ifadeyi taraf tarafa toplarsak

$$e^{i\theta\Delta x} + e^{-i\theta\Delta x} = 2 \cos(\theta\Delta x),$$

$$2\cos(\theta\Delta x) = 2 - 4 \sin^2\left(\frac{\theta\Delta x}{2}\right) \text{ olur.}$$

Bulduğumuz bu ifadeleri denklemde uygun yerlerine yazarsak

$$\mu = \frac{1 - 2rv \sin^2\left(\frac{\theta\Delta x}{2}\right)}{1 + 2rv \sin^2\left(\frac{\theta\Delta x}{2}\right)} \text{ olarak bulunur.}$$

$r > 0$  için  $|\mu| \leq 1$  ifadesi her zaman doğru olacaktır. Öyleyse ısı iletim denklemi Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı **Çatsız** kararlıdır.

### 3.3. Lineerleştirme Teknikleri

#### 3.3.1. Viskozitesiz Burgers' Denklemi için Robin-Graves Lineerleştirme Tekniği (RGSFY)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t}$$

ve

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = U_m^{n+1} \left( \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) + U_m^n \left( \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) - U_m^n \left( \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right)$$

ifadelerini (3.19)'daki viskozitesiz Burgers' denkleminde yerine yazarsak (Rubin ve Graves, 1975)

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + U_m^{n+1} \left( \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) + U_m^n \left( \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) - U_m^n \left( \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) = 0$$

ifadesi olur  $r_1 = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$ , olmak üzere yukarıdaki denklem yeniden düzenlenirse

$$U_{m-1}^{n+1}(-r_1 U_m^n) + U_m^{n+1}(1 + r_1(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n)) + U_{m+1}^{n+1}(r_1 U_m^n) =$$

$$U_m^n + U_m^n(r_1(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n)) \quad (3.27)$$

denklemini meydana gelir. şimdi bu ifadeyi matris formunda aşağıdaki gibi yazalım.

$$U_0^n = U_0^{n+1} = f_1 = 0,$$

$$U_M^n = U_M^{n+1} = f_2 = 0, \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + r_1 U_2^n & r_1 U_1^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_1 U_2^n & 1 + r_1 (U_3^n - U_1^n) & r_1 U_2^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 U_3^n & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -r_1 U_{M-2}^n & 1 + r_1 (U_{M-1}^n - U_{M-3}^n) & r_1 U_{M-2}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_1 U_{M-1}^n & 1 - r_1 U_{M-2}^n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U_1^n + r_1 U_1^n (U_2^n) \\ U_2^n + r_1 U_2^n (U_3^n - U_1^n) \\ U_3^n + r_1 U_3^n (U_4^n - U_2^n) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{M-1}^n - r_1 U_{M-1}^n (U_{M-2}^n) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

### 3.3.2. Viskozitesiz Burgers' Denkleminin CNSFY1 Yaklaşım

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t},$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = \left( \frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right) \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \left( \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) \right]$$

ifadelerini (3.19)'deki viskozitesiz Burgers' denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + \left( \frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right) \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \left( \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) \right] = 0$$

elde edilir (Uçar, 2005).

$$r_1 = \frac{\Delta t}{8\Delta x} \text{ olmak üzere yukarıdaki denklemi yeniden düzenlersek}$$

$$\begin{aligned} & U_{m-1}^{n+1} (-r_1 (U_m^n + U_{m+1}^n)) + U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1} (r_1 (U_m^n + U_{m+1}^n)) \\ & = U_m^n - r_1 (U_m^n + U_{m+1}^n) (U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) \end{aligned} \quad (3.28)$$

denklemini meydana gelir. Şimdi bu ifadeyi matris formunda aşağıdaki gibi yazalım.

$$U_0^n = U_0^{n+1} = f_1 = 0,$$

$$U_M^n = U_M^{n+1} = f_2 = 0, \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1(U_1^n + U_2^n) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_1(U_2^n + U_3^n) & 1 & r_1(U_2^n + U_3^n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1(U_3^n + U_4^n) & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & r_1(U_{M-2}^n + U_{M-1}^n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r_1 U_{M-1}^n & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U_1^n - r_1(U_1^n + U_2^n)(U_2^n) \\ U_2^n - r_1(U_2^n + U_3^n)(U_3^n - U_1^n) \\ U_3^n - r_1(U_3^n + U_4^n)(U_4^n - U_2^n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{M-2}^n - r_1(U_{M-2}^n + U_{M-1}^n)(U_{M-1}^n - U_{M-3}^n) \\ U_{M-1}^n + r_1(U_{M-1}^n)(U_{M-2}^n) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

### 3.3.3. Viskozitesiz Burgers' Denkleminin CNSFY 2 Yaklaşım

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t},$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = \left( \frac{U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n}{3} \right) \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \left( \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) \right],$$

ifadelerini (3.19)'deki viskozitesiz Burgers' denklemine yerine yazarsak

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + \left( \frac{U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n}{3} \right) \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \left( \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) \right] = 0 \text{ elde edilir.}$$

$$r_1 = \frac{\Delta t}{12\Delta x} \text{ olmak üzere yukarıdaki denklemi yeniden düzenlersek}$$

$$\begin{aligned} & U_{m-1}^{n+1}(-r_1(U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n)) + U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}(r_1(U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n)) \\ & = U_m^n - r_1(U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n)(U_{m+1}^n - U_{m-1}^n) \end{aligned} \quad (3.29)$$

denklemler meydana gelir. ğimdi bu ifadeyi matris formunda aġıdaki gibi yazalım.

$$U_0^n = U_0^{n+1} = f_1 = 0,$$

$$U_M^n = U_M^{n+1} = f_2 = 0, \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1(U_1^n + U_2^n) & 0 & 0 & 0 \\ -r_1(U_1^n + U_2^n + U_3^n) & 1 & r_1(U_1^n + U_2^n + U_3^n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_1(U_{M-3}^n + U_{M-2}^n + U_{M-1}^n) \\ 0 & 0 & 0 & -r_1(U_{M-2}^n + U_{M-1}^n) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^n - r_1(U_1^n + U_2^n)(U_2^n) \\ U_2^n - r_1(U_1^n + U_2^n + U_3^n)(U_3^n - U_1^n) \\ U_3^n - r_1(U_2^n + U_3^n + U_4^n)(U_4^n - U_2^n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{M-2}^n - r_1(U_{M-3}^n + U_{M-2}^n + U_{M-1}^n)(U_{M-1}^n - U_{M-3}^n) \\ U_{M-1}^n + r_1(U_{M-2}^n + U_{M-1}^n)(U_{M-2}^n) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

## 4. ARAĞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIĞMA

### 4.1. Burgers' Denkleminin CNSFY ile Nümerik Çözümünün Sonuçları

Sayısal çözümlerin analitik çözüme ne kadar yaklağtığını ölçmek için aÇğıdaki hata normları göz önüne alındı.

$$L_2 = \left[ (\Delta x) \sum_{m=1}^M \left| U(x_m, t_n) - U_m^n \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Ortalama hata}) \quad (4.1)$$

ve

$$L_\infty = \max_m \left| U(x_m, t_n) - U_m^n \right| \quad (\text{Maksimum hata}) \quad (4.2)$$

$t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$  iken değiğen  $\Delta x$  değerleri için Problem 2.1'in Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin (2.10) yaklağımını kullanılarak elde edilen sayısal çözümler ve analitik çözümler  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte Tablo 4.1'de verildi. Küçülen  $\Delta x$  değerleri için sayısal çözüm düzenli olarak analitik çözüme yaklağtı ve  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata miktarlarının azaldığı tespit edilmiğti.

**Tablo 4.1.** Problem 2.1'in CNSFY ile  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$  iken  $\Delta x$ 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

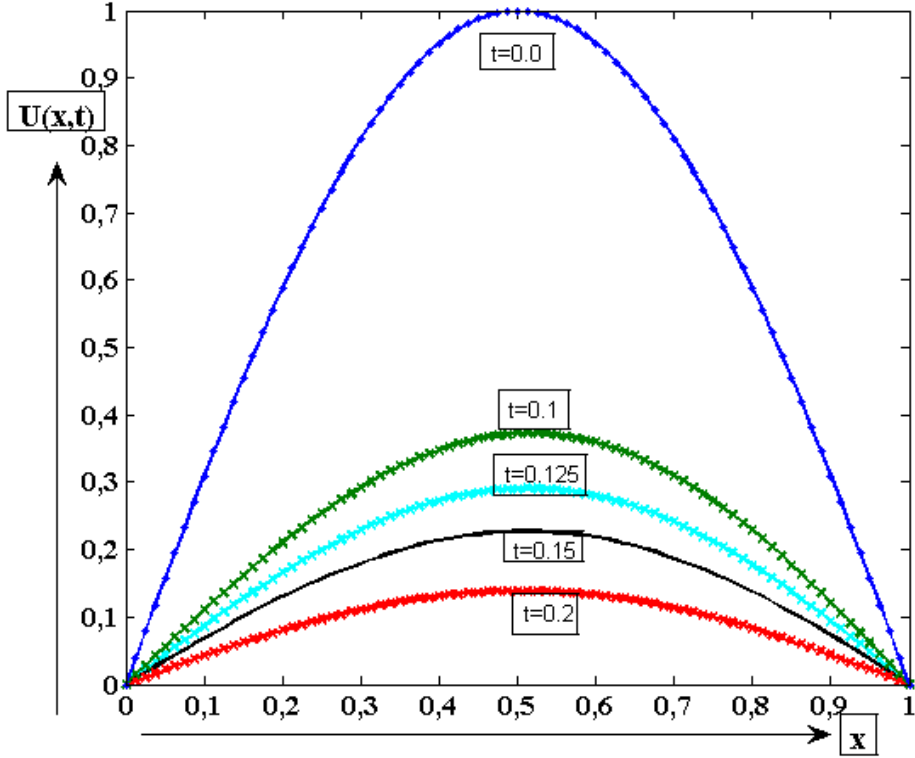
$x$	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.110293	0.109727	0.109585	0.109550	0.109538
0.2	0.211279	0.210164	0.209885	0.209815	0.209792
0.3	0.294057	0.292436	0.292031	0.291930	0.291896
0.4	0.350643	0.348604	0.348094	0.347966	0.347924
0.5	0.374662	0.372348	0.371770	0.371625	0.371577
0.6	0.362211	0.359836	0.359243	0.359095	0.359046
0.7	0.312789	0.310625	0.310085	0.309950	0.309905
0.8	0.230031	0.228370	0.227956	0.227852	0.227817
0.9	0.121892	0.120987	0.120762	0.120706	0.120687
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	2.214530	0.553194	0.138221	0.034502	
$L_\infty \times 10^3$	3.165204	0.790918	0.198345	0.049610	

$h=0.0125$ ,  $k=0.00001$  iken viskozite parametresi  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$  ve  $\nu=0.01$  için çeşitli  $t$  zaman adımlarında ( $t=0.2$ ,  $t=0.6$ ,  $t=1.0$ ,  $t=1.2$ ,  $t=2.0$ ) Problem 2.1'in Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin (2.10) yaklaşım kullanılarak elde edilen sayısal ve analitik çözümleri Tablo 4.2'de verildi. Bu tablo incelendiğinde nümerik çözümlerin analitik çözümler ile uyumlu olduğu görülmektedir.

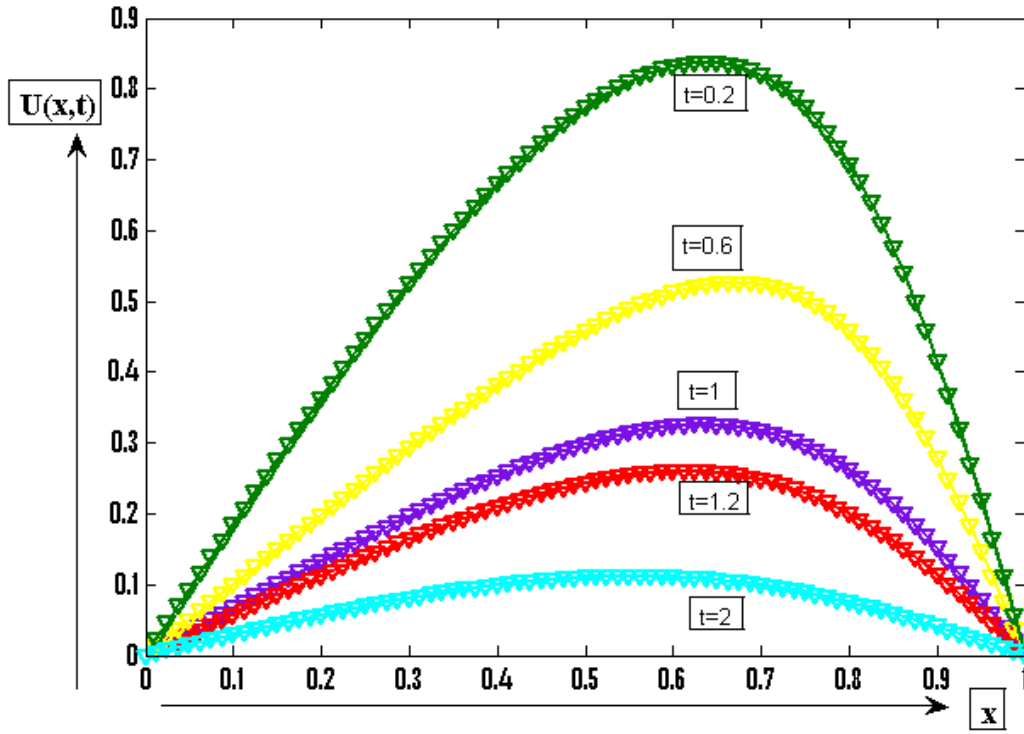
**Tablo 4.2.** Problem 2.1'in CNSFY ile  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  için değişen  $t$  değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri

$x$	$t$	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.096465	0.096442	0.429340	0.429317	0.466607	0.466583
	0.6	0.001890	0.001889	0.240758	0.240739	0.268975	0.268965
	1.0	0.000037	0.000036	0.162587	0.162565	0.188199	0.188194
	1.2	0.000005	0.000005	0.136465	0.136440	0.163590	0.163586
	2.0	0.000000	0.000000	0.068232	0.068206	0.107383	0.107381
0.50	0.2	0.138509	0.138473	0.753869	0.753811	0.848434	0.848365
	0.6	0.002674	0.002672	0.447280	0.447206	0.529448	0.529418
	1.0	0.000052	0.000052	0.291999	0.291916	0.374433	0.374420
	1.2	0.000007	0.000007	0.238592	0.238511	0.326066	0.326057
	2.0	0.000000	0.000000	0.107944	0.107890	0.214562	0.214558
0.75	0.2	0.099462	0.099435	0.749231	0.749139	0.962061	0.961891
	0.6	0.001891	0.001890	0.487466	0.487215	0.767330	0.767243
	1.0	0.000037	0.000036	0.287658	0.287474	0.556078	0.556051
	1.2	0.000005	0.000005	0.222741	0.222595	0.486031	0.486013
	2.0	0.000000	0.000000	0.086636	0.086579	0.321293	0.321282

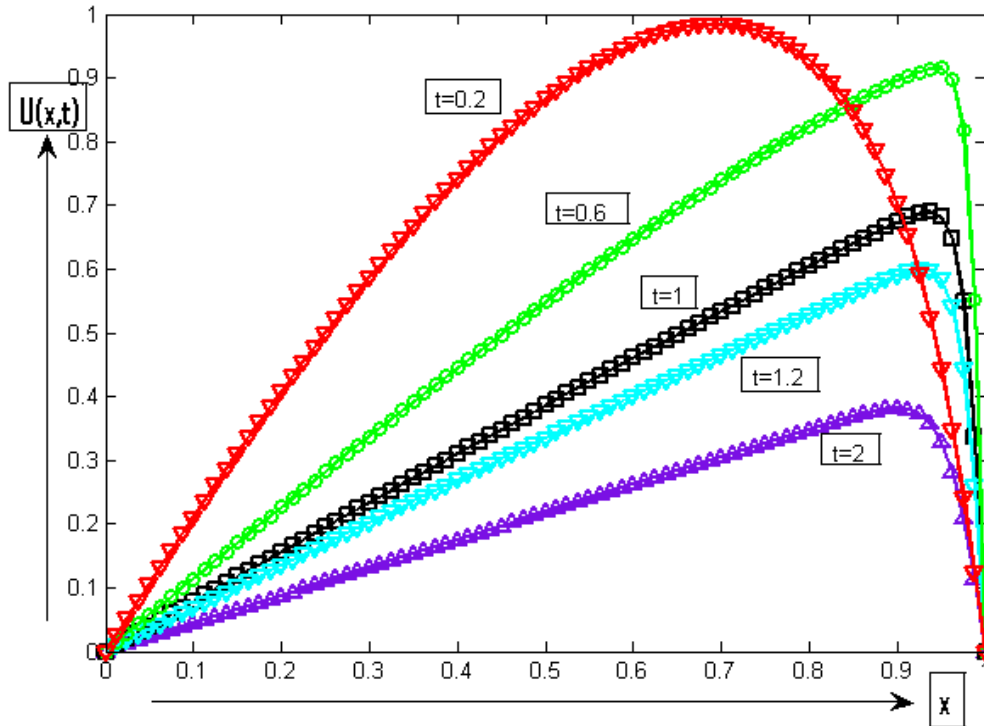
Problem 2.1'in Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin (2.10) yaklaşımını kullanarak elde edilen sayısal çözümlerinin fiziksel davranışlarını görebilmek için şekil 4.1, şekil 4.2 ve şekil 4.3'teki grafikler verildi. Farklı nümerik çözüm eğrileri tek bir grafikte çizildiği zaman nümerik çözümlerin Problem 2.1'in fiziksel davranışlarını sergilediği görüldü. Viskozite parametresi  $\nu$  küçüldükçe nümerik çözümlerin sağa keskin dönüşler yaptığı görülmektedir.



şekil 4.1. Problem 2.1'in CNSFY ile  $\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\nu=1$  iken  $t$ 'nin değişen değerleri için çözüm grafiği



Şekil 4.2. Problem 2.1'in CNSFY ile  $\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=0.1$  iken  $t$ 'nin değiren değerleri için çözüm grafiği



Şekil 4.3. Problem 2.1'in CNSFY ile  $\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=0.01$  iken  $t$ 'nin değiren değerleri için çözüm grafiği

$t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\nu=1$  iken değişen  $\Delta x$  değerleri için "nin Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin (2.10) yaklaşım kullanılarak elde edilen nümerik ve analitik çözümleri  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte Tablo 4.3'de verildi. Küçülen  $\Delta x$  değerlerine bakıldığında nümerik çözüm analitik çözüme yaklaştı ve  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata miktarlarının azaldığı tespit edildi.

**Tablo 4.3.** Problem 2.2'in CNSFY ile  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\nu=1$  iken  $\Delta x$ 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

$x$	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.113664	0.113086	0.112941	0.112904	0.112892
0.2	0.217772	0.216634	0.216347	0.216276	0.216252
0.3	0.303174	0.301520	0.301104	0.301000	0.300966
0.4	0.361646	0.359562	0.359038	0.358906	0.358863
0.5	0.386586	0.384216	0.383621	0.383472	0.383422
0.6	0.373915	0.371474	0.370862	0.370709	0.370658
0.7	0.323045	0.320812	0.320252	0.320113	0.320066
0.8	0.237665	0.235945	0.235515	0.235407	0.235371
0.9	0.125970	0.125031	0.124796	0.124738	0.124718
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	2.276964	0.570840	0.142756	0.035642	
$L_\infty \times 10^3$	3.256902	0.816383	0.204858	0.051256	

Problem 2.2 Crank-Nicolson sonlu fark yönteminin (2.10) yaklaşım kullanılarak çözüldü.  $\Delta x = 0.0125$ ,  $\Delta t = 0.00001$  iken  $t = 0.2$ ,  $t = 0.6$ ,  $t = 1.0$ ,  $t = 1.2$ ,  $t = 2.0$  zaman adımlarında  $\nu = 1$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\nu = 0.01$  için elde edilen nümerik ve analitik çözümler Tablo 4.4'de verildi. Bu tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözümlere yakın değerler olduğu görülmektedir.

**Tablo 4.4.** Problem 2.2'in CNSFY ile  $\Delta t = 0.00001$ ,  $\Delta x = 0.0125$  iken  $\nu = 1$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\nu = 0.01$  için değişken  $t$  değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri

$x$	$t$	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.099494	0.099470	0.446829	0.446807	0.499835	0.499828
	0.6	0.001951	0.001949	0.246151	0.246138	0.282040	0.282037
	1.0	0.000038	0.000038	0.165615	0.165599	0.194688	0.194690
	1.2	0.000005	0.000005	0.138952	0.138933	0.168490	0.168494
	2.0	0.000000	0.000000	0.069536	0.069514	0.109475	0.109482
0.50	0.2	0.142925	0.142888	0.773141	0.773101	0.867170	0.867136
	0.6	0.002759	0.002757	0.458041	0.457976	0.548320	0.548316
	1.0	0.000053	0.000053	0.298417	0.298343	0.385668	0.385676
	1.2	0.000007	0.000007	0.243755	0.243682	0.334886	0.334897
	2.0	0.000000	0.000000	0.110248	0.110199	0.218574	0.218588
0.75	0.2	0.102683	0.102655	0.773553	0.773440	0.969871	0.969734
	0.6	0.001952	0.001950	0.502934	0.502676	0.783041	0.782994
	1.0	0.000038	0.000038	0.296041	0.295857	0.569314	0.569319
	1.2	0.000005	0.000005	0.228942	0.228797	0.497132	0.497145
	2.0	0.000000	0.000000	0.088734	0.088680	0.326909	0.326926

## 4.2. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemine(CNSFY) Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denklemine Nümerik Çözümleri

### 4.2.1. Strang BAB (S-BAB) Yaklaşım

(3.23)“deki viskozitesiz Burgers” denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşım

$$U_{m-1}^{n+1}(-r_1 U_m^n) + U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}(r_1 U_m^n) = U_{m-1}^n(r_1 U_m^n) + U_m^n + U_{m+1}^n(-r_1 U_m^n),$$

$$r_1 = \frac{\Delta t}{4\Delta x}, \quad m = 1(1)M - 1, \quad n=0(1)t^{n+1/2}$$

ile (3.26)“teki ısı iletim denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşım

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n,$$

$$r = \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad m = 1(1)M - 1, \quad n=0(1)t^{n+1}$$

fark denklemleri oluşturulur.

Strang parçalama metodu için (3.23) fark denklemleri  $\frac{\Delta t}{2}$  için çözülür. Elde edilen bu çözüm başlangıç koşulları alınarak (3.26) fark denklemleri  $\Delta t$  için çözülür. Elde edilen yeni çözüm tekrar (3.23) fark denklemlerinin başlangıç koşulları kabul edilir ve (3.23) fark denklemleri  $\frac{\Delta t}{2}$  için tekrar çözülür.

### 4.2.2. S-BAB için Nümerik Sonuçlar

Problem 2.1 CNSFY’ne bağlı Strang parçalama metodunun BAB yaklaşım ile çözüldü.  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$  için değişken  $\Delta x$  değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümler  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte Tablo 4.5’te verildi. Küçülen  $\Delta x$  değerlerine bakıldığında nümerik çözüm analitik çözümlere yaklaştığı ve  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata miktarlarının azaldığı görüldü.

**Tablo 4.5.** Problem 2.1'in CNSFY ,ne bağı Strang Parçalama Metodu BAB'a göre  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$  iken  $\Delta x$ 'nin değİn değeri için analitik ve nümerik çözümleri

$x$	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.110293	0.109727	0.109585	0.109550	0.109538
0.2	0.211279	0.210164	0.209885	0.209815	0.209792
0.3	0.294057	0.292437	0.292031	0.291930	0.291896
0.4	0.350643	0.348604	0.348094	0.347966	0.347924
0.5	0.374662	0.372348	0.371770	0.371625	0.371577
0.6	0.362210	0.359836	0.359243	0.359095	0.359046
0.7	0.312789	0.310624	0.310085	0.309950	0.309905
0.8	0.230030	0.228369	0.227955	0.227852	0.227817
0.9	0.121892	0.120987	0.120762	0.120705	0.120687
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	2.214524	0.553193	0.138221	0.034501	
$L_\infty \times 10^3$	3.164993	0.790858	0.198214	0.049480	

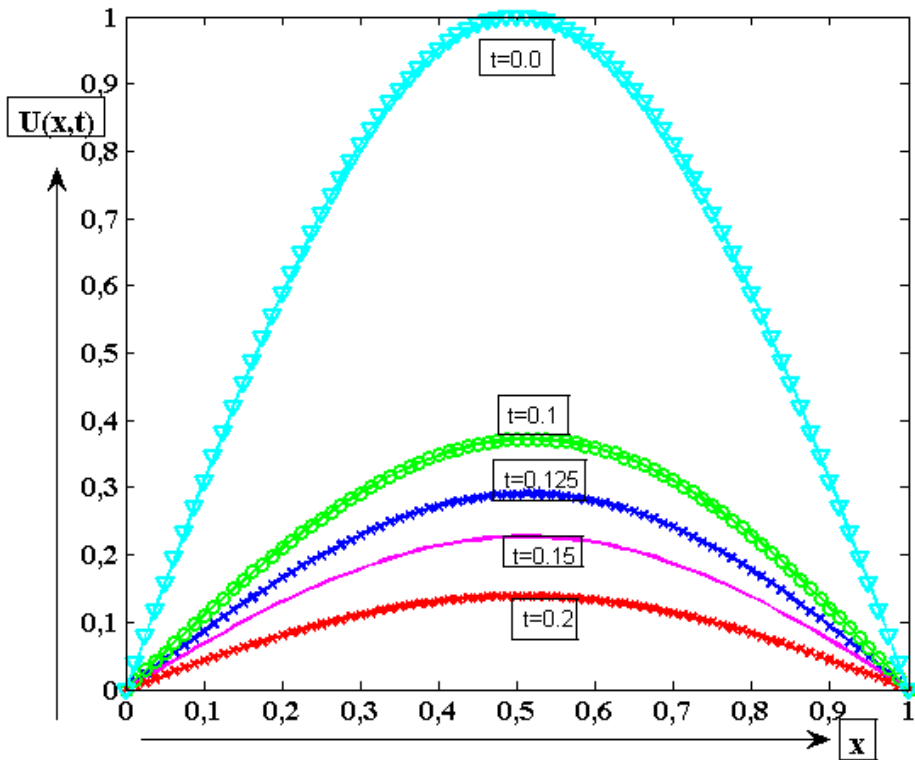
Problem 2.1'in CNSFY,ne bağı Strang parçalama metodu BAB'a göre  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken viskozite parametresi  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için değıkent zaman adımlarında analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.6'da verildi. Bu tablo incelendiğinde nümerik çözümlerin analitik çözümlere yakın olduğı görülüyor.

**Tablo 4.6.** Problem 2.1'in CNSFY,ne bağı Strang Parçalama Metodu BAB'a göre  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için değıen t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri

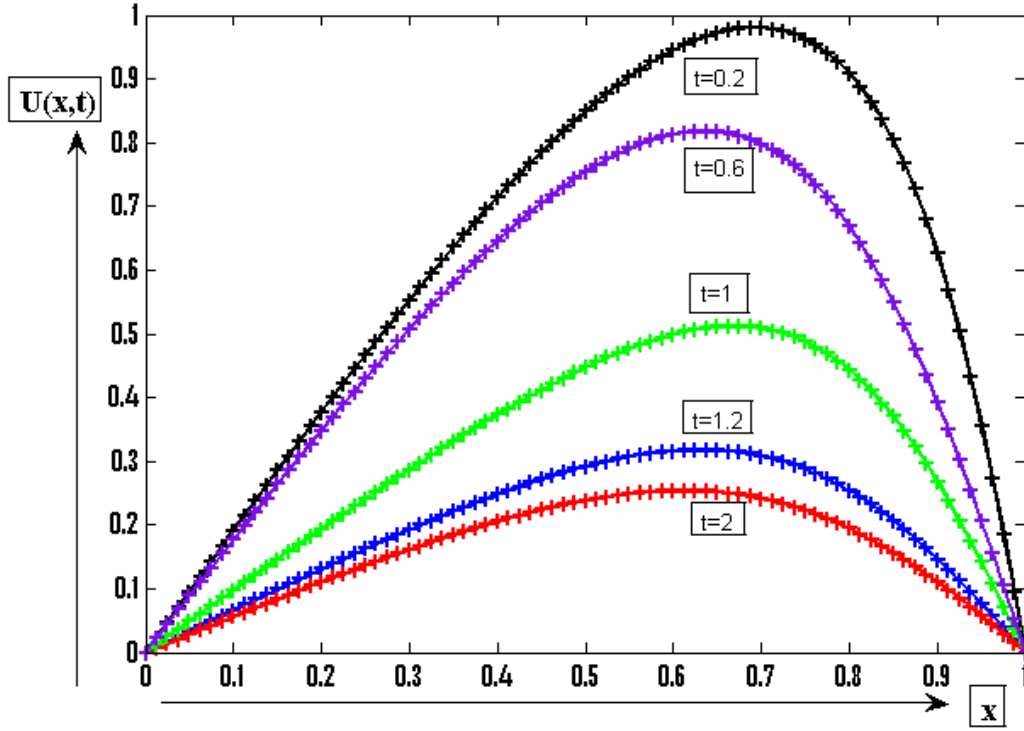
$x$	$t$	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.096465	0.096442	0.429340	0.429317	0.466607	0.466583
	0.6	0.001890	0.001889	0.240758	0.240739	0.268975	0.268965
	1.0	0.000037	0.000036	0.162588	0.162565	0.188199	0.188194
	1.2	0.000005	0.000005	0.136465	0.136440	0.163590	0.163586
	2.0	0.000000	0.000000	0.068232	0.068206	0.107383	0.107381
0.50	0.2	0.138509	0.138473	0.753869	0.753811	0.848434	0.848365
	0.6	0.002674	0.002672	0.447280	0.447206	0.529448	0.529418
	1.0	0.000052	0.000052	0.291999	0.291916	0.374433	0.374420
	1.2	0.000007	0.000007	0.238592	0.238511	0.326066	0.326057
	2.0	0.000000	0.000000	0.107944	0.107890	0.214562	0.214558
0.75	0.2	0.099462	0.099435	0.749229	0.749139	0.962061	0.961891
	0.6	0.001891	0.001890	0.487465	0.487215	0.767330	0.767243
	1.0	0.000037	0.000036	0.287657	0.287474	0.556078	0.556051
	1.2	0.000005	0.000005	0.222740	0.222595	0.486031	0.486013
	2.0	0.000000	0.000000	0.086635	0.086579	0.321293	0.321282

Problem 2.1'in Crank-Nicolson sonlu fark yöntemine bağılı Strang parçalama metodunu kullanarak elde edilen sayısal çözümlerinin fiziksel davranışları görebilmek için şekil 4.4, şekil 4.5 ve şekil 4.6'daki grafikler verildi.

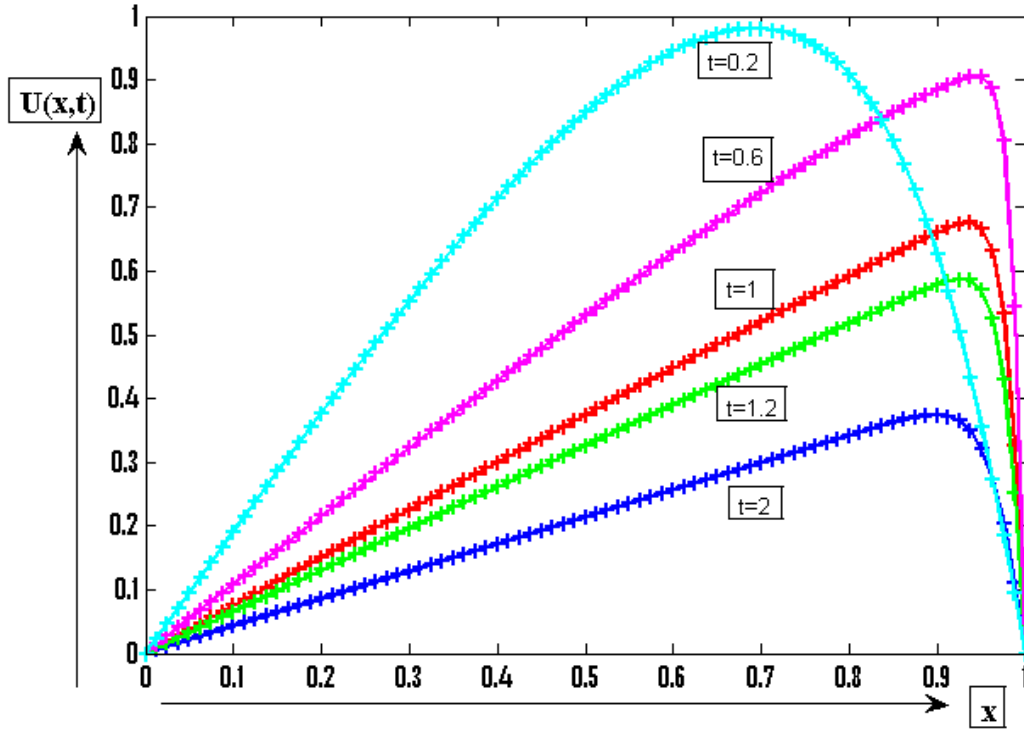
$\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t=0.00001$  iken Problem 2.1'in değıken  $t$  zaman adımlarındaki sayısal çözümlerin grafikleri oluşturuldu. Farklı nümerik çözüm eğrileri tek bir grafikte çizildiğı zaman nümerik çözümlerin Problem 2.1'in fiziksel davranışlarını sergilediğı görüldü. Viskozite parametresi  $\nu$  küçüldükçe nümerik çözümlerin sağa keskin dönüşler yaptığı şekil 4.6'da görülmektedir.



şekil 4.4.  $\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t = 0.00001$ ,  $\nu = 1$  değıken  $t$  değıerleri için Problem 2.1'in CNSFY'ine bağılı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiğı



Şekil 4.5.  $\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=0.1$  iken değiken  $t$  değerleri için Problem 2.1'in CNSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile czmnn grafiği



Şekil 4.6.  $\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=0.0$  iken değiken  $t$  değerleri için Problem 2.1'in CNSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile czmnn grafiği

Problem 2.2 CNSFY'ne bağı Strang parçalama metodunun BAB yaklaşımına göre çözüldü.  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\nu=1$  iken değişen  $\Delta x$  değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümler  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte Tablo 4.7'de verildi. Küçülen  $\Delta x$  konum adım uzunluğu değerlerine bakıldığında nümerik çözüm analitik çözüme yaklaştığı ve  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata miktarlarının azaldığı görüldü. Tablo 4.7'deki hata miktarlarını incelediğimizde düzenli bir azalış olduğu görülmektedir.

**Tablo 4.7.** Problem 2.2 CNSFY ,ne bağı Strang Parçalama Metodu BAB'a göre  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\nu=1$  iken  $\Delta x$ 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

$x$	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.113665	0.113086	0.112941	0.112904	0.112892
0.2	0.217773	0.216634	0.216348	0.216276	0.216252
0.3	0.303175	0.301521	0.301105	0.301001	0.300966
0.4	0.361646	0.359562	0.359038	0.358907	0.358863
0.5	0.386586	0.384216	0.383621	0.383472	0.383422
0.6	0.373915	0.371474	0.370862	0.370709	0.370658
0.7	0.323044	0.320811	0.320252	0.320112	0.320066
0.8	0.237665	0.235945	0.235514	0.235407	0.235371
0.9	0.125970	0.125031	0.124796	0.124738	0.124718
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	2.276956	0.570838	0.142755	0.035639	
$L_\infty \times 10^3$	3.256675	0.816167	0.204719	0.051113	

Problem 2.2 CNSFY,ne bağı Strang parçalama metodunun BAB yaklaşımına göre çözüldü.

$\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  için  $t=0.2$ ,  $t=0.6$ ,  $t=1.0$ ,  $t=1.2$ ,  $t=2$  değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.8'de verildi. Bu tablo incelendiğinde nümerik çözümlerin analitik çözümlerle uyumlu olduğu görüldü.

**Tablo 4.8.** Problem 2.2'in CNSFY,ne bağı Strang Parçalama Metodu BAB'a göre  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için değeren t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri

$x$	$t$	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.099494	0.099470	0.446832	0.446807	0.499838	0.499828
	0.6	0.001951	0.001949	0.246157	0.246138	0.282050	0.282037
	1.0	0.000038	0.000038	0.165621	0.165599	0.194698	0.194690
	1.2	0.000005	0.000005	0.138958	0.138933	0.168500	0.168494
	2.0	0.000000	0.000000	0.069541	0.069514	0.109485	0.109482
0.50	0.2	0.142925	0.142888	0.773143	0.773101	0.867171	0.867136
	0.6	0.002759	0.002757	0.458050	0.457976	0.548335	0.548316
	1.0	0.000053	0.000053	0.298427	0.298343	0.385687	0.385676
	1.2	0.000007	0.000007	0.243765	0.243682	0.334906	0.334897
	2.0	0.000000	0.000000	0.110255	0.110199	0.218593	0.218588
0.75	0.2	0.102683	0.102655	0.773553	0.773440	0.969871	0.969734
	0.6	0.001952	0.001950	0.502938	0.502676	0.783054	0.782994
	1.0	0.000038	0.000038	0.296048	0.295857	0.569338	0.569319
	1.2	0.000005	0.000005	0.228948	0.228797	0.497158	0.497145
	2.0	0.000000	0.000000	0.088739	0.088680	0.326936	0.326926

### 4.2.3. Strang ABA (S-ABA) Yaklaşım

(3.26)'teki ısı iletim denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n$$

$$r = \frac{v\Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad m = 1(1)M-1, \quad n=0(1)t^{n+1/2}$$

ile (3.23)'teki viskozitesiz Burgers' denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşım

$$U_{m-1}^{n+1}(-r_1 U_m^n) + U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}(r_1 U_m^n) = U_{m-1}^n(r_1 U_m^n) + U_m^n + U_{m+1}^n(-r_1 U_m^n)$$

$$r_1 = \frac{\Delta t}{4\Delta x}, \quad m = 1(1)M-1, \quad n=0(1)t^{n+1}$$

fark denklemleri oluşturulur.

Strang parçalama metodu için (3.26) fark denklemini  $\frac{\Delta t}{2}$  için çözülür. Elde edilen bu çözüm bağımlı koşullu alınarak (3.23) fark denklemini  $\Delta t$  için çözülür. Elde edilen bu çözüm tekrar (3.26) fark denkleminin bağımlı koşullu kabul edilir ve (3.26) fark denklemini  $\frac{\Delta t}{2}$  için çözülür.

### 4.2.4. S-ABA için Nümerik Sonuçlar

Problem 2.1 Crank-Nicolson sonlu fark yöntemine (CNSFY) bağlı Strang parçalama metodunun ABA yaklaşım ile çözüldü.  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$  iken küçülen  $\Delta x$  konum adım uzunluğu değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümleri  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte Tablo 4.9'da verildi. Küçülen  $\Delta x$  değerleri için nümerik çözümlerin giderek analitik çözüme yaklaştığı görüldü. Tablo 4.9'daki hata miktarlarının düzenli azaldığı görülmektedir.

**Tablo 4.9.** Problem 2.1'in CNSFY ,ne bağı Strang Parçalama Metodu ABA'a göre  $t=0.1$ ,  $\Delta t = 0.00001$ ,  $v=1$  iken  $\Delta x$ 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

$x$	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.110288	0.109722	0.109580	0.109545	0.109538
0.2	0.211271	0.210156	0.209877	0.209807	0.209792
0.3	0.294048	0.292428	0.292023	0.291921	0.291896
0.4	0.350637	0.348598	0.348088	0.347960	0.347924
0.5	0.374661	0.372348	0.371769	0.371624	0.371577
0.6	0.362215	0.359841	0.359248	0.359099	0.359046
0.7	0.312798	0.310634	0.310094	0.309958	0.309905
0.8	0.230040	0.228379	0.227965	0.227861	0.227817
0.9	0.121898	0.120993	0.120768	0.120711	0.120687
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	2. 214589	0. 553262	0. 138292	0. 034577	
$L_\infty \times 10^3$	3. 165469	0. 791066	0. 198568	0. 049852	

Problem 2.1 CNSFY,ne bağı Strang parçalama metodunun ABA yaklaşıma göre çözüldü.

$\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için değıken  $t$  değerlerinin (  $t=0.2$ ,  $t=0.6$ ,  $t=1.0$ ,  $t=1.2$ ,  $t=2.0$ ) analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.10'da verildi. Bu tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözümler ile uyumlu olduğı görüldü.

**Tablo 4.10.** Problem 2.1'in CNSFY,ne bağı Strang Parçalama Metodu ABA'a göre  $\Delta t = 0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için değıken  $t$  değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri

$x$	$t$	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.096465	0.096442	0.429340	0.429317	0.466607	0.466583
	0.6	0.001890	0.001889	0.240758	0.240739	0.268975	0.268965
	1.0	0.000037	0.000036	0.162588	0.162565	0.188199	0.188194
	1.2	0.000005	0.000005	0.136465	0.136440	0.163590	0.163586
	2.0	0.000000	0.000000	0.068232	0.068206	0.107383	0.107381
0.50	0.2	0.138509	0.138473	0.753869	0.753811	0.848434	0.848365
	0.6	0.002674	0.002672	0.447280	0.447206	0.529448	0.529418
	1.0	0.000052	0.000052	0.291999	0.291916	0.374433	0.374420
	1.2	0.000007	0.000007	0.238592	0.238511	0.326066	0.326057
	2.0	0.000000	0.000000	0.107944	0.107890	0.214562	0.214558
0.75	0.2	0.099462	0.099435	0.749229	0.749139	0.962061	0.961891
	0.6	0.001891	0.001890	0.487465	0.487215	0.767330	0.767243
	1.0	0.000037	0.000036	0.287657	0.287474	0.556078	0.556051
	1.2	0.000005	0.000005	0.222740	0.222595	0.486031	0.486013
	2.0	0.000000	0.000000	0.086635	0.086579	0.321293	0.321282

Problem 2.2 CNSFY'ne bağı Strang parçalama (splitting) metodunun ABA yaklaşıma göre çözüldü.

$L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$  iken değişen  $\Delta x$  değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümler Tablo 4.11 'de verildi. Küçülen  $\Delta x$  değerlerine bakıldığında nümerik çözümlerin analitik çözümlere yaklaştığı ve  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata miktarlarının düzenli azaldığı görülmektedir.

**Tablo 4.11.** Problem 2.2'in CNSFY ,ne bağı Strang Parçalama Metodu ABA'a göre  $t=0.1, \Delta t=0.00001, v=1$  iken  $\Delta x$ 'nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

$x$	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.113664	0.113086	0.112940	0.112904	0.112892
0.2	0.217772	0.216633	0.216347	0.216275	0.216252
0.3	0.303174	0.301520	0.301104	0.301000	0.300966
0.4	0.361645	0.359561	0.359037	0.358906	0.358863
0.5	0.386586	0.384216	0.383621	0.383472	0.383422
0.6	0.373915	0.371475	0.370862	0.370709	0.370658
0.7	0.323045	0.320812	0.320253	0.320113	0.320066
0.8	0.237666	0.235946	0.235515	0.235408	0.235371
0.9	0.125971	0.125031	0.124797	0.124738	0.124718
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	2.277028	0.570913	0.142832	0.035722	
$L_\infty \times 10^3$	3.257184	0.816688	0.205094	0.051531	

Problem 2.2 CNSFY,ne bağı Strang parçalama metodunun ABA yaklaşıma göre çözüldü.

$\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $v=1$ ,  $v=0.1$ ,  $v=0.01$  değerleri için  $t=0.2$ ,  $t=0.6$ ,  $t=1.0$ ,  $t=1.2$ ,  $t=2.0$  değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.12 'de verildi. Bu tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözümler ile uyumlu olduğu görüldü.

**Tablo 4.12.** Problem 2.2'in CNSFY,ne bağı Strang Parçalama Metodu ABA'a göre  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $v=1$ ,  $v=0.1$ ,  $v=0.01$  değerleri için değı t değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri

$x$	$t$	$v = 1$		$v = 0.1$		$v = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.099494	0.099470	0.446830	0.446807	0.499837	0.499828
	0.6	0.001951	0.001949	0.246156	0.246138	0.282049	0.282037
	1.0	0.000038	0.000038	0.165621	0.165599	0.194698	0.194690
	1.2	0.000005	0.000005	0.138958	0.138933	0.168500	0.168494
	2.0	0.000000	0.000000	0.069540	0.069514	0.109484	0.109482
0.50	0.2	0.142925	0.142888	0.773142	0.773101	0.867171	0.867136
	0.6	0.002759	0.002757	0.458049	0.457976	0.548333	0.548316
	1.0	0.000053	0.000053	0.298427	0.298343	0.385686	0.385676
	1.2	0.000007	0.000007	0.243765	0.243682	0.334905	0.334897
	2.0	0.000000	0.000000	0.110255	0.110199	0.218592	0.218588
0.75	0.2	0.102683	0.102655	0.773555	0.773440	0.969871	0.969734
	0.6	0.001952	0.001950	0.502940	0.502676	0.783053	0.782994
	1.0	0.000038	0.000038	0.296049	0.295857	0.569336	0.569319
	1.2	0.000005	0.000005	0.228949	0.228797	0.497157	0.497145
	2.0	0.000000	0.000000	0.088739	0.088680	0.326935	0.326926

#### 4.2.5. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemine Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodunun ABA ve BAB Kalıplarının Karşılaştırılması

Problem 2.1 CNSFY'ne bağlı Strang parçalama metodunun ABA ve BAB yaklaşımları ile çözüldü.

$t=0.1$ ,  $\Delta t = 0.00001$ ,  $\nu=1$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken Problem 2.1'in ABA ve BAB yaklaşımlarını kullanarak elde edilen nümerik ve analitik çözümler  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte Tablo 4.13'de verildi. Tabloyu incelediğimizde BAB kalıbının hata miktarı ABA kalıbının hata miktarından az olduğu görülüyor.

Parçalanmış Burgers' denklemlerini çözmeye bağlarken ilk önce non-linear (viskozitesiz Burgers') denklemini çözmek daha sonra lineer (Isı iletim) denklemini çözmenin daha avantajlı olduğu görülmektedir.

**Tablo 4.13.**  $t=0.1$ ,  $\Delta t = 0.00001$ ,  $\nu=1$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken Problem 2.1'in Strang Parçalama Metodunun ABA ve BAB çözümlerinin karşılaştırılması

$x$	<b>BAB</b>	<b>ABA</b>	<b>Analitik Çözüm</b>
0.1	0.109550	0.109545	0.109538
0.2	0.209815	0.209807	0.209792
0.3	0.291930	0.291921	0.291896
0.4	0.347966	0.347960	0.347924
0.5	0.371625	0.371624	0.371577
0.6	0.359095	0.359099	0.359046
0.7	0.309950	0.309958	0.309905
0.8	0.227852	0.227861	0.227817
0.9	0.120705	0.120711	0.120687
<b>Hata Normu</b>			
$L_2 \times 10^3$	0.034501	0.034577	
$L_\infty \times 10^3$	0.049480	0.049852	

Problem 2.2 CNSFY'ne bağlı Strang parçalama metodunun ABA ve BAB yaklaşımları ile özıldı.

$t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$ ,  $\Delta x =0.0125$  iken Problem 2.2'in ABA ve BAB yaklaşımlarını kullanarak elde edilen nümerik ve analitik çözümler  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte Tablo 4.14'de verildi. Tabloyu incelediğimizde BAB kalıbının hata miktarı ABA kalıbının hata miktarından az olduğu görülmektedir.

**Tablo 4.14.**  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken Problem 2.2'in Strang Parçalama Metodunun ABA ve BAB çözümlerinin karşılaştırılması

$x$	<i>BAB</i>	<i>ABA</i>	<b>Analitik özüm</b>
0.1	0.112904	0.112904	0.112892
0.2	0.216276	0.216275	0.216252
0.3	0.301001	0.301000	0.300966
0.4	0.358907	0.358906	0.358863
0.5	0.383472	0.383472	0.383422
0.6	0.370709	0.370709	0.370658
0.7	0.320112	0.320113	0.320066
0.8	0.235407	0.235408	0.235371
0.9	0.124738	0.124738	0.124718
<b>Hata Normu</b>			
$L_2 \times 10^3$	0.035639	0.035722	
$L_\infty \times 10^3$	0.051113	0.051531	

### 4.3. RGSFY 'e Bağlı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denklemine Nümerik özömleri

Probleme önce (3.27) yaklağım ve sonra (3.26) yaklağımını uygulamak RGSFY yaklağımını oluğtırsun.

Problem 2.1 RGSFY'e bağlı Strang parçalama yöntemi ile özöldü.  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\nu=1$  için değiğin  $\Delta x$  adım uzunluğu için elde edilen nümerik ve analitik özömleri  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte Tablo 4.15'de verildi. Küçölen  $\Delta x$  değerleri için nümerik özömlerin analitik özöme yaklağtığı ve  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata miktarlarının düzenli azaldığı göröldü.

**Tablo 4.15.** Problem 2.1'in RGSFY ile  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\nu=1$  iken  $\Delta x$ 'nin değiğin değerleri için analitik ve nümerik özömleri

$x$	Nümerik özüm				Analitik özüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.110293	0.109727	0.109585	0.109550	0.109538
0.2	0.211279	0.210164	0.209885	0.209815	0.209792
0.3	0.294057	0.292437	0.292031	0.291930	0.291896
0.4	0.350643	0.348604	0.348094	0.347966	0.347924
0.5	0.374662	0.372348	0.371770	0.371626	0.371577
0.6	0.362211	0.359836	0.359243	0.359095	0.359046
0.7	0.312789	0.310625	0.310085	0.309950	0.309905
0.8	0.230030	0.228369	0.227955	0.227852	0.227817
0.9	0.121892	0.120987	0.120762	0.120705	0.120687
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	2.214531	0.553195	0.138221	0.034501	
$L_\infty \times 10^3$	3.164985	0.790840	0.198196	0.049461	

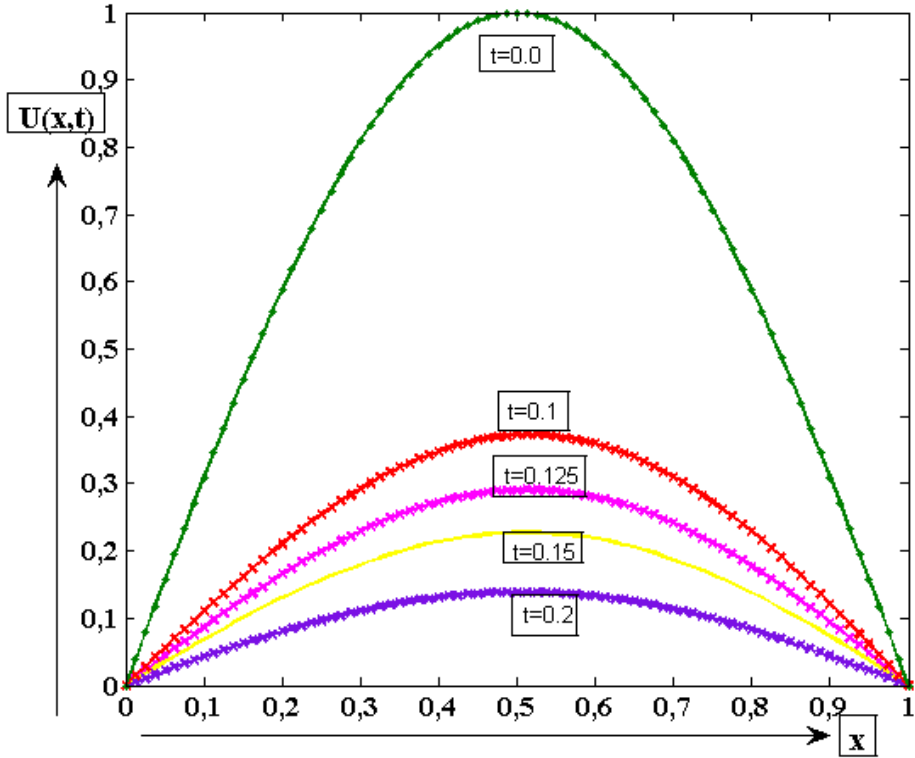
Problem 2.1 RGSFY, $\epsilon$  bağı Strang parçalama metoduna göre çözüldü.  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için  $t=0.2$ ,  $t=0.6$ ,  $t=0.1$ ,  $t=1.2$ ,  $t=2$  zaman değerleri için analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.16'da verildi. Bu tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözümlere yakın değerler olduğu görüldü.

**Tablo 4.16.** Problem 2.1'in RGSFY ile  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

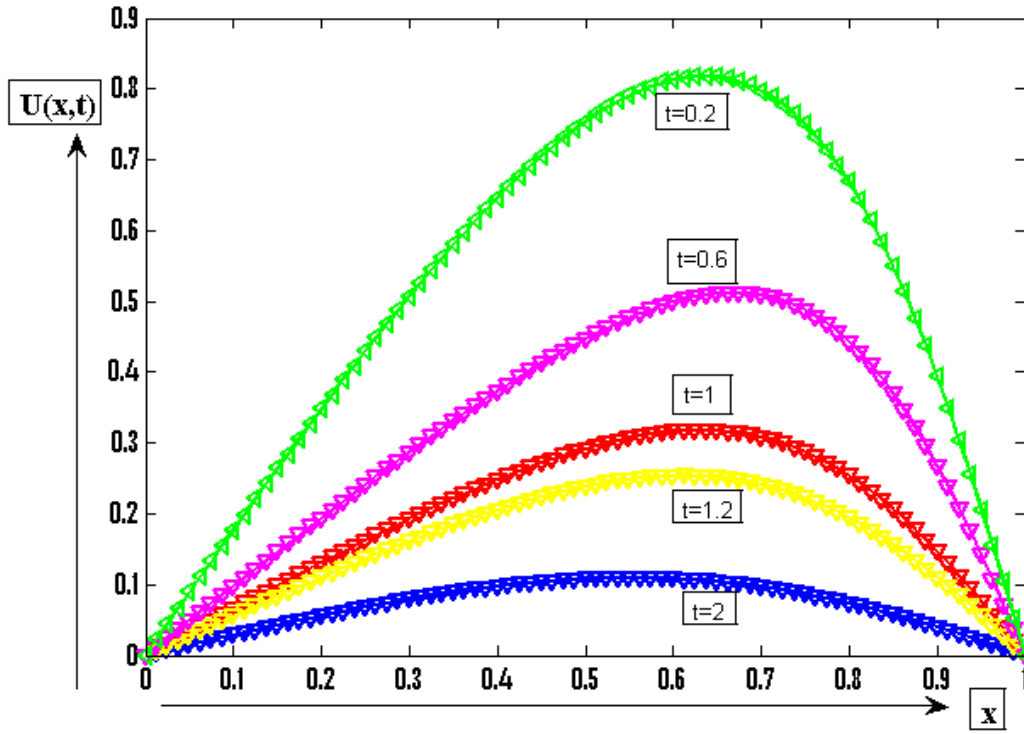
$x$	$t$	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.096466	0.096442	0.429342	0.429317	0.466611	0.466583
	0.6	0.001890	0.001889	0.240759	0.240739	0.268978	0.268965
	1.0	0.000037	0.000036	0.162588	0.162565	0.188201	0.188194
	1.2	0.000005	0.000005	0.136465	0.136440	0.163591	0.163586
	2.0	0.000000	0.000000	0.068233	0.068206	0.107384	0.107381
0.50	0.2	0.138509	0.138473	0.753870	0.753811	0.848435	0.848365
	0.6	0.002674	0.002672	0.447281	0.447206	0.529452	0.529418
	1.0	0.000052	0.000052	0.292000	0.291916	0.374436	0.374420
	1.2	0.000007	0.000007	0.238593	0.238511	0.326069	0.326057
	2.0	0.000000	0.000000	0.107944	0.107890	0.214563	0.214558
0.75	0.2	0.099462	0.099435	0.749229	0.749139	0.962057	0.961891
	0.6	0.001891	0.001890	0.487465	0.487215	0.767333	0.767243
	1.0	0.000037	0.000036	0.287658	0.287474	0.556083	0.556051
	1.2	0.000005	0.000005	0.222741	0.222595	0.486035	0.486013
	2.0	0.000000	0.000000	0.086636	0.086579	0.321295	0.321282

Problem 2.1'e önce (3.27) yaklaşım ve sonra (3.26) yaklaşımını uygulayarak (RGSFY) elde edilen nümerik çözümlerinin fiziksel davranışları görebilmek için  $\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t=0.00001$  iken çeşitli  $t$  zaman adımlarında  $\nu=1$  için şekil 4.7,  $\nu=0.1$  için şekil 4.8 ve  $\nu=0.01$  için şekil 4.9 verildi.

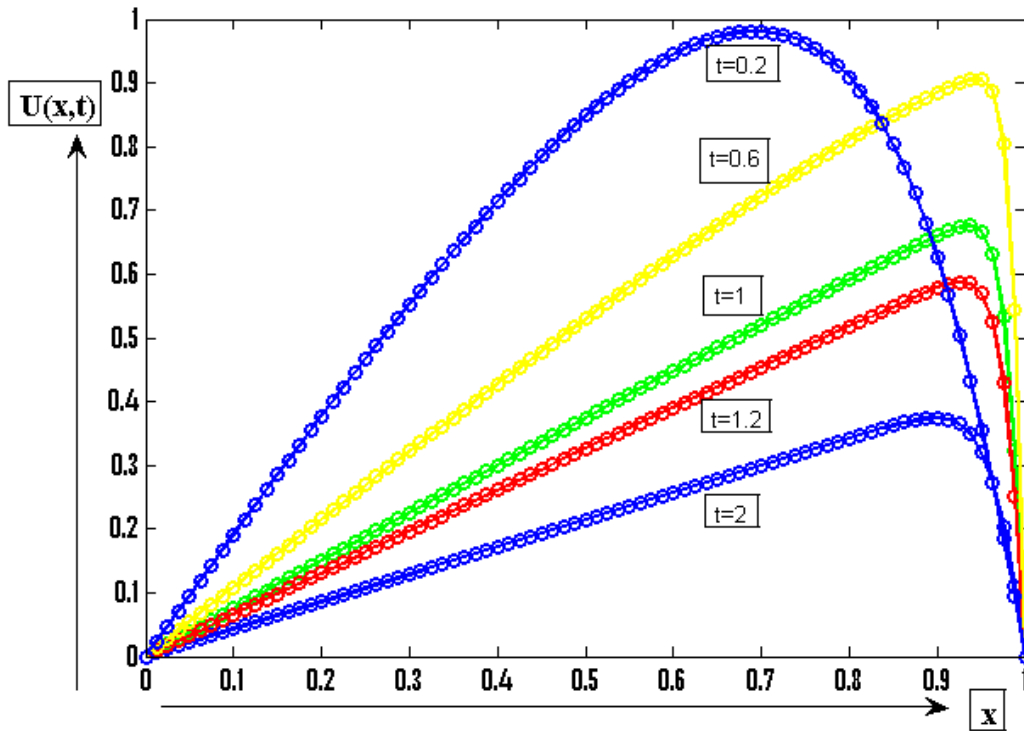
Nümerik çözümlerin problem 2.1'in fiziksel davranışlarını sergilediği görüldü. Viskozite parametresi  $\nu$  küçüldükçe sayısal çözümlerin sağa dik inişli yapıları şekil 4.9'da görülmektedir.



şekil 4.7.  $\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t = 0.00001$ ,  $\nu=1$  iken değişken  $t$  değerleri için Problem 2.1'in RGSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği



Şekil 4.8.  $\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t = 0.00001$ ,  $v=0.1$  iken değiken  $t$  değerleri için Problem 2.1'in RGSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile üzümünün grafiği



Şekil 4.9.  $\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t = 0.00001$ ,  $v=0.0$  1 iken değiken  $t$  değerleri için Problem 2.1'in RGSFY'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile üzümünün grafiği

Problem 2.2 önce (3.27) yaklaşım ve sonra (3.26) yaklaşımını uygulayarak (RGSFY ) Strang parçalama metoduna göre çözüldü.  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$  için değişen  $\Delta x$  konum adım uzunluğu için elde edilen nümerik ve analitik çözümler  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte Tablo 4.17’de verildi. Küçülen  $\Delta x$  değerlerine bakıldığında nümerik çözüm analitik çözüme yaklaştığı ve  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata miktarlarının düzenli azaldığı görüldü.

**Tablo 4.17.** Problem 2.2’nin RGSFY ile  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$  iken  $\Delta x$ ’nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.113665	0.113086	0.112941	0.112904	0.112892
0.2	0.217773	0.216634	0.216348	0.216276	0.216252
0.3	0.303175	0.301521	0.301105	0.301001	0.300966
0.4	0.361646	0.359562	0.359038	0.358907	0.358863
0.5	0.386586	0.384216	0.383621	0.383472	0.383422
0.6	0.373914	0.371474	0.370862	0.370709	0.370658
0.7	0.323044	0.320811	0.320252	0.320112	0.320066
0.8	0.237665	0.235945	0.235514	0.235407	0.235371
0.9	0.125970	0.125031	0.124796	0.124738	0.124718
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	2.276961	0.570837	0.142753	0.035637	
$L_\infty \times 10^3$	3.256663	0.816147	0.204694	0.051089	

Problem 2.2 RGSFY'e bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözüldü.  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için değikent  $t$  zaman değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.17'de verildi. Bu tablo incelediğinde nümerik çözümlerin analitik çözümler ile uyumlu olduğu görülmektedir.

**Tablo 4.18.** Problem 2.2'nin RGSFY ile  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

$x$	$t$	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.099494	0.099470	0.446833	0.446807	0.499841	0.499828
	0.6	0.001951	0.001949	0.246158	0.246138	0.282052	0.282037
	1.0	0.000038	0.000038	0.165622	0.165599	0.194700	0.194690
	1.2	0.000005	0.000005	0.138958	0.138933	0.168502	0.168494
	2.0	0.000000	0.000000	0.069541	0.069514	0.109485	0.109482
0.50	0.2	0.142925	0.142888	0.773143	0.773101	0.867171	0.867136
	0.6	0.002759	0.002757	0.458051	0.457976	0.548338	0.548316
	1.0	0.000053	0.000053	0.298428	0.298343	0.385690	0.385676
	1.2	0.000007	0.000007	0.243765	0.243682	0.334908	0.334897
	2.0	0.000000	0.000000	0.110255	0.110199	0.218594	0.218588
0.75	0.2	0.102683	0.102655	0.773552	0.773440	0.969867	0.969734
	0.6	0.001952	0.001950	0.502938	0.502676	0.783056	0.782994
	1.0	0.000038	0.000038	0.296048	0.295857	0.569341	0.569319
	1.2	0.000005	0.000005	0.228949	0.228797	0.497161	0.497145
	2.0	0.000000	0.000000	0.088739	0.088680	0.326938	0.326926

#### 4.4. CNSFY 1 Bağı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denklemine Nümerik Çözümleri

Probleme önce (3.28) yaklaşım ve sonra (3.26) yaklaşımını uygulamak CNSFY1 yaklaşımını oluştursun.

Problem 2.1 CNSFY1'ye bağı Strang parçalama metodu ile çözüldüğünde nümerik çözümlerin analitik çözüme ne kadar yaklaştığını ölçmek için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları göz ününe alındı.

$t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$  iken değı  $\Delta x$  konum adım uzunluğu değıleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümleri  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte Tablo 4.19'da verildi. Küçülen  $\Delta x$  değıleri için nümerik çözüm analitik çözüme yaklaştığı ve  $L_2, L_\infty$  hata miktarlarının azaldığı tespit edildi.

**Tablo 4.19.** Problem 2.1'nin CNSFY1 ile  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$  iken  $\Delta x$ 'nin değı değıleri için analitik ve nümerik çözümleri

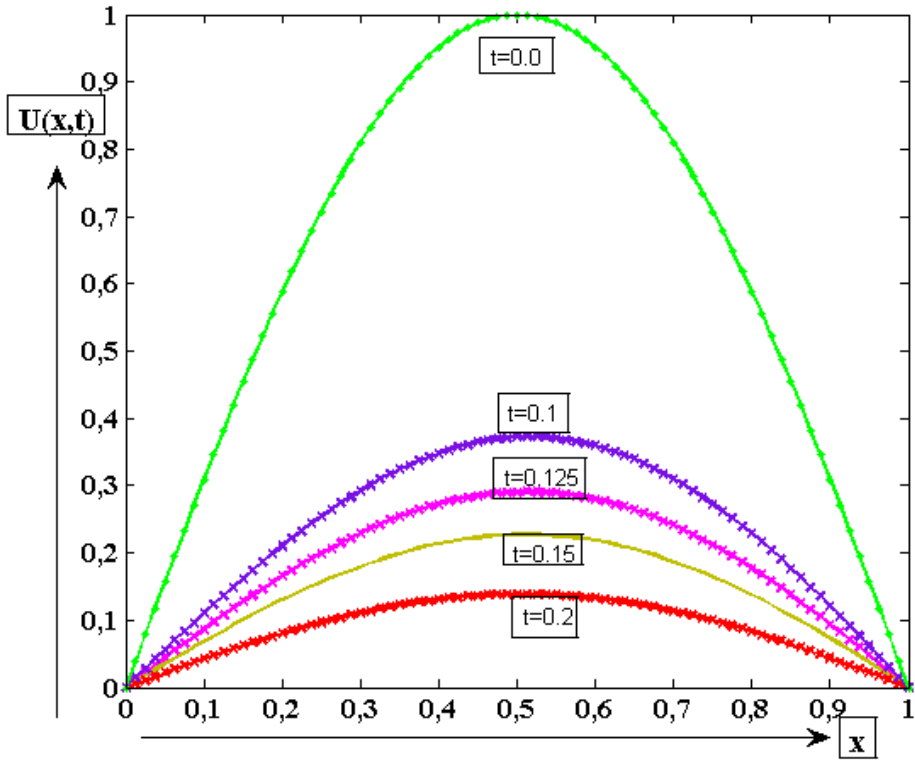
$x$	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.108531	0.108792	0.109107	0.109308	0.109538
0.2	0.208375	0.208616	0.209092	0.209415	0.209792
0.3	0.290505	0.290542	0.291062	0.291441	0.291896
0.4	0.346731	0.346531	0.347038	0.347435	0.347924
0.5	0.370498	0.370175	0.370672	0.371075	0.371577
0.6	0.357862	0.357610	0.358128	0.358538	0.359046
0.7	0.308476	0.308456	0.309006	0.309413	0.309905
0.8	0.226281	0.226506	0.227032	0.227393	0.227817
0.9	0.119545	0.119827	0.120187	0.120420	0.120687
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	1.210612	1.195978	0.741261	0.405671	
$L_\infty \times 10^3$	1.536096	1.451069	0.917938	0.507616	

Problem 2.1'in CNSFY1,ye bağı Strang parçalama metoduna göre  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için değıken  $t$  zaman adımlarında (  $t=0.2$ ,  $t=0.6$ ,  $t=1.0$ ,  $t=1.2$ ,  $t=2.0$  ) elde edilen nümerik ve analitik çözümleri Tablo 4.20'de verildi. Bu tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözüme yakın olduğu görülmektedir

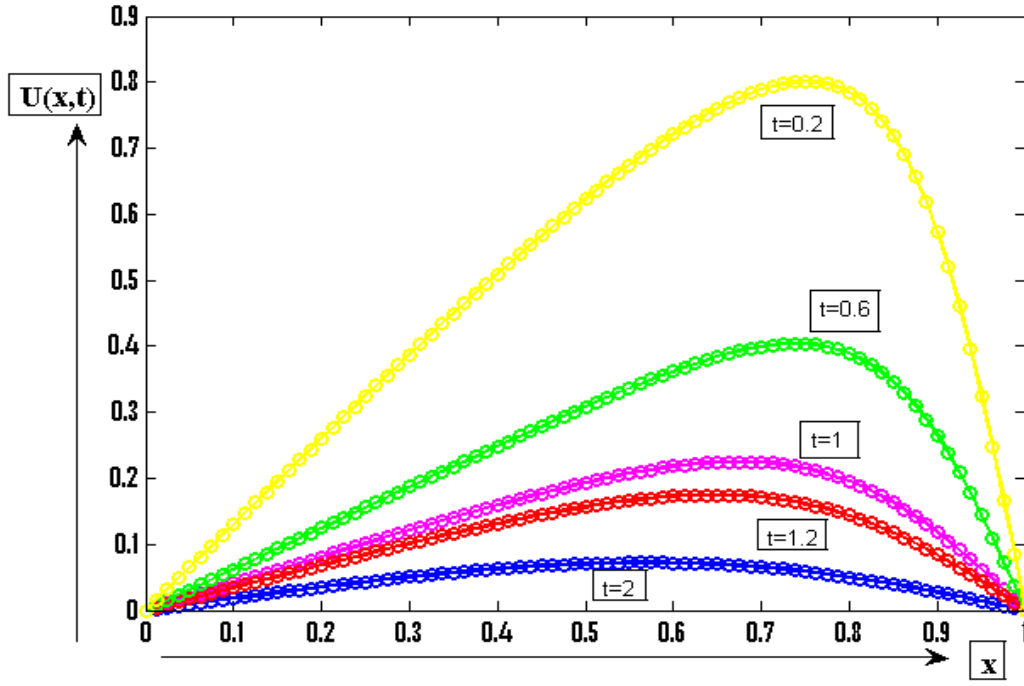
**Tablo 4.20.** Problem 2.1'in CNSFY1 ile  $\Delta t = 0.00001$ ,  $\Delta x = 0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

$x$	$t$	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.096244	0.096442	0.426068	0.429317	0.461801	0.466583
	0.6	0.099227	0.001889	0.237924	0.240739	0.262590	0.268965
	1.0	0.000036	0.000036	0.160452	0.162565	0.182754	0.188194
	1.2	0.000005	0.000005	0.134589	0.136440	0.158658	0.163586
	2.0	0.000000	0.000000	0.067126	0.068206	0.103993	0.107381
0.50	0.2	0.138203	0.138473	0.751963	0.753811	0.846381	0.848365
	0.6	0.002667	0.002672	0.443567	0.447206	0.523542	0.529418
	1.0	0.000051	0.000052	0.288574	0.291916	0.368362	0.374420
	1.2	0.000007	0.000007	0.235473	0.238511	0.320251	0.326057
	2.0	0.000000	0.000000	0.106139	0.107890	0.210015	0.214558
0.75	0.2	0.099227	0.099435	0.745528	0.749139	0.961079	0.961891
	0.6	0.001886	0.001890	0.481738	0.487215	0.763178	0.767243
	1.0	0.000036	0.000036	0.282993	0.287474	0.550494	0.556051
	1.2	0.000005	0.000005	0.218844	0.222595	0.480407	0.486013
	2.0	0.000000	0.000000	0.084943	0.086579	0.316407	0.321282

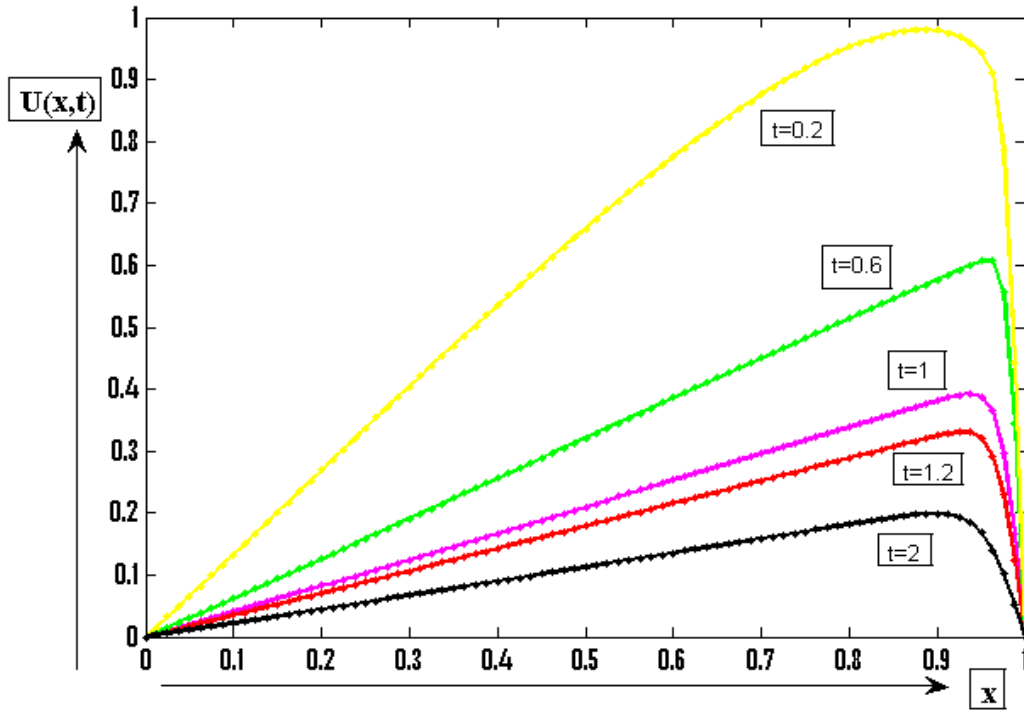
$\Delta x = 0.0125$ ,  $\Delta t = 0.00001$  iken Problem 2.1 için  $t$  zaman adımlarında CNSFY1'ye bağlı Strang parçalama metodu ile çözdüğümüzde elde edilen nümerik çözümlerin fiziksel davranışını gösterebilmek için  $v = 1$  iken şekil 4.10,  $v = 0.1$  iken şekil 4.11 ve  $v = 0.01$  iken şekil 4.12 verildi. Farklı nümerik çözüm eğrileri tek bir grafikte çizildiği zaman nümerik çözümlerin Problem 2.1'in fiziksel davranışını sergilediği görülmektedir. Burgers' denklemine fiziksel yapısından dolayı viskozite parametresi  $v$  küçüldükçe nümerik çözümlerin sağa keskin dönüş yaptığı şekil 4.12'de görülmektedir.



şekil 4.10.  $\Delta x = 0.0125$ ,  $\Delta t = 0.00001$ ,  $v = 1$  iken değiken  $t$  değerleri için Problem 2.1'in CNSFY1'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile çözümünün grafiği



Şekil 4.11.  $\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=0.1$  iken değişken  $t$  değerleri iÇin Problem 2.1'in CNSFY1'ine bağlı Strang parÇalama yöntemi ile  ozuŐuŐuŐn grafiği



Şekil 4.12.  $\Delta x=0.0125$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=0.01$  iken değişken  $t$  değerleri iÇin Problem 2.1'in CNSFY1'ine bağlı Strang parÇalama yöntemi ile  ozuŐuŐuŐn grafiği

Problem 2.2'nin CNSFY1,,ye bağı Strang parçalama metoduna göre  $t = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.00001$ ,  $\nu = 1$  iken değiğen  $\Delta x$  adım uzunluğu için elde edilen nümerik ve analitik çözümler  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte Tablo 4.21 'de verildi. Küçülen  $\Delta x$  değerleri için nümerik çözümlerin analitik çözüme yaklağtığı ve  $L_2$  ,  $L_\infty$  hata miktarlarında azalma olduğu görüldü.

**Tablo 4.21.** Problem 2.2'nin CNSFY1 ile  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\nu=1$  iken  $\Delta x$ 'nin değiğen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

$x$	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.111826	0.112110	0.112441	0.112652	0.112892
0.2	0.214751	0.215021	0.215521	0.215858	0.216252
0.3	0.299488	0.299551	0.300097	0.300492	0.300966
0.4	0.357591	0.357411	0.357942	0.358355	0.358863
0.5	0.382268	0.381962	0.382482	0.382901	0.383422
0.6	0.369393	0.369161	0.369703	0.370130	0.370658
0.7	0.318543	0.318550	0.319127	0.319553	0.320066
0.8	0.233736	0.233995	0.234549	0.234927	0.235371
0.9	0.123503	0.123812	0.124193	0.124438	0.124718
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 x 10^3$	1.288220	1.250113	0.772776	0.422558	
$L_\infty x 10^3$	1.634859	1.515668	0.955463	0.527612	

Tablo 4.22 'te Problem 2.2 CNSFY1'ye bağı Strang parçalama yöntemi ile  $\Delta t = 0.00001$ ,  $\Delta x = 0.0125$  iken  $\nu = 1$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\nu = 0.01$  değerleri için değikent zaman adım değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri verildi. Tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözümlere yakın olduğu görüldü.

**Tablo 4.22.** Problem 2.2'in CNSFY1 ile  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

$x$	$t$	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.099262	0.099470	0.443423	0.446807	0.494864	0.499828
	0.6	0.001945	0.001949	0.243229	0.246138	0.275055	0.282037
	1.0	0.000038	0.000038	0.163430	0.165599	0.188828	0.194690
	1.2	0.000005	0.000005	0.137036	0.138933	0.163224	0.168494
	2.0	0.000000	0.000000	0.068406	0.069514	0.105929	0.109482
0.50	0.2	0.142605	0.142888	0.771324	0.773101	0.865496	0.867136
	0.6	0.002752	0.002757	0.454254	0.457976	0.542320	0.548316
	1.0	0.000053	0.000053	0.294919	0.298343	0.379272	0.385676
	1.2	0.000007	0.000007	0.240567	0.243682	0.328746	0.334897
	2.0	0.000000	0.000000	0.108399	0.110199	0.213817	0.218588
0.75	0.2	0.102436	0.102655	0.770017	0.773440	0.969254	0.969734
	0.6	0.001947	0.001950	0.497091	0.502676	0.779206	0.782994
	1.0	0.000038	0.000038	0.291229	0.295857	0.563679	0.569319
	1.2	0.000005	0.000005	0.224918	0.228797	0.491363	0.497145
	2.0	0.000000	0.000000	0.086990	0.088680	0.321827	0.326926

#### 4.5. CNSFY 2 Bağı Strang Parçalama (Splitting) Metodu ile 1-Boyutlu Burgers Denklemine Nümerik Çözümleri

Probleme önce (3.29) yaklaşım ve sonra (3.26) yaklaşımını uygulamak CNSFY2 yaklaşımını oluştursun.

Tablo 4.23 'de problem 2.1 CNSFY2'e bağı Strang parçalama yöntemi ile  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\nu=1$  iken değıgen  $\Delta x$  değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümler  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte verildi. Küçülen  $\Delta x$  değerlerine bakıldığında nümerik çözümlerin analitik çözümlere yaklağığı görülmektedir. Tablo 4.23 incelendiğinde meydana gelen hata miktarında düzenli azalığ olduğu anlaşılmaktadır.

**Tablo 4.23.** Problem 2.1'in CNSFY2 ile  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\nu=1$  iken  $\Delta x$ 'nin değıgen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.110454	0.109766	0.109595	0.109552	0.109538
0.2	0.211544	0.210229	0.209901	0.209819	0.209792
0.3	0.294331	0.292504	0.292048	0.291934	0.291896
0.4	0.350820	0.348647	0.348105	0.347969	0.347924
0.5	0.374660	0.372348	0.371770	0.371626	0.371577
0.6	0.362010	0.359787	0.359231	0.359092	0.359046
0.7	0.312450	0.310542	0.310064	0.309945	0.309905
0.8	0.229679	0.228284	0.227934	0.227846	0.227817
0.9	0.121669	0.120933	0.120748	0.120702	0.120687
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	2.177558	0.544161	0.135976	0.033940	
$L_\infty \times 10^3$	3.082034	0.770080	0.192444	0.048074	

Problem 2.1'in CNSFY2,ε bağılı Strang parçalama metoduna göre  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için değışkent değerlerinin analitik ve nümerik çözümleri Tablo 4.24'te verildi. Tabloyu incelediğimizde nümerik çözümlerin analitik çözüm ile uyumlu olduğu görülmektedir.

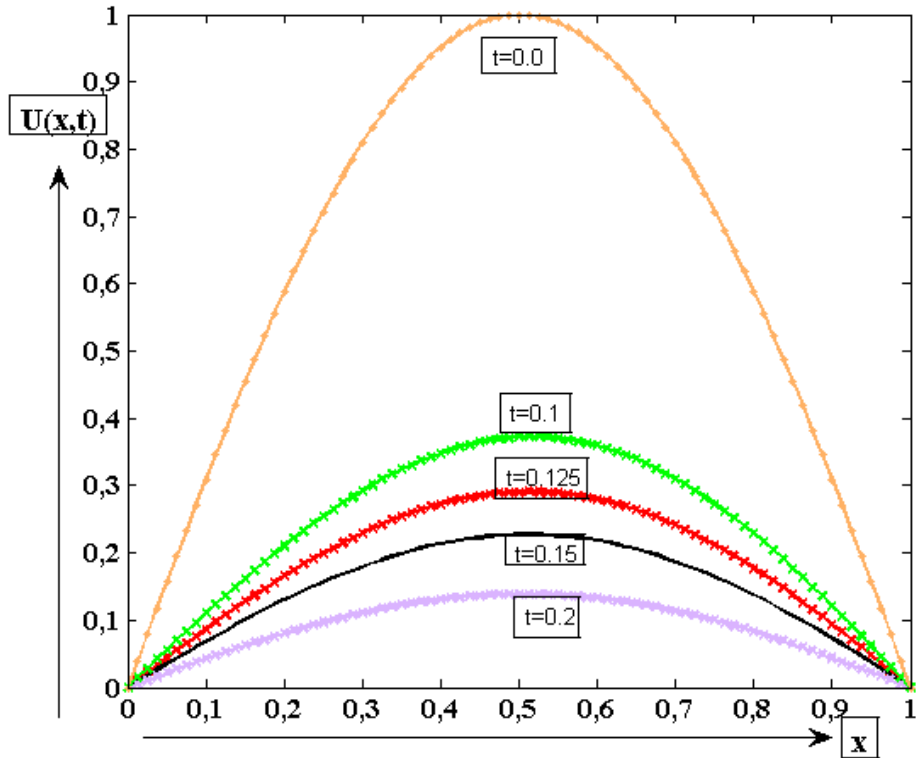
**Tablo 4.24.** Problem 2.1'in CNSFY2 ile  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

$x$	$t$	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm	Nümerik Çözüm	Analitik çözüm
0.25	0.2	0.096466	0.096442	0.429379	0.429317	0.466653	0.466583
	0.6	0.001890	0.001889	0.240779	0.240739	0.268998	0.268965
	1.0	0.000037	0.000036	0.162597	0.162565	0.188211	0.188194
	1.2	0.000005	0.000005	0.136470	0.136440	0.163599	0.163586
	2.0	0.000000	0.000000	0.068230	0.068206	0.107387	0.107381
0.50	0.2	0.138509	0.138473	0.753909	0.753811	0.848503	0.848365
	0.6	0.002674	0.002672	0.447299	0.447206	0.529495	0.529418
	1.0	0.000052	0.000052	0.291994	0.291916	0.374458	0.374420
	1.2	0.000007	0.000007	0.238583	0.238511	0.326085	0.326057
	2.0	0.000000	0.000000	0.107935	0.107890	0.214570	0.214558
0.75	0.2	0.099461	0.099435	0.749108	0.749139	0.961975	0.961891
	0.6	0.001891	0.001890	0.487340	0.487215	0.767404	0.767243
	1.0	0.000037	0.000036	0.287582	0.287474	0.556118	0.556051
	1.2	0.000005	0.000005	0.222685	0.222595	0.486061	0.486013
	2.0	0.000000	0.000000	0.086620	0.086579	0.321305	0.321282

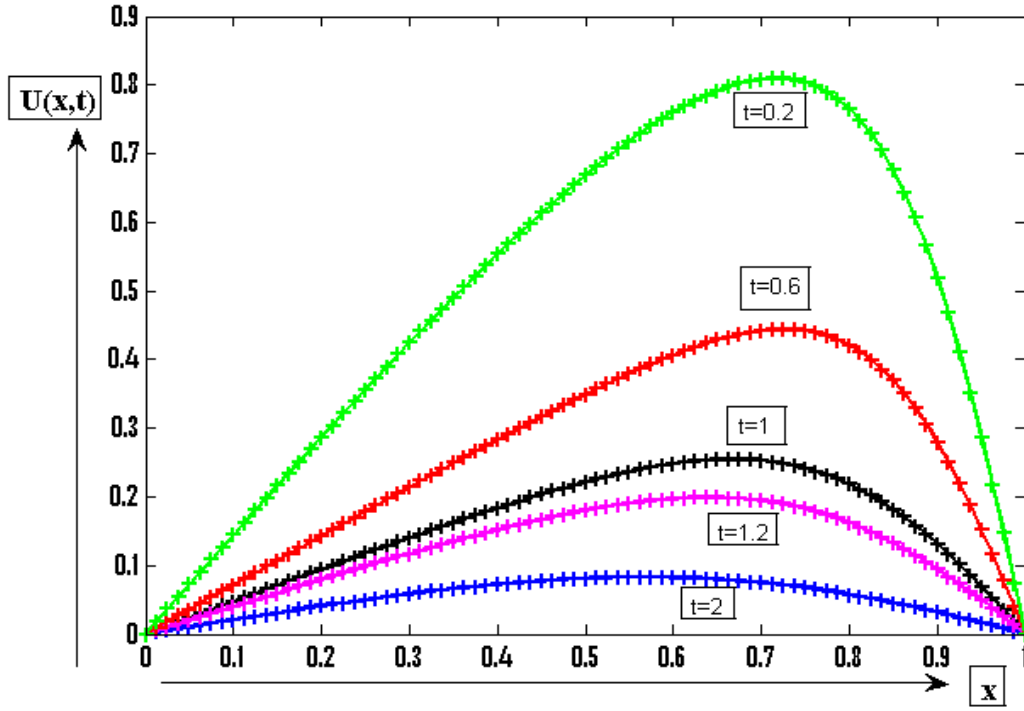
CNSFY2'e bağlı Strang parçalama metodu ile Problem 2.1'in nümerik özömlerinin fiziksel davranışlarını görmek için  $v = 1$  için ęekil 4.13,  $v = 0.1$  için ęekil 4.14 ve  $v = 0.01$  için ęekil 4.15 verildi.

$\Delta x = 0.0125$ ,  $\Delta t = 0.00001$  iken Problem 2.1 eğili t zaman adımlarında CNSFY2' mine bağlı Strang parçalama metodu ile özöldü.

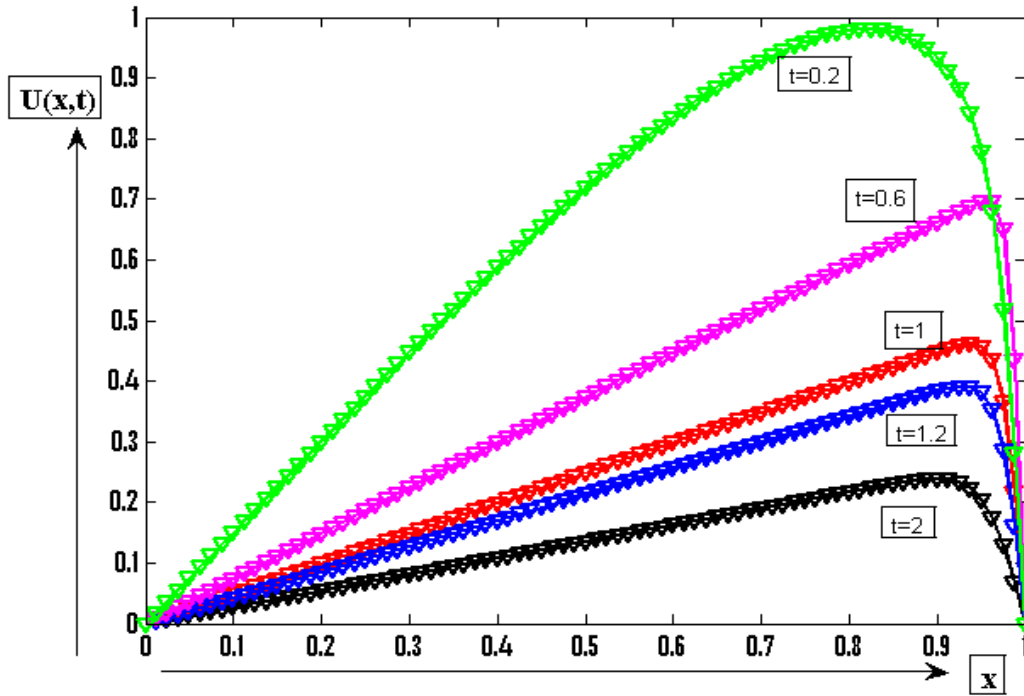
Farklı nümerik çözüm eğrileri tek bir grafikte çizildiği zaman nümerik özömlerin Problem 2.1'in fiziksel davranışlarını sergilediği göstermektedir. Viskozite parametresi  $v$  küçüldükçe grafiklerin keskin dönüşler yaptığı görölmektedir.



ęekil 4.13.  $\Delta x = 0.0125$ ,  $\Delta t = 0.00001$ ,  $v = 1$  iken değişken t değerleri için Problem 2.1'in CNSFY2' ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile özömlerinin grafiği



Şekil 4.14.  $\Delta x = 0.0125$ ,  $\Delta t = 0.00001$ ,  $v = 0.1$  iken değiken  $t$  değerleri için Problem 2.1'in CNSFY2'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile üzümünün grafiği



Şekil 4.15.  $\Delta x = 0.0125$ ,  $\Delta t = 0.00001$ ,  $v = 0.0$  iken değiken  $t$  değerleri için Problem 2.1'in CNSFY2'ine bağlı Strang parçalama yöntemi ile üzümünün grafiği

Tablo 4.25’te problem 2.2’nin CNSFY2’e bağı Strang parçalama yöntemiyle  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$  için değişen  $\Delta x$  değerleri için nümerik ve analitik çözümleri  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte verildi. Bu tablo incelendiğinde sayısal çözüm ile analitik çözüm kendi aralarında uyumlu olduğu gözükmektedir. Azalan  $\Delta x$  değerleri için nümerik çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın azaldığı görülmektedir. Tabloyu incelediğimizde  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata miktarının düzenli azaldığı anlaşılmaktadır.

**Tablo 4.25.** Problem 2.2’nin CNSFY2 ile  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $v=1$  iken  $\Delta x$ ’nin değişen değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

$x$	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.05$	$\Delta x = 0.025$	$\Delta x = 0.0125$	
0.1	0.113838	0.113129	0.112951	0.112907	0.112892
0.2	0.218059	0.216704	0.216365	0.216280	0.216252
0.3	0.303472	0.301593	0.301123	0.301005	0.300966
0.4	0.361838	0.359609	0.359050	0.358910	0.358863
0.5	0.386586	0.384216	0.383621	0.383472	0.383422
0.6	0.373700	0.371422	0.370849	0.370706	0.370658
0.7	0.322680	0.320722	0.320230	0.320107	0.320066
0.8	0.237286	0.235852	0.235492	0.235401	0.235371
0.9	0.125730	0.124972	0.124782	0.124734	0.124718
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	2.237810	0.561332	0.140396	0.035050	
$L_\infty \times 10^3$	3.163118	0.793551	0.198488	0.049596	

Problem 2.2\*'in CNSFY2,e bağlı Strang parçalama metoduna göre  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$  değerleri için değiğken  $t$  değerlerinin analitik ve nümerik zmleri Tablo 4.26'da verildi. Nümerik zm ile analitik çözümün uyumlu olduğu görülmektedir.

**Tablo 4.26.** Problem 2.2\*'nin CNSFY2 ile  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$ ,  $\nu=0.01$   $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken  $t$ 'nin değiğken değerleri için analitik ve nümerik çözümleri

$x$	$t$	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Nümerik zm	Analitik zm	Nümerik zm	Analitik zm	Nümerik zm	Analitik zm
0.25	0.2	0.049596	0.099470	0.446882	0.446807	0.499917	0.499828
	0.6	0.001951	0.001949	0.295969	0.246138	0.282100	0.282037
	1.0	0.000038	0.000038	0.165631	0.165599	0.194725	0.194690
	1.2	0.000005	0.000005	0.138964	0.138933	0.168521	0.168494
	2.0	0.000000	0.000000	0.069539	0.069514	0.109494	0.109482
0.50	0.2	0.142925	0.142888	0.773186	0.773101	0.867234	0.867136
	0.6	0.002759	0.002757	0.458073	0.457976	0.548403	0.548316
	1.0	0.000053	0.000053	0.298424	0.298343	0.385731	0.385676
	1.2	0.000007	0.000007	0.243756	0.243682	0.334941	0.334897
	2.0	0.000000	0.000000	0.110245	0.110199	0.218610	0.218588
0.75	0.2	0.102682	0.102655	0.773423	0.773440	0.969816	0.969734
	0.6	0.001952	0.001950	0.502808	0.502676	0.783131	0.782994
	1.0	0.000038	0.000038	0.295969	0.295857	0.569392	0.569319
	1.2	0.000005	0.000005	0.228891	0.228797	0.497203	0.497145
	2.0	0.000000	0.000000	0.088724	0.088680	0.326959	0.326926

#### 4.6. Parçalanmış Burgers' Denkleminin Değişik Lineerleştirme Teknikleri ile Elde Edilmiş Nümerik Sonuçlarının Karşılaştırılması

$v=1$  ,  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken problem 2.1 ve problem 2.2'nin BAB, RGSFY, CNSFY1, CNSFY2 yaklaşımlarına bağlı nümerik sonuçlarının karşılaştırılması sırası ile Tablo 4.27 ve Tablo 4.28 verildi. Bu tablolar incelendiğinde dört yöntemin nümerik sonuçları birbirleri ile uyumlu olduğu ve analitik çözüme yakın değerler oldukları görülüyor.

**Tablo 4.27.**  $v=1$ ,  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken problem 2.1'in BAB, RGSFY, CNSFY1, CNSFY2'nin nümerik sonuçlarının karşılaştırılması

$x$	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	<i>BAB</i>	<i>RGSFY</i>	<i>CNSFY1</i>	<i>CNSFY2</i>	
0.1	0.109550	0.109550	0.109308	0.109552	0.109538
0.2	0.209815	0.209815	0.209415	0.209819	0.209792
0.3	0.291930	0.291930	0.291441	0.291934	0.291896
0.4	0.347966	0.347966	0.347435	0.347969	0.347924
0.5	0.371625	0.371626	0.371075	0.371626	0.371577
0.6	0.359095	0.359095	0.358538	0.359092	0.359046
0.7	0.309950	0.309950	0.309413	0.309945	0.309905
0.8	0.227852	0.227852	0.227393	0.227846	0.227817
0.9	0.120705	0.120705	0.120420	0.120702	0.120687
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	0.034501	0.034501	0.405671	0.033940	
$L_\infty \times 10^3$	0.049480	0.049461	0.507616	0.048074	

**Tablo 4.28.**  $v=1$ ,  $t=0.1$ ,  $\Delta t=0.00001$ ,  $\Delta x=0.0125$  iken problem 2.2'nin BAB, RGSFY, CNSFY1, CNSFY2'nin nümerik sonuçlarının karşılaştırması

$x$	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	<i>BAB</i>	<i>CNSFY1</i>	<i>CNSFY2</i>	<i>CNSFY3</i>	
0.1	0.112904	0.112904	0.112652	0.112907	0.112892
0.2	0.216276	0.216276	0.215858	0.216280	0.216252
0.3	0.301001	0.301001	0.300492	0.301005	0.300966
0.4	0.358907	0.358907	0.358355	0.358910	0.358863
0.5	0.383472	0.383472	0.382901	0.383472	0.383422
0.6	0.370709	0.370709	0.370130	0.370706	0.370658
0.7	0.320112	0.320112	0.319553	0.320107	0.320066
0.8	0.235407	0.235407	0.234927	0.235401	0.235371
0.9	0.124738	0.124738	0.124438	0.124734	0.124718
<b>Hata Normu</b>					
$L_2 \times 10^3$	0.035639	0.035637	0.422558	0.035050	
$L_\infty \times 10^3$	0.051113	0.051089	0.527612	0.049596	

## 5. SONUÇLAR VE ÖNERGİLER

Crank-Nicolson sonlu fark yöntemlerine bağılı olarak Strang parçalama metodu ile Burgers'' denkleminde değişik lineerleştirme teknikleri uygulandı. Bu yöntemlerin analitik çözüme ne kadar yakın olduğunu görebilmek için Matlab programı yardımı ile sayısal çözümleri elde edildi. Bu yöntemlere ait sayısal çözümler tablo ve grafikler çizilerek sunuldu.

Burgers'' denklemini parçalama yöntemi ile çözmek için önce viskozitesiz Burgers'' denklemini çözüp sonra ısı iletim denklemini çözmenin daha iyi sonuç verdiği görüldü.

Burgers'' denklemini Strang parçalama metoduna bağılı CNSFY, RGSFY, CNSFY1 ve CNSFY2 yaklaşımları ile çözüldüğünde sayısal çözümlerin analitik çözümler ile uyumlu olduğu ve  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata miktarının yeterince küçük olduğu görüldü.

Problem 2.1''i CNSFY, RGSFY, CNSFY1 ve CNSFY2 yaklaşımları ile çözdüğümüzde elde edilen nümerik çözümlerinin fiziksel davranışları incelemek için çeşitli  $t$  zaman adımlarında  $\nu=1$ ,  $\nu=0.1$  ve  $\nu=0.01$  için Matlab programı yardımı ile nümerik çözümlerin eğrileri çizildi. Viskozite parametresi  $\nu$  küçüldükçe nümerik çözümlerin sağa keskin dönüş yaptığının grafikler ile gösterildi.

## KAYNAKÇA

- Aksan, E. N., 2005. A numerical solution of Burgers'' equation by finite element method constructed on the method of discretization in time. *Applied mathematics and computation*, 170(2), 895-904.
- Aslan, Ğ, 2007, Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin benzerlik çözümleri üzerine, (Doktora tezi), *Matematik anabilim dalı*, Ege üniversitesi, Bornova-Ğmir.
- Bhardwaj, D., Shankar, R., 2000. A computational method for regularized long wave equation. *Computers Mathematics with Applications*, 40(12), 1397-1404.
- Blanes, S., Moan, P. C., 2000. Splitting methods for the time-dependent Schrödinger equation. *Physics Letters A*, 265(1-2), 35-42.
- Blanes, S., Moan, P. C., 2001. Splitting methods for non-autonomous Hamiltonian equations. *Journal of Computational Physics*, 170(1), 205-230.
- Blanes, S., Casas, F., 2006. Splitting methods for non-autonomous separable dynamical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(19), 5405.
- Blanes, S., Casas, F., Murua, A., 2010. Splitting methods with complex coefficients. *SeMA Journal*, 50(1), 47-60.
- Blanes, S., Seydaoglu, M., 2013. High-order splitting methods for separable non-autonomous parabolic equations. *Preprint*.
- Blanes, S., Casas, F., 2016. A concise introduction to geometric numerical integration. Chapman and Hall/CRC.
- Cole, J.D., 1951. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quarterly of applied mathematics*, 9(3), 225-236.
- Çelikkaya, Ğ, 2018, Operatör splitting B-Spline kollokasyon yöntemi ile bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri, (Doktora tezi), *Fen Bilimleri enstitüsü*, Malatya Ğönü üniversitesi, Malatya
- Esen, A., Bahadır, A.R.,1998, M644 nümerik analizde özel konular fen bilimleri enstitüsü ödevi lineer denklem sistemlerinin çözümleri, *Fen Edebiyat Fakültesi*,Ğönü üniversitesi,Malatya
- Gülsu, M., ÖziĞ, T., 2005. Numerical solution of Burgers'' equation with restrictive Taylor approximation. *Applied mathematics and computation*, 171(2), 1192-1200.
- Hansen, E., Ostermann, A., 2009. High order splitting methods for analytic semigroups exist. *BIT Numerical Mathematics*, 49(3), 527-542.

- Hansen, E., Ostermann, A., 2010. Dimension splitting for quasilinear parabolic equations. *IMA journal of numerical analysis*, 30(3), 857-869.
- Harwood, R.C., 2011, Operator Splitting Method and Applications Semilinear Parabolic Partial Differential Equations, (PhD Thesis), *Department of mathematics*, Washington state university
- Holden, H., Karlsen, K. H., Risebro, N. H., 1999. Operator splitting methods for generalized Korteweg–de Vries equations. *Journal of Computational Physics*, 153(1), 203-222.
- Holden, H., Karlsen, K., Risebro, N., Tao, T., 2011. Operator splitting for the KdV equation. *Mathematics of Computation*, 80(274), 821-846.
- Holden, H., Lubich, C., Risebro, N., 2013. Operator splitting for partial differential equations with Burgers nonlinearity. *Mathematics of Computation*, 82(281), 173-185.
- Hon, Y.C., Mao, X. Z., 1998. An efficient numerical scheme for Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 95(1), 37-50.
- Hopf, E., 1950. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu x x$ . *Communications on Pure and Applied mathematics*, 3(3), 201-230.
- Inan, B., Bahadir, A. R., 2013. Numerical solution of the one-dimensional Burgers' equation: Implicit and fully implicit exponential finite difference methods. *Pramana*, 81(4), 547-556.
- Iskandar, L., Mohsen, A., 1992. Some numerical experiments on the splitting of Burgers' equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 8(3), 267-276.
- Jain, P. C., Shankar, R., Singh, T. V., 1992. Cubic spline technique for solution of Burgers' equation with a semi-linear boundary condition. *Communications in applied numerical methods*, 8(4), 235-242.
- Jiwari, R., 2012. A Haar wavelet quasilinearization approach for numerical simulation of Burgers' equation. *Computer Physics Communications*, 183(11), 2413-2423.
- Jiwari, R., 2015. A hybrid numerical scheme for the numerical solution of the Burgers' equation. *Computer Physics Communications*, 188, 59-67..
- Jiwari, R., Alshomrani, A. S., 2017. A new algorithm based on modified trigonometric cubic B-splines functions for nonlinear Burgers'-type equations. *International Journal of Numerical Methods for Heat Fluid Flow*, 27(8), 1638-1661.
- Kadalbajoo, M. K., Awasthi, A., 2006. A numerical method based on Crank-Nicolson scheme for Burgers' equation. *Applied mathematics and computation*, 182(2), 1430-1442.

- Kutluay, S., Esen, A., 2004. A linearized numerical scheme for Burgers-like equations. *Applied mathematics and computation*, 156(2), 295-305.
- Kutluay, S., Esen, A., Dag, I., 2004. Numerical solutions of the Burgers'' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 167(1), 21-33.
- Liao, W., 2008. An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional Burgers'' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 206(2), 755-764.
- Lubich, C., 2008. On splitting methods for Schrödinger-Poisson and cubic nonlinear Schrödinger equations. *Mathematics of computation*, 77(264), 2141-2153.
- Malfliet, W., Hereman, W., 1996. The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. *Physica Scripta*, 54(6), 563.
- Marchuk, G. I., 1968. Some application of splitting-up methods to the solution of mathematical physics problems. *Aplikace matematiky*, 13(2), 103-132.
- Mizrak, M., Ertağ, A., 2008, Hiperbolik tanjant yönteminin klasik boussinesq sistemine uygulanması. *Dicle University Journal of Ziya Gokalp Education Faculty*, 11.
- Muslu, G. M., Erbay, H. A., 2003. A split-step Fourier method for the complex modified Korteweg-de Vries equation. *Computers Mathematics with Applications*, 45(1-3), 503-514.
- Özis, T., Esen, A., Kutluay, S., 2005. Numerical solution of Burgers'' equation by quadratic B-spline finite elements. *Applied Mathematics and Computation*, 165(1), 237-249.
- Öziğk, M. N., Orlande, H. R., Colaço, M. J., Cotta, R. M., 2017. *Finite difference methods in heat transfer*. CRC press.
- Pandey, K., Verma, L., Verma, A. K., 2009. On a finite difference scheme for Burgers'' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 215(6), 2206-2214.
- Rubin, S. G., Graves Jr, R. A., 1975. A cubic spline approximation for problems in fluid mechanics. *Nasa TR R-436*.
- Rouhi, A., Wright, J., 1995. A new operator splitting method for the numerical solution of partial differential equations. *Computer physics communications*, 85(1), 18-28.
- Saka, B., Dağ, Ğ, 2007. Quartic B-spline collocation method to the numerical solutions of the Burgers'' equation. *Chaos, Solitons Fractals*, 32(3), 1125-1137.
- Saka, B., 2009. Cosine expansion-based differential quadrature method for numerical solution of the KdV equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(5), 2181-2190.

- Sari, M., Gürarlan, G., 2009. A sixth-order compact finite difference scheme to the numerical solutions of Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 208(2), 475-483.
- Seydaoğlu, M., 2010, 1-Boyutlu Burgers' denkleminin sonlu fark yöntemleri ile nümerik çözümleri, (yüksek lisans tezi), *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Çönü üniversitesi, Malatya.
- Seydaoğlu, M., 2015, Burgers' tipi kısmi diferansiyel denklemlerin yüksek mertebeden parçalama(Splitting) metodları ile sayısal çözümleri üzerine, (Doktora tezi), *Fen bilimleri enstitüsü*, Ege üniversitesi, İzmir.
- Seydaoğlu, M., Erdoğan, U., Öziç, T., 2016. Numerical solution of Burgers' equation with high order splitting methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 291, 410-421.
- Seydaoğlu, M., 2018. An accurate approximation algorithm for Burgers' equation in the presence of small viscosity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 344, 473-481.
- Seydaoğlu, M., 2019. A Meshless Method for Burgers' Equation Using Multiquadric Radial Basis Functions with a Lie-Group Integrator. *Mathematics*, 7(2), 113.
- Shankar, R., Singh, T. V., Bassaif, A. A., 1995. Numerical solution of coupled burgers equations in inhomogeneous form. *International journal for numerical methods in fluids*, 20(11), 1263-1271.
- Smith, G.D., 1985, Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods. Oxford university press.
- Strang, G., 1968. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5(3), 506-517.
- Uçar, Y., 2005, 1-Boyutlu Burgers' tipi denklemlerin sonlu fark çözümleri, (yüksek lisans tezi), *Matematik anabilmdalı*, Çönü üniversitesi, Malatya.
- Yoshida, H., 1990. Construction of higher order symplectic integrators. *Physics letters A*, 150(5-7), 262-268.
- Zhang, P. G., Wang, J. P., 2012. A predictor–corrector compact finite difference scheme for Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 219(3), 892-898.

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	✓	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	✓	
Denklem yazımları uygun mu?	✓	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	✓	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	✓	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	✓	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	✓	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	✓	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	✓	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	✓	
Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu?	✓	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

Unvanı Adı SOYADI

Öğrenci : Aydın KAYA

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

İmza

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına izin veriyorum.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI

Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖZLÜ

Tarih

18.07.2019

İmza

## ÖZGEÇMİŞİ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Aydın KAYA  
**Uyruğu** : T.C  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Diyarbakır-10.09.1980  
**Telefon** : 5079474909  
**Faks** :  
**e-mail** : etikahlak@gmail.com

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe İl	Bitirme Yılı
Lise	: Ziya Gökalp Lisesi	1998
Üniversite	: Dicle Üniversitesi	2003
Yüksek Lisans:	Muğ Alpaslan Üniversitesi	2019
Doktora	:	

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
9	PTT A.Ş.	Memur

**UZMANLIK ALANI:**Matematik

**YABANCI DİLLER** : İngilizce

**BELİRTMEK İSTENİLEN ÖZELLİKLER**

**YAYINLAR**