



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DUAL BÉZİER EĞRİLERİ VE REGLE**  
**YÜZEYLER**

**Emrah ÖZEN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Şubat-2022**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**



T.C.  
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL BÉZİER EĞRİLERİ VE REGLE  
YÜZEYLER

Emrah ÖZEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU

Şubat-2022  
MUŞ  
Her Hakkı Saklıdır

## TEZ KABUL ve ONAYI

Emrah ÖZEN tarafından hazırlanan “**DUAL BÉZIER EĞRİLERİ VE REGLE YÜZEYLER**” adlı tez çalışması 04/02/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Prof. Dr. Talat KÖRPINAR  
Muş Alparslan Üniversitesi,  
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

#### Danışman

Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU  
Muş Alparslan Üniversitesi,  
Eğitim Fak., Mat. ve Fen Bil. Eğt. Bölümü

.....

#### Üye

Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI  
Bitlis Eren Üniversitesi,  
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Yukarıdaki sonuç;  
Enstitü Yönetim Kurulu ...../...../..... Tarih ve ...../..... nolu kararı  
ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI  
FBE Müdürü

Bu tez çalışması Muş Alparslan Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından BAP-21-EMF-4902-02 nolu proje ile desteklenmiştir.

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Emrah ÖZEN

Tarih:

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### DUAL BÉZIER EĞRİLERİ VE REGLE YÜZEYLER

Emrah ÖZEN

Muş Alparslan Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU

$B(t)$  ve  $B^*(t)$ , kontrol noktaları sırasıyla  $\{P_i\}$  ve  $\{P^*_i\}$  olan  $n$ . dereceden Bézier eğrileri olmak üzere bir dual Bézier eğrisi,  $\hat{B}(t) = B(t) + \varepsilon B^*(t)$  biçiminde verilmiş olsun. Bu durumda  $\hat{B}$  dual Bézier eğrisinin birim dual küre üzerine projeksiyonu da  $\tilde{B}(t)$  olsun.

Bu çalışmada  $\tilde{B}(t)$  kapalı eğrisine karşılık gelen regle yüzey ve bu yüzeyin ana doğrularını ifade eden doğrultman vektörü  $U_1$  olmak üzere  $\left\{ \vec{U}_1, \vec{U}_2 = \frac{\vec{U}_1'}{\|\vec{U}_1'\|}, \vec{U}_3 = \vec{U}_1 \times \vec{U}_2 \right\}$  çatısı, bu çatının hareket denklemleri ve geodezik eğrilikleri başlangıçta verilen  $\hat{B}$  dual Bézier eğrisinin reel ve dual kısımları ile ifade edilmiştir. Ayrıca hareket ile oluşacak ani Pfaf vektörü, Pole ve Steiner vektörleri ile  $\vec{U}_1 -$ ,  $\vec{U}_2 -$ , ve  $\vec{U}_3 -$  yörünge yüzeylerine ait integral invaryantlar ifade edilmiştir.

**2022, 46 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Dual Bézier eğrisi, hareketli çatı, regle yüzey, yörünge yüzeyi, integral invaryantlar.

## ABSTRACT

## MS THESIS

# DUAL BÉZIER CURVES AND RULED SURFACES

Emrah ÖZEN

Muş Alparslan University  
Natural and Applied Science  
Department of Mathematics

Advisor: Assist Prof. Muhsin İNCESU

Let a dual Bézier curve  $\hat{B}(t) = B(t) + \varepsilon B^*(t)$ , where  $B(t)$  and  $B^*(t)$  are the Bézier curves of degree  $n$  with control points  $\{P_i\}$  and  $\{P^*_i\}$  respectively be given. And also  $\tilde{B}(t)$  be a projection curve of  $\hat{B}(t)$  to a unit dual sphere.

In this study the ruled surface corresponding the closed spherical curve  $\tilde{B}(t)$ ; the moving frame  $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2 = \frac{\vec{U}_1'}{\|\vec{U}_1'\|}, \vec{U}_3 = \vec{U}_1 \times \vec{U}_2\}$ , where  $\vec{U}_1$  is a unit vector of director curve of ruled surface corresponding closed spherical curve  $\tilde{B}(t)$ ; the equation of the derivatives of the moving frame  $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3\}$  and geodezic curvatures are stated in terms of the real and dual parts of given dual Bézier curve  $\hat{B}(t)$ . In addition the instantaneous Pfaffian vector and the pole and the steiner vectors of the motion are stated in terms of the real and dual parts of given dual Bézier curve  $\hat{B}(t)$ . Finally the integral invariants of the  $\vec{U}_1 -$ ,  $\vec{U}_2 -$ , ve  $\vec{U}_3 -$  closed trajectory surfaces corresponding the closed spherical curve  $\tilde{B}(t)$  are obtained.

**2022, 46 Pages**

**Keywords:** Dual Bézier curves, moving frame, ruled surface, trajectory surface, integral invariants.

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalıőmasında her türlü desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU'ya, tez savunması sınavında ve sonrasında gösterdikleri ilgi ve yönlendirmeden dolayı jüri üyeleri hocalarım Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR ve Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Emrah ÖZEN  
MUŞ-2022



## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....</b>	<b>2</b>
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM .....</b>	<b>3</b>
3.1 Dual Sayılar ve $D$ -Modülü.....	3
3.2 Regle Yüzeyleri .....	5
3.3 Kapalı Regle Yüzey ve İntegral İnvaryantları .....	7
3.3 Genel Bézier Eğrileri .....	9
3.4 Bézier Eğrilerinin Özellikleri.....	10
3.5 Bézier Eğrilerinde Türev Kavramı .....	10
3.6 Bézier Eğrileri İçin De Casteljau Algoritması .....	11
3.7 Bézier Eğrileri İçin Bölme (Subdivision) Algoritması .....	12
3.8 Dual Bézier Eğrileri .....	13
<b>4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA .....</b>	<b>20</b>
4.1 Hareketin Yapısal Denklemi.....	21
4.2 Bézier Eğrilerinde İntegral.....	30
4.2.1 Lineer Bézier Eğrisi .....	30
4.2.2 Kuadratik Bézier Eğrisi .....	30
4.2.3 Kübik Bézier Eğrisi .....	31
4.2.4 Genel Bézier Eğrisi .....	31
4.3 Hareketin İnterpolasyonu.....	33
4.4. Sayısal Örnekler.....	34
<b>5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....</b>	<b>38</b>
5.1 Sonuçlar .....	38
5.2 Öneriler .....	42
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>43</b>

## SİMGELER ve KISALTMALAR

### Simgeler

$\lambda$	: Açılım Açısı
$\ell$	: Açılım Uzunluğu
$\Psi$	: Ani Pfaf vektörü
$\hat{B}$	: Dual Bézier Eğrisi
$\tilde{B}$	: Projeksiyon Eğrisi
$X(t, v)$	: Regle Yüzey
$g$	: Geodezik Eğrilik
$a$	: Yüzey Alanı
$P$	: Pole vektörü
$d$	: Steiner vektörü

### Kısaltmalar

CAD	: Bilgisayar Destekli Tasarım
CAGD	: Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 $U = U + \varepsilon U^*$ vektörüne karşılık gelen yönlü L doğrusu .....	5
Şekil 3.2 Regle yüzey .....	5
Şekil 3.3 Kapalı $r(t)$ eğrisi boyunca oluşan $V_1$ -kapalı regle yörünge yüzeyi.....	7
Şekil 3.4 Kapalı Regle yüzeyin boğaz çizgisi ve açılım uzunluğu ve açılım açısı.....	8
Şekil 3.5 Bir Bézier eğrisinin ayrılması.....	12
Şekil 3.6 Bir Bézier eğrisi için bölme algoritması.....	13
Şekil 3.7 $\hat{B}(t)$ Bézier eğrisinin birim dual küre üzerine projeksiyonu olan $\tilde{B}(t)$ eğrisi	13
Şekil 4.1 Verilen bir $\hat{B}(t)$ kapalı dual Bézier eğrisinin temsili grafiği .....	35
Şekil 4.2 $\hat{B}(t)$ kapalı dual Bézier eğrisi ve onun birim dual küre projeksiyonu olan $\tilde{B}(t)$ kapalı küresel eğrisi .....	35
Şekil 4.3 $\tilde{B}(t)$ eğrisinin E. Study dönüşümü ile karşılık geldiği $\vec{U}_1$ - regle yörünge yüzeyi.....	36
Şekil 4.4 $\tilde{B}(t)$ eğrisinin E. Study dönüşümü ile karşılık geldiği $\vec{U}_2$ - regle yörünge yüzeyi.....	36
Şekil 4.5 $\tilde{\tilde{B}}(t)$ eğrisinin E. Study dönüşümü ile karşılık geldiği $\vec{U}_3$ - regle yörünge yüzeyi.....	37

## 1. GİRİŞ

$\mathbb{D}$  ile gösterilen dual sayılar 1873'te William Clifford (1873) tarafından tanımlandı ve Eduard Study (1891) tarafından geliştirildi. Bu kavramın mekanikteki ilk uygulamaları ilk defa A.P. Kolelnikor tarafından verildi (Li and Pei, 2016). Vida sistemleri, uzay mekanizmaları gibi alanlarda sıklıkla kullanılmaktadır. Bu sayıların cebirsel yapının geliştirilmesiyle geometrideki temel kavramlar doğrular ile ifade edilmek yerine noktalar ile betimlenmiştir. Böylece  $\mathbb{R}^3$  te yönlendirilmiş bir doğruya karşılık gelen dual küresel nokta ile bir regle yüzeyin incelenmesi, küresel bir eğrinin çalışılmasına indirgenmiştir. Birçok bilim insanı bu alanda çalışmalar yapmıştır. Özellikle Hoschek (1985), kapalı regle yüzeylerin karakterizasyonu için integral değişmezleri araştırmış; Gürsoy (1990a,1990b,1992), Gürsoy ve Küçük (1999, 2004), Hacısalihoğlu (1972, 1983) regle yüzeyler üzerinde dual büyüklükler olarak belirtilen integral değişmezleri çalışmışlardır.

Bu çalışmamızda Incesu (2021) de ifade edilen dual Bézier eğrileri dikkate alınarak bu eğrilerin birim dual küre üzerine projeksiyonunun kapalı olması durumunda oluşacak yörünge yüzeyleri incelenmiştir. Ayrıca  $\tilde{B}(t)$  kapalı eğrisine karşılık gelen regle yüzey ve bu yüzeyin ana doğrularını ifade eden doğrultman vektörü  $\vec{U}_1$  olmak üzere  $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2 = \frac{\vec{U}_1}{\|\vec{U}_1\|}, \vec{U}_3 = \vec{U}_1 \times \vec{U}_2\}$  çatısı, bu çatının hareket denklemleri ve geodezik eğrilikleri başlangıçta verilen  $\hat{B}$  dual Bézier eğrisinin reel ve dual kısımları ile ifade edilmiştir. Ayrıca hareket ile oluşacak ani Pfaf vektörü Pole ve Steiner vektörleri ile  $\vec{U}_1 - , \vec{U}_2 - ,$  ve  $\vec{U}_3 -$  yörünge yüzeylerine ait integral invariantlar ifade edilmiştir.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bir doğrunun hareketiyle oluşan regle yüzey, mekanik, robotik, mimari ve diğer endüstriyel alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Regle yüzeyler Öklid uzayları, Lorentz - Minkowski uzayları, Galile ve pseudo-Galile uzayları gibi birçok uzayda incelenmiştir Divjak and Zcaron, (2002), Kazaz, Özdemir ve Güröglu (2008), Nesovic vd., (2016), Güler ve Kasap, (2018), (Hathout, Bekar ve Yaylı, 2017), Taş (2016), (Taş ve İlarıslan, 2019), (Taş ve Gürsoy, 2018).

Parametrik eğriler ve parametrik yüzeyler bilgisayar destekli tasarımın (CAD) temelini oluşturur. Bilgisayar destekli geometrik tasarımda (CAGD) kuşkusuz en önemli buluşlar Bézier eğrileri ve yüzeyleri, Coons yamaları (patch) ve ardından B-spline yöntemleridir. Bézier eğrileri ve yüzeyleri ilk kez 1958-1960 yıllarında Citroen ve Renault şirketlerinde mühendis olan Paul de Casteljou ve Pierre Bézier tarafından birbirinden bağımsız olarak geliştirildi. De Casteljou, P. Bézier'den hemen önce geliştirildi, ancak çalışmalarını hiçbir yerde yayınlamadı. Böylece tamamen Bernstein'in polinom eğrilerinin ve yüzeylerinin ifadesi ile gelişen Bézier eğrileri ve yüzeyleri teorisi, P. Bézier adıyla bilinir hale geldi (Farin, 1989).

CAGD, 1974 yılında Amerika Birleşik Devletleri'nde Utah Üniversitesi'nde düzenlenen bir konferanstan sonra Barnhill ve Riesenfeld'in (1974) öncülüğünde öz disipline girmiştir. Farouki ve Rajan (1987), CAD sistemlerindeki en kararlı sayısal çözümlerin Bézier ve rasyonel Bézier eğrileri olduğunu göstermiştir.

Bézier eğrileri (CAD) (CAM) sistemlerinde uygulamalarının örneklerini çok geniş alanda gördüğümüz eğrilerdir. Bézier eğrileri ve yüzeyleri üzerinde çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalara örnek olarak G. Farin (1989,1990), R. Farouki (1985), W. Tiller (1984), H. Potmann (1995,1997), R. Farouki ve Carla Manni (2001), R. Krasauskas (2002), Reyes (1998), E. Mainar JM Pena ve Reyes (2001), B. Jüttler (1996), QJ Ge (1999), Mavroidis ve Roth (1997) ve R. Cholewa ve ark. (2002), Incesu (2003), Küçük (2004), Oren (2016, 2018a, 2018b), Samancı (2018a, 2018b, 2018c), Samancı, Çelik, Incesu (2015) verilebilir.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1 Dual Sayılar ve $D$ -Modülü

İki boyutlu Öklid uzayları  $E^2$  üzerinde toplama ve skaler ile çarpma olarak adlandırılan iki işlem aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} +: E^2 \times E^2 &\rightarrow E^2 \\ (A, B) &\rightarrow A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ \cdot: E^2 \times E^2 &\rightarrow E^2 \\ (A, B) &\rightarrow A \cdot B = (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

burada  $A = (a_1, a_2)$  ve  $B = (b_1, b_2)$  dir. Bu işlemler altında  $E^2$  kümesi bir halkadır ve dual sayılar olarak adlandırılır. Bu küme  $\mathbb{D}$  ile gösterilir.  $\mathbb{D}$ 'nin herhangi bir  $A = (a, a^*)$  elemanı şu şekilde yazılabilir:

$$A = a(1,0) + a^*(0,1) \quad (3.1)$$

$(1,0)$  elemanına gerçek birim,  $(0,1)$  elemanına dual birim adı verilir ve  $\varepsilon$  ile gösterilir.  $\varepsilon^2 = 0$  olduğu açıkça görülmektedir. Bu nedenle  $\varepsilon$  elementi nilpotent bir elementtir. Herhangi bir  $(r, 0)$  elemanı  $r \in \mathbb{R}$  ile izomorfiktir. Dolayısıyla herhangi bir  $A = (a, a^*)$  dual sayısı  $A = a + \varepsilon a^*$  olarak yazılabilir, burada  $a, a^* \in \mathbb{R}$ . Eğer bir  $A = a + \varepsilon a^*$  dual sayısı verilirse, o zaman  $a$  gerçek sayısına  $A$  dual sayısının gerçek kısmı denir ve  $a^*$  gerçek sayısına  $A$  dual sayısının dual kısmı denir. Bir dual  $A = a + \varepsilon a^*$  sayının eşlenik sayısı  $\bar{A} = a - \varepsilon a^*$ 'dir (Hacısalihoglu, 1983).

$A = a + \varepsilon a^*$  dual sayısının  $A$  nın reel kısmı olan, sıfır olmayan  $a$  gerçek sayısı için çarpma operatörü tarafından ters çevrilmesi şu şekilde tanımlanır:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{a} - \varepsilon \frac{a^*}{a^2} \quad (3.2)$$

Eğer  $a = 0$  ise  $A = \varepsilon a^*$  sayısının tersi yoktur. Böylece, dual sayılar kümesi cebirsel olarak bir halka oluşturur, ancak bir cisim oluşturmaz.

$A = a + \varepsilon a^*$  sayısının mutlak değeri  $|A| = \sqrt{A \cdot \bar{A}} = |a|$  dir. Herhangi bir  $A = a + \varepsilon a^*$  dual sayısı  $A = \begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix}$  biçiminde bir matris gösterimine sahiptir. Bu formda reel ve dual birimler sırasıyla;  $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ve  $\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  dir (Hacısalihoglu, 1983).

$\mathbb{D}^3$ 'teki herhangi bir dual  $\hat{U}$  vektörü  $\hat{U} = (\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3)$  olarak yazılabilir, burada  $i = 1, 2, 3$  için  $\vec{U}_i = u_i + \varepsilon u_i^* \in \mathbb{D}$  dir. Aynı  $\hat{U}$  vektörü  $\hat{U} = \vec{U} + \varepsilon \vec{U}^*$  olarak da

yazılabilir, burada  $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $U^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*) \in \mathbb{R}^3$  dır. Bu nedenle  $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \mathbb{D}^3$  kümesi bir  $D$ -modüldür (Hacısalihoglu, 1983).

İki dual  $\hat{U}$  ve  $\hat{V}$  vektörleri  $\hat{U} = \vec{U} + \varepsilon \vec{U}^*$  ve  $\hat{V} = \vec{V} + \varepsilon \vec{V}^*$  olarak verilsin. O zaman iki dual  $\hat{U}$  ve  $\hat{V}$  vektörün iç çarpımı  $\langle \hat{U}, \hat{V} \rangle = \langle \vec{U}, \vec{V} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{U}^*, \vec{V} \rangle + \langle \vec{U}, \vec{V}^* \rangle)$  olur. Bir  $\hat{U} = \vec{U} + \varepsilon \vec{U}^*$  dual vektörünün normu, dual vektörün reel kısmı sıfırdan farklıysa

$$\|\hat{U}\| = \sqrt{\langle \hat{U}, \hat{U} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{U}, \vec{U} \rangle + 2\varepsilon \langle \vec{U}, \vec{U}^* \rangle} = \|\vec{U}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{U}, \vec{U}^* \rangle}{\|\vec{U}\|} = u + \varepsilon u^* \in D \quad (3.3)$$

biçiminde bir dual sayıdır.

Bir dual  $\hat{U}$  vektörünün normu  $1 + \varepsilon 0 = 1$  ise, o zaman  $\hat{U}$  vektörüne dual birim vektör denir (Hacısalihoglu, 1983).

**Önerme 3.1**  $\hat{U} = \vec{U} + \varepsilon \vec{U}^*$  dual vektörü verilsin. Eğer  $\|\hat{U}\| = 1$  ise  $\|\vec{U}\| = 1$  ve  $\langle U, U^* \rangle = 0$  dir (Hacısalihoglu, 1983).

**Önerme 3.2**  $\hat{U} = \vec{U} + \varepsilon \vec{U}^*$  dual vektörü verilsin. Eğer  $\|\hat{U}\| \neq 1$  ve  $U \neq 0$  ise

$$\begin{aligned} \check{U} &= \frac{\hat{U}}{\|\hat{U}\|} = \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|} + \varepsilon \frac{\vec{U}^* - \frac{\langle \vec{U}, \vec{U}^* \rangle}{\|\vec{U}\|^2} \vec{U}}{\|\vec{U}\|} = \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|} + \varepsilon \left( \frac{\vec{U}^*}{\|\vec{U}^*\|} - \frac{\langle \vec{U}, \vec{U}^* \rangle \vec{U}}{\|\vec{U}\|^3} \right) \\ &= \check{U} + \varepsilon \check{U}^* \end{aligned} \quad (3.4)$$

vektörü  $\hat{U}$  yönündeki birim dual vektördür (Hacısalihoglu, 1983).

**Tanım 3.1**  $\mathbb{D}^3$  teki  $D$ -modul üzerindeki dual vektörlerin kümesi birim dual küre diye adlandırılır. Yani birim dual küre

$$\{\check{U} = \check{U} + \varepsilon \check{U}^* \in D^3: \|\check{U}\| = 1\} \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır. (Hacısalihoglu, 1983)

**Teorem 3.1 (E. Study)**  $\check{U} = \check{U} + \varepsilon \check{U}^*$  ( $\vec{U} \neq 0$ ) birim dual küre üzerindeki her bir vektör  $\mathbb{R}^3$  te yönlendirilmiş bir doğruya bire bir olarak karşılık gelir (Hacısalihoglu, 1983).

Bu teoreme göre,  $\check{U} = \check{U} + \varepsilon \check{U}^*$  ( $\vec{U} \neq 0$ ) birim dual vektörüne yalnızca bir yönlü doğru karşılık gelir. Burada  $\check{U}$  reel vektörü karşılık gelen vektörün yönünü gösterir ve  $\check{U}^*$  vektörü de  $\check{U}$  nun orjine göre vektörel momentini ifade eder.  $\check{U}$  nun vektörel momentini  $\check{U}^* = 0M \wedge \check{U}$  ile verilir. Burada  $M$ ,  $\check{U}$ -yönlü doğrusunun üzerinde bir nokta ve  $\wedge$  sembolü de  $\mathbb{R}^3$  deki vektörlerin dış çarpımını ifade eder (Gürsoy,1990a).



$$d\varphi \cdot d\varphi^* = \langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle$$

elde edilir.

$\vec{x}(t)$  ve  $\vec{x}(t + dt)$  dual birim vektörleri arasındaki  $d\Phi$  dual açısı, aynı zamanda bu dual vektörlerin uç noktaları arasındaki dual küresel uzaklık olarak da alınabilir.

$d\varphi$  ve  $d\varphi^*$  reel büyüklükleri ise, çizgiler uzayında regle yüzeyin  $\vec{x}(t)$  ve  $\vec{x}(t + dt)$  ana doğruları arasında, sırasıyla, açı ve en kısa uzaklığa karşılık gelirler.

Ortogonal koordinat dönüşümlerinde iç çarpım korunduğu (değişmez kaldığı) için

$$\langle d\vec{X}, d\vec{X} \rangle = \langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle + 2\varepsilon \langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle$$

ifadesindeki,

$$\langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle \text{ ve } \langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle$$

iç çarpımları da, koordinat dönüşümlerine karşı değişmezdir. O halde, bunların oranı, regle yüzeyin en basit birer diferansiyel değişmezidir. (Hacısalihoglu, 1983).

**Tanım 3.2**  $\vec{x} = \vec{x}(t)$ ,  $\|\vec{x}\| = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$  regle yüzeyinde,  $\vec{x}(t)$  ve  $\vec{x}(t + dt)$  komşu ana doğruları arasındaki dual açı,  $d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi^*$  olmak üzere,

$$\frac{1}{d} = \frac{\langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle}{\langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle} = \frac{d\varphi}{d\varphi^*}$$

büyükliğüne bu yüzeyin  $\vec{x}(t)$  ana doğrusu boyunca dağıtma parametresi veya drall'ı denir. (Hacısalihoglu, 1983)

**Tanım 3.3** Komşu ana doğruları kesişen regle yüzeylere torslar veya açılabilir yüzeyler denir.

Torslar için drall'ın sıfır olması bir karakteristiktir. Zira,

$$\frac{1}{d} = \frac{d\varphi}{d\varphi^*} = 0 \Rightarrow d\varphi^* = 0$$

dır. Bu ise,  $\vec{x}(t)$  ve  $\vec{x}(t + dt)$  ana doğrularının kesişmesi demektir. Drall'ın bu tanımı silindireler için geçerli değildir. Drall'ı sıfır olmayan bir regle yüzeyde komşu ana doğrular aykırıdır. (Hacısalihoglu, 1983)

**Tanım 3.4**  $\vec{x} = \vec{x}(t)$ ,  $\|\vec{x}\| = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$  regle yüzeyinde,  $\vec{x}(t)$  ve  $\vec{x}(t + dt)$  komşu ana doğruların ortak dikmesinin,  $\vec{x}(t)$  ana doğrusu üzerindeki ayağına, merkez noktası veya boğaz noktası veya sitriksiyon noktası denir. Bu noktaların geometrik yerine ise boğaz çizgisi veya sitriksiyon çizgisi denir. (Hacısalihoglu, 1983)

Verilen bir regle yüzeyde, bütün ana doğruları kesen bir  $(C)$  eğrisi yüzeyin dayanak eğrisi (Referans eğrisi) olarak anılabilir.

**Tanım 3.5**  $\vec{x} = \vec{x}(t)$ ,  $\|\vec{x}\| = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$  regle yüzeyinde,  $\vec{x}(t)$  ve  $\vec{x}(t + dt)$  komşu ana doğrularını dik kesen eğriye, regle yüzeyin ortogonal yörünge eğrisi denir. (Hacısalıhoğlu, 1983)

### 3.3 Kapalı Regle Yüzey ve İntegral İnvaryantları

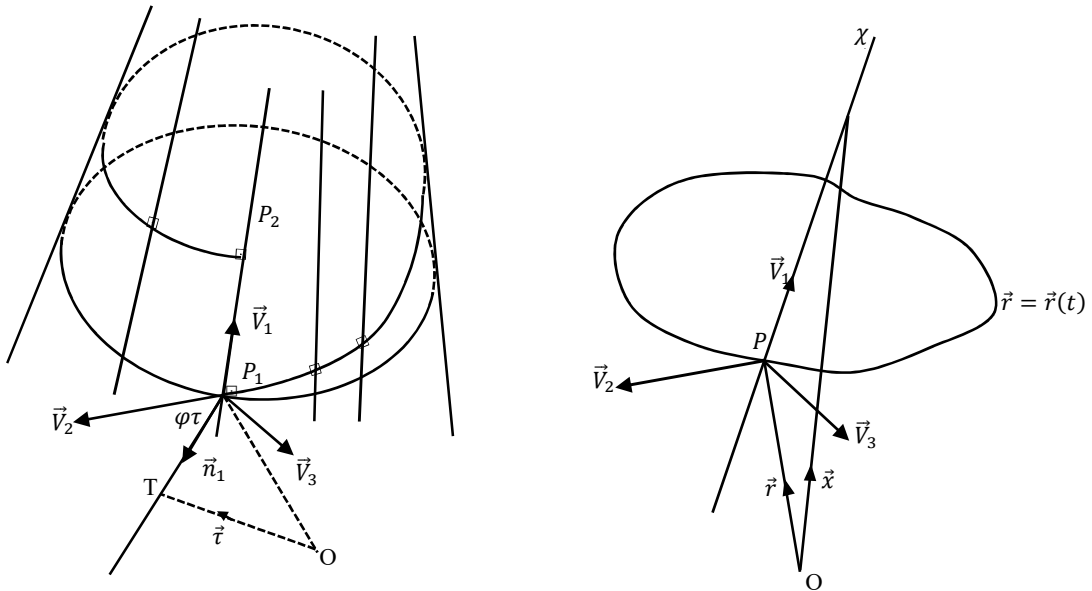
Bir  $H/H'$  kapalı uzay hareketinde, hareketli uzayı temsil eden  $\{P; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  üç ayaklısının bir,

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t + 2\pi) = \vec{r}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

kapalı eğrisi üzerinde hareket ettiğini varsayarsak,  $H$  uzayının tespit edilmiş bir doğrusu,  $H'$  - uzayında bir kapalı regle yüzey çizer. Örneğin,  $\vec{v}_1$  - doğrusunun çizdiği kapalı regle yüzey üzerindeki bir noktanın yer vektörünü  $\vec{x}$  ile gösterirsek, bu yüzeyin denklemini,

$$\begin{aligned} \vec{x}(t, v) &= \vec{r}(t) + v\vec{v}_1(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ \vec{x}(t + 2\pi, v) &= \vec{x}(t, v) \\ \|\vec{v}_1\| &= 1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

ile verebiliriz.  $\vec{v}_1$  vektörüne bu kapalı regle yüzeyin doğurunu denir. (Hacısalıhoğlu, 1983).



Şekil 3.3 Kapalı  $r(t)$  eğrisi boyunca oluşan  $V_1$ -kapalı regle yörünge yüzeyi

Burada  $\vec{v}_1$ - doğrusu, kapalı regle yüzeyin ana doğrusunu,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  kapalı eğrisi de dayanak eğrisini göstermektedir.  $\vec{v}_1$ - doğrusunun çizdiği kapalı regle yüzeyi ( $\vec{v}_1$ ) ile

gösterirsek,  $(\vec{v}_1)$ - kapalı regle yüzeyinin bir  $P_1$  noktasından geçen ortogonal yörüngesinin diferansiyel denklemi;

$$\langle d\vec{x}, \vec{v}_1 \rangle = 0, \quad \|\vec{v}_1\| = 1$$

dır. Burada (3.6) ifadesi kullanılarak,

$$dv = -\langle d\vec{r}, \vec{v}_1 \rangle$$

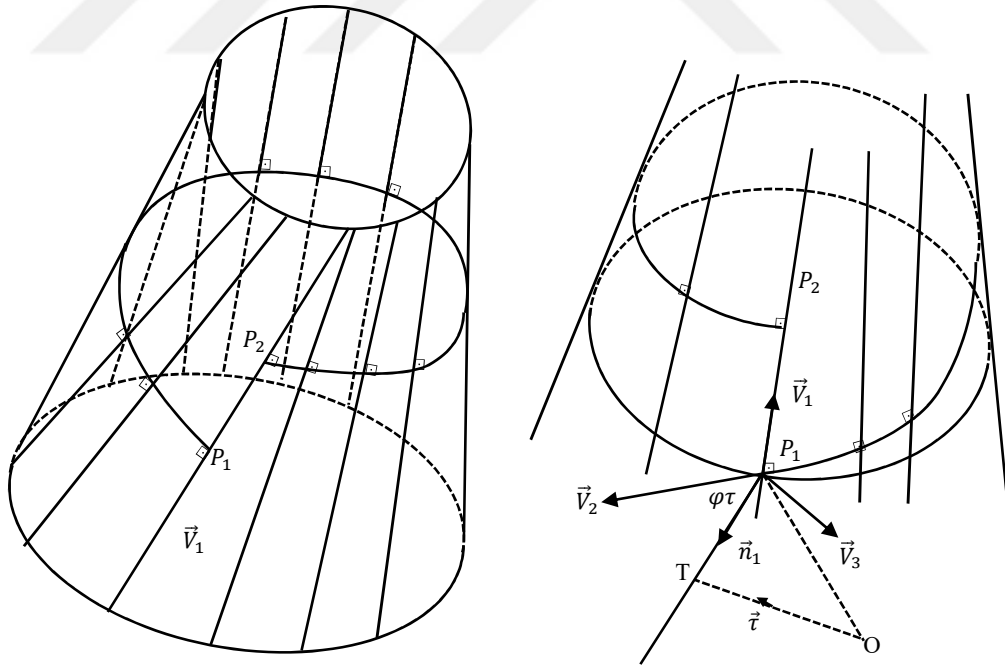
bulunur.

**Tanım 3.6** Bir  $\vec{x}(t, v) = \vec{r}(t) + \vec{v}_1(t)$  kapalı regle yüzeyi için,

$$\ell = \oint dv = -\oint \langle d\vec{r}, \vec{v}_1 \rangle$$

büyüklüğüne bu kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu denir (Gürsoy,1990a).

Bu tanım bize,  $v_1$ - ana doğrusunun,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  kapalı eğrisine dayanarak kapalı regle yüzeyi çizdiğinden, kendi doğrultusunda  $\ell = \oint dv$  kadar ilerleyerek ilk konumu ile çakıştığını gösterir. Bu nedenle,  $v_1$ - ana doğrusunun bir  $P_1$  noktasından başlayan ortogonal yörünge, bir periyot sonra aynı  $v_1$ - ana doğrusunu  $P_1$  den farklı bir  $P_2$  noktasında keser. Ortogonal yörüngeler, çıkış noktasından bağımsız olduğundan,  $\ell$  açılım uzunluğu kapalı regle yüzeyler için bir integral invariantıdır (Gürsoy,1990a).



Şekil 3.4 Kapalı Regle yüzeyin boğaz çizgisi ve açılım uzunluğu ve açılım açısı

Şimdi  $(\vec{v}_1)$ - kapalı regle yüzeyi için, ikinci bir integral invariantı olan açılım açısı tanımlansın.

**Tanım 3.7** ( $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ )- düzleminde bir birim vektörü,

$$\vec{n}_1 = \cos\varphi\vec{v}_2 + \sin\varphi\vec{v}_3$$

olarak seçelim.  $n_1$  doğrusu, kapalı hareket esnasında yüzeyin  $P$  noktasından geçen ortogonal yörüngesi boyunca bir tors (açılabilir yüzey) çizsin. Yani torsun denklemi,

$$\vec{T} = \vec{x} + \omega\vec{n}_1 \quad \omega \in \mathbb{R}$$

olsun. Ayrıca bu torsun dayanak eğrisi  $\vec{x}(t)$  için ortogonal yörünge olma şartı,

$$\langle d\vec{r}, \vec{v}_1 \rangle = 0$$

sağlansın.  $n_1$ - doğrusu bu koşulları sağlamak üzere kapalı hareketi esnasında, hareketin bir fonksiyonu olarak değişen  $\varphi$  açısının bir periyotluk süredeki toplam değişme miktarına ( $\vec{v}_1$ )- kapalı regle yüzeyinin açılım açısı denir ve,

$$\lambda_{\vec{v}_1} = \oint dv$$

eğrisel integrali ile belirtilir (Gürsoy,1990a).

### 3.3 Genel Bézier Eğrileri

**Tanım 3.8** Genel Bézier eğrisi, Kontrol noktaları  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$  olarak verilen ve başlangıç noktası  $b_0$ , bitiş noktası  $b_n$  olan  $n$ . dereceden bir polinom eğridir. Genel Bézier eğrisi, vektörel formda,

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t), \quad t \in [0,1] \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır. Burada  $B_i^n(t)$  fonksiyonları

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.8)$$

biçimde verilen Bernstein taban fonksiyonları (ya da Bernstein taban polinomları) dır.

$\frac{n!}{i!(n-i)!}$  ifadeleri de Binom katsayılarıdır ve  $\binom{n}{i}$  ya da  ${}^n C_i$  ile gösterilir (Marsh, 1999).

**Teorem 3.2** (Marsh, 1999) Bernstein taban polinomları aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$1) \quad B(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad t \in [0,1] \quad (\text{Toplamın birim olması}) \quad (3.9)$$

$$2) \quad B_i^n(t) \geq 0, \quad t \in [0,1] \quad (\text{Pozitiflik}) \quad (3.10)$$

$$3) \quad B_{i-1}^n(t) = B_i^n(1-t), \quad i = 0,1, \dots, n \quad (\text{Simetri}) \quad (3.11)$$

$$4) \quad B_{i-1}^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t), \quad (\text{İndirgeme}) \quad (3.12)$$

### 3.4 Bézier Eğrilerinin Özellikleri

**Teorem 3.3** (Marsh, 1999) Kontrol noktaları  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$  olarak verilen  $n$ . dereceden bir  $B = B(t)$  Bézier eğrisi aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$1) \quad B(0) = b_0, \quad B(1) = b_n \quad (\text{Son nokta interpolasyon özelliği}) \quad (3.13)$$

$$2) \quad B'(0) = \left. \frac{dB}{dt} \right|_{t=0} = n(b_1 - b_0) \quad (\text{Son nokta teğet özelliği})$$

$$B'(1) = \left. \frac{dB}{dt} \right|_{t=1} = n(b_n - b_{n-1}) \quad (3.14)$$

$$3) \quad \forall t \in [0,1] \text{ için, } B(t) = CH(\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_n\}) \quad (3.15)$$

(Bézier eğrisinin tamamı, kontrol noktalarının konveks alanı içinde kalmaktadır.)

4)  $F$ , bir afin dönüşümü olmak üzere,

$$F(B(t)) = F\left(\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^n F(b_i) B_i^n(t) \quad (3.16)$$

dir. (Kontrol noktaları  $b_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  olan Bézier eğrisinin bir afin dönüşümü altındaki görüntüsü, kontrol noktaları  $F(b_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  olan Bézier eğrisidir.)

5) Bir  $d$  doğrusu ile  $B(t)$  düzlemsel Bézier eğrisinin arakesit noktalarının sayısı  $m$ ,  $B(t)$  Bézier eğrisinin kontrol polinomunun arakesit noktalarının sayısı  $s$  ise  $m \leq s$  dir. (Varyasyon Azaltma Özelliği)

### 3.5 Bézier Eğrilerinde Türev Kavramı

Bézier eğrilerinde türevler, Bernstein polinomlarının türevlerinden elde edilmektedir.

**Teorem 3.4** (Marsh, 1999)  $0 \leq t \leq 1$  için  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$  Bernstein taban fonksiyonlarının birinci ve ikinci türevleri

$$1) \quad (B_i^n(t))' = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \quad \text{ya da} \quad (3.17)$$

$$(B_i^n(t))' = \frac{i - nt}{t(1-t)} B_i^n(t) \quad (3.18)$$

$$2) \quad (B_i^n(t))^{(n)} = n(n-1)(B_i^{n-2}(t) - B_{i-1}^{n-2}(t) + B_{i-2}^{n-2}(t)) \quad \text{ya da} \quad (3.19)$$

$$(B_i^n(t))^{(n)} = \left( \frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_i^n(t) \quad (3.20)$$

biçimindedir.

**Teorem 3.5** (Marsh, 1999) Kontrol noktaları  $b_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  olan ve

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$$

biçiminde verilen bir Bézier eğrisinin türevi, kontrol noktaları  $b_i^{(1)} = n(b_{i+1} - b_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  olan  $(n-1)$ . dereceden bir Bézier eğrisidir. Yani,

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(1)} B_i^{n-1}(t), \quad b_i^{(1)} = n(b_{i+1} - b_i) \quad (3.21)$$

dir.

**Sonuç 3.1** (Marsh, 1999) Kontrol noktaları  $b_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  olan ve  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$  biçiminde verilen bir Bézier eğrisinin ikinci türevi, kontrol noktaları  $b_i^{(2)} = n(n-1)(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  olan  $(n-2)$ . dereceden bir Bézier eğrisidir. Yani,

$$B''(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(2)} B_i^{n-2}(t), \quad b_i^{(2)} = n(n-1)(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i), \quad (3.22)$$

dir.

**Sonuç 3.2** (Marsh, 1999) Kontrol noktaları  $b_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  olan ve  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$  biçiminde verilen bir Bézier eğrisinin  $r$ . türev fonksiyonu, kontrol noktaları  $b_i^{(r)} = n(n-1) \dots (n-r) \left( \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j} \right)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-r$  olan  $(n-r)$ . dereceden bir Bézier eğrisi temsil eder. Yani,

$$B^{(r)}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} B_i^{n-r}(t), \quad (3.23)$$

$$b_i^{(r)} = n(n-1) \dots (n-r) \left( \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j} \right)$$

dir.

### 3.6 Bézier Eğrileri İçin De Casteljau Algoritması

De Casteljau Algoritması, bir Bézier eğrisinin  $t_0 \in [0,1]$  noktasındaki  $B(t_0)$  değerini hesaplamak için geliştirilmiş bir algoritmadır. Ayrıca verilen bir Bézier eğrisinin iki ayrı parçaya ayrılmasında da yine sıklıkla bu algoritma kullanılmaktadır. Kontrol noktaları  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$  olarak verilen  $n$ . dereceden bir  $B = B(t)$  Bézier eğrisi için  $t = t_0$  noktasındaki değerini bulmak için De Casteljau algoritmasının ifadesi aşağıdaki teoremlerle verilebilir:

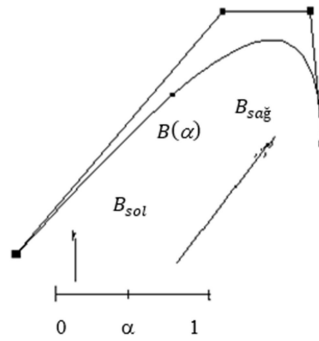
**Teorem 3.6** (Marsh, 1999) Kontrol noktaları  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$  olarak verilen  $n$ . dereceden bir  $B = B(t)$  Bézier eğrisinin,  $t = t_0$  noktasındaki değeri  $B(t_0) = b_0^n$  dir. Burada  $j = 0, 1, \dots, n, i = 1, \dots, n - j$  için

$$\begin{aligned} b_i^0 &= b_i, \\ b_i^j &= (1 - t_0)b_i^{j-1} + t_0b_{i+1}^{j-1}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

dir.

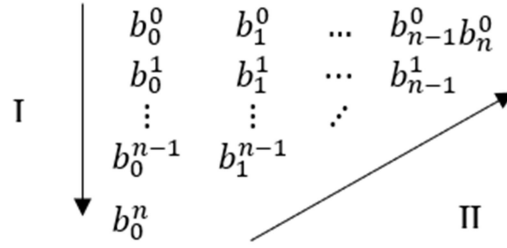
### 3.7 Bézier Eğrileri İçin Bölme (Subdivision) Algoritması

Kontrol noktaları  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$  olan  $n$ . dereceden bir  $B(t)$  Bézier eğrisi  $[0,1]$  kapalı aralığında tanımlanmaktadır.  $[0,1]$  aralığı bir  $\alpha \in [0,1]$  noktasından ikiye ayrıldığında,  $B(t)$  Bézier eğrisi de  $B(\alpha)$  noktasından ikiye ayrılacaktır. Böylece elde edilen iki ayrı eğri parçasından  $B(\alpha)$  noktasının solunda kalan kısmı  $B_{sol}$ , sağında kalan kısmı da  $B_{sağ}$  olarak ifade edilecek olursa, bu iki eğrinin tanım aralıkları sırasıyla  $[0, \alpha]$  ve  $[\alpha, 1]$  kapalı aralıkları olur. Her iki eğri parçası da, parametre dönüşümü yapılarak  $[0,1]$  aralığında tanımlı Bézier eğrisi formunda ifade edilebilir. Böylece, elde edilen yeni Bézier eğrilerinin dereceleri de, ilk eğrinin derecesi ile aynı olacaktır. Kontrol noktaları da değişecek ve toplam  $2n + 2$  tane olacaktır. Yani  $n$ . dereceden bir Bézier eğrisi, yine dereceleri  $n$  olan iki ayrı parçaya ayrılmaktadır. (Bakınız, Şekil 3.5)



Şekil 3.5 Bir Bézier eğrisinin ayrılması

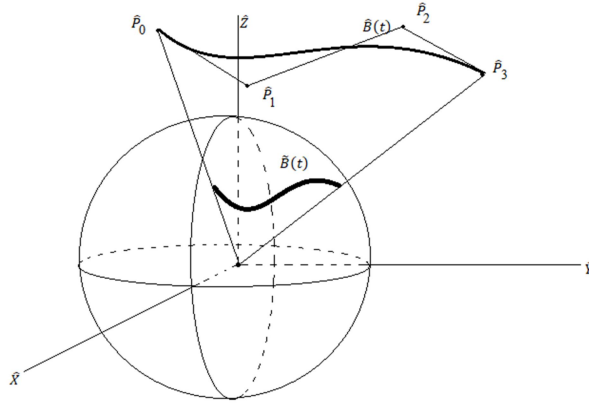
Elde edilen yeni Bézier eğrilerinin kontrol noktaları bölme algoritması ile bulunmaktadır. Bu algoritmada De Casteljau algoritması kullanılır. Bu algoritma ile elde edilen  $B_{sol}$  ve  $B_{sağ}$  Bézier eğrilerinin kontrol noktaları şu şekilde bulunur.



Şekil 3.6 Bir Bézier eğrisi için bölme algoritması

Şekil 3.6 incelendiğinde I oku yönündeki noktalar, yukarıdan aşağıya doğru sırasıyla  $b_0^0, b_1^0, \dots, b_{n-1}^0, b_n^0$  noktaları,  $B_{sol}$  Bézier eğrisinin kontrol noktaları; II oku yönündeki noktalar, aşağıdan yukarıya doğru sırasıyla  $b_0^n, b_1^{n-1}, \dots, b_{n-1}^1, b_n^0$  noktaları,  $B_{sağ}$  Bézier eğrisinin kontrol noktalarıdır. Bu durum bir teorem olarak aşağıdaki şekilde verilebilir.

**Teorem 3.7** (Marsh, 1999) Kontrol noktaları  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$  olan  $n$ . dereceden bir  $B(t)$  Bézier eğrisini ikiye bölmek suretiyle elde edilen  $B_{sol}$  ve  $B_{sağ}$  Bézier eğrilerinin kontrol noktaları;  $B_{sol}$  için  $b_0^0, b_1^0, \dots, b_{n-1}^0, b_n^0$  ve  $B_{sağ}$  için ise  $b_0^n, b_1^{n-1}, \dots, b_{n-1}^1, b_n^0$  noktalarıdır. Burada  $b_i^j$ , (3.24) de verildiği gibidir.



Şekil 3.7  $\hat{B}(t)$  Bézier eğrisinin birim dual küre üzerine projeksiyonu olan  $\tilde{B}(t)$  eğrisi

### 3.8 Dual Bézier Eğrileri

Dual Bézier eğrileri ilk defa Hosheek (1983) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Barry ve Goldman (1989), Bodduluri ve Ravani (1992,1993), Pottmann ve Farin (1995) çalışmalarında dual Bezier eğrilerine ve Bernstein polinomlarının dual versiyonlarına yer verilmiştir. Ancak literatürde bulunan bu çalışmalarda duallik kavramı projektif

geometride ifade edilen kavramdır. Yani noktalar (doğrular) yerine doğrular (düzlemler) alınarak ifade edilen duallik kavramıdır. Bu çalışmalarda Bernstein taban polinomları yine Bernstein formatında fonksiyonellerle ifade edilmekte ve Bezier eğrileri de kontrol noktaları yerine kontrol düzlemleri alınarak tanımlanmaktadır.

Oysa bizim çalışmamızda kullandığımız Dual Bezier eğrisi; kontrol noktaları,  $\mathbb{D}$  dual sayılar yardımıyla inşa edilen 3 boyutlu  $\mathbb{D}^3$  (ama gerçekte 6 boyutlu) uzayında alınan bir Bezier eğrisini ifade etmektedir. Bu anlamda yapılan çalışma örneği Taş ve İlarıslan (2019) dır. Ancak bu çalışmada da birim dual küre üzerindeki bir noktanın koordinatları küresel koordinatlar yardımıyla  $(1, u, v)$  olarak ifade edilmiş ve buradaki  $u$  ve  $v$  koordinatının herbiri Bezier eğrisi olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmamızda dual Bezier eğrisi olarak Incesu (2021) de verilen tanım dikkate alınmıştır. Yani,

$$\hat{B}(t) = B(t) + \varepsilon B^*(t)$$

biçiminde bir dual eğri alalım. Bu eğrinin reel ve dual parçaları her biri  $n$ . dereceden bir Bézier eğrisi olsunlar. Kontrol noktaları sırasıyla  $P_0, P_1, \dots, P_n$  ve  $P_0^*, P_1^*, \dots, P_n^*$  olsun. Bu takdirde aşağıdaki teoremler ifade edilebilir.

**Teorem 3.8** (Incesu, 2021)  $\hat{B}(t) = B(t) + \varepsilon B^*(t)$  kontrol noktaları  $\hat{P}_0, \hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \in \mathbb{D}^3$  olan dual Bézier eğrisi olsun. Burada  $i = 0, 1, \dots, n$ . için  $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ ,  $P_i, P_i^* \in \mathbb{R}^3$ ; Bu takdirde  $\hat{B}(t)$  nin birim dual küre üzerindeki projeksiyon eğrisi

$$\tilde{B}(t) = \bar{B}(t) + \varepsilon \bar{B}^*(t)$$

dir. Burada

$$\bar{B}(t) = \frac{B(t)}{\|B(t)\|} \quad \text{ve} \quad \bar{B}^*(t) = \frac{B^*(t)}{\|B(t)\|} - \frac{\langle B(t), B^*(t) \rangle}{\|B(t)\|^3}$$

dir.

**Teorem 3.9** (Incesu, 2021)  $\hat{B}(t) = B(t) + \varepsilon B^*(t)$  kontrol noktaları  $\hat{P}_0, \hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \in \mathbb{D}^3$  olan dual Bézier eğrisi olsun. Burada  $i = 0, 1, \dots, n$ . için  $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ ,  $P_i, P_i^* \in \mathbb{R}^3$ ; ve  $\tilde{B}(t)$  de birim dual küre üzerindeki projeksiyon eğrisi olsun. Bu takdirde  $\tilde{B}(t)$  eğrisinin E. Study'nin teoremine karşılık  $X(t, v)$  regle yüzeyi

$$X(t, v) = \frac{B(t) \times B^*(t)}{\|B(t)\|^2} + v \frac{B(t)}{\|B(t)\|} \quad (3.26)$$

biçimindedir burada  $t \in [0, 1]$  ve  $v \in \mathbb{R}$  dir.

**Teorem 3.10** (Incesu, 2021)  $\hat{B}(t) = B(t) + \varepsilon B^*(t)$  kontrol noktaları  $\hat{P}_0, \hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \in \mathbb{D}^3$  olan dual Bézier eğrisi olsun. Burada  $i = 0, 1, \dots, n$ . için  $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ ,  $P_i, P_i^* \in \mathbb{R}^3$ ;

bu takdirde  $\hat{B}(t)$  eğrisinin E. Study'nin teoremine karşılık  $X(t, v)$  regle yüzeyine ait boğaz eğrisi

$$\sigma(t) = \frac{B(t) \times B^*(t)}{\|B(t)\|^2} + \left( \frac{\left( \left( \langle B'(t), B(t) \rangle B^*(t) - \|B(t)\|^2 (B^*)'(t) \right), B'(t), B(t) \right)}{\|B(t)\|^2 \|B'(t) \times B(t)\|^2} \right) B(t) \quad (3.27)$$

biçimindedir.

**Teorem 3.11** (Incesu, 2021)  $\hat{B}(t) = B(t) + \varepsilon B^*(t)$  kontrol noktaları  $\hat{P}_0, \hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \in \mathbb{D}^3$  olan dual Bézier eğrisi olsun. Burada  $i = 0, 1, \dots, n$  için  $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ ,  $P_i, P_i^* \in \mathbb{R}^3$ ; Bu takdirde  $\hat{B}(t)$  eğrisinin E. Study'nin teoremine karşılık  $X(t, v)$  regle yüzeyine ait dağılma parametresi  $\rho(t)$ :

$$\rho(t) = \frac{\left\langle \left( \begin{array}{c} \|B(t)\|^2 (B'(t) \times B^*(t) + B(t) \times (B^*(t))') \\ -2 \langle B(t), B'(t) \rangle B(t) \times B^*(t) \end{array} \right), B'(t) \times B(t) \right\rangle}{\|B(t)\|^2 \|B'(t) \times B(t)\|^2} \quad (3.27)$$

biçimindedir.

**Teorem 3.12** (Incesu, 2021)  $\hat{B}(t) = B(t) + \varepsilon B^*(t)$  eğrisi  $\hat{P}_0, \hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \in \mathbb{D}^3$  kontrol noktaları ile verilen bir dual Bézier eğrisi olsun. Burada  $i = 0, 1, \dots, n$  için  $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ ,  $P_i, P_i^* \in \mathbb{R}^3$  dir. E. Study'nin teoremi altında  $\tilde{B}(t)$  eğrisi  $\mathbb{D}^3$  de  $\hat{B}(t)$  eğrisine birim dual kürenin projektif eğrisine karşılık gelen  $X(t, v)$  regle yüzeyin  $X(0, v)$  ve  $X(1, v)$  parametre eğrileri

$$\text{i)} \quad X(0, v) = \frac{P_0 \times P_0^*}{\|P_0\|^2} + v \frac{P_0}{\|P_0\|} \quad (3.28)$$

$$\text{ii)} \quad X(1, v) = \frac{P_n \times P_n^*}{\|P_n\|^2} + v \frac{P_n}{\|P_n\|} \quad (3.29)$$

olarak yazılır. Burada  $v \in \mathbb{R}$  dir.

**Teorem 3.13** (Incesu, 2021)  $\hat{B}(t) = B(t) + \varepsilon B^*(t)$  eğrisi  $\hat{P}_0, \hat{P}_1, \dots, \hat{P}_n \in \mathbb{D}^3$  kontrol noktaları ile verilen bir dual Bézier eğrisi olsun. Burada  $i = 0, 1, \dots, n$  için  $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ ,  $P_i, P_i^* \in \mathbb{R}^3$  dir.  $t_0 \in (0, 1)$  için  $\hat{B}(t)$  dual Bézier eğrisine karşılık gelen  $X(t, v)$  regle yüzeyin  $X(t_0, v)$  parametre eğrisi

$$X(t_0, v) = \frac{P_0^n \times P_0^{n*}}{\|P_0^n\|^2} + v \frac{P_0^n}{\|P_0^n\|} \quad (3.30)$$

olarak yazılır. Burada  $P_0^n$  ve  $P_0^{n*}$  noktaları Casteljau algoritması ile elde edilmiştir.

**Teorem 3.14** (Incesu, 2021)  $\hat{B}(t)$  bir dual Bézier eğrisi olsun. Şu halde  $\hat{B}(t)$  dual Bézier eğrisine karşılık gelen  $X(t, v)$  regle yüzeyinin dayanak eğrisi  $\hat{B}(t)$  dual Bézier eğrisinin kontrol noktaları yardımıyla

$$\sigma(0) = \frac{b_0 \times b_0^*}{\|b_0\|^2} + \left( \frac{(\langle b_1, b_0 \rangle b_0^* - |b_0|^2 b_1^*), b_1, b_0 \rangle}{\|b_0\|^2 \|b_1 \times b_0\|^2} \right) b_0$$

$$\text{ve } \delta(0) = \frac{b_0}{\|b_0\|}$$
(3.31)

$$\sigma(1) = \frac{b_n \times b_n^*}{\|b_n\|^2} + \left( \frac{(\langle b_{n-1}, b_n \rangle b_n^* - \|b_n\|^2 b_{n-1}^*), b_{n-1}, b_n \rangle}{\|b_n\|^2 \|b_n \times b_{n-1}\|^2} \right) b_n$$

$$\text{ve } \delta(1) = \frac{b_n}{\|b_n\|}$$
(3.31)

ve

$$\sigma(t_0) = \frac{b_0^n \times b_0^{n*}}{\|b_0^n\|^2} + \left( \frac{(\langle b_1^{n-1}, b_0^n \rangle (b_0^n)^* - \|b_0^n\|^2 (b_1^{n-1})^*), b_1^{n-1}, b_0^n \rangle}{\|b_0^n\|^2 \|b_1^{n-1} \times b_0^n\|^2} \right) b_0^n$$

$$\text{ve } \delta(t_0) = \frac{b_0^n}{\|b_0^n\|}$$
(3.32)

olarak yazılabilir. Burada  $b_0^n, b_1^{n-1}, (b_1^{n-1})^*$  ve  $(b_0^n)^*$  noktaları de Casteljau algoritması yardımıyla elde edilmiştir ve  $t_0 \in (0,1)$  için

$$\|B' \times B\|' = \left( \sqrt{\langle B' \times B, B' \times B \rangle} \right)' = \frac{\langle B' \times B, B' \times B \rangle'}{2\sqrt{\langle B' \times B, B' \times B \rangle}} = \frac{\langle B'' \times B, B' \times B \rangle}{\|B' \times B\|}$$

$$(\|B\|^2 \|B' \times B\|^2)' = 2(\|B' \times B\|^2 \langle B', B \rangle + \|B\|^2 \langle B'' \times B, B' \times B \rangle)$$

$$(\langle B', B \rangle B^* - \|B\|^2 (B^*)')' = (\langle B'', B \rangle + \langle B', B' \rangle) B^* - \langle B', B \rangle - (B^*)' \|B\|^2 - (B^*)''$$

$\sigma$  dayanak eğrisinin türevi aşağıdaki teorem yardımıyla elde edilir.

**Teorem 3.15** (Incesu, 2021)  $\hat{B}(t)$  bir dual Bézier eğrisi olsun.  $\hat{B}(t)$  dual Bézier eğrisine karşılık gelen  $X(t, v)$  regle yüzeyinin  $\sigma$  daralma eğrisinin türevi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sigma' = \left[ \frac{B' \times B^*}{\|B\|^2} + \frac{B \times (B^*)'}{\|B\|^2} - 2 \frac{\langle B, B' \rangle (B \times B^*)}{\|B\|^4} \right]$$

$$+ \det(B^*, B', B) \left( \frac{\langle B'', B \rangle + \langle B', B' \rangle}{\|B^2\| \|B' \times B\|^2} - \frac{2 \langle B', B \rangle^2}{\|B\|^4 \|B' \times B\|^2} \right.$$

$$\left. - \frac{2 \langle B'' \times B, B' \times B \rangle \langle B', B \rangle}{\|B^2\| \|B' \times B\|^4} \right) B$$

$$+ \det(B^*, B', B) \left( \frac{2 \langle B', B \rangle}{\|B^2\| \|B' \times B\|^2} - \frac{\langle B', B \rangle}{\|B\|^2 \|B' \times B\|^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\langle B'' \times B, B' \times B \rangle}{\|B' \times B\|^4} B \\
& + \frac{\langle B', B \rangle \det(B^*, B'', B)}{\|B^2\| \|B' \times B\|^2} B - \frac{\det((B^*)', B'', B)}{\|B' \times B\|^2} B - \frac{\det((B^*)'', B', B)}{\|B' \times B\|^2} B \\
& + \frac{\langle B', B \rangle \det(B^*, B', B)}{\|B^2\| \|B' \times B\|^2} B' - \frac{\det((B^*)', B', B)}{\|B' \times B\|^2} B.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Ayrıca

$$\|B' \times B\|^2 = \langle B, B \rangle = \langle B', B' \rangle - \langle B', B \rangle^2$$

eşitliğinden  $\langle \sigma'(t), \delta'(t) \rangle = 0$  olduğu aşıkardır.

**Önerme 3.3** (Incesu, 2021)  $\hat{B}(t)$  bir dual Bézier eğri olsun.  $\hat{B}(t)$  dual Bézier eğrisine karşılık gelen  $X(t, v)$  regle yüzeyinin  $\delta$  direktör eğrisinin türevi ile kartezyen çarpımı

$$\delta \times \delta' = \frac{B \times B'}{\|B\|^2} \tag{3.34}$$

olarak yazılır.

**İspat.**

$$\delta \times \delta' = \frac{B}{|B|^2} \times \left( \frac{B'}{\|B\|} - \frac{\langle B', B \rangle B}{\|B\|^3} \right) = \frac{B \times B'}{\|B\|^2} - \frac{\langle B', B \rangle B \times B}{\|B\|^3} = \frac{B \times B'}{\|B\|^2}.$$

**Teorem 3.16** (Incesu, 2021)  $\hat{B}(t)$  bir dual Bézier eğri olsun.  $\hat{B}(t)$  dual Bézier eğrisine karşılık gelen  $X(t, v)$  regle yüzeyinin  $\rho$  dağılma parametresi

$$\rho(0) = \frac{\left\langle \left( \begin{array}{c} \|b_0\|^2((b_1 - b_0) \times b_0^* + b_0 \times (b_1^* - b_0^*)) \\ -2\langle b_0, (b_1 - b_0) \rangle b_0 \times b_0^* \end{array} \right), b_0 \times b_1 \right\rangle}{\|b_0\|^2 \|b_1 \times b_0\|^2} \tag{3.35}$$

$$\rho(1) = \frac{\left\langle \left( \begin{array}{c} \|b_n\|^2((b_n - b_{n-1}) \times b_n^* + b_n \times (b_{n-1}^* - b_{n-1}^*)) \\ -2\langle b_n, (b_n - b_{n-1}) \rangle b_n \times b_n^* \end{array} \right), b_{n-1} \times b_n \right\rangle}{\|b_n\|^2 \|b_{n-1} \times b_n\|^2} \tag{3.36}$$

$$\rho(t_0) = \frac{\left\langle \left( \begin{array}{c} \|b_0^n\|^2((b_1^{n-1} - b_0^n) \times b_0^{n*} + b_0^n \times (b_1^{n-1*} - b_0^{n*})) \\ -2\langle b_0^n, (b_1^{n-1} - b_0^n) \rangle b_0^n \times b_0^{n*} \end{array} \right), b_0^n \times b_1^{n-1} \right\rangle}{\|b_0^n\|^2 \|b_1^{n-1} \times b_0^n\|^2} \tag{3.37}$$

olarak yazılır. Burada  $b_0^n, b_1^{n-1}, (b_1^{n-1})^*$  ve  $(b_0^n)^*$  noktaları de Casteljau algoritması yardımıyla elde edilmiştir ve  $t_0 \in (0,1)$ .

**Teorem 3.17** (Incesu, 2021)  $\hat{B}(t)$  bir dual Bézier eğri olsun.  $\hat{B}(t)$  dual Bézier eğrisine karşılık gelen  $X(t, v)$  regle yüzeyinin  $K(t, v)$  Gauss eğriliği herhangi bir  $t \in [0,1]$  ve  $v \in \mathbb{R}$  için

$$K(t, v) = \frac{-\left(\|B(t)\|^4 \|B'(t) \times B(t)\|^4\right) \left[ \left( \left( \frac{\|B(t)\|^2 (B'(t) \times B^*(t) + B(t) \times (B^*(t))')}{-2\langle B(t), B'(t) \rangle B(t) \times B'(t)} \right), B(t) \times B'(t) \right) \right]^2}{\left( \left[ \left( \left( \frac{\|B(t)\|^2 (B'(t) \times B^*(t) + B(t) \times (B^*(t))')}{-2\langle B(t), B'(t) \rangle B(t) \times B^*(t)} \right), B(t) \times B'(t) \right) \right]^2 + v^2 (\|B(t)\|^4 \|B'(t) \times B(t)\|^4) \right)^2}$$

olarak yazılır.

**Teorem 3.18** (Incesu, 2021)  $\hat{B}(t)$  bir dual Bézier eğri olsun.  $\hat{B}(t)$  dual Bézier eğrisine karşılık gelen  $X(t, v)$  regle yüzeyinin  $K(t, v)$  Gauss eğriliği bazı noktalar için

$$K(0,0) = \frac{-\|b_0\|^4 \|b_1 \times b_0\|^4}{\left[ \left( \left( \frac{\|b_0\|^2 ((b_1 - b_0) \times b_0^* + b_0 \times (b_1^* - b_0^*))}{-2\langle b_0, (b_1 - b_0) \rangle b_0 \times b_0^*} \right), b_0 \times b_1 \right) \right]^2}$$

$$K(1,0) = \frac{-\left(\|b_n\|^4 \|b_{n-1} \times b_n\|^4\right)}{\left[ \left( \left( \frac{\|b_n\|^2 ((b_n - b_{n-1}) \times b_n^* + b_n \times (b_n^* - b_{n-1}^*))}{-2\langle b_n, (b_n - b_{n-1}) \rangle b_n \times b_n^*} \right), b_{n-1} \times b_n \right) \right]^2}$$

$$K(0, v) = \frac{-\left(\|b_0\|^4 \|b_1 \times b_0\|^4\right) \left[ \left( \left( \frac{\|b_0\|^2 ((b_1 - b_0) \times b_0^* + b_0 \times (b_1^* - b_0^*))}{-2\langle b_0, (b_1 - b_0) \rangle b_0 \times b_0^*} \right), b_0 \times b_1 \right) \right]^2}{\left( \left[ \left( \left( \frac{\|b_0\|^2 ((b_1 - b_0) \times b_0^* + b_0 \times (b_1^* - b_0^*))}{-2\langle b_0, (b_1 - b_0) \rangle b_0 \times b_0^*} \right), b_0 \times b_1 \right) \right]^2 + v^2 (\|b_0\|^4 \|b_1 \times b_0\|^4) \right)^2}$$

$$K(1, v) = \frac{-\|b_n\|^4 \|b_{n-1} \times b_n\|^4 \left[ \left( \left( \frac{\|b_n\|^2 ((b_n - b_{n-1}) \times b_n^* + b_n \times (b_n^* - b_{n-1}^*))}{-2\langle b_n, (b_n - b_{n-1}) \rangle b_n \times b_n^*} \right), b_{n-1} \times b_n \right) \right]^2}{\left( \left[ \left( \left( \frac{\|b_n\|^2 ((b_n - b_{n-1}) \times b_n^* + b_n \times (b_n^* - b_{n-1}^*))}{-2\langle b_n, (b_n - b_{n-1}) \rangle b_n \times b_n^*} \right), b_{n-1} \times b_n \right) \right]^2 + v^2 (\|b_n\|^4 \|b_{n-1} \times b_n\|^4) \right)^2}$$

$$K(t_0, 0) = \frac{-\|b_0^n\|^4 \|b_1^{n-1} \times b_0^n\|^4}{\left[ \left( \left( \frac{\|b_0^n\|^2 ((b_1^{n-1} - b_0^n) \times b_0^{n*} + b_0^n \times (b_1^{n-1*} - b_0^{n*}))}{-2\langle b_0^n, (b_1^{n-1} - b_0^n) \rangle b_0^n \times b_0^{n*}} \right), b_0^n \times b_1^{n-1} \right) \right]^2}$$

$$K(t_0, v) = \frac{-\left(\|b_0^n\|^4 \|b_1^{n-1} \times b_0^n\|^4\right) \left[ \left( \left( \frac{\|b_0^n\|^2 ((b_1^{n-1} - b_0^n) \times b_0^{n*} + b_0^n \times (b_1^{n-1*} - b_0^{n*}))}{-2\langle b_0^n, (b_1^{n-1} - b_0^n) \rangle b_0^n \times b_0^{n*}} \right), b_0^n \times b_1^{n-1} \right) \right]^2}{\left( \left[ \left( \left( \frac{\|b_0^n\|^2 ((b_1^{n-1} - b_0^n) \times b_0^{n*} + b_0^n \times (b_1^{n-1*} - b_0^{n*}))}{-2\langle b_0^n, (b_1^{n-1} - b_0^n) \rangle b_0^n \times b_0^{n*}} \right), b_0^n \times b_1^{n-1} \right) \right]^2 + v^2 (\|b_0^n\|^4 \|b_1^{n-1} \times b_0^n\|^4) \right)^2}$$

olarak yazılır.

**Teorem 3.19** (Incesu,2021)  $\hat{B}(t)$  bir dual Bézier eğri olsun.  $\hat{B}(t)$  dual Bézier eğrisine karşılık gelen  $X(t, v)$  regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart

$$\langle (B \times B^*)', B \times B' \rangle = 2 \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|^2} \langle B \times B^*, B \times B' \rangle$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

**İspat.** Gray (1998) çalışmasından,  $X(u, v) \subset \mathbb{R}^3$  bir regle yüzeyinin Gauss eğriliği sıfır ise, o zaman bu regle yüzeyi açılabilir veya Gauss eğriliği sıfırdır. Teorem 3.17 den, eğer  $X(t, v)$  regle yüzeyinin  $K(t, v)$  Gauss eğriliği sıfır ise, o zaman

$$\langle (\|B\|^2(B' \times B^* + B \times (B^*)') - 2\langle B, B' \rangle B \times B^*), B \times B' \rangle = 0$$

olmalıdır. Böylece

$$\langle (\|B\|^2(B \times B^*)' - 2\langle B, B' \rangle B \times B^*), B \times B' \rangle = 0$$

olarak yazılabilir. Şu halde

$$\langle (B \times B^*)', B \times B' \rangle = 2 \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|^2} \langle B \times B^*, B \times B' \rangle$$

olduğu görülür.

Diğer taraftan  $B \times B^*$  fonksiyonu  $\varphi$  ile gösterilirse ve  $2 \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|^2}$  skaları  $k$  ile gösterilirse, o zaman  $\varphi' - k\varphi$  fonksiyonu  $B$  ve  $B'$  tarafından oluşturulan düzlemde kalır. Böylece

$$\varphi' - k\varphi = \lambda_1 B + \lambda_2 B'$$

olacak şekilde  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  sayıları vardır. Dolayısıyla  $\lambda_1 B + \lambda_2 B'$  fonksiyonu  $\omega$  ile gösterildiğinde  $\hat{B}(t)$  dual Bézier eğrisine karşılık gelen  $X(t, v)$  regle yüzeyinin düz olma koşulundan

$$\varphi' - k\varphi = \omega$$

olmalıdır.

#### 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

**Tanım 4.1** Kontrol noktaları  $b_0, \dots, b_n$  olan  $n$ . dereceden bir Bézier eğrisi kapalıdır denir eğer,

$$b_0 = b_n \text{ ve } \{b_1, b_0, b_{n-1}\} \text{ doğrudur ise.}$$

Benzer tanım Dual Bézier eğrileri içinde yapılabilir.

**Tanım 4.2** (Taş ve İlarıslan, 2019) Kontrol noktaları  $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ ;  $i = 0, \dots, n$  olan dual Bézier eğrisinin kapalı olması demek;

$$\hat{P}_0 = \hat{P}_n \text{ yani } P_0 = P_n; \quad P_0^* = P_n^* \text{ ve } \{\hat{P}_1, \hat{P}_0, \hat{P}_{n-1}\} \text{ doğrudur.}$$

Böylece bir kapalı dual Bézier eğrisine karşılık gelen kapalı regle yüzeyin ifadesi şu şekilde verilebilir.

**Tanım 4.3** Kontrol noktaları  $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ ;  $i = 0, \dots, n$  olan bir kapalı dual  $\hat{B}(t) = B(t) + \varepsilon B^*(t)$  Bézier eğrisine karşılık gelen kapalı regle yüzeyi  $t \in [0,1]$  ve  $v \in \mathbb{R}$  için

$$X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}; \quad X(0, v) = X(1, v) \quad (4.1)$$

biçimindedir. Bu regle yüzeye  $U_1 = \frac{B}{\|B\|}$  eksenini ile oluşturulan kapalı yörünge yüzeyi denir.

Şimdi, (4.1) ile verilen kapalı yörünge yüzeyi verilsin. Bu yüzeyin oluşumunda hareketli  $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3\}$  çatısı

$$\left\{ \vec{U}_1 = \frac{B}{\|B\|}, \vec{U}_2 = \frac{\vec{U}_1'}{\|\vec{U}_1'\|}, \vec{U}_3 = \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 \right\}$$

biçiminde alınabilir ve bu üç yüzünün eksenleri,  $\vec{U}_1$ -kapalı yörünge yüzeyinin  $\vec{U}_1$ -üreticinin striksiyon noktasında kesişirler.  $\vec{U}_2$  ve  $\vec{U}_3$  ise bu striksiyon noktasında yüzeye teğet ve normal vektörlerdir. Burada alınan çatı Gürsoy ve Küçük (1999) da belirtilen çatıdır. Bu çatı Blaschke çatı değildir. Çünkü Blaschke çatı dual vektörler ile elde edilen çatıdır. Oysa burada alınan çatı reel çatıdır.

**Teorem 4.1** Kontrol noktaları  $\hat{P}_i$ , ( $i = 0, \dots, n$ ) olarak verilen  $\hat{B}(t) = B(t) + \varepsilon B^*(t)$  kapalı dual Bézier eğrisi verilsin. Bu eğriye karşılık gelen kapalı yörünge yüzeyi  $t \in [0,1]$  ve  $v \in \mathbb{R}$  için

$$X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}; \quad X(0, v) = X(1, v)$$

olsun. Bu yüzeyin oluşum hareketinde  $\{U_1, U_2, U_3\}$  hareketli çatı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\vec{U}_1 &= \frac{B}{\|B\|} \\ \vec{U}_2 &= \frac{B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|} \\ \vec{U}_3 &= \frac{\|B\|}{\|B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|} (B \wedge B').\end{aligned}$$

**İspat.**

$$\begin{aligned}\vec{U}_1 &= \frac{B}{\|B\|} \\ \vec{U}_2 &= \frac{\vec{U}_1'}{\|\vec{U}_1'\|} = \frac{\left(\frac{B}{\|B\|}\right)'}{\left\|\left(\frac{B}{\|B\|}\right)'\right\|} = \frac{\frac{B'\|B\| - \|B\|'B}{\|B\|^2}}{\left\|\frac{B'\|B\| - \|B\|'B}{\|B\|^2}\right\|} \\ &= \frac{\frac{B'\|B\| - \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|}B}{\|B\|^2}}{\left\|\frac{B'\|B\| - \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|}B}{\|B\|^2}\right\|} = \frac{B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|} \\ \vec{U}_3 &= \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = \frac{B}{\|B\|} \wedge \left[ \frac{B'\|B\|^2}{\|B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle B}{\|B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|} \right] \\ &= \frac{\|B\|^2}{\|B\|\|B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|} (B \wedge B') \\ &= \frac{\|B\|}{\|B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|} (B \wedge B').\end{aligned}$$

#### 4.1 Hareketin Yapısal Denklemi

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} w_1^1 & w_1^2 & w_1^3 \\ w_2^1 & w_2^2 & w_2^3 \\ w_3^1 & w_3^2 & w_3^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

biçiminde verelim. Bu durumda,

$$\vec{U}_1' = \left[ \frac{B}{\|B\|} \right]' = \frac{B'}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle B}{\|B\|^3} \quad (4.3)$$

dir. Ayrıca;

$$\begin{aligned}\|B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|' &= \left( \sqrt{\langle B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B, B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B} \right)' \\ &= \frac{\langle B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B, B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}'{2\|B'\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[\|B\|^4 \langle B', B' \rangle - \langle B, B' \rangle^2 \|B\|^2]' }{2\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \\
&= \frac{\left[ \begin{aligned} &4\|B\|^2 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle + 2\|B\| \langle B, B'' \rangle \\ &-2\langle B, B' \rangle (\|B'\|^2 + \langle B', B'' \rangle) \|B\|^2 + 2\langle B, B' \rangle^3 \end{aligned} \right]}{2\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \\
&= \frac{\left[ \begin{aligned} &\|B\|^2 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle + \|B\|^4 \langle B', B'' \rangle \\ &-\langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle^3 \end{aligned} \right]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}
\end{aligned}$$

olur.  $\{B, B'$  ve  $B \times B'\}$  vektörleri  $\mathbb{R}^3$  te bir çatı oluşturacağı için  $B''$  vektörü de bu vektörler cinsinden yazılabilir. Yani;

$$B'' = \frac{\langle B, B'' \rangle}{\|B\|} \frac{B}{\|B\|} + \frac{\langle B', B'' \rangle}{\|B'\|} \frac{B'}{\|B'\|} + \frac{\langle B'', B \times B' \rangle}{\|B \times B'\|} \frac{B \times B'}{\|B \times B'\|} \quad (4.4)$$

yazılabilir. O halde  $\vec{U}_2$  nin  $t$  ye göre türevi alınır,

$$\vec{U}'_2 = \frac{\left[ \begin{aligned} &\|B\|^6 \|B'\|^2 B'' - \|B\|^4 \langle B, B' \rangle B'' + 2\|B\|^2 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle^2 B \\ &-(\|B'\|^2 + \langle B, B'' \rangle) \|B\|^4 \|B'\|^2 B - \|B\|^6 \langle B', B'' \rangle B' \\ &+\|B\|^4 \langle B', B'' \rangle \langle B, B' \rangle B - \langle B, B' \rangle^4 B + \|B\|^4 \langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle B' \end{aligned} \right]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^3}$$

olur.  $\vec{U}'_1 = w_1^1 \vec{U}_1 + w_1^2 \vec{U}_2 + w_1^3 \vec{U}_3$  yazılabilir. Burada  $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3\}$  ortogonal olduğundan  $w_1^i = \langle \vec{U}'_1, \vec{U}_i \rangle$  olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\vec{U}'_1 &= \frac{B'}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle B}{\|B\|^3} \\
w_1^1 = \langle \vec{U}'_1, \vec{U}_1 \rangle &= \left\langle \frac{B'}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle B}{\|B\|^3}, \frac{B}{\|B\|} \right\rangle = \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|^2} - \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|^2} = 0 \\
w_1^2 = \langle \vec{U}'_1, \vec{U}_2 \rangle &= \left\langle \frac{B'}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle B}{\|B\|^3}, \frac{B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right\rangle \\
&= \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} \\
w_1^3 = \langle \vec{U}'_1, \vec{U}_3 \rangle &= \left\langle \frac{B'}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle B}{\|B\|^3}, \frac{(B \times B') \|B\|}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde (4.2) den

$$\vec{U}'_2 = w_2^1 \vec{U}_1 + w_2^2 \vec{U}_2 + w_2^3 \vec{U}_3$$

olur ki burada da  $w_2^i = \langle \vec{U}'_2, \vec{U}_i \rangle$  olur.

$$w_2^1 = \langle \vec{U}'_2, \vec{U}_1 \rangle = \left\langle \vec{U}'_2, \frac{B}{\|B\|} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left[ \begin{aligned} &\|B\|^5 \|B'\|^2 \langle B, B'' \rangle - \langle B, B' \rangle^2 \|B\|^3 \langle B, B'' \rangle + 2 \|B\|^3 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle^2 \\ &- \|B\|^5 \|B'\|^4 - \|B\|^5 \|B'\|^2 \langle B, B'' \rangle - \|B\|^5 \langle B', B'' \rangle \langle B, B' \rangle \\ &+ \|B\|^5 \langle B', B'' \rangle \langle B, B' \rangle - \langle B, B' \rangle^4 \|B\| + \|B\|^3 \langle B, B' \rangle^2 \langle B, B'' \rangle \end{aligned} \right]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^3} \\
&= \frac{2 \|B\|^3 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle^2 - \|B\|^5 \|B'\|^4 - \|B\| \langle B, B' \rangle^4}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^3} \\
&= \frac{\|B\| [2 \|B\|^2 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle^2 - \|B\|^4 \|B'\|^4 - \langle B, B' \rangle^4]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^3} \\
&= \frac{\|B\| [\|B\|^2 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle^2 - \langle B, B' \rangle^4 + \|B\|^2 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle^2 - \|B\|^4 \|B'\|^4]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^3} \\
&= \frac{\|B\| \left[ \begin{aligned} &\langle B, B' \rangle^2 (\|B\|^2 \|B'\|^2 - \langle B, B' \rangle^2) \\ &+ \|B\|^2 \|B'\|^2 (\langle B, B' \rangle^2 - \|B\|^2 \|B'\|^2) \end{aligned} \right]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^3} \\
&= \frac{\|B\| (\|B\|^2 \|B'\|^2 - \langle B, B' \rangle^2) (\langle B, B' \rangle^2 - \|B\|^2 \|B'\|^2)}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^3} \\
&= \frac{-\|B\|}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^3} (\|B\|^2 \|B'\|^2 - \langle B, B' \rangle^2)^2 \\
&= \frac{\|B\|^4}{\|B\|^4 \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^3} \frac{-\|B\|}{\|B\|^4 \|B'\|^2 - \langle B, B' \rangle^2} (\|B\|^2 \|B'\|^2 - \langle B, B' \rangle^2)^2 \\
&= \frac{-\|B\|}{\|B\|^4 \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^3} (\|B\|^4 \|B'\|^2 - \langle B, B' \rangle^2 \|B\|^2)^2 \\
&= \frac{-\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3}
\end{aligned}$$

$$w_2^2 = \langle \vec{U}'_2, \vec{U}_2 \rangle$$

$$= \left\langle \vec{U}'_2, \frac{B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left[ \begin{aligned} &\|B\|^8 \|B'\|^2 \langle B', B'' \rangle - \|B\|^6 \langle B, B' \rangle^2 \langle B', B'' \rangle + 2 \|B\|^4 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle^3 \\ &- \|B\|^6 \|B'\|^4 \langle B, B' \rangle - \|B\|^6 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle - \|B\|^8 \|B'\|^2 \langle B', B'' \rangle \\ &+ \|B\|^6 \langle B', B'' \rangle \langle B, B' \rangle^2 - \|B\|^2 \langle B, B' \rangle^5 + \|B\|^6 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle \\ &- \|B\|^6 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle + \|B\|^4 \langle B, B' \rangle^3 \langle B, B'' \rangle - 2 \|B\|^4 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle^3 \\ &+ \|B\|^6 \|B'\|^4 \langle B, B' \rangle + \|B\|^6 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle + \|B\|^6 \langle B', B'' \rangle \langle B, B' \rangle^2 \\ &- \|B\|^6 \langle B', B'' \rangle \langle B, B' \rangle^2 + \|B\|^2 \langle B, B' \rangle^5 - \|B\|^4 \langle B, B' \rangle^3 \langle B, B'' \rangle \end{aligned} \right]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^4}
\end{aligned}$$

$$= 0$$

$$w_2^3 = \langle \vec{U}'_2, \vec{U}_3 \rangle = \left\langle \vec{U}'_2, \frac{\|B\|}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} (B \times B') \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\|B\|^7 \|B'\|^2 (B'', B, B') - \|B\|^5 \langle B, B' \rangle^2 (B'', B, B') + 2 \|B\|^3 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle^2}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^4} \\
&= \frac{\|B\|^5 (B'', B, B') [\|B\|^2 \|B'\|^2 - \langle B, B' \rangle^2]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^4} \\
&= \frac{\|B\|^3 (B'', B, B') [\|B\|^4 \|B'\|^2 - \langle B, B' \rangle^2 \|B\|]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^4} \\
&= \frac{\|B\|^3}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} (B'', B, B') \\
w_3^1 &= \langle \vec{U}_3', \vec{U}_1 \rangle = \left\langle \vec{U}_3', \frac{B}{\|B\|} \right\rangle = 0 \\
w_3^2 &= \langle \vec{U}_3', \vec{U}_2 \rangle = \left\langle \vec{U}_3', \frac{B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\|B'\|^6 \|B\|^2 - \|B\|^4 \langle B, B' \rangle^2}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^3} B \times B'', \frac{B' \|B\|^2}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right\rangle \\
&= \frac{\|B\|^3}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} (B, B'', B') \\
&= \frac{-\|B\|^3}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} (B'', B, B') \\
w_3^3 &= \langle \vec{U}_3', \vec{U}_3 \rangle = \left\langle \vec{U}_3', \frac{(B \times B') \|B\|}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right\rangle \\
&= \frac{[\|B\|^4 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle - \|B\|^2 \langle B, B' \rangle^3 - \|B\|^4 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^4} \|B \times B'\|^2 \\
&\times [\|B\|^2 \|B'\|^2 - \langle B, B' \rangle^2] \\
&+ \frac{[\|B\|^6 \|B'\|^2 - \langle B, B' \rangle^2 \|B\|^4]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^4} [(\|B\|^2 - \langle B, B' \rangle) \langle B', B'' \rangle] \\
&= \frac{[\|B\|^2 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle - \langle B, B' \rangle^3 - \|B\|^2 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle + \langle B, B' \rangle^3]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} \\
&+ \frac{[\|B\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle + \|B\|^4 \langle B, B'' \rangle - \|B\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle]}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} = 0.
\end{aligned}$$

Bunların sonucunda hareketin yapısal denklemi;

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1' \\ \vec{U}_2' \\ \vec{U}_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} & 0 \\ -(\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|) & 0 & \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} \\ 0 & \frac{-\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bunu kısaca  $\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{bmatrix} = \vec{U}$  ile gösterilirse  $\vec{U}' = \Omega \vec{U}$  yazılabilir.  $\Omega$  anti-simetrik bir

matristir. Bu durumda hareketin Ani Pfaf vektörü;

$$\psi = w_2^3 \vec{U}_1 + w_1^2 \vec{U}_3$$

olduğundan;

$$\psi = \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|^2} \frac{B}{\|B\|} + \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|}{\|B\|^3} \frac{\|B\| (B \times B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|}$$

$$\psi = \frac{\|B\|^2}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|^2} B + \frac{1}{\|B\|^2} B \times B'$$

biçiminde ifade edilir. Hareketin Pole vektörü;

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{\|B\|^2}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|^2} B + \frac{1}{\|B\|^2} B \times B'}{\left\| \frac{\|B\|^2}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|^2} B + \frac{1}{\|B\|^2} B \times B' \right\|}} \\ &= \frac{\frac{\|B\|^2}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|^2} B + \frac{1}{\|B\|^2} B \times B'}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|^2 \sqrt{\|B\|^{10} + \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|^4} \|B \times B'\|}} \\ &= \frac{B + \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|^2}{\|B\|^4} B \times B'}{\sqrt{\|B\|^{10} + \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|^4} \|B \times B'\|}} \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde hareketin Steiner vektörü;

$$\begin{aligned} d &= \oint \psi \\ &= \oint \frac{\|B\|^2}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B\|^2} B + \frac{1}{\|B\|^2} B \times B' dt \end{aligned}$$

dir. Açılım uzunluğu  $\vec{U}_1$ - kapalı yörünge yüzeyi için

$$\begin{aligned} \ell_{\vec{U}_1} &= - \oint \langle dr, U_1 \rangle dt = - \oint \left\langle \frac{B \times B^*}{\|B\|^2}, U_1 \right\rangle dt \\ &= - \oint \left\langle \frac{(B' \times B^* + B \times B'^*) \|B\|^2 - 2 \langle B, B' \rangle (B \times B^*)}{\|B\|^4}, U_1 \right\rangle dt \\ &= - \oint \left\langle \frac{B' \times B^* + B \times B'^*}{\|B\|^2} - \frac{2 \langle B, B' \rangle}{\|B\|^2} (B \times B^*), \frac{B}{\|B\|^2} \right\rangle dt \end{aligned}$$

$$= - \oint \left[ \frac{(B', B^*, B)}{\|B\|^3} \right] dt$$

ile hesaplanır. Açılım açısı ise

$$\begin{aligned} \lambda_{\vec{U}_1} &= - \oint \langle d\vec{U}_2, \vec{U}_3 \rangle dt \\ &= - \oint \langle w_2^1 \vec{U}_1 + w_2^3 \vec{U}_3, \vec{U}_3 \rangle dt \\ &= - \oint w_2^3 dt = - \oint \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} dt \end{aligned}$$

olur. Bu ifade aynı zamanda

$$\begin{aligned} \lambda_{U_1} &= - \langle \vec{U}_1, d \rangle \\ &= 2\pi - a_{U_1} \\ &= \oint g_{\vec{U}_1} dt \end{aligned} \tag{4.5}$$

eşitliklerini de sağlar. Burada  $d$  Steiner vektörü;  $a_{\vec{U}_1}$   $\vec{U}_1$ - kapalı yörünge yüzünün küresel alanını yani  $\hat{B}(t)$  Bézier eğrisinin sınırladığı kapalı yüzey alanını;  $g_{\vec{U}_1}$  de yine  $\vec{B}(t)$  eğrisinin geodezik eğriliğini ifade eder. Buna göre

$$g_{\vec{U}_1} = - \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2}$$

ve

$$a_{\vec{U}_1} = 2\pi + \oint \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} dt$$

ile bulunur. Bunları birer teorem halinde verelim.

**Teorem 4.2**  $\hat{B}$  Bézier eğrisinin kapalı küresel projeksiyonu  $\vec{B}$  ve ona karşılık gelen regle yüzeyi  $X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}$  biçiminde  $\vec{U}_1$ - kapalı yörünge yüzeyi olsun. Bu takdirde bunların sonucunda hareketin yapısal denklemi;

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} & 0 \\ \frac{-\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} & 0 & \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} \\ 0 & \frac{-\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bunu kısaca  $\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{bmatrix} = \vec{U}$  ile gösterilirse  $\vec{U}' = \Omega \vec{U}$  yazılabilir.  $\Omega$  anti-simetrik bir

matristir. Hareketin eğriliği ve torsiyonu

$$\kappa = \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} \quad \text{dir.}$$

**Teorem 4.3**  $\hat{B}$  Bézier eğrisinin kapalı küresel projeksiyonu  $\tilde{B}$  ve ona karşılık gelen regle yüzeyi  $X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}$  biçiminde  $\vec{U}_1$ - kapalı yörünge yüzeyi olsun. Bu takdirde

a) Ani Pfaf vektörü

$$\Psi = \frac{\|B\|^2}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} B + \frac{1}{\|B\|^2} B \times B'$$

b) Pole vektörü

$$P = \frac{B + \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2}{\|B\|^4} B \times B'}{\sqrt{\|B\|^{10} + \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^4 \|B \times B'\|}}$$

c) Steiner vektörü

$$d = \oint \frac{\|B\|^2}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} B + \frac{1}{\|B\|^2} B \times B' dt$$

dir.

**Teorem 4.4**  $\hat{B}$  Bézier eğrisinin kapalı küresel projeksiyonu  $\tilde{B}$  ve ona karşılık gelen regle yüzeyi  $X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}$   $\vec{U}_1$ - kapalı yörünge yüzeyi olsun. Bu takdirde

a)  $\ell_{\vec{U}_1}$  - açılım uzunluğu

$$\ell_{\vec{U}_1} = - \oint \left[ \frac{(B', B^*, B)}{\|B\|^3} \right] dt$$

b)  $\lambda_{\vec{U}_1}$  - açılım açısı

$$\lambda_{U_1} = - \oint w_2^3 dt = - \oint \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} dt$$

ile hesaplanır.

**Teorem 4.5**  $\hat{B}$  Bézier eğrisinin kapalı küresel projeksiyonu  $\tilde{B}$  ise  $\tilde{B}$  nin sınırladığı yüzey alanı ve geodezik eğriliği sırasıyla;

$$a) \quad a_{\vec{U}_1} = 2\pi + \oint \frac{\|B\|^3(B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} dt$$

$$b) \quad g_{\vec{U}_1} = - \frac{\|B\|^3(B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2}$$

dir.

Şimdi tekrar  $\hat{B}(t)$  kapalı Bézier eğrisinin karşılık geldiği  $\vec{U}_1$ -kapalı regle yörünge yüzeyini göz önüne alalım. Bu hareketin oluşumunda  $\vec{U}_1$ - vektörleri bir kapalı yörünge yüzeyi çizerken diğer  $\vec{U}_2$  ve  $\vec{U}_3$  vektörleri de yine bir kapalı yörünge yüzeyi çizerler. O halde şimdi sırasıyla  $\vec{U}_2$  ve  $\vec{U}_3$  vektörlerinin oluşturduğu kapalı yörünge yüzeylerinin integral invariantlarını inceleyelim.  $\vec{U}_2$  vektörünün oluşturduğu kapalı yörünge yüzeyi için açılım uzunluğu;  $r = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2}$  olduğundan  $dr = \frac{B' \times B^* + B \times B^{*'}}{\|B\|^2} - \frac{2\langle B, B' \rangle}{\|B\|^4} (B \times B^*)$  olduğundan

$$\begin{aligned} \ell_{\vec{U}_2} &= - \oint \langle dr, \vec{U}_2 \rangle dt \\ &= - \oint \left\langle \left[ \frac{B' \times B^* + B \times B^{*'}}{\|B\|^2} - \frac{2\langle B, B' \rangle}{\|B\|^4} (B \times B^*) \right], \frac{B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} \right\rangle dt \\ &= - \oint \left[ \frac{\det(B, B^*, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle \det(B, B^*, B')}{\|B\|^2 \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right] dt \end{aligned}$$

bulunur. Açılım açısı ise

$$\begin{aligned} \lambda_{\vec{U}_2} &= - \oint \langle d\vec{U}_3, \vec{U}_1 \rangle dt \\ &= - \oint \left[ \frac{-\|B\|^2 \det(B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right] \langle U_2, U_1 \rangle dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece küresel yüzey alanı ve geodezik eğrilik ise

$$g_{\vec{U}_2} = 0; \quad a_{\vec{U}_2} = 2\pi$$

bulunur. O halde bu sonuçları birer teorem ile verelim.

**Teorem 4.6**  $\hat{B}(t)$  dual kapalı Bézier eğrisine karşılık gelen  $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3\}$  çatısında  $\vec{U}_2$ -yörünge yüzeyinin integral invariantları

- a)  $\ell_{\vec{U}_2} = - \oint \left[ \frac{\det(B, B^*, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle \det(B, B^*, B')}{\|B\|^2 \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right] dt$
- b)  $\lambda_{\vec{U}_2} = 0$
- c)  $g_{\vec{U}_2} = 0$
- d)  $a_{\vec{U}_2} = 2\pi$

dir.

Benzer şekilde  $\vec{U}_3$ - kapalı regle yüzeyin integral invariantlarını inceleyelim.  $\vec{U}_3$ - kapalı yörünge yüzeyinin açılım uzunluğu

$$\begin{aligned} \ell_{\vec{U}_3} &= - \oint \langle dr, \vec{U}_3 \rangle dt \\ &= - \oint \left\langle \left[ \frac{B' \times B^* + B \times B'}{\|B\|^2} - \frac{2\langle B, B' \rangle}{\|B\|^4} (B \times B^*) \right], \frac{\|B'\| (B \times B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right\rangle dt \end{aligned}$$

yazılır. İç çarpım özelliklerinden bu ifade

$$\ell_{\vec{U}_3} = - \oint \frac{\langle B' \times B^*, B \times B' \rangle + \langle B \times B', B \times B' \rangle}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} - \frac{2\langle B, B' \rangle \langle B \times B^*, B \times B' \rangle}{\|B\|^3 \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} dt$$

olur.

$$\begin{aligned} \langle B' \times B^*, B \times B' \rangle &= \langle B, B' \rangle \langle B^*, B' \rangle - \langle B, B^* \rangle \|B'\|^2 \\ \langle B \times B', B \times B' \rangle &= \|B\|^2 \langle B', B' \rangle - \langle B, B' \rangle \langle B, B' \rangle \\ \langle B \times B^*, B \times B' \rangle &= \|B\|^2 \langle B', B^* \rangle - \langle B, B^* \rangle \langle B, B' \rangle \end{aligned}$$

eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$\ell_{\vec{U}_3} = - \oint \left[ \frac{\|B\|^4 \langle B', B' \rangle - \|B\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B, B^* \rangle + \langle B, B^* \rangle [\langle B, B' \rangle^2 - \|B \times B'\|]}{\|B\|^3 \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right] dt$$

olarak ifade edilir. Açılım açısı ise

$$\begin{aligned} \lambda_{\vec{U}_3} &= - \oint \langle d\vec{U}_1, \vec{U}_2 \rangle dt \\ &= - \oint \left[ \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} \right] dt \end{aligned}$$

ile hesaplanır. O halde geodezik eğrilik ve küresel alan

$$g_{\vec{U}_3} = \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3}; \quad a_{\vec{U}_3} = 2\pi + \oint \left[ \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} \right] dt$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu sonuçları da yine bir teoremle ifade edelim.

**Teorem 4.7**  $\hat{B}(t)$  dual kapalı Bézier eğrisine karşılık gelen  $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3\}$  çatısında  $\vec{U}_3$ -yörünge yüzeyinin integral invariantları

$$a) \quad \ell_{\vec{U}_3} = - \oint \left[ \frac{\|B\|^4 \langle B^*, B' \rangle - \|B\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B, B^* \rangle + \langle B, B^* \rangle [\langle B, B' \rangle^2 - \|B \times B'\|] - \|B\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B', B^* \rangle}{\|B\|^3 \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right] dt$$

$$b) \quad \lambda_{\vec{U}_3} = - \oint \left[ \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} \right] dt$$

$$c) \quad g_{\vec{U}_3} = \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3}$$

$$d) \quad a_{\vec{U}_3} = 2\pi + \oint \left[ \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} \right] dt$$

dir.

## 4.2 Bézier Eğrilerinde İntegral

### 4.2.1 Lineer Bézier Eğrisi

Kontrol noktaları  $P_0$  ve  $P_1$  olan bir  $B(t)$  Bézier eğrisini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} B(t) &= (1-t)P_0 + P_1 \quad t \in [0,1] \\ &= P_0 + t(P_1 - P_0) \end{aligned}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_0^1 B(t) dt &= \int_0^1 ((1-t)P_0 + P_1) dt = \left[ P_0 t + (P_1 - P_0) \frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\ &= P_0 + \frac{P_1 - P_0}{2} = \frac{1}{2} (P_1 + P_0) \end{aligned}$$

elde edilir.

### 4.2.2 Kuadratik Bézier Eğrisi

Kontrol noktaları  $P_0, P_1$  ve  $P_2$  olan kuadratik Bézier eğrisini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} B(t) &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \quad t \in [0,1] \\ &= (t^2 - 2t + 1)P_0 + (2t - 2t^2)P_1 + t^2 P_2 \\ &= P_0 + t(2P_1 - 2P_0) + t^2(P_0 - 2P_1 + P_2) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu durumda integral

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B(t)dt &= \left[ P_0 t + 2(P_1 - P_0) \frac{t^2}{2} + (P_0 - 2P_1 + P_2) \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\
&= P_0 + P_1 - P_0 + \frac{1}{3}(P_0 - 2P_1 + P_2) \\
&= \frac{1}{3}(P_0 + P_1 + P_2)
\end{aligned}$$

bulunur.

#### 4.2.3 Kübik Bézier Eğrisi

Kontrol noktaları  $P_0, P_1, P_2$  ve  $P_3$  olan kübik Bézier eğrisini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
B(t) &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3 \quad t \in [0,1] \\
&= (1-3t+3t^2-t^3)P_0 + (3t-6t^2+3t^3)P_1 + (3t^2-3t^3)P_2 + t^3 P_3 \\
&= P_0 + t(3P_1 - 3P_0) + t^2(3P_0 - 6P_1 + 3P_2) + t^3(-P_0 - 3P_1 - 3P_2 + P_3)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu durumda integral

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B(t)dt &= \left[ P_0 t + (3P_1 - 3P_0) \frac{t^2}{2} + (3P_0 - 6P_1 + 3P_2) \frac{t^3}{3} \right. \\
&\quad \left. + (-P_0 - 3P_1 - 3P_2 + P_3) \frac{t^4}{4} \right]_0^1 \\
&= P_0 + \frac{3(P_1 - P_0)}{2} + \frac{(3P_0 - 6P_1 + 3P_2)}{3} + \frac{(-P_0 - 3P_1 - 3P_2 + P_3)}{4} \\
&= \frac{1}{4}(P_0 + P_1 + P_2 + P_3)
\end{aligned}$$

bulunur.

#### 4.2.4 Genel Bézier Eğrisi

Kontrol noktaları  $P_0, P_1, P_2 \dots P_n$  olan Bézier eğrisini göz önüne alalım.

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) \quad t \in [0,1]$$

yazılabilir. Bu aynı zamanda

$$B(t) = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \dots + h_n t^n$$

Burada

$$h_i = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} P_j (-1)^{i+j}$$

dir.

Bu durumda integral

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B(t)dt &= \int_0^1 (h_0 + h_1t + h_2t^2 + \dots + h_nt^n)dt \\
&= \left[ \left( h_0t + h_1 \frac{t^2}{2} + \dots + h_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \right) \right]_0^1 \\
&= h_0 + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{3} + \dots + \frac{h_n}{n+1} \\
&= P_0 + \frac{n(-P_0 + P_1)}{2} + \frac{\frac{n(n-1)}{2}(P_0 - 2P_1 + P_2)}{3} + \dots + \\
&\quad + \frac{n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} P_j (-1)^{n-1+j}}{n} + \frac{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j (-1)^{n+j}}{n+1} \\
&= \left[ \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n}{i} (-1)^i}{i+1} \right] P_0 + \left[ \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \frac{i(-1)^{i+1}}{i+1} \right] P_1 \\
&\quad + \left[ \sum_{i=2}^n \frac{\binom{n}{i} \binom{i}{2}}{i+1} (-1)^i \right] P_2 + \left[ \sum_{i=3}^n \frac{\binom{n}{i} \binom{i}{3}}{i+1} (-1)^{i+1} \right] P_3 \\
&\quad + \left[ \sum_{i=4}^n \frac{\binom{n}{i} \binom{i}{4}}{i+1} (-1)^i \right] P_4 + \left[ \sum_{i=5}^n \frac{\binom{n}{i} \binom{i}{5}}{i+1} (-1)^{i+1} \right] P_5 + \dots + \\
&\quad + \left[ \sum_{i=n-1}^n \frac{\binom{n}{n-1} \binom{n-1}{n-1}}{i+1} (-1)^{2i} \right] P_{n-1} + \frac{1}{n+1} P_n \\
&= \frac{1}{n+1} (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n)
\end{aligned}$$

bulunur.

Alınan bu sonuçları genelleyerek aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 4.8**  $t \in [0,1]$  için  $n$ . dereceden bir  $B(t)$  Bézier eğrisi kontrol noktaları  $P_0, P_1, P_2 \dots P_n$  olacak şekilde verilsin. Buna göre

$$\int_0^1 B(t)dt = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n P_i$$

dir.

### 4.3 Hareketin İnterpolasyonu

Bézier eğrilerinde son nokta interpolasyon ve son nokta teğet özellikleri kullanılarak aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 4.9** Dual uzayda  $\hat{B}(t)$  kapalı Bézier eğrisi ve onun birim dual küre üzerine izdüşümü  $\tilde{B}(t)$  eğrisi olsun. Bu  $\tilde{B}(t)$  eğrisine karşılık gelen kapalı  $\vec{U}_1$ - yörünge yüzeyi

$$X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}$$

olsun. Bu takdirde

a) Hareketin Ani Pfaf vektörünün  $t_0 = 0$  ve  $t_0 = 1$  noktalarında ifadesi

$$\begin{aligned} \psi|_{t=0 \vee t=1} &= \frac{\|P_0\|^2 P_0}{\|n(P_1 - P_0)\| \|P_0\|^2 - n\langle P_0, P_1 \rangle P_0 + n\|P_0\|^2 P_0} + \frac{1}{\|P_0\|^2} (nP_0 \times P_1) \\ &= \frac{\|P_0\|^2 P_0}{n^2 \| \|P_0\|^2 P_1 - \langle P_0, P_1 \rangle P_0 \|^2} + \frac{n}{\|P_0\|^2} P_0 \times P_1 \end{aligned}$$

dir.

b) Hareketin Pole vektörü

$$P = \frac{\psi}{\|\psi\|} = \frac{P_0 + n^3(\|P_0\|^2 \|P_1\|^2 - \langle P_0, P_1 \rangle^2)(P_0 \times P_1)}{\|P_0\|^4 \sqrt{\|P_0\|^6 + n^6(\|P_0\|^2 \|P_1\|^2 - \langle P_0, P_1 \rangle^2)^2 \|P_0 \times P_1\|^2}}$$

dir.

**Teorem 4.10** Dual uzayda  $\hat{B}(t)$  kapalı Bézier eğrisi ve onun birim dual küre üzerine izdüşümü  $\tilde{B}(t)$  eğrisi olsun. Bu  $\tilde{B}(t)$  eğrisine karşılık gelen kapalı  $\vec{U}_1$ - yörünge yüzeyi

$$X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}$$

olsun. Bu takdirde  $t_0^* \in (0,1)$  keyfi noktasında

a) Hareketin Pfaf vektörü

$$\psi|_{t=t_0^*} = \frac{\|P_0^n\|^2 P_0^n}{\|n(P_1^{n-1} - P_0^n)\| \|P_0^n\|^2 - n\langle P_0^n, P_1^{n-1} - P_0^n \rangle P_0^n} + \frac{nP_0^n \times P_1^{n-1}}{\|P_0^n\|^2}$$

dir.

b) Hareketin Pole vektörü

$$P|_{t=t_0^*} = \frac{P_0^n + \frac{\|n(P_1^{n-1} - P_0^n)\| \|P_0^n\|^2 - n\langle P_0^n, P_1^{n-1} - P_0^n \rangle P_0^n \|^2}{\|P_0^n\|^4} nP_0^n \times P_1^{n-1}}{\sqrt{\|P_0^n\|^{10} + \|n(P_1^{n-1} - P_0^n)\| \|P_0^n\|^2 - n\langle P_0^n, P_1^{n-1} - P_0^n \rangle P_0^n \|^4 \cdot n\|P_0^n \times P_1^{n-1}\|}}$$

dir.

**Teorem 4.11** Dual uzayda  $\hat{B}(t)$  kapalı Bézier eğrisi ve onun birim dual küre üzerine izdüşümü  $\tilde{B}(t)$  eğrisi olsun. Bu  $\tilde{B}(t)$  eğrisine karşılık gelen kapalı  $\vec{U}_1$ - yörünge yüzeyi

$$X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}$$

olsun. Bu takdirde  $t_0 = 0$  ya da  $t_0 = 1$  noktası ile  $t_0^* \in (0,1)$  keyfi noktasında bu yüzeyin geodezik eğriliği

$$g_{\vec{u}_1} \Big|_{t=t_0^*} = \frac{\|P_0^n\|^3 (n-1) (P_2^{n-2}, P_0^n, P_1^{n-1})}{\|(P_1^{n-1} - P_0^n)\| \|P_0^n\|^2 - \langle P_0^n, P_1^{n-1} - P_0^n \rangle \|P_0^n\|^2}$$

$$g_{\vec{u}_1} \Big|_{\substack{t=0 \\ t=1}} = \frac{\|P_0\|^3 (n-1) (P_2, P_0, P_1)}{\|(P_1 - P_0)\| \|P_0\|^2 - \langle P_0, P_1 - P_0 \rangle \|P_0\|^2}$$

dir.

**Teorem 4.12** Dual uzayda  $\hat{B}(t)$  kapalı Bézier eğrisi ve onun birim dual küre üzerine izdüşümü  $\tilde{B}(t)$  eğrisi olsun. Bu  $\tilde{B}(t)$  eğrisine karşılık gelen kapalı  $\vec{U}_3$ - yörünge yüzeyinin  $t_0 = 0$  ya da  $t_0 = 1$  noktası ile  $t_0^* \in (0,1)$  keyfi noktasında geodezik eğriliği

$$g_{\vec{u}_3} \Big|_{t=t_0^*} = \frac{n \|(P_1^{n-1} - P_0^n)\| \|P_0^n\|^2 - \langle P_0^n, P_1^{n-1} - P_0^n \rangle \|P_0^n\|^2}{\|P_0^n\|^3}$$

$$g_{\vec{u}_3} \Big|_{\substack{t=0 \\ t=1}} = \frac{n \|(P_1 - P_0)\| \|P_0\|^2 - \langle P_0, P_1 - P_0 \rangle \|P_0\|^2}{\|P_0\|^3}$$

dir.

#### 4.4. Sayısal Örnekler

Dual Bézier eğrisinin kontrol noktaları,

$$\begin{aligned} \hat{P}_0 &= (1,0,1) + \varepsilon(0,1,2) = P_0 + \varepsilon P_0^*, \\ \hat{P}_1 &= (-1,1,2) + \varepsilon(1,0,-1) = P_1 + \varepsilon P_1^*, \\ \hat{P}_2 &= (0,-1,3) + \varepsilon(2,-1,1) = P_2 + \varepsilon P_2^*, \\ \hat{P}_3 &= (1,-2,2) + \varepsilon(1,1,-1) = P_3 + \varepsilon P_3^*, \\ \hat{P}_4 &= (1,0,1) + \varepsilon(0,1,2) = P_4 + \varepsilon P_4^* \end{aligned}$$

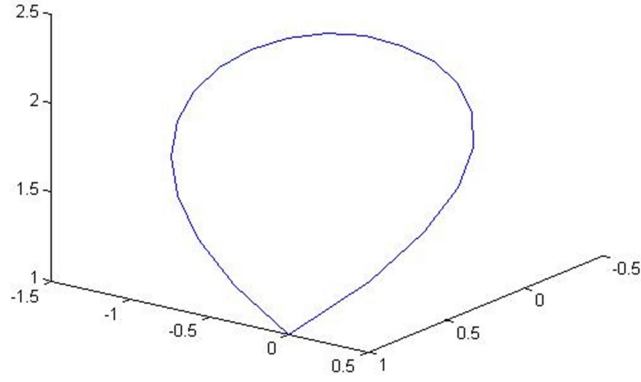
olacak şekilde verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} B(t) &= (1-t)^4 P_0 + 4(1-t)^3 t P_1 + 6(1-t)^2 t^2 P_2 + 4(1-t) t^3 P_3 + t^4 P_4 \\ &= [(1-t)^4 - 4(1-t)^3 t + 4(1-t) t^3 + t^4] e_1 + \\ &\quad + [4(1-t)^3 t - 6(1-t)^2 t^2 - 8(1-t) t^3] e_2 + \\ &\quad + [(1-t)^4 + 8(1-t)^3 t + 18(1-t)^2 t^2 + 8(1-t) t^3 + t^4] e_3 \end{aligned}$$

ve

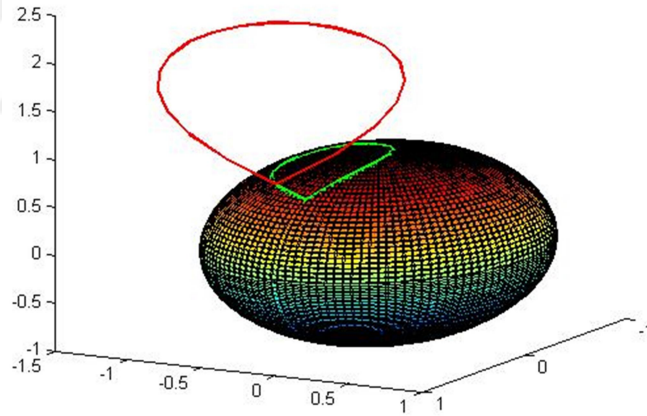
$$\begin{aligned} B^*(t) &= (1-t)^4 P_0^* + 4(1-t)^3 t P_1^* + 6(1-t)^2 t^2 P_2^* + 4(1-t) t^3 P_3^* + t^4 P_4^* \\ &= [4(1-t)^3 t + 12(1-t)^2 t^2 + 4(1-t) t^3] e_1 + \\ &\quad + [(1-t)^4 - 6(1-t)^2 t^2 + 4(1-t) t^3 + t^4] e_2 + \end{aligned}$$

$+ [2(1-t)^4 - 4(1-t)^3t + 6(1-t)^2t^2 - 4(1-t)t^3 + 2t^4]e_3$  yazılabilir. Bu durumda verilen Bézier eğrisini temsili olarak



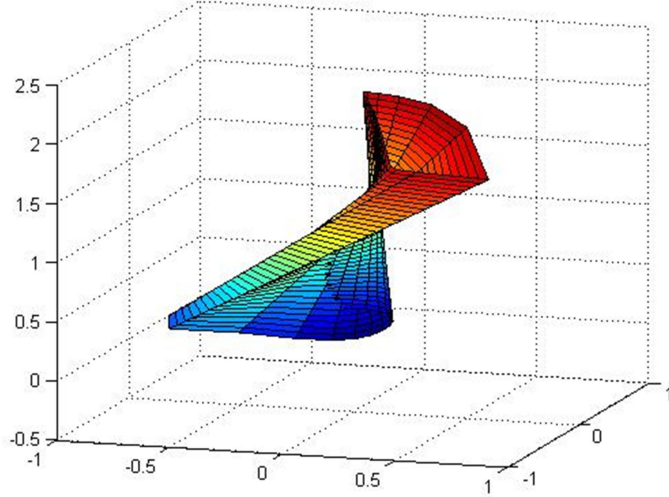
Şekil 4.1 Verilen bir  $\hat{B}(t)$  kapalı dual Bézier eğrisinin temsili grafiği

biçiminde gösterebiliriz. Bu dual Bézier eğrisinin birim dual küre üzerine projeksiyon eğrisi ise



Şekil 4.2  $\hat{B}(t)$  kapalı dual Bézier eğrisi ve onun birim dual küre projeksiyonu olan  $\tilde{B}(t)$  kapalı küresel eğrisi

biçiminde elde edilir. Elde edilen bu  $\tilde{B}(t)$  eğrisinin E. Study dönüşümü ile karşılık geldiği  $\vec{U}_1$ - regle yörünge yüzeyi ise Şekil 4.3 de verilmiştir.



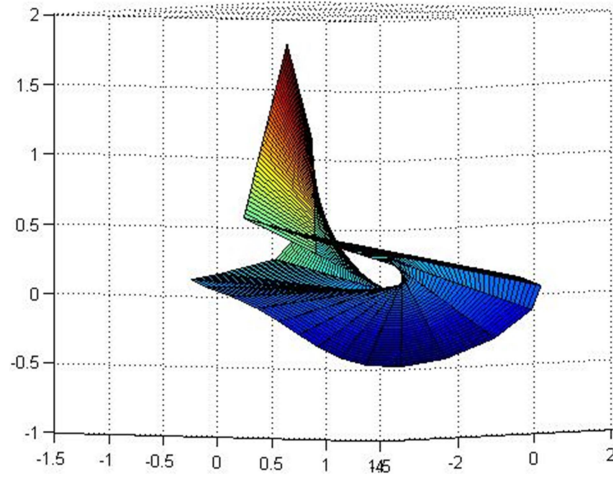
Şekil 4.3  $\tilde{B}(t)$  eğrisinin E. Study dönüşümü ile karşılık geldiği  $\vec{U}_1$ - regle yörünge yüzeyi

$$\begin{aligned} B'(t) = & [-8(1-t)^3 + 12(1-t)^2t + 12(1-t)t^2]e_1 + \\ & + [4(1-t)^3 - 24(1-t)^2t - 12(1-t)t^2 + 8t^3]e_2 \\ & + [4(1-t)^3 + 12(1-t)^2t - 12(1-t)t^2 - 4t^3]e_3 \end{aligned}$$

Bu yörünge yüzeyine ait integral invariantlar şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \ell_{U_1} &= - \int_0^1 \left[ \frac{(B', B^*, B)}{\|B\|^3} \right] dt = -15,25 \\ \lambda_{U_1} &= - \int_0^1 \left[ \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} \right] dt = -91,1750 \\ a_{U_1} &= 2\pi + \int_0^1 \left[ \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} \right] dt = 94,3166. \end{aligned}$$

Böylece  $\vec{U}_2$ - regle yörünge yüzeyin grafiği Şekil 4.4 de verilmiştir.



Şekil 4.4  $\tilde{B}(t)$  eğrisinin E. Study dönüşümü ile karşılık geldiği  $\vec{U}_2$ - regle yörünge yüzeyi

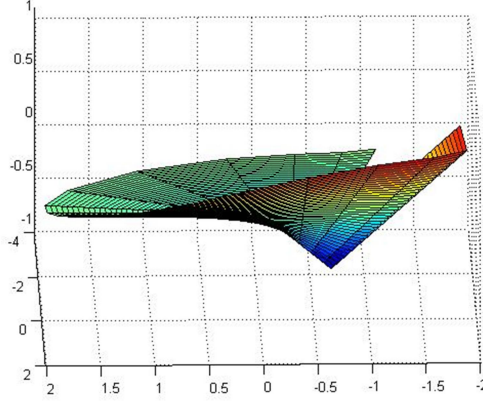
Bu yörünge yüzeyine ait integral invariantlar şu şekilde elde edilir:

$$\ell_{\vec{U}_2} = - \int_0^1 \left[ \frac{\langle B, B' \rangle \langle B^*, B, B' \rangle}{\|B\|^2 \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} - \frac{\langle B^*, B, B' \rangle}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right] dt = 27,9568$$

$$\lambda_{\vec{U}_2} = 0$$

$$a_{\vec{U}_2} = 2\pi.$$

$\vec{U}_3$ - regle yörünge yüzeyi ise Şekil 4.5 de verilmiştir.



Şekil 4.5  $\vec{B}(t)$  eğrisinin E. Study dönüşümü ile karşılık geldiği  $\vec{U}_3$ - regle yörünge yüzeyi

Bu yörünge yüzeyine ait integral invariantlar şu şekilde elde edilir:

$$\ell_{\vec{U}_3} = - \oint \left[ \frac{\|B\|^4 \langle B^*, B' \rangle - \|B\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B, B^* \rangle + \langle B, B^* \rangle [\langle B, B' \rangle^2 - \|B \times B'\|]}{-\|B\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B', B^* \rangle} \right] dt$$

$$= 22,8941$$

$$\lambda_{\vec{U}_3} = - \oint \left[ \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} \right] dt = -51,1650$$

$$a_{\vec{U}_3} = 2\pi + \oint \left[ \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} \right] dt = 54,3066.$$

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

### 5.1 Sonuçlar

Tezde bulduğumuz sonuçları aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

**Teorem 5.1** Kontrol noktaları  $\hat{P}_i$ , ( $i = 0, \dots, n$ ) olarak verilen  $\hat{B}(t) = B(t) + \varepsilon B^*(t)$  kapalı dual Bézier eğrisi verilsin. Bu eğriye karşılık gelen kapalı yörünge yüzeyi  $t \in [0,1]$  ve  $v \in \mathbb{R}$  için

$$X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}; \quad X(0, v) = X(1, v)$$

olsun. Bu yüzeyin oluşum hareketinde  $\{U_1, U_2, U_3\}$  Blaschke çattısı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \vec{U}_1 &= \frac{B}{\|B\|} \\ \vec{U}_2 &= \frac{B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B} \\ \vec{U}_3 &= \frac{\|B\|}{\|B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B} (B \wedge B'). \end{aligned}$$

**Teorem 5.2**  $\hat{B}$  Bézier eğrisinin kapalı küresel projeksiyonu  $\tilde{B}$  ve ona karşılık gelen regle yüzeyi  $X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}$  biçiminde  $\vec{U}_1$ - kapalı yörünge yüzeyi olsun. Bu takdirde bunların sonucunda hareketin yapısal denklemi;

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\|B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B\|^3} & 0 \\ -\frac{(\|B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B)}{\|B\|^3} & 0 & \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B} \\ 0 & \frac{-\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bunu kısaca  $\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_3 \end{bmatrix} = \vec{U}$  ile gösterilirse  $\vec{U}' = \Omega \vec{U}$  yazılabilir.  $\Omega$  anti-simetrik bir

matristir. Hareketin eğriliği ve torsiyonu

$$\kappa = \frac{\|B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B\|^3} \quad \text{ve} \quad \tau = \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B} \quad \text{dir.}$$

**Teorem 5.3**  $\hat{B}$  Bézier eğrisinin kapalı küresel projeksiyonu  $\tilde{B}$  ve ona karşılık gelen regle yüzeyi  $X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}$  biçiminde  $\vec{U}_1$ - kapalı yörünge yüzeyi olsun. Bu takdirde

d) Ani Pfaf vektörü

$$\psi = \frac{\|B\|^2}{\|B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B} B + \frac{1}{\|B\|^2} B \times B',$$

e) Pole vektörü

$$P = \frac{B + \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2}{\|B\|^4} B \times B'}{\sqrt{\|B\|^{10} + \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^4 \|B \times B'\|}}$$

f) Steiner vektörü

$$d = \oint \frac{\|B\|^2}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} B + \frac{1}{\|B\|^2} B \times B' dt$$

dir.

**Teorem 5.4**  $\hat{B}$  Bézier eğrisinin kapalı küresel projeksiyonu  $\tilde{B}$  ve ona karşılık gelen regle yüzeyi  $X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|} \vec{U}_1$ - kapalı yörünge yüzeyi olsun. Bu takdirde

c)  $\ell_{\vec{U}_1}$  - açılım uzunluğu

$$\ell_{\vec{U}_1} = - \oint \left[ \frac{(B', B^*, B)}{\|B\|^3} \right] dt$$

d)  $\lambda_{\vec{U}_1}$  - açılım açısı

$$\lambda_{\vec{U}_1} = - \oint w_2^3 dt = - \oint \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} dt$$

ile hesaplanır.

**Teorem 5.5**  $\hat{B}$  Bézier eğrisinin kapalı küresel projeksiyonu  $\tilde{B}$  ise  $\tilde{B}$  nin sınırladığı yüzey alanı ve geodezik eğriliği sırasıyla;

$$a) \quad a_{\vec{U}_1} = 2\pi + \oint \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2} dt$$

$$b) \quad g_{\vec{U}_1} = - \frac{\|B\|^3 (B'', B, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|^2}$$

dir.

**Teorem 5.6**  $\hat{B}(t)$  dual kapalı Bézier eğrisine karşılık gelen  $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3\}$  çatısında  $\vec{U}_2$ - yörünge yüzeyinin integral invaryantları

$$a) \quad \ell_{\vec{U}_2} = - \oint \left[ \frac{\det(B, B^*, B')}{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle \det(B, B^*, B')}{\|B\|^2 \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} \right] dt$$

$$b) \quad \lambda_{\vec{U}_2} = 0$$

$$c) \quad g_{\vec{U}_2} = 0$$

$$d) \quad a_{\vec{U}_2} = 2\pi$$

dir.

**Teorem 5.7**  $\hat{B}(t)$  dual kapalı Bézier eğrisine karşılık gelen  $\{\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3\}$  çatısında  $\vec{U}_3$ -yörünge yüzeyinin integral invariantları

$$\begin{aligned} \text{a) } \ell_{\vec{U}_3} &= - \oint \frac{\left[ \begin{aligned} &\|B\|^4 \langle B^*, B' \rangle - \|B\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B, B^* \rangle \\ &+ \langle B, B^* \rangle [\langle B, B' \rangle^2 - \|B \times B'\|] \\ &- \|B\|^2 \langle B, B' \rangle \langle B', B^* \rangle \end{aligned} \right]}{\|B\|^3 \|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|} dt \\ \text{b) } \lambda_{\vec{U}_3} &= - \oint \left[ \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} \right] dt \\ \text{c) } g_{\vec{U}_3} &= \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} \\ \text{d) } a_{\vec{U}_3} &= 2\pi + \oint \left[ \frac{\|B'\| \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle \|B\|}{\|B\|^3} \right] dt \end{aligned}$$

dir.

**Teorem 5.8**  $t \in [0,1]$  için  $n$ . dereceden bir  $B(t)$  Bézier eğrisi kontrol noktaları  $P_0, P_1, P_2 \dots P_n$  olacak şekilde verilsin. Buna göre

$$\int_0^1 B(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n P_i$$

dir.

**Teorem 5.9** Dual uzayda  $\hat{B}(t)$  kapalı Bézier eğrisi ve onun birim dual küre üzerine izdüşümü  $\tilde{B}(t)$  eğrisi olsun. Bu  $\tilde{B}(t)$  eğrisine karşılık gelen kapalı  $\vec{U}_1$ -yörünge yüzeyi

$$X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}$$

olsun. Bu takdirde

c) Hareketin Ani Pfaf vektörünün  $t_0 = 0$  ve  $t_0 = 1$  noktalarında ifadesi

$$\begin{aligned} \psi|_{t=0 \vee t=1} &= \frac{\|P_0\|^2 P_0}{\|n(P_1 - P_0)\| \|P_0\|^2 - n \langle P_0, P_1 \rangle P_0 + n \|P_0\|^2 \|P_0\|^2} + \frac{1}{\|P_0\|^2} (nP_0 \times P_1) \\ &= \frac{\|P_0\|^2 P_0}{n^2 \| \|P_0\|^2 P_1 - \langle P_0, P_1 \rangle P_0 \|^2} + \frac{n}{\|P_0\|^2} P_0 \times P_1 \end{aligned}$$

d) Hareketin Pole vektörü

$$P = \frac{\psi}{\|\psi\|} = \frac{P_0 + n^3 (\|P_0\|^2 \|P_1\|^2 - \langle P_0, P_1 \rangle^2) (P_0 \times P_1)}{\|P_0\|^4 \sqrt{\|P_0\|^6 + n^6 (\|P_0\|^2 \|P_1\|^2 - \langle P_0, P_1 \rangle^2)^2 \|P_0 \times P_1\|^2}}$$

dir.

**Teorem 5.10** Dual uzayda  $\hat{B}(t)$  kapalı Bézier eğrisi ve onun birim dual küre üzerine izdüşümü  $\tilde{B}(t)$  eğrisi olsun. Bu  $\tilde{B}(t)$  eğrisine karşılık gelen kapalı  $\vec{U}_1$ - yörünge yüzeyi

$$X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}$$

olsun. Bu takdirde  $t_0^* \in (0,1)$  keyfi noktasında

c) Hareketin Pfaf vektörünü

$$\psi|_{t=t_0^*} = \frac{\|P_0^n\|^2 P_0^n}{\|n(P_1^{n-1} - P_0^n)\| \|P_0^n\|^2 - n\langle P_0^n, P_1^{n-1} - P_0^n \rangle P_0^n} + \frac{nP_0^n \times P_1^{n-1}}{\|P_0^n\|^2}$$

d) Hareketin Pole vektörü

$$P|_{t=t_0^*} = \frac{P_0^n + \frac{\|n(P_1^{n-1} - P_0^n)\| \|P_0^n\|^2 - n\langle P_0^n, P_1^{n-1} - P_0^n \rangle P_0^n}{\|P_0^n\|^4} nP_0^n \times P_1^{n-1}}{\sqrt{\|P_0^n\|^{10} + \|n(P_1^{n-1} - P_0^n)\| \|P_0^n\|^2 - n\langle P_0^n, P_1^{n-1} - P_0^n \rangle P_0^n\|^4 \cdot n\|P_0^n \times P_1^{n-1}\|}}$$

dir.

**Teorem 5.11** Dual uzayda  $\hat{B}(t)$  kapalı Bézier eğrisi ve onun birim dual küre üzerine izdüşümü  $\tilde{B}(t)$  eğrisi olsun. Bu  $\tilde{B}(t)$  eğrisine karşılık gelen kapalı  $\vec{U}_1$ - yörünge yüzeyi

$$X(t, v) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + v \frac{B}{\|B\|}$$

olsun. Bu takdirde  $t_0 = 0$  ya da  $t_0 = 1$  noktası ile  $t_0^* \in (0,1)$  keyfi noktasında bu yüzeyin geodezik eğriliği

$$g_{U_1}|_{t=t_0^*} = \frac{\|P_0^n\|^3 (n-1) \langle P_2^{n-2}, P_0^n, P_1^{n-1} \rangle}{\|(P_1^{n-1} - P_0^n)\| \|P_0^n\|^2 - \langle P_0^n, P_1^{n-1} - P_0^n \rangle P_0^n\|^2}$$

$$g_{U_1}|_{\substack{t=0 \\ t=1}} = \frac{\|P_0\|^3 (n-1) \langle P_2, P_0, P_1 \rangle}{\|(P_1 - P_0)\| \|P_0\|^2 - \langle P_0, P_1 - P_0 \rangle P_0\|^2}$$

dir.

**Teorem 5.12** Dual uzayda  $\hat{B}(t)$  kapalı Bézier eğrisi ve onun birim dual küre üzerine izdüşümü  $\tilde{B}(t)$  eğrisi olsun. Bu  $\tilde{B}(t)$  eğrisine karşılık gelen kapalı  $\vec{U}_3$ - yörünge yüzeyinin  $t_0 = 0$  ya da  $t_0 = 1$  noktası ile  $t_0^* \in (0,1)$  keyfi noktasında geodezik eğriliği

$$g_{\vec{U}_3}|_{t=t_0^*} = \frac{n\|(P_1^{n-1} - P_0^n)\| \|P_0^n\|^2 - \langle P_0^n, P_1^{n-1} - P_0^n \rangle P_0^n\|}{\|P_0^n\|^3}$$

$$g_{\vec{U}_3}|_{\substack{t=0 \\ t=1}} = \frac{n\|(P_1 - P_0)\| \|P_0\|^2 - \langle P_0, P_1 - P_0 \rangle P_0\|}{\|P_0\|^3}$$

dir.

## 5.2 Öneriler

Tezde Bézier eğrilerinin integrali ifade edilmiş ancak bu sonuçların çok kullanışlı olmadığı gözlemlenmiştir. Çünkü Bézier eğrisi formatında verilen bir eğrinin integral hesabında sadece  $B dt$  diferansiyeli integrale edilmeyebilir.  $B$  ve  $B$  nin türevlerinin normunun ya da vektörel çarpımlarının içinde bulunacağı bir diferansiyelin integralini hesaplamak çok uygun olmamaktadır. Bu konuda daha kullanışlı bir sonuç için daha detaylı çalışılabilir.



## KAYNAKLAR

- Barnhill, R., Riesenfeld, R. F., 1974, Computer Aided Geometric Design, *Academic Press*.
- Barry, P. J., Goldman, R. N., 1989, Three Examples of Dual Properties of Bezier Curves, (Eds.) T. Lyche, L.L. Schumaker (eds.), *Academic Press*, Boston, pp. 61-69.
- Blaženka, D., Milin-Šipuš, Z. 2002. Special curves on ruled surfaces in Galilean and pseudo-Galilean spaces, *Acta Mathematica Hungarica* 98.3, 203-215.
- Bodduluri, R. M. C., Ravani, B. 1992. Geometric Design and Fabrication of Developable Surface, *ASME, Adv. Design Autom.*, 2, 243-250.
- Bodduluri, R. M. C., Ravani, B. 1993. Design of Developable Surface using Duality Between Plane and Point Geometries, *Comp.-Aided Design*, 25, 621-632.
- Chen, F., Zheng J., Sederberg, T.W. 2001. The mu-basis of rational ruled surface, *Computer Aided Geometric Design*, 18, 61-72.
- Choi, B. K., 1991, Surface Modeling for CAD/CAM, *Elsevier Science Publishers B.V.*, Amsterdam.
- Cholewa, R., Nowak, A. J., Bialecki, R. A., Wrobel, L. C., 2002. Cubic Bézier splines for BEM heat transfer analysis of the 2-D continuous casting problems, *Computational Mechanics*, 28, 282-290.
- Clifford, W. K. 1873. Preliminary sketch of bi-quaternions, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 4 (1), 381–395.
- Farin, G. 1990. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design A Practical Guide, *Academic Press Inc.*, San Diego.
- Farin, G. 1989. Curvature continuity and offsets for piecewise conics, *ACM Transactions on Graphics*, 8 (2), 89-99.
- Farouki, R. 1985. Exact offset procedures for simple solids, *Computer Aided Geometric Design*, 2 (4), 257-279.
- Farouki, R., Manni, C., Sestini, A. 2001. Real-time CNC interpolators for Bézier conics, *Computer Aided Geometric Design*, 18, 639-655.
- Farouki, R., Rajan, V. T. 1987. On the numerical condition of polynomials in Bernstein form, *Computer Aided Geometric Design*, 4 (3), 191-216.
- Ge, Q. J., Sirchia, M. 1999. Computer Aided Geometric Design of Two-Parameter Freeform Motions, *Journal of Mechanical Design Transactions of the ASME*, 121, 502-506.
- Gray, A., 1998, Modern Differential Geometry of curves and surfaces with Mathematica, *CRC Press LCC*, Boca Raton, Florida.
- Gursoy, O. 1990. On Integral Invariant of A Closed Ruled Surface, *Journal of Geometry*, 39, 80-91.
- Gursoy, O. 1990. The Dual Angle of A Closed Ruled Surface, *Mech. Mach. Theory*, 25 (2), 131-140.

- Gursoy, O. 1992. Some Results on Closed Ruled Surfaces and Closed space Curves *Mech. Mach. Theory*, 27, 323-330
- Gursoy, O., Küçük, A. 1999. On the Invariants of Trajectory Surfaces, *Mech. Mach. Theory*, 34, 587-597.
- Gursoy, O., Küçük, A. 2004. On the Invariants of Bertrand Trajectory Surfaces Offsets, *Applied Mathematics and Computation*, 151 (3), 763-773.
- Güler, F., Kasap, E. 2018. A path planning method for robot end effector motion using the curvature theory of the ruled surfaces, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 15 1850048.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 1983, Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi, *Gazi Üniversitesi, Ankara.*
- Hacısalıholu, H. H. 1972. On the pitch of a ruled surface, *Mech. Mach. Theory*, Great Britain 7 (1972) 291–305, doi: 10.1016/0094-114X(72)90039-0.
- Hathout, F., Bekar, M., Yaylı, Y. 2017. Ruled surfaces and tangent bundle of unit 2-sphere, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 14 1750145.
- Hoschek, J., 1983. Dual Bezier Curves and Surfaces, in Barnhill R.E. and Boehm W. (editors) *Surfaces in Computer Aided Design*, North Holland, Amsterdam, 147-156.
- Hoschek, J., 1985. Offset curves in the plane, *Computer Aided Design*, 17 (2) , 77-82.
- Incesu, M. (2003) "Bézier curves, Bézier surfaces and their applications using MATLAB", MS Thesis, *Karadeniz Technical University, Trabzon.*
- Incesu, M. 2021. The new characterization of ruled surfaces corresponding dual Bézier curves, *Mathematical Methods in the Applied Sciences.*
- Incesu, M., Gursoy, O. 2004, Bézier Yüzeylerinde Esas Formlar ve Eğrilikler, *XVII Ulusal Matematik Sempozyumu*, 146-157.
- Jüttler, B., Wagner, M.G. 1996. Computer-Aided Design with Spatial Rational B-Spline Motions, *Journal of Mechanical Design Trans. of the ASME*, 118, 193-201.
- Karacan, M. K., Yüksel, N., İkiz, H. 2017. On ruled surface in 3-dimensional almost contact metric manifold, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 14, 1750076.
- Kazaz, M., Özdemir, A., Güröğlü, T. 2008. On the determination of a developable timelike ruled surface, *SDÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi (E-Dergi)*, 3 (1), 72-79
- Krasauskas, R. 2002. Toric surface patches, *Advances in Computational Mathematics*, 17, 89-113.
- Küçük, A. 2004. On the developable timelike trajectory ruled surfaces in Lorentz 3-space  $3_1 \mathbb{R}$ , *App Math and Comp*, 157, 483-489
- Lee, E. 1987. The Rational Bézier Representation for Conics, *Geometric Modeling, Algorithms and New Trends*, 3-19, SIAM, Philadelphia,
- Li, Y., Pei, D. 2016. Evolutes of dual spherical curves for ruled surfaces, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39 (11), 3005-3015.
- Mainar, E., Pena, J. M., Reyes, J. S. 2001. Shape preserving alternatives to the rational Bézier model, *Computer Aided Geometric Design*, 18, 37-60.

- Marsh, D., 1999, *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, Springer - Verlag London - Berlin - Heidelberg, London.
- Mavroidis, C., Roth, B. 1997. On the Geometry of Spatial Polygons and Screw Polygons, *Journal of Mechanical Design Transactions of the ASME*, 119, 246-252.
- McCarthy, J. M., Roth, B. 1981. The curvature theory of line trajectories in spatial kinematics, *J. Mech. Design*, 103 (4), 718–724, doi: 10.1115/1.3254978.
- Müller, H. R., 1962, *Sphärische Kinematik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- Nešović, E., Öztürk, U., Öztürk, E. B. K., İlarıslan, K. 2016. On ruled surfaces with pseudo null base curve in Minkowski 3-space, *Int. Electron. J. Geom.* 9 (2), 9–20.
- Oren, I. 2016. The equivalence problem for vectors in the two-dimensional Minkowski spacetime and its application to Bézier curves, *Journal of Mathematical and Computational Science*, 6 (1), 1-21.
- Ören, İ. 2018. Equivalence conditions of two Bézier curves in the euclidean geometry, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 42 (3), 1563-1577.
- Ören, İ. 2018. On the control invariants of planar Bézier curves for the groups M (2) and SM (2), *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 10, 74-81.
- Potmann, H., 1995. Rational curves and surfaces with rational offsets, *Computer Aided Geometric Design*, 12, 175-192.
- Potmann, H., Farin, G. 1995. Developable rational Bézier and B-spline surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 12, 513-531.
- Pottmann, H., Paukowitz, P. 1997. Inflections of planar surface curves, *Computer Aided Geometric Design*, 14, 293-297.
- Reyes, J. S. 1998. Harmonic rational Bézier curves, p-Bézier curves and trigonometric polynomials, *Computer Aided Geometric Design*, 15, 909-923.
- Samancı, H. K. 2018. Some Geometric Properties of The Spacelike Bézier Curve with a Timelike Principal Normal in Minkowski 3-Space, *Cumhuriyet Science Journal*, 39 (1), 71-79.
- Samancı, H. K. 2018. Metric Properties of a Space-like Rational Bézier Curve with a Time-like Principal Normal, *Konuralp Journal of Mathematics*, 6 (1), 144-148.
- Samancı, H. K. 2018. Minkowski-3 Uzayında Timelike Rasyonel Bézier Eğrilerinin Eğrilikleri Üzerine, *Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7 (2), 243-255.
- Samancı, H. K., Celik, S., İncesu, M. 2015. The Bishop Frame of Bézier Curves, *Life Science Journal*, 12 (6).
- Schoenberg, I. 1953. On variation diminishing approximation methods, *On Numerical Approximation*, Univ. of Wisconsin Press, p. 249-274.
- Study, E. 1891. Von den bewegungen und umlegungen, *Mathematische Annalen*, 39, 441–566.
- Taş, F. 2016. A method of determining dual unit spherical Bézier curves and line surfaces, *J. Logic Math. Linguistics Appl. Sci.*, 1, 1–6.

- Taş, F., 2017. On the Design and Invariants of a Ruled Surface, <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1706/1706.00267.pdf> [Erişim Tarihi: 07/02/2022].
- Taş, F., Gürsoy, O. 2018. On the line congruences, *Int. Electron. J. Geom.* 11 (2), 47–53.
- Taş, F., İlarslan, K. 2019. A new approach to design the ruled surface, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol.*, 16 (6), 1950093 (16 pages)
- Tiller, W., Hanson, E., 1984. Offsets of two- dimensional profiles, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4, 36-46.
- Ting, K.L., Soni, A. H. 1983. Instantaneous kinematics of a plane in spherical motion, *J. Mech. Transmissions, and Automation in Design*, 105 (3), 560–567, doi:10.1115/1.3267395.
- Ugail, H., Márquez, M. C., Yılmaz, A. 2011. On Bézier surfaces in three-dimensional Minkowski space, *Computers & Mathematics with Applications*, 62 (8), 2899-2912.
- Wolters, H. J., Farin, G. 1997. Geometric curve approximation, *Computer Aided Geometric Design*, 14 (6), 499-513.
- Zha, X. F. 1997. A new approach to generation of ruled surfaces and its applications in engineering, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 13, 155–163, doi: 10.1007/BF01305867.