T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA FONKSİYONLARIN FOURIER SERİLERİNİN ORTALAMALARI İLE YAKLAŞIMI

Ferat ELİŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran -2024
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA FONKSİYONLARIN FOURIER SERİLERİNİN ORTALAMALARI İLE YAKLAŞIMI

Ferat ELİŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Jüri: Doç. Dr. Muhsin İNCESU
Jüri: Dr. Öğr. Üyesi Hayri TOPAL

Haziran-2024

TEZ KABUL ve ONAYI

Prof. Dr. Sadulla JAFAROV danışmanlığında, Ferat ELİŞ tarafından hazırlanan "Bazı Fonksiyon Uzaylarında Fonksiyonların Fourıer Serilerinin Ortalamaları İle Yaklaşımı" adlı tez çalışması 1 / 07 /2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/ oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Doç. Dr. Muhsin İNCESU …………………..
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü

Danışman
Prof. Dr. Sadulla JAFAROV …………………..
Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi,
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Hayri TOPAL …………………..
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi,
Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu / /2024 Tarih ve nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Selçuk SAĞIR

FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Ferat ELİŞ

Tarih: /. /.2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA FONKSİYONLARIN FOURIER SERİLERİNİN ORTALAMALARI İLE YAKLAŞIMI

Ferat ELİŞ

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

Bu çalışmada $L_M(T)$ Orlicz uzayında fonksiyonun Fourier serisinin Zygmund toplamları ile yaklaşımı incelenir. Elde edilen sonuçlar $E_n(f)_M$ en iyi yaklaşım ve $\omega(.,f)_M$ düzgünlük modülü cinsinden verilmektedir. İlave olarak sürekli fonksiyonlar uzayında fonksiyonların Fourier serilerinin Zygmund toplamları ile Lebesgue uzayında fonksiyonun en iyi yaklaşımı arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca, sürekli fonksiyonlar uzayında fonksiyonun düzgünlük modülü, fonksiyonun Fourier serilerinin Zygmund toplamlarının yaklaşımı ile üstten değerlendirilmektedir. Bu çalışmada ağırlıklı Orlicz uzaylarında Fourier serilerinin lineer ortalamaları ile fonksiyonların yaklaşımı incelenir. Bu sonuç, kompleks düzlemin basit bağlantılı bölgesinde tanımlanan ağırlıklı Smirnov-Orlicz sınıflarındaki fonksiyonların Faber serilerinin liner ortalamaları ile yaklaşımına uygulanmaktadır. Musielak-Orlicz uzaylarında Fourier serilerinin De la Vallée-Poussin ortalamalarının eşzamanlı yaklaşım özellikleri düzgünlük modülü cinsinden incelenir. Düzgünlük modülü cinsinden eşzamanlı yaklaşımın düz teoremi ispat edilir. Ayrıca Musielak-Orlicz uzaylarında düzgünlük modülü, kısmi toplamlar ve De la Vallée-Poussin ortalamaları cinsinden aşağıdan ve yukarıdan değerlendirilmektedir.

2024, 79 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Orlicz uzayı, Fourier serileri, Zygmund toplamları, Lebesgue uzayları, Smirnov-Orlicz sınıfı

ABSTRACT

MS THESIS

APPROXIMATION OF THE FUNCTIONS BY MEANS OF FOURIER SERIES IN SOME FUNCTION SPACES

Ferat ELİŞ

Muş Alparslan University
Institute of Science
Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

In this study we investigate the approximation of the functions by Zygmund means of the Fourier series in the $L_M(T)$ Orlicz spaces. Obtained results are given in terms $E_n(f)_M$ best approximation and modulus of smoothness $\omega(.,f)_M$. In addition, the relationship between the Zygmund means of the Fourier series of functions in the space of continuous functions and the best approximation of the function in the Lebesgue space is investigated. Also, the modulus of smoothness of the function in the space of continuous functions is estimated from above by the approximation of the Zygmund means of the Fourier series of the function. In this study the approximation of the functions by linear means of Fourier series in weighted Orlicz spaces was investigated. This result was applied to the approximation of the functions by linear means of Faber series in weighted Smirnov-Orlicz classes defined on simply connected domain of the complex plane. We investigate the simultaneous approximation properties De la Vallée-Poussin means in Musielak-Orlicz spaces in terms of the modulus of smoothness. In terms of the modulus of smoothness the direct theorem of simıltaneous approximation is proved. Also in Musielak-Orlicz spaces the modulus of smoothness are estimated from below and above in terms $n-$th partial sums and De la Vallée-Poussin means.

2024, 79 Pages

Keywords: Orlicz space, Fourier series, Zygmund means, Lebesgue spaces, Smirnov-Orlicz class

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın tüm safhalarında yardımlarını esirgemeyen ve titizlikle takip eden tez danışmanlığımı yürüten değerli hocam Muş Alparslan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü ABD Üyesi Sayın Prof. Dr. Sadulla JAFAROV'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ferat ELİŞ
Muş-2024

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^{+}$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\overline{\mathbb{C}}$	: $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$
T	: $[-\pi,\pi]$ parçası
D	: Birim disk
$\mathcal{A}$	: X kümesi üzerinde cebir
$d: X\times X\to\mathbb{R}^{+}$	: X kümesi üzerinde metrik fonksiyon
$mes\Gamma$	: Γ eğrisinin bir boyutlu Lebesgue ölçüsü
$\operatorname{int}\Gamma$	: Kapalı Γ eğrisinin içi
$ext\,\Gamma$	: Kapalı Γ eğrisinin dışı
∂B	: B bölgesinin sınırı
$f\preceq g$	: $f\le cg$, c sabiti f ve g 'ye bağlı değil
$f\asymp g$	: $f\le g$ ve $g\le f$
$C(\Gamma)$	: Γ eğrisi üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$\omega(u)=\omega(h,u)$	: h fonksiyonunun süreklilik modülü
S_{θ}	: Regüler Eğri veya Carleson eğrisi
H^{ω}	: Süreklilik modülü yardımıyla tanımlanan fonksiyonlar sınıfı
ACL	: Eğrilerde mutlak sürekli fonksiyon
$T_n(x)$	: n . dereceli trigonometrik polinom
$\prod_n$	: derecesi n ’ yi aşmayan trigonometrik polinomlar ailesi
$P_n(z)$	: n dereceli cebirsel polinom
$D_n(t)$	: Dirichlet çekirdeği
$E_n(g)$	: g fonksiyonunun en iyi yaklaşımı
$S_n(f,x)$	: f ’nin Fourier seri açılımının $n.$ kısımı toplamı

$Z_n^{(v)}(f,x)$	: Fourier serisinin n . dereceden Zygmund ortalaması veya Zygmund toplamı
$F_n(z)$	: E kontinyumunun n. dereceden Faber polinom
$S_\Gamma(f)$	: $f \in L^1(r)$ fonksiyonunun Cauchy singüler integrali
$A_p(T)$	: $T := [-\pi,\pi]$ üzerinde Muckenhoupt şartını sağla sağlayan ağırlık fonksiyonlar sınıfı
$dist(z,D)$	: z noktasının D bölgesine uzaklığı
$U(z_0,\delta)$	: $\{z : \lvert z-z_0\rvert < \delta\}$
$D(z,\delta)$	: $\{t : \lvert t-z\rvert < \delta\}$
$C(\Gamma)$	: Γ üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfı
$A(D)$	: D bölgesinde analitik fonksiyonlar sınıfı
$L^p(\Gamma)$	: Lebesgue uzayı : $\{ f : f,\ \Gamma$'de ölçülebilir (Lebesgue anlamında) ve $\int_\Gamma \lvert f(z)\rvert^p dz < \infty,\ p>0 \}$
$L^p_\omega(\Gamma)$	: $\omega-$ ağırlıklı Lebesgue uzayı $\{ f : f,\ \Gamma$'de ölçülebilir (Lebesgue anlamında) ve $\int_\Gamma \lvert f(z)\rvert^p \omega(z)\, dz < \infty,\ p>0 \}$
$A_p(\Gamma)$	: Γ üzerinde Muckenhoupt şartını sağlayan ağırlık fonksiyonlar sınıfı
$E^p(G)$	: G bölgesimnde Smirnov sınıfı: $\{ f \in E_1(G) : f \in L_p(\Gamma), \Gamma = \partial G\}$
$E^p_\omega(G)$	: G bölgesimnde $\omega-$ ağırlıklı Smirnov sınıfı: $\{ f \in E_1(G) : f \in L_p(\Gamma,\omega), \Gamma = \partial G\}$
M	: Young fonksiyonu
$L_M(\Gamma)$	: Γ üzerinde tanımlanmış Orlicz uzayı
$L^M_\omega(\Gamma)$	: Γ üzerinde tanımlanmış ağırlıklı Orlicz uzayı: $\{ f \in E_1(G) : f \in L_M(\Gamma,\omega), \Gamma = \partial G\}$
$E_M(G,\omega)$	G bölgesinde tanımlanan ağırlıklı Smirnov-Orlicz sınıfı

1. GİRİŞ

Temel olarak matematiğin tüm dallarında daha çok bileşik nesnelerin daha az bileşik nesnelerle yaklaşmak hakkında problemler önemli rol oynamaktadır. Bu durumların çok kısmında fonksiyonların yaklaşım teorisinin veya yaklaşım teorisinin problemleri, sonuçları ve metotları ile ilgili bilgiler çok faydalıdır.

İlk önce yaklaşım teorisinde başlıca olarak fonksiyonların veya fonksiyon sınıflarının belli bir alt uzayında olan fonksiyonlarla yaklaşımı incelenir. Dikkat edelim ki alt uzayda bulunan fonksiyonlar bu veya diğer anlamda yaklaştırılan fonksiyonlar daha basit fonksiyonlardır. Genellikle, sözünü ettiğimiz alt uzay cebirsel polinomlar veya (periyodik hal için) trigonometrik polinomlar kümesinden oluşmaktadır.

Fonksiyonların yaklaşım teorisinde **düz ve ters teoremler** ispatlanmaktadır. **Düz teoremler,** bir fonksiyonun düzgünlük özellikleri (fonksiyonun belirli bir mertebeden türevlerinin varlığı, fonksiyonun, türevlerinin veya bazı türevlerinin süreklilik modülü vb.) cinsinden fonksiyona yaklaşan polinomların yakınsaklık hızının ifade edilmesidir. Trigonometrik, cebirsel polinomlarla (rasyonel fonksiyonlarla) en iyi yaklaşım durumunda, düz teoremler Jackson tipi teoremler olarak da bilinir. **Ters teoremler** ise yakınsaklık hızına bağlı olarak fonksiyonların diferansiyel özelliklerini ifade etmektedir. Yani ters teoremler, fonksiyona yaklaşan polinomların yakınsaklık hızından bağımlı olarak bir fonksiyonun şu veya bu sınıfa ait olduğunu ifade eden teoremlerdir. Bu düz ve ters teoremlerin elde edilmesi fonksiyonların yaklaşım teorisinde fonksiyonların yapısal karakterizasyonu olarak adlandırılmaktadır.

Çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Giriş böliminde fonksiyonların yaklaşım teorisinin düz ve ters problemleri ile ilgili bilgiler verilmektedir. Ayrıca çalışmada elde edilen sonüçlar kısa ifade edlmiştir. Bölüm 2' de kaynak araştırması yapılmaktadır. Bu bölümde fonksyonların yaklaşım teorisinde elde edilen sonuçlarla ilgili kaynaklar araştırması yapılmaktadır. Ayrıca esas sonuçların ispatında kullanılar kaynaklar verilmiştir. Bölüm 3 Materiyal ve Yöntem bölümü olarak adlanır. Bu bölümde ilk önce temel tanımlar ve teoremler verilir, Ayrıca Fourier serileri, Faber pollinomları ve bazı fonksiyon uzayları ve analitik fonksiyon sınıfları tanımlanır. Daha sonra esas sonuçların ispatında kullanılan yardımcı sonuçlar verilir. Çalışmanın esas sonuçları Bölüm 4 de verilmektedir Böüm 4.1 de $L_M(T)$ Orlicz uzayında fonksiyonun Fourier serisinin

Zygmund toplamları ile yaklaşım problem incelenmektedir. Elde edilen sonuçlar $E_n(f)_M$ en iyi yaklaşım ve $\omega(.,f)_M$ düzgünlük modülü cinsinden elde edilir. Bölüm 4.2 de sürekli fonksiyonlar uzayında fonksiyonların türevleri ile fonksiyonların türevlerinin Fourier serilerinin Zygmund ortalamaları arasındaki hata ile Lebesgue uzayında fonksiyonun en iyi yaklaşımı arasındaki ilişki incelenmektedir**.** Bölüm 4.3 te ağırlıklı Orlicz uzaylarında fonksiyonların Fourier serilerinin lineer toplamları ile yaklaşımı ile, fonksiyonların k. mertebeden Zygmund-Riesz toplamları ile yaklaşımı arasında ilişki hakkında gerekli ve yeterli koşul incelenmiştit. Ayrıca, ağırlıklı Orlicz uzaylarında düzgünlük modülü cinsinden fonksiyonların Fourier serilerinin ortalamaları ile yaklaşımı incelenir. Bu sonuç Smirnov-Orlicz sınıflarında kompleks düzlemin basit bağlantılı bölgelerinde tanımlanmış fonksiyonların Faber serilerinin lineer ortalamaları ile yaklaşımına uygulanmıştır. Bölüm 4.4 de Musielak-Orlicz uzaylarında Fourier serilerinin De la Vallée-Poussin ortalamalarının eşzamanlı yaklaşım özellikleri düzgünlük modülü cinsinden incelenir. Düzgünlük modülü cinsinden eşzamanlı yaklaşımın düz teoremi ispat edilir. Ayrıca Musielak-Orlicz uzaylarında düzgünlük modülü kısmi toplamlar ve De la Vallée-Poussin ortalamaları cinsinden aşağıdan ve yukarıdan değerlendirilmektedir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Kabul edelim ki, $f \in C_{[a,b]}$ dir. Yani, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyondur.

Böyle soru ortaya çıkıyor : Eğer n dereceli $P_n^*(x)$ polinomu verilirse, hangi şartlar içinde $P_n^*(x)$ polinomu $f(x)$ fonksiyonuna iyi yakınsıyor?

Bu problem ile ilgili olarak gerek ve yeter şart 1854 yılında P. L .Chebyshev (Pafnuty Lvovich) tarafından verilmiştir. Bu teorem yaklaşım teorisinin meydana gelmesinde önemli rol oynamıştır. Daha sonralar fonksiyonların yaklaşım teorisi ile ilgili ilk sonuçlar Weierstrass'ın (1885) çalışmalarında elde edilmiştir

Her hangi bir $\{\varphi_k(x)\}$ ortogonal sistemi üzerinde Fourier serisinin yakınsaklık problemlerinin pozitif yönde çözümü $E_n(f)$ (En iyi yaklaşım) ve L_n (Lebesque sabiti) olmak üzere $E_n(f)$. L_n çarpımının sıfıra yaklaşan olması halinde mümkün olur. Burada her $\{\varphi_k(x)\}$ sistemi için, $L_n(x)$ Lebesque fonksiyonu yazılır ve

$$L_n = \max L_n(x)$$

Lebesque sabiti değerlendirilir. Bir çok hallerde $L_n \sim L_n n$ olarak sonsuz artan olur.

Yani serinin yakınsaklık problemi $E_n(f)$'lerin sıfıra yaklaşım hızı ile belirlenir. Bu nedenle de $E_n(f)$'ler için böyle bir hızın incelenmesi, ayrıca her bir fonksiyonlar sınıfı için onun değerlendirilmesi öne çıkar. Fonksiyonların konstruktif (yapısal) teorisinin **direkt (düz) problemi** ile ilk defa uğraşan Amerika Matematikçisi D. Jackson olmuştur. D. Jackson 1911; Jackson,1911,1912 çalışmalarında fonksiyonunun süreklilik modülü kavramını kullanılarak yaklaşım teorisinin düz teoremini elde etmiştir. Jackson,1911 elde ettiği sonuç ile Weierstrass teoremini daha da güçlendirmiştir

D. Jackson, H_n cebirsel polinomlar ile yaklaşım olan $E_n(f)$ ve T_n trigonometrik polinomlar ile yaklaşım olan $E_n^*(f)$'lerin C normu ile tanımlanan metrikte belirlenmiş olduğu haller için, f'nin diferansiyel özelliklerinin verebileceği etkileri araştırmıştır.

Sonralar bu teoremler başka uzaylarda, daha genel biçimlerde, daha başka yaklaşım problemlerinde ispatlanmış ve bu yönde çalışmalar şimdide yapılmakta olup, devam etmektedir.

Fonksiyonların yaklaşım teorisinde düz ve ters problemler (düz ve ters teoremler)Bernstein, 1912; Jackson ,1924; Timan ,1950; Stechkin, 1951; Timan, 1958; Timan, 1966; çalışmalarında incelenmiştir. Fonksiyonların yaklaşım teorisinde düz ve ters teoremlerin elde edilmesi fonksiyonların **yapısal karakterizasyonu olarak** adlandırılmaktadır.

Ayrıca, fonksiyonların yaklaşım teorisi ile ilgili bir çok sonuçlar Lebesgue, 1898; Vallée-Poussin, 1910, 1911; Favard, 1936, 1937, 1949; Kolmogorov, 1935; Nikolski, 1946; Timan, 1950 ve daha birçok matematikçilerin çalışmalarında elde edilmiştir.

Fonksiyonların trigonometrik ve cebirsel polinomlarla yaklaşımı ile ilgili sonuçlar La Vallée-Poussin, 1919; Jackson, 1930, 1941; Natanson, 1949; Zygmund, 1959; Timan, 1994; Bary, 1964; Akhiezer, 1965; Lorentz, 1966; De Vore ve Lorentz; 1993; De Vore, 1986; Stepanets, 1995; Mhaskar, 1996; Trigub ve Belinsky, 2004; Dzyadyk, Shevchuk, 2009; Andrievskii ve ark., 1995; Andrievskii, Blatt, 2002 kitaplarında bulmak mümkündür.

Ağırlıksız ve ağırlıklı Orlicz uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım problemi birçok yazarlar tarafından incelenmiştir.(Örneğin, bak. Akgün, Israfilov 2006; Akgün, Israfilov 2008; Akgün, Israfilov, 2010; Akgün, 2013; Güven, Israfilov, 2002; Güven, Israfilov2009; Israfilov, 2006; Jafarov, 2011; Jafarov, 2012; Jafarov, Mamedkhanov, 2012; Jafarov, 2013; Kokilashvili, 1968; Ponomarenko, 1966; Ramazanov, 1984; Runovski, 2001; 1991]). Farklı uzaylarda fonksiyonların Fourier serilerinin toplamları ile yaklaşımı Baiborodov, 1980; Il'yasov, 1986; Il'yasov, 2001; Jafarov, 2015; Kokilashvili, Samko, 2009; Kokilashvili, Tsanava, 2010; Stechkin, 1961; Stechkin, 1980; Serdyuk, Ovsi, Musienko 2012; Timan, 1962; Timan, 1968; Zakharov, 1968 çalışmalarında incelenmiştir

Farklı uzaylarda fonksiyonların Fourier serilerinin lineer toplamları ve kompleks düzlemin basit bağlantılı bölgelerinde tanımlanmış farklı fonksiyon sınıflarında fonksiyonların Faber serilerinin toplamları ile yaklaşımı bir çok yazarlar tarafından incelenmiştir (Örneğin, Cao, 1997; Chikina, 2013; Il'yasov 1986; Jafarov 2018;

Jafarov, 2015; Jafarov, 2020; Kokilashvili ve Samko, 2009; Kokilashvili ve Tsanava, 2010; Stechkin, 1961 and M. F. Timan, 1965 çalışmalarında incelenmiştir.

Musielak – Orlicz uzaylarında fonksiyonların polinomsal yaklaşım problemlerinin uzun bir geçmişi bulunkaktadır. Öteleme değişmezliği özelliğini sağlayan Orlicz uzayları, Musielak – Orlicz uzaylarının özel bir halidir. Bu uzaylarda fonksiyonların polinomsal yaklaşım problemleri çeşitli matematikçiler tarafından Akgün, 2011; Cohen , 1978; Garidi, 1991; Israfilov, Guven, 2006; Israfilov, Oktay, Akgun , 2005; Israfilov, Akgün , 2006 ; Jafarov, 2011; Jafarov, 2016; Jafarov, 2012; Jafarov, 2013; Kokilashvili, 1965; Kokilashvili, 1966; Ponomarenko, 1966; Ramazanov 1984; Tsyganok 1966; Yıldırır 2012; Yıldırır Y.E, Israfilov, 2010 çalışmalarında incelenmiştir. Genel olarak Musielak – Orlicz uzaylarında, $L^{p(x).}$ değişken üslü Lebesgue uzaylarında görülebileceği gibi öteleme değişmezliği özelliği sağlanmayabilir. $L^{p(x).}$ uzayında trigonometrik polinomsal yaklaşımla ilgili çeşitli eşitsizlikler Akgün 2011; Akgün, Kokilasvili, 2012; Guven , Israfilov, 2010; Israfilov, Kokilashvili , 2007; Sharapudinov, 2007; Sharapudinov 2013; çalışmalarında elde edilmiştir. Not edelm ki, Musielak – Orlicz uzayındaki öteleme değişmezliği hipotezi altında Musielak'in Musielak , 1997 çalışmasında bazı trigonometrik yaklaşım eşitsizlikleri elde edilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Temel Tanımlar

Tanım 3.1 X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstersin. Bu durumda $f:\mathbb{N}\to X$ fonksiyonuna dizi ve $X=\mathbb{R}$ olması durumunda diziye **reel terimli dizi** denir. (Sarıgöl, Jafarov, 2014)

Tanım 3.2 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini göstersin. $X\subset\mathbb{R}$, $f:X\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve x_0 ise X kümesinin bir yığılma noktası olsun. Terimleri $X\setminus\{x_0\}$ kümesinden seçilen ve x_0 noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için elde edilen $\left(f(x_n)\right)$ görüntü dizisi aynı bir A sayısına yakınsıyorsa, A' ya f fonksiyonunun x_0 noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ veya } f(x)\to A\ \left(x\to x_0\right)$$

şeklinde gösterilir. (Sarıgöl, Jafarov, 2014).

Bu tanıma " limitin dizisel tanımı " veya Heyne* anlamında tanımı denir.

Buna göre x_0 noktasına yakınsayan iki farklı $\left(x_n'\right)$ve $\left(x_n''\right)$ dizileri için $\left(f(x_n')\right)$ ve $\left(f(x_n'')\right)$ dizileri farklı limitlere yakınsak veya biri yakınsak değilse, bu durumda f 'nin x_0 noktasında limiti mevcut değildir.

Bu limit tanımını eşdeğer olarak "Limitin $\varepsilon-\delta$" veya Cauchy** anlamında ifade edebiliriz.

Tanım 3.3 $X\subset\mathbb{R}$, $f:X\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve x_0, X kümesinin bir yığılma noktası olsun. $A\in\mathbb{R}$ ve $\varepsilon>0$ verilsin. Eğer $0<|x-x_0|<\delta$ şartını sağlayan her $x\in X$ için

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

olacak şekilde $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabiliyorsa, bu taktirde A sayısına x, x_0'a giderken
(veya x_0 noktasında) f "nin limiti denir ve

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ veya } f(x)\to A \quad (x\to x_0)$$

- biçiminde ifade edilir.

.

Tanım 3.4 $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ *ve* $x_0 \in X$ olsun. Eğer terimleri X kümesinde olan ve x_0 noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ görüntü dizisi $f(x_0)$ noktasına yakınsıyorsa, yani

$$\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$$

ise f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. (Sarıgöl, Jafarov, 2014)

Bu tanım şu şekilde de ifade edilebilir. :

Tanım 3.5 $X \subset R$, $f : X \to R$ ve $x_0 \in X$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. f 'nin X kümesinin bütün noktalarında sürekli olması durumunda ise f fonksiyonuna X kümesinde süreklidir veya kısaca süreklidir denir. (Sarıgöl, Jafarov, 2014)

Tanım 3.6 $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $x \in A$ için

$$x + T \in A,\ x - T \in A \text{ ve } f(x + T) = f(x)$$

olacak şekilde bir $T \neq 0$ sayısı varsa, f ' ye periyodik fonksiyon ve T sayısına da bir periyot adı verilir. Varsa pozitif periyotların en küçüğüne fonksiyonun esas (asli) periyodu denir. Eğer T sayısı f nin periyodu ise bu taktirde -T de f nin periyodu olur. Zira, $\forall x \in A$ için $x - T \in A$ olduğundan f(x)=f[(x-T)+T]=f(x-T)) dır. Öte yandan $x + 2T, x + 3T, \cdots, x + nT \in A$ ve $x - 2T, x - 3T, \cdots, x - nT \in A$ olduğuna göre,

f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=f(x+3T)=...=f(x+nT)

f(x)=f(x-T)=f(x-2T)= f(x-3T) =...=f(x-nT)

olur. Dolayısıyla -nT ve nT' de periyottur.

Periyodik fonksiyonlar ile ilgili şu özellikler kolayca elde edilebilir:

(i) Eğer f'nin periyodu T ise bu taktirde, y=f(ax+b), $(a \neq 0)$ eşitliği ile verilen fonksiyonunun periyodu $T_1 = T/a$ dır. Çünkü, her x için $f[a(x + T_1) + b] = f[ax + aT_1 + b] = f[(ax + b) + T] = f(ax + b)$ dır.

(ii) Her x ve $T \neq 0$ sayısı için $f(x + T).f(x) = 1$ eşitliği sağlanıyorsa, f'nin periyodu 2T olur.

(iii) Eğer g periyodik bir fonksiyon ise fog fonksiyonu periyodiktir ve fog kesin monoton ise g ve fog fonksiyonları periyodik olup periyotları aynıdır. (Sarıgöl, Jafarov, 2014)

Tanım 3.7 $[a,b]$ parçasında tanımlanmış $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları ,

$$(f,g)=\int_a^b f(x).g(x)=0$$

şartını sağladığında , $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarına ***ortogonal*** fonksiyonlardı***r*** denir.

Tanım 3.8 $[a,b]$ parçasında tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonu için

$$(f,f)=\int_a^b f^2(x)d\mu(x)=1$$

olduğunda $f(x)$, fonksiyonuna **normal** fonksiyondur denir.

$\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ fonksiyonlar sistemi verilmiş olsun.

Tanım 3.9: $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ fonksiyonlar sistemi için

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \lambda_j, & i=j\ (\lambda_j>0)\end{cases}$$

ise $\{\varphi_k(x)\}_1^n$ sistemi ***ortogonal*** sistemdir denir.

Özel halde; $\lambda_j=1\ \ (j=1,2,...,n)$ olduğunda $\{\varphi_k(x)\}_1^n$ sistemi **ortonormaldir** denir.

Eğer $\{\varphi_k(x)\}_1^n$ ortogonal sistem (o.s) ise $\left\{\dfrac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_1^n$ ortonormal sistemdir. (o.n.s)

Örnek 3.1 $1,\cos x,\cos 2x,...,\cos nx$ fonksiyonları $[0,2\pi]$ parçasında ortogonaldir.

Çözüm: 1) $\int_0^{2\pi} 1.\cos kxdx=\frac{1}{k}\sin kx\Big|_0^{2\pi}=0$;

2) $\int\limits_0^{2\pi} \cos kx.\cos mxdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [\cos(k-m)x + \cos(k+m)x]dx = \begin{cases} \pi, k=m \\ 0, k \neq m \end{cases}$;

3) $\int\limits_0^{2\pi} 1.1dx = 2\pi$.

Görülür ki ; $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$ sistemi (o. n. s)

Kolayca ispatlanır ki; $\{\cos kx\}_0^n$ sistemi $[0, \pi]$ parçasında da (o. s.) dir, ancak

$$\left\{ \frac{\cos kx}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \right\}_0^{\pi} \text{ sistemi (o.n.s.) dir.}$$

Örnek 3.2 $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, ..., \sin nx$ fonksiyonları da $[0, 2\pi]$ ve $[0, \pi]$ parçalarında ortogonaldırlar.

Bunun doğru olması ,

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin kx.\sin(mx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [\cos(k-m)x - \cos(k+m)x]dx$$

İntegralinin hesaplanması sonucunda elde edilir. Aynı sözleri , $[0, \pi]$ parçası için de söyleyebiliriz.

Tanım 3.10 $\{\cos kx\}_0^{\infty}$ sistemi;

$$\int\limits_a^b \varphi_k(x)\varphi_m(x)d\mu(x) = \begin{cases} 0, k \neq m \\ \lambda_m, k = m \end{cases}$$

şartını sağladığında $[a, b]$ parçasında (o.s.) denir.

$\lambda_m = 1(m = 0, 1, 2, ...)$ olduğunda bu fonksiyonlar (o. n. s.) oluştururlar ve $\{\varphi_k\}_0^{\infty}$ şeklinde gösterilir.

Örneğin ; $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin nx, \cos nx...$ $[0, 2\pi]$ parçasında (veya uzunluğu 2π olan herhangi başka bir parçada) (o. s.) dir. Bu sistemin (o. n. s.) ise;

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},...,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},...$$

şeklindedir.

Kompleks Düzlemi $\mathbb{C}$ ile gösterelim.

Tanım 3.11 $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bağlantılı ve açık bir kümeye **Bölge** adı verilir (Başkan, 1998, s. 23).

Tanım 3.12 $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bağlantılı ve kapalı bir kümeye **kontinyum** adı verilir (Pommerenke, 1992)

Tanım 3.13 Kabul edelim ki**,** f, z_0 noktasının belli bir komşuluğunda tanımlanan kompleks değerli bir fonksiyondur. Eğer

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

limiti var ve sonlu ise, bu durumda $f'(z_0)$'a f'in z_0 noktasındaki **türevi** denir.

$G\subset\mathbb{C}$ bölgesi verilmiş olsun. Eğer, f fonksiyonu her $z_0\in G$ noktasında türevlenebilirse o zaman f fonksiyonuna G'de **türevlenebilirdir,** denir (Başkan,1998).

Tanım 3.14 Eğer f fonksiyonu verilmiş bir z_0 noktasının herhangi bir komşuluğundaki bütün noktalarda türevlenebiliyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında **analiktir,** denir (Zill ve Shanahan, 2003).

Eğer f fonksiyonu her $z\in G$ noktasında analitik ise, f fonksiyonuna G de **analitiktir** denir.

G'de analitik tüm fonksiyonların kümesini $A(G)$ ile, G de analitik ve $\overline{G}$'da sürekli olan fonksiyonların kümesini ise $A(\overline{G})$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.15 X boş olmayan bir küme ve $d:X\times X\to R^+$ bir fonksiyon olsun. $\forall x,y,z\in X$ için,

$$d(x,y)\geq 0;$$

$$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y;$$

$$d(x,y)=d(y,x);$$

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$$

şartını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (X,d) ikilisine ise **metrik uzay** denir (Kreyszıg, 1978).

Tanım 3.16: L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+: L\times L\to L$ ve $\cdot: F\times L\to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L'ye F cismi üzerinde **lineer uzay (vektör uzayı)** denir.

A) L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

$\forall x, y\in L$ için $x+y\in L$;

$\forall x, y, z\in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$;

$\forall x\in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde, $\theta\in L$ vardır;

$\forall x\in L$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde, $(-x)\in L$ vardır;

$\forall x, y\in L$ için $x+y=y+x$;

B) $x, y\in L$ ve $\alpha,\beta\in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır;

$\alpha\cdot x\in L$;

$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y;$

$(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$;

$(\alpha\cdot\beta).x=\alpha(\beta\cdot x)$;

$I\cdot x=x$.

$F=\mathbb{R}$ ise L'ye reel lineer uzay, $F=\mathbb{C}$ ise, L'ye **kompleks lineer uzay** denir (Maddox, 1970).

Tanım 3.17 X bir lineer uzay olsun ve F cismi $\mathbb{R}$ olmak üzere, $|\cdot|: X\to F$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X,\|\cdot\|)$ ikilisine ise bir **normlu uzay** denir (Kreyszıg, 1978).

$\forall x, y\in X$ ve $\forall\alpha\in F$ için,

$$\|x\|=0\Leftrightarrow x=0;$$

$$\|\alpha.x\|=|\alpha|\|x\|;$$

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| .$$

Tanım 3.18 X bir normlu lineer uzay olsun. Eğer X uzayı,

$$d(x,y) = \|x-y\| \ (x, y \in X)$$

ile verilen norm metriğine göre tam ise, bu durumda X uzayına **Banach uzayı** denir. X uzayının kompleks veya reel lineer uzay oluşuna göre, Banach uzayı kompleks veya reel Banach uzayı olarak adlandırılır (Kreyszıg, 1978).

Tanım 3.19 L bir lineer uzay ve $A \subset L$ olsun. $\forall x, y \in A$ için, $B = \{z \in L : z = \alpha x + (1-\alpha) y,\ 0 \le \alpha \le 1\} \subset A$ ise, A kümesine **konveks küme** denir (Kreyszıg, 1978

Tanım 3.20 $A \subset \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $M : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in A$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$M(\alpha x + (1-\alpha)y \le \alpha M(x) + (1-\alpha) M(y)$$

oluyorsa, M fonksiyonuna bir ***konveks fonksiyon*** denir.

Tanım 3.21 $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ konveks ve sürekli bir fonksiyon olsun.

M fonksiyonu

$i)$ $M(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

$ii)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{M(x)}{x} = 0;$

$iii)$ $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{M(x)}{x} = \infty$

koşullarını sağlıyorsa, M fonksiyonuna bir ***Young fonksiyonu*** denir. Örneğin,

$i)$ $M(x) = \dfrac{x^p}{p}$, $1 < p < \infty$

$ii)$ $M(x) = e^x - x - 1$

$iii)$ $M(x) = e^{x^p} - 1$, $1 < p$

$iv)$ $M(x) = \dfrac{x^p}{\ln(x+e)}$, $2 < p$

fonksiyonları birer Young fonksiyonudur.

Tanım 3.22 X bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa, bu $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir ***cebirdir*** denir.

$i)$ $X \in \mathcal{A}$

$ii)$ Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X/E \in \mathcal{A}$

$iii)$ $k = 1, 2, 3, ..., n$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer $iii)$ yerine her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \mathcal{A}$

şartı alınırsa $\mathcal{A}$ sınıfına bir $\sigma -$ ***cebir adı*** verilir. Eğer $\mathcal{A}$, X üzerinde bir $\sigma -$ cebiri ise, yukarıdaki özelliklerden ,

$i)$ $\varnothing \in \mathcal{A}$

$ii)$ $k = 1, 2, 3, ..., n$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} E_k \subset \mathcal{A}$

$iii)$ $k \in \mathbb{N}$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$

$iv)$ Her $A, B \in \mathcal{A}$ için $A/B \in \mathcal{A}$

önermelerinin doğruluğu gösterilebilir.

Tanım 3.23 X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir $\sigma -$ cebir ise $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ***ölçülebilir uzay*** denir. $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de ***ölçülebilir küme*** adı verilir.

Tanım 3.24 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\overline{\mathbb{R}}^{+} = \mathbb{R}^{+} \cup \{\infty\}$ olmak üzere $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^{+}$$

genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

$i)\ \mu(\varnothing) = 0$

$ii)$ Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

$iii)$ Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona ***ölçü fonksiyonu*** ve ya kısaca ***ölçü*** denir.

Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye bir sonlu ölçü adı verilir. X kümesi her biri sonlu ölçüye sahip sayılabilir sayıda kümelerin birleşimi olarak yazılabılıyorsa, μ ölçüsü $\sigma -$ ***sonludur*** denir. Eğer $\mu(x) = 1$ ise bu ölçüye ***olasılık ölçüsü*** denir.

Tanım 3.25 X herhangi bir küme, $\mathcal{A}$, X üzerinde bir $\sigma -$ cebiri ve μ, $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü fonksiyonu olmak üzere (X, A, μ) üçlüsüne bir ***ölçü uzayı*** denir.

Tanım 3.26 E ölçülebilir bir küme ve $f(x)$ de bu E kümesinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her K reel sayısı için, $f(x) > K$ olan $x \in E$ olan $x \in E$ değerlerinin kümesi ölçülebilirse, f fonksiyonu E kümesinde ***Lebesgue anlamında ölçülebilirdir*** veya kısaca ***ölçülebilirdi***r denilir. Bazen bu, μ ölçülebilir kelimesi ile ifade edilir.

Bir fonksiyonun ölçülebilirliğini kısaca ,

$$\{x \in E : f(x) > K\} \quad \text{ve} \quad E[f(x) > K]$$

gösterimlerinden birisi ile ifade edeceğiz. Gösterimi kolaylığı bakımından ikinci ifadeyi daha çok kullanacağız. Dahası birinci ifadeyi de kullanmadan çekinmeyeceğiz. Bundan böyle eğer $f(x)$ fonksiyonu ölçülebilirse , buna ***ölçülebilir fonksiyon*** diyeceğiz.

Tanım 3.27 (i) $c, d \in \mathbb{R}$, ve $c < d$ şartı sağlansın. $\varsigma = \varsigma(s) : [c, d] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda $\mathbb{C}$ de $\Gamma := \{\varsigma(t) : t \in [c, d]\}$ kümesine başlangıç noktası $\varsigma(c)$ ve bitim noktası $\varsigma(d)$ olmak üzere bir **eğri** denir**;**

(ii) Bir Γ verildiğinde, $\varsigma(c)=\varsigma(d)$ şartı sağlanırsa, Γ eğrisine **kapalı eğri;**

(iii) $\forall s_1, s_2 \in [c,d]$ için $s_1 \neq s_2$ iken $\varsigma(s_1) \neq \varsigma(s_2)$ ise , bu durumda Γ eğrisine **Jordan yayı ,** eğer $s_1 = s_2$ için $\varsigma(s_1) = \varsigma(s_2)$ ise Γ eğrisine **basit eğri**, eğer Γ basit bir eğri ve $\varsigma(c)=\varsigma(d)$ ise Γ eğrisine **basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi);**

(iv) $P := \{s_0, s_1, ..., s_n\}$, $[c,d]$ aralığının bir parçalanması olsun. Eğer $\forall m \in \{0,1,2,...,n\}$ için $\varsigma = \varsigma(s)$ fonksiyonu her (s_{m-1}, s_m) aralığında sürekli türeve sahip ve $\lim\limits_{s \to s_{m-1}^+} \varsigma(s)$, $\lim\limits_{s \to s_m^-} \varsigma(s)$ limitleri var ise, bu durumda Γ eğrisine **parçalı düzgün eğri;**

(v) $\forall s \in [c,d]$ için $\varsigma'(t)$ türevi var ve sürekli ise, bu durumda Γ eğrisine **diferansiyellenebilir eğri;**

(vi) Γ diferansiyellenebilir bir eğri olmak üzere eğer $\varsigma'(t) \neq 0$ şartı sağlanırsa, Γ eğrisine **düzgün eğri** denir (Depree, Gehring, 1969).

$[c,d]$ aralığının $P = \{s_0, s_1, ..., s_n\}$ şeklindeki tüm parçalanmalarının ailesi $\wp$ ile gösterilsin ve $\ell_n(P) := \sum\limits_{m=1}^{n} |\varsigma(s_m) - \varsigma(s_{m-1})|$ olsun.

Tanım 3.28 Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\ell_n(P) : P \in \wp\} < \infty$$

şartı sağlanırsa**,** Γ eğrisine **ölçülebilir eğri (düzlendirilebilir)** denir.

Tanım 3.29 G , $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Ayrıca, $w = f(z)$ ise G bölgesinde tanımlı kompleks bir dönüşüm olsun. Eğer G bölgesinin içinde de olan ve z_0 da kesişen her C_1 ve C_2 düzgün eğri çifti için z_0 da C_1 ve C_2 eğrileri arasındaki açı, $f(z_0)$ da bu eğrilerin görüntüleri olan $C_1' = f(C_1)$ ve $C_2' = f(C_2)$ eğrileri arasındaki açıyla aynı büyüklükte ve yöndeyse $w = f(z)$, z_0 noktasında da **konform bir dönüşümdür**, denir (Zill ve Shanahan, 2003).

Teorem 3.1 f, z_0'ı içeren D bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $f'(z_0) \neq 0$ olsun. Bu durumda $w = f(z)$, z_0 da konform bir dönüşümdür (Zill ve Shanahan, 2003).

D ile $\{w : |w| < 1\}$ birim dairesi gösterilmiş olsun Yani, $D := \{w : |w| < 1\}$ olarak gösterilsin.

Teorem 3.2 (Riemann Dönüşüm Teoremi) $G \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ tespit edilmiş bir nokta olsun. G bölgesini $D := \{w : |w| < 1\}$ birim dairesine dönüştüren ve $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır (Goluzin, 1968).

G, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde Γ düzeltilebilir Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge olsun. $G^- := ext\Gamma$ ve

$$T. = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\},\ D := \operatorname{int} T \text{ ve } D^- := extT$$

gösterelim.

$w = \phi(z)$ ise G^- bölgesini D^- bölgesine dönüştüren fonksiyon olsun ve

$$\phi(\infty) = \infty,\ \lim_{z \to \infty} \frac{\phi(z)}{z} > 0,$$

şartları sağlansın. ϕ fonksiyonunun tersini ψ ile gösterelim.

h, $[0, 2\pi]$ aralığında bir sürekli fonksiyon olsun ve onun **süreklilik modülü**

$$\omega(t, h) := \sup\{|h(t_1) - h(t_2)| : t_1, t_2 \in [0, 2\pi],\ |t_1 - t_2| \leq t\}, \quad t \geq 0$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.30 $\Gamma \subset \mathbb{C}$ eğrisinin parametrik denklemi

$$\Gamma : \phi_0(s), \qquad 0 \leq s \leq 2\pi$$

şeklinde olsun. Eğer $\phi_0'(s) \neq 0$ ve $\phi_0'(s)$ fonksiyonu **Dini-süreklilik şartını**, yani,

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega(t, \phi_0')}{t} dt < \infty,$$

şartını sağlıyorsa, bu durumda Γ eğrisi **Dini-düzgün eğri** adlandırılır (Pommerenke, 1992).

Γ Dini-düzdün eğri olduğunda, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır,

$$c_1 \le |\psi'(w)| \le c_2, \qquad |w| \ge 1,$$

$$c_3 \le |\phi'(z)| \le c_4, \qquad z \in \overline{G^-}, \tag{3.1}$$

burada c_1, c_2 ve c_3, c_4 sabitleri sırasıyla w ve z 'den bağımsızdırlar (Warschawski, 1932).

3.2. Fourier serileri ve Faber Polinomları

İlk önce Fourıer serilerini tanımlayalım. T ile $[-\pi, \pi]$ aralığı gösterilmiş olsun. Yani, $T := [-\pi, \pi]$ olsun.

Tanım 3.31 a_k ve b_k $(k = 0,1,2,...)$ sabit sayılar olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

serisine ***trigonometrik seri*** denir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

serisine de (2.1) serisinin eşlenik serisi denir.(Suetin, 1998).

Tanım 3.32 $n \in \mathbb{N}$ a_k ve b_k $(k = 0,1,2,...,n)$ sabit sayılar ve $|a_n| + |b_n| \ne 0$

olmak üzere

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,,\; n = 1,2,3,...$$

ifadesine ***n. dereceden bir trigonometrik polinom*** denir. (P.K. Suetin, 1998).

T aralığında $\sin nx$ ve $\cos nx$ trigonometrik fonksiyonları hem periyodik ve hem de ortogonal olurlar. Periyodu 2π olan bir $f(x)$ fonksiyonunu trigonometrik bir seri açılımı olarak

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + ... + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + ...$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

şeklinde yazarak , (a_n, b_n) katsayılarını bulma işlemi matematikte Fourier serisi analizi olarak bilinir.

Bir fonksiyonun Fourier seri açılımı her zaman var mıdır? Veya , $(n \to \infty)$ olurken seri açılımının limiti $f(x)$ değerine yaklaşır mı? Bu soruların cevabı sağlam matematik analizi ğerektirir. Burada , $f(x)$ fonksiyonunun sağlanması gerekli koşullara kısaca değinelim:

$f(x)$ fonksiyonu ve onun 1. ve 2. türevleri $[-\pi, +\pi]$ aralığında sürekli ise , Fourier seri açılımı vardır ve $(n \to \infty)$ olurken $f(x)$ limit değerine yaklaşır. Fonksiyon sürekli değilse , hiç olmazsa sürekli parçalardan oluşmalıdır. Başka bir deyişle , fonksiyonun süreksizliği ancak bazı noktalarda sonlu birer sıçrama şeklinde olmalıdır. Böyle noktalardaki seri açılımı , fonksiyonun o noktadaki ortalama değerine yaklaşır. Örneğin, $x = a$ noktasında fonksiyon sonlu bir sıçrama yapıyorsa , Fourier serisinin değeri

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x \to a^-} f(x) + \lim_{x \to a^+} f(x)\right]$$

olur.

Şimdi a_n, b_n katsayılarının nasıl bulunduğunu görelim. Önce $\sin nx$ ve $\cos nx$ fonksiyonlarının diklik bağıntılarını hatırlatalım:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$$

Yukarıdaki seri açılımı ifadesinin her iki tarafını $\cos nx$ ile çarpıp integralini alalım:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx$$

$$+a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos nxdx+a_2\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos nxdx+...$$

$$+b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos nxdx+b_2\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\cos nxdx+...$$

Trigonometrik fonksiyonların diklik bağıntısına göre , bu integrallerden sadece $\cos nx\cos nx$ çarpımlı olanı hariç , diğerleri sıfır olacaktır. Buna göre

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = a_n\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

bulunur. (a_0 katsayılı integral de $\cos 0x\cos nx$ çarpımı gibi düşünülürse , aynı nedenle sıfır olur). Benzer şekilde , b_n katsayılarını bulmaküzere , seri açılımı $\sin nx$ ile çarpılıp integral alınırsa

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

olur. a_0 katsayısı doğrudan seri açılımının integrali alınarak bulunur. Bir periyot üzerinde tüm trigonometrik fonksiyonların integrali sıfır olacağından sonuç yazılabilir:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Bu bağıntılar yardımıyla verilen her $f(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları bulunabilir ve seri açılımı yazılabilir.

Burada hesapları kolaylaştıracak bazı noktalara işaret edelim:

$f(x)$ fonksiyonu T aralığında değil de herhangi bir $[-L, L]$ aralığında periyodik olabilir. Bu durumda $\varsigma = \pi x/L$ değişken değişimi yapılarak yine T aralığında periyodik olması sağlanır. Bu durumda seri açılım ifadesi

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\tfrac{n\pi}{L} + b_n\sin\tfrac{n\pi}{L}x)$$

ve katsayılar

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\tfrac{n\pi}{L} xdx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\tfrac{n\pi}{L} xdx$$

olurlur.

*Periyodik aralık $[0, 2\pi]$ olarak da alınabilirdi. Varılan sonuçlar aynı olurdu. Ancak aralığı orjin etrafında simetrik almak $f(x)$ fonksiyonunun simetrik olduğu durumlarda hesaplarda kolaylık sağlar.

T aralığında $f(x)$ bir çift fonksiyon ise yani $f(-x) = f(x)$ oluyorsa bu takdirde Fourier serisinde b_n katsayıları sıfır olur. Yukarıda verilen b_n ifadesinden bunu görmek kolaydır: çift fonksiyon ile tek fonksiyon $(\sin nx)$ çarpımı tek fonksiyon olacağından simetrik $[-\pi, +\pi]$ aralığındaki integrali sıfır olur:

$$f(-x) = f(x) \text{ (çift fonksiyon) } \Rightarrow b_n = 0 \text{ , } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$f(x)$ tek fonksiyon ise yani $f(-x) = f(x)$ özelliği varsa bu kez a_0 ve a_n katsayıları sıfır olurlar:

$$f(-x) = f(x) \text{ (tek fonksiyon) } \Rightarrow a_n = 0 \text{ , } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx$$

Şimdi Fourier serisini kompleks şeklini verelim.

Yukarıda incelenen Fourier serisi kompleks üstel fonksiyonlar serisi olaral da yazılabilir. Kompleks seri açılımı trigonometrik seri açılımına tamamen eşdeğerdir. Ancak ifadeler daha kısa ve hesaplar daha kolay olur.

Kompleks üstel bir fonksiyon ile trigonometrik fonksiyonların ilişkisi Euler formülü ile belirlenmiştir:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

Bu bağıntı yardımıyla sinüs ve kosinüs için kompleks ifadeler yazılabilir:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

Fourier seri açılımındaki aynı n indisli iki terimi birlikte gözönüne alırsak,

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$= \frac{a_n - ibn}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ibn}{2} e^{-inx}$$

Bu ifadeye bakıldığında $\pm n$ indisli üstel fonksiyonlar kullanmak gerektiği ortaya çıkmaktadır. O halde yeni c_n katsayılar

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \ , \ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \ , \ c_0 = a_0$$

şeklinde tanımlanırsa, ***kompleks Fourier serisi***

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

olarak yazılabilir. c_n katsayılarını bulmak için

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

bağıntısı kullanılır.

Bu kompleks katsayılardan tekrar reel katsayılara geçmek istenirse $a_n = c_n + c_{-n}$,

$$b_n = i(c_n - c_{-n}), \ a_0 = c_0$$

bağıntıları kullanılır.

Tanım 3.33 $A_0(f,x) := \frac{a_0}{2}, A_k(f,x) := a_k\left(f\right)\cos kx + b_k\left(f\right)\sin kx$, $k = 1,2,3,...$

olmak üzere

$$S_n(f,x) := \sum_{k=0}^{n} A_k(f,x),\ n = 0,1,2,...$$

biçiminde tanımlı $(S_n(f))$ dizisine f fonksiyonunun Fourier serisinin ***kısmi toplamlar dizisi*** denir.(Suetin, 1998)

Tanım 3.34 $f \in L^1$ ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

olsun. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx)$ trigonometrik serisi bir fonksiyonun Fourier serisi ise bu fonksiyona f fonksiyonunun ***eşlenik fonksiyonu*** denir ve $\overline{f}$ şeklinde gösterilir. (P. K. Suetin 1998)

Tanım 3.35

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$$

trigonometrik polinomuna $n.$ mertebeden ***Dirichlet çekirdeği*** denir. Dirichlet çekirdeğinin yardımıyla Fourier serisinin kısmi toplamlarının integral gösterimi ;

$$S_n(x) = S_n(f,x) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt\right] + \sum_{k=1}^{n}\left[\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt\right]\cos kx$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt\right]\sin kx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt)\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]dt$$

Tanım 3.36 Fourier serisinin n. ***dereceden Zygmund ortalaması***

$$Z_n^{(\nu)}(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\left[1-\left(\tfrac{k}{n+1}\right)^{\nu}\right]A_k(f,x)=S_n(f,x)-(n+1)^{-\nu}\sum_{k=1}^{n}k^{\nu}A_k(f,x)$$

şeklinde tanımlanır. (Zygmund, 1959).

Açıktır ki,

$$S_0(f,x):=Z_0^{(\nu)}(f,x)=\frac{a_0(f)}{2}$$

olur.

Bu bölüm boyunca, E, en az iki noktadan oluşan , sınırlı ve basit bağlantı kontinyum olacaktır.

$w=\Phi(z)$, CE bölgesini $C\overline{D}$ bölgesine $\Phi(\infty)=\infty$ ve $\Phi'(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\Phi(z)}{z}>0$ koşulları altında resmeden konform dönüşüm olsun. $\Phi'(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\Phi(z)}{z}=a$ olmak üzere Φ fonksiyonunun ∞ noktasındaki Laurent açılımının

$$w=\Phi(z)=az+a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+...$$

biçiminde olduğunu biliyoruz. $n=0,1,2,3,...$ için ,

$$\left[\Phi(z)\right]^n=\left[az+a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+...\right]^n$$

$$=a^nz^n+b_{n-1}^{(n-1)}+...+b_1^{(n)}z+\frac{b_{-1}^{(n)}}{z}+\frac{b_{-2}^{(n)}}{z^2}+...$$

eşitliğinin polinom kısmını $F_n(z)$ ve geri kalan kısmını da $-H_n(z)$ ile gösterelim. $F_n(z)$ n.dereceden bir polinomdur. Bu açılım ∞'un bir komşuluğunda yani $|z|>p$ ve p'nin yeterince büyük olduğu durumlarda geçerlidir. Fakat $\left[\Phi(z)\right]^n$ ve $F_n(z)$ fonksiyonları bütün $z\in CE$ noktaları için tanımlı olduklarından $H_n(z)$ fonksiyonu da CE bölgesinde tanımlı ve analitik olur. O halde her $z\in CE$ için ,

$$\left[\Phi(z)\right]^n = F_n(z) - H_n(z)$$

olur. Dolayısıyla , her $z \in CE$ için

$$F_n(z) = \left[\Phi(z)\right]^n + H_n(z)$$

ve

$$H_n(z) = F_n(z) - \left[\Phi(z)\right]^n$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Tanım 3.37 $F_n(z)$ polinomuna E kontinyumunun $n.$ **dereceden Faber polinomu** denir.

3.3. Bazı Fonksiyon Uzayları ve Analitik Fonksiyon Sınıfları

Tanım 3.38 (Lebesgue Uzayı) (X,μ) bir ölçü uzayı ve M , $f : X \to \mathbb{C}$ tanımlı $\mu-$ ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L^p(X) = \left\{ f \in M : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

sınıfına mutlak değerinin $p-$inci kuvveti ***integrallenebilen fonksiyonların sınıfı*** denir.

f fonksiyonunun L^p normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty \\ ess\sup_{x \in X} |f(x)|, \; p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır ve bu norm ile L^p ***ye Lebesgue uzayı*** denir. burada

$$ess\sup_{x \in X} |f(x)| = \inf\{\lambda : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = 0\}$$

dir. $L^p(X)$ uzayı $\|f\|_{L^p(X)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır (DeVore , Lorentz, 1993).

Tanım 3.39 ω: $T \to [0,\infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır ise ω fonksiyonuna T üzerinde bir **ağırlık fonksiyonu** denir.

Tanım 3.40 ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. $f\omega \in L^P$ koşulunu sağlayan ölçülebilir. $f : T \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının kümesi L^P_ω ile gösterilir.

$$\| f \|_{p,\omega} := \| f\omega \|_p$$

fonksiyonu L^p_ω üzerinde bir normdur. L^p_ω normlu uzayına ***ağırlıklı Lebesgue uzayı*** denir.

G bölgesi $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde, Γ düzeltilebilir Jordan eğrisi ile sınırlı bölge olsun.

Tanım 3.41 Γ_r, $o < r < 1$, D diskinin G bölgesi üzerine konform dönüşümü altında $\{w : |w| = r, 0 < r < 1\}$ çemberinin görüntüsü ve $1 \le p < \infty$ olsun. G bölgesinde analitik olan ve

$$\sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesine $E^p(G)$ **Smirnov sınıfı** denir (Timan, 1963).

Her $f \in E^p(G)$ fonksiyonu Γ üzerinde hemen hemen (h.h.) her yerde açısal limit değerine sahiptir ve eğer f ‘nin açısal limiti için aynı notasyon kullanılırsa, $f \in L^p(\Gamma)$ dır. Ayrıca $G = D$ olduğu durumda, $H^p(D) := E^p(D)$ olarak tanımlanan uzaya **Hardy uzayı** denir (Timan, 1963).

Uyarı 3.1 $L^p(\Gamma)$ ve $E^p(G)$ uzayları $p \ge 1$ olduğunda,

$$\| f \|_{E^p(G)} = \| f \|_{L^p(\Gamma)} := \left(\int_\Gamma |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre Banach uzayıdırlar.

$E^p(G,\omega)$, $1 \le p < \infty$, ω **- ağırlıklı Smirnov sınıfı**

$$E^p(G,\omega):=\left\{ f\in E^1(G): f\in L_p(\Gamma,\omega)\right\}.$$

biçiminde tanımlanır.

. Konveks ve sürekli bir $M:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu için $M(0)=0,\quad x>0$ için $M(x)>0$ ve

$$\lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x}=0, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=\infty$$

şartları sağlanırsa, M fonksiyonu N - fonksiyon olarak adlandırılır. M fonksiyonunun **tamamlayıcı fonksiyonu**

$$N(y):=\max_{x\geq 0}\left(xy-M(x)\right),\ \ y\geq 0.$$

şeklinde tanımlanır.

G bölgesi $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde, Γ düzeltilebilir Jordan eğrisi ile sınırlı bölge olsun.

M bir N - fonksiyon ve N ise onun tamamlayıcı fonksiyonu olsun. $\alpha>0$ için

$$\int_\Gamma M\left[\alpha\left|f(z)\right|\right]|dz|<\infty$$

koşulunu sağlayan, Lebesgue ölçülebilir $f:\Gamma\to\mathbb{C}$ fonksiyonlarının doğrusal uzayını $L_M(\Gamma)$ ile gösterelim. $L_M(\Gamma)$ de f fonksiyonunun donatılmış normu

$$\|f\|_{L_M(\Gamma)}:=\sup\left\{\int_\Gamma\left|f(z)g(z)\right||dz|: g\in L_N(\Gamma),\ \rho(g,N)\leq 1\right\}$$

şeklinde tanımlanır, burada

$$\rho(g,N):=\int_\Gamma N\left(\left|g(z)\right|\right)|dz|,$$

dir, $L_M(\Gamma)$ uzayı bir Banach uzayıdır (Rao ve Ren, 1991).

$\|\cdot\|_{L_M(\Gamma)}$ normu, Orlicz normu, $L_M(\Gamma)$ Banach uzayı da Orlicz uzayı olarak adlandırılır.

Bilindiği gibi $L_M(\Gamma)$ uzayındaki her fonksiyon Γ de integrallenebilir, yani,

$$L_M(\Gamma)\subset L_1(\Gamma).$$

dir.

M bir N fonksiyon olmak üzere $\limsup\limits_{x\to\infty}\frac{M(2x)}{M(x)}<\infty$ ise, M fonksiyonu Δ_2 - koşulunu sağlar denir.

$L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının yansımalı (refleksif) olması için gerekli ve yeterli koşulun M ve onun tamamlayıcı fonksiyonu N in, her ikisinin de birlikte Δ_2- koşulunu sağlamasıdır (Rao ve Ren, 1991).

Orlicz uzayı hakkındaki önceki bilgiler Krasnoselskii ve Rutickii (1961) ve Rao ve Ren (1991) kaynaklarında bulunabilir.

M bir N - fonksiyon ve $M^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ ise M nin ters fonksiyonu olsun.

$$h:(0,\infty)\to(0,\infty], \qquad h(x):=\limsup_{t\to\infty}\frac{M^{-1}(t)}{M^{-1}\left(\frac{t}{x}\right)}, \quad x>0$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının α_M alt indisi ve β_M üst indisi

$$\alpha_M := \lim_{x\to 0}\frac{\log h(x)}{\log x}, \qquad \beta_M := \lim_{x\to\infty}\frac{\log h(x)}{\log x}$$

şeklinde tanımlanır (Karlovich, 1996). Bu indisler ilk kez Matuszewska ve Orlicz (1960) tarafından düşünülmüştür ve $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının ***Boyd indisleri*** olarak adlandırılmıştır. Bilindiği gibi

$$0\le\alpha_M\le\beta_M\le 1$$

ve

$$\alpha_N+\beta_M=1, \qquad \alpha_M+\beta_N=1.$$

Eğer $0<\alpha_M$ ve $\beta_M<1$ ise α_M, β_M Boyd indisleri, ***trivial (aşikar) değildir*** denir. $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının yansımalı olması için gerekli ve yeterli koşulun $0<\alpha_M\le\beta_M<1$ şartının sağlanmasıdır, yani, eğer Boyd indisleri trivial değil ise, bu durumda $L_M(\Gamma)$ uzayı yansımalıdır.

Tanım 3.42 ω bir ağırlık fonksiyonu olsun. $f\omega\in L^M$ biçimindeki ölçülebilir. $f:T\to\mathbb{C}$ fonksiyonların kümesi L_ω^M ile gösterilir.

$$\|f\|_{M,\omega}:=\|f\omega\|_M$$

fonksiyonu L_ω^M üzerinde bir normdur. L_ω^M normlu uzayına ***ağırlıklı Orlicz uzayı*** denir.

Tanım 3.43 (Kokilashvili ,1968) M bir $N-$fonksiyonu, f ise G bölgesinde analitik fonksiyon olsun.

$$\int_{\Gamma_r} M\left(\left|f(z)\right|\right)\left|dz\right| < \infty \text{ i}$$

şartı sağlanırsa, bu durumda $f: G \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının sınıfı $E_M(G)$ ile gösterilir, burada Γ_r, $|w|<1$ dairesinin G bölgesine konform dönüşümü altında, $\{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$, $0 < r < 1$çemberinin görüntüsüdür.

Tanım 3.44: (Kokilashvili, 1968) $E_M(G)$ **sınıfı Smirnov-Orlicz sınıfı** olarak adlandırılır.

Eğer $M(u) = |u|^p$ $(1 < p < \infty)$, ise $E_M(G)$ sınıfı iyi tanımlanmış $E_p(G)$ Smirnov sınıfı ile çakışır.

Açıktır ki, $E_M(G)$ sınıfına ait herhangi bir $f(z)$ analitik fonksiyonu, aynı zamanda $E_1(G)$ sınıfına da ait olacaktır, yani,

$$\int_{\Gamma_r} \left|f(z)\right|\left|dz\right| \le c < \infty,$$

yakınsaması, r, ($0 < r < 1$) ye göre düzgün yakınsamadır. $E_M(G) \subset E_1(G)$ olduğundan, $E_M(G)$ sınıfındaki her fonksiyon, Γ üzerindeki (h.h.) her yerde açısal yollar boyunca sınır değerlerine sahiptir ve sınır değer fonksiyonu $L_M(\Gamma)$ ye aittir (Kokilashvili, 1968). Bu yüzden $E_M(G)$ de norm

$$\|f\|_{E_M(G)} := \|f\|_{L_M(\Gamma)}$$

G bölgesi $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde , Γ düzeltilebilir Jordan eğrisi ile sınırlı bölge olsun.

$E_M(G,\omega)$, ω **- ağırlıklı Smirnow-Orlicz sınıfı**

$$E_M(G,\omega) := \left\{ f \in E^1(G) : f \in L_M(\Gamma,\omega) \right\}.$$

biçiminde tanımlanır. Ağırlıklı Smirnow-Orlicz sınıfı, $E^p(G)$- Smirnov sınıfının genelleştirilmesidir. Özel olarak $M(x) = x^p$, $1 < p < \infty$ ise bu durumda ağırlıklı Smirnov-Orlicz sınıfı $E_M(G,\omega)$, $E^p(G,\omega)$ ağırlıklı Smirnov sınıfı ile çakışmaktadır. Ayrıca $\omega = 1$ ise bu $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz sınıfı ile çakışmaktasdır.

Tanım 3.45: $T=[-\pi,\pi]$ parçası, $1<p<\infty$ ve ω fonksiyonu T üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\sup_J\left(\frac{1}{|J|}\int_J \omega^P dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{|J|}\int_J \omega^{-q}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$$

koşulu sağlanıyorsa ω fonksiyonu $A_p(T)=A_p$ ***Muckenhoupt sınıfındandır*** denir.

Örnek 3.3 $\omega:T\to[0,\infty)$, $\omega(x)=x^{\alpha}$ olmak üzere

$$\omega(x)=x^{\alpha}\in A_p \Leftrightarrow -\frac{1}{p}<\alpha<\frac{1}{q}$$

olur.

Γ eğrisi üzerinde sürekli fonksiyonların kümesini $C(\Gamma)$ ile göstereceğiz

Γ kapalı Jordan eğrisi ve $f\in C(\Gamma)$olsun. $E_n(f,\Gamma)$ ile f fonksiyonunun Γ eğrisi üzerinde en iyi yaklaşımını gösterelim. Yani,

$$E_n(f,\Gamma)=\inf_{\{R_n\}}\max_{z\in\Gamma}|f(z)-R_n(z)|$$

M_0 ile $n\to\infty$ için $0<\varepsilon\to\infty$ olmak üzere $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ bütün sayılar dizisi gösterilmiş olsun.

$E_n(f)_p$ ile $f\in L_p(T)$ fonksiyonunun derecesi n'yi aşmayan trigonometric polinomlarla en iyi yaklaşımı gösterilmiş olsun. Yani,

$$E_n(f)_p=\inf\left\{\|f-T_n\|_{L_p(T)}:T_n\in\Pi_n\right\},$$

dir, burada Π_n derecesi n'yi aşmayan trigonometric polinomlar sınıfıdır.

$E_n(f)_M$' ile $f\in L_M(T)$' fonksiyonunun derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımı gösterilsin, yani

$$E_n(f)_M = \inf\left\{\|f-T_n\|_{L_M(T)} = T_n \in \prod_n\right\}$$

burada $\prod_n$, derecesi n 'yi aşmayan trigonometrik polinomlarının sınıfını belirtir.

M_0 ile $n\to\infty$ için $0<\varepsilon\to\infty$ olmak üzere $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ bütün sayılar dizisi gösterilmiş olsun. Ayrıca,

$$E_p[\varepsilon]=\left\{f\in L_p(T): E_{n-1}(f)_p \le \varepsilon_n, n\in\mathbb{N}\right\},\quad 1\le p<\infty,\ \varepsilon\in M_0$$

tanımlayalım.

$f\in L_p(T),\ 1\le p<\infty$ olsun.

$$\omega^{\alpha}_{L^p(T)}(f,\delta) := \sup_{|h|\le\delta}\left\|\Delta^{\alpha}_h(f,\cdot)\right\|_{L^p(T)},\ \alpha\in\mathbb{Z}^+$$

fonksiyonunun tanımlatalım, burada

$$\Delta^{\alpha}_h(f,\cdot)=\sum_{k=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha-k}\binom{\alpha}{k}f(x+kh),\ \alpha\in\mathbb{Z}^+$$

dir. Bu fonksiyona $f\in L_p(T),\ 1\le p<\infty$ fonksiyonunun α. **düzgünlük modülü** denir**.**

Düzgünlük modülü $\omega^{\alpha}_{L^p(T)}(f,\delta)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir

1) $\omega^{\alpha}_{L^p(T)}(f,\delta)$ artan fonksiyondur,

2) $\lim_{\delta\to 0}\omega^{\alpha}_{L^p(T)}(f,\delta)=0$ her $f\in L^p(T)$ için $p\ge 1$,

3) $\omega^{\alpha}_{L^p(T)}(f+g,\delta)\le\omega^{\alpha}_{L^p(T)}(f,\delta)+\omega^{\alpha}_{L^p(T)}(f,\delta),\quad f,g\in L^{p,\lambda}(T)$,

4) $\omega^{\alpha}_{L^p(T)}(f,n\delta)\le n^{\alpha}\omega^{\alpha}_{L^p(T)}(f,\delta),\ n\in\mathbb{N}$,

5) $\omega^{\alpha}_{L^p(T)}(f,s\delta)\le(s+1)^{\alpha}\,\omega^{\alpha}_{L^p(T)}(f,\delta),\ s>0$,

6) $\omega^{\alpha}_{L^p(T)}(f,\delta)\le\left[(n+1)\delta+1\right]^{\alpha}\omega^{\alpha}_{L^p(T)}\left(f,\dfrac{1}{n+1}\right),\ n\in\mathbb{N}.$

$L_M(T)$ Orlicz uzayı olsun. $x,\ h$ reel sayılar olmak üzere

$$\Delta_h^{\alpha}(f,\cdot)=\sum_{k=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha-k}\binom{\alpha}{k}f(x+kh),\ \ \alpha\in\mathbb{Z}^{+}$$

toplamını gözönüne alalım, burada

$$\binom{\alpha}{k}:=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$$

dır.

$$\omega_{\alpha}(f,\delta)_M:=\sup_{|h|\le\delta}\left\|\Delta_h^{\alpha}(f,\cdot)\right\|_{L_M(T)},\ \delta>0,\ \alpha\in\mathbb{Z}^{+}$$

fonksiyonuna $f\in L_M(T)$ fonksiyonunun α. **düzgünlük modülü** denir**.**

Kolaylıkla göstermek olur ki**,** $\omega_{\alpha}(f,\delta)_M$ fonksiyonu süreklidir, negatif değil, azalmayandır ve $f,g\in L_M(T)$ fonksiyonları için

$$\lim_{\delta\to 0}\omega_{\alpha}(f,\delta)_M=0,\ \omega_{\alpha}(f+g,\cdot)_M\le\omega_{\alpha}(f,\cdot)_M+\omega_{\alpha}(f,\cdot)_M$$

şartları sağlanır.

$[-\pi,\pi]$ aralığını $\mathbb{T}$ ile gösterelim. Eğer φ fonksiyonu konveks, soldan sürekli ve

$$\varphi(0):=\lim_{t\to 0^{+}}\varphi(t)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$$

şartları sağlanırsa, bu durumda $\varphi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ fonksiyonu $\Phi-$*fonksiyonu* adlanır, (kısaca $\varphi\in\Phi$ yazılıur).

$\varphi\in\Phi$ fonksiyonu sürekli, pozitif ve

$$\lim_{t\to 0^{+}}\frac{\varphi(t)}{t}=0,\ \lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\infty$$

şartlarını sağlıyorsa, bu durumda φ fonksiyonu $N-$f*onksiyonu* adlanır.

$\Phi(\mathbb{T})$ ile $\varphi:\mathbb{T}\times[0,\infty]\to[0,\infty]$ fonksiyonlar kümesini gösterelim, öyle ki

(i) $\varphi(x,\cdot)\in\Phi$ her bir $x\in\mathbb{T}$;

(ii) her bir $u \geq 0$ için $\varphi(x,u)$ fonksiyonu $L^0(\mathbb{T})$, ölçülebilir fonksiyonlar kümesindedir.

Eğer $K \geq 2$ olmak üzere bütün $x \in \mathbb{T}$, $u \geq 0$ için $\varphi(x,2u) \leq K\varphi(x,u)$ şartı sağlanırsa, bu durumda $\varphi(\cdot,u) \in \Phi(\mathbb{T})$ fonksiyonu u parametrine göre Δ_2 $(\varphi \in \Delta_2)$ şartını sağlıyor.

$\Phi(N) \subset \Phi(\mathbb{T})$ alt sınıfı öyle $\varphi \in \Phi(\mathbb{T})$ fonksiyonlarından oluşur ki, her bir $x \in \mathbb{T}$ için $\varphi(x,\cdot)$ fonksiyonu $N-$ fonksiyonudur ve $\varphi \in \Delta_2$ dir.

Çalışmada önemli olmayan sorular için yalnız belli saylara bağlı $c, c_1, c_2, \ldots$ sabitleri kullanılmaktadır. (Farklı değerlendirmelerde farklı sabitler kullanılır).

Eğer $c > 0$ olmak üzere x ve u için

$$\varphi_1(x,\frac{u}{c}) \leq \varphi(x,u) \leq \varphi_1(x,cu)$$

şartı sağlanırsa bu durumda φ ve φ_1 fonksiyonları denktir denir $(\varphi \sim \varphi_1$ yazacağız)

$\varphi \in \Phi(N)$ için

$$\rho_\varphi(f) := \int_{\mathbb{T}} \varphi(x,|f(x)|)dx.$$

gösterelim.

L^φ Musielak – Orlicz uzayı (Orlicz uzayının genelleştirilmesi)

$$\lim_{\lambda \to 0} \rho_\varphi(\lambda f) = 0.$$

şartını sağlayan Lebesgue öçülebilir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfıdır.

Eğer $\lambda > 0$ için $\rho_\varphi(\lambda f) < \infty$ şartı sağlanırsa bu durumda $f \in L^0(T)$ fonksiyonu L^φ uzayındandır.

L^φ uzayı

$$\|f\|_{[\varphi]} := \sup\left\{\int_{\mathbb{T}} |f(x)g(x)|dx : \rho_\psi(g) \leq 1\right\}$$

Orlicz normuna

ve

$$\|f\|_{\varphi} := \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{\varphi}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \le 1\right\}$$

Luxemburg normuna göre normlu uzaydır, burada

$$\psi(t,v) := \sup_{u\ge 0}(uv - \varphi(t,u)), v \ge 0,\ t \in \mathbb{T}$$

Young anlamında φ fonksiyonunun (v değişkenine göre) tamamlayıcı fonksiyonudur. Bu iki normlar denktir:

$$\|f\|_{\varphi} \le \|f\|_{[\varphi]} \le 2\|f\|_{\varphi}$$

$\varphi,\ \psi \in \Phi(N)$ tamamlayıcı fonksiyonlar için

$$us \le \varphi(x,u) + \psi(x,s)\ , \qquad (3.2)$$

Young eşitsizliği geçerlidir, burada $u\,, s \ge 0$ ve $x \in \mathbb{T}$.

(3.2) Young eşitsizliğinden

$$\|f\|_{[\varphi]} \le \rho_{\varphi}(f) + 1\ ,$$

$$\|f\|_{\varphi} \le \rho_{\varphi}(f) \text{ if } \|f\|_{\varphi} > 1 \text{ and } \|f\|_{\varphi} \ge \rho_{\varphi}(f) \text{ if } \|f\|_{\varphi} \le 1.$$

eşitsizlikleri elde edilir

$\varphi,\ \psi \in \Phi(N)$ tamamlayıcı fonksiyonlar için

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_{\varphi}\|f\|_{[\varphi]}$$

Hölder eşitsizliği geçerlidir. Jensen integral eşitsizliği aşağıdaki şekilde ifade edilir:

φ, $N-$fonksiyonu ve $r(x)$ ise negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\varphi\left(\frac{1}{\int_{\mathbb{T}} r(x)dx}\int_{\mathbb{T}} f(x)r(x)dx\right) \le \frac{1}{\int_{\mathbb{T}} r(x)dx}\int_{\mathbb{T}} \varphi(f(x)r(x))dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

Çalışmanın her bir yerinde kabul edeceğiz ki öyle bir $A>0$ sabiti var ki $|x-y| \le \frac{1}{2}$ olmak üzer $x,\ y \in \mathbb{T}$ için

$$\frac{\varphi(x,u)}{\varphi(y,u)} \le u^{\frac{A}{\log(\frac{1}{|x-y|})}},\ u \ge 1, \tag{3.3}$$

$c_1, c_2 > 0$ için

$$\inf_{x\in\mathbb{T}} \varphi(x,1) \ge c_1 \tag{3.4}$$

ve

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(x,1)dx < \infty,\ \psi(x,1) \le c_2 \quad \text{a.e on } \mathbb{T}\,. \tag{3.5}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Yukarıdaki tanımlardan da görülebileceği gibi Musielak – Orlicz uzayları Orlicz uzaylarına benzerdir. Fakat burada ancak $\varphi(x,t)$ iki değişkenli daha genel bir fonksiyonla tanımlanır. Bu uzaylarda norm

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(x, |f(x)|)dx$$

yardımı ile verilir.

Bir Orlicz uzayında, φ'nin x, $\varphi(|f(x)|)$, den bağımsız olduğu bilinmektedir. Musielak – Orlicz uzayı $\varphi(t)=t^p$ ve $\varphi(x,t)=t^{p(x)}$ özel durumlarında sırasıyla L^p Lebesgue uzaylarını ve $L^{p(x)}$ değişken üslü Lebesgue uzaylarını verir. Demek ki, Musielak – Orlicz uzayları, hem değişken üslü, hem de Orlicz uzaylarının genelleştirilmesidir. Musielak – Orlicz uzaylarının incelenmesi diferansiyel denklemler (Giannet, Passarelli di Napoli , 2013, Ok , 2016) akışkanlar dinamiği (Gwiazda , 2014; Kaminska, 2014) ve görüntü işlemeye (Alaouia, Nabilah , Altamnjia 2014; Chen, Levine , Rao, 2006; Harjulehtin, Hastö, Latvala, Toivanen, 2013) yönelik uygulamalarla motive edilebilir. Musielak – Orlicz uzayları hakkında detaylı bilgi Musielak'ın kitabında bulunabilir (Musielak , 1983).

Örnek 3.4. *$L^0(\mathbb{T})$ uzayında $p:\mathbb{T}\to[1,\infty]$ fonksiyonu verilmiş olsun. $|x-y|\le\frac{1}{2}$ olmak üzere $x,y\in\mathbb{T}$ için*

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{c_3}{\log\left(\frac{1}{|x-y|}\right)}$$

Dini – Lipschitz property özelliği sağlanmış olsun, burada $c_3>0$ sabit bir sayıdır. Bu durumda aşağıdaki fonksiyon $\Phi(T)$ sınıfina aittir ve (3.3), (3.4) ve (3.5) *şartları sağlanır*

$$(i)\,\varphi(x,u)=u^{p(x)},\ \sup_{x\in\mathbb{T}}p(x)<\infty,$$

$$(ii)\,\varphi(x,u)=u^{p(x)}\log(1+u),$$

$$(iii)\,\varphi(x,u)=u(\log(1+u))^{p(x)}.$$

Eğer $\varphi\in\Phi(N)$ fonksiyonu (3.3), (3.4) ve (3.5) şartlarını sağlıyorsa, bu durumda $\varphi\in\Phi(N)$ fonksiyonu $\Phi(N,DL)$ sınıfındandır denir. Yani, $\varphi\in\Phi(N,DL)$ dir.

$f\in L^\varphi$ için

$$v_h(f)(x)=\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}f(x-t)dt,\ 0<h<\pi,\ x\in\mathbb{T}$$

biçiminde A_h Steklov operatörünü tanımlayalım.

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan sonlu bir $[a,b]$ aralığının $K_{[a,b]}(u)$ karakteristik fonksiyonu

$$K_{[a,b]}(u)=\begin{cases}1, & u\in[a,b],\\ 0, & u\notin[a,b].\end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

v_h operatörü

$$v_h(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)R_h(t-x)dt,$$

bürüm integrali biçiminde yazılır (Butzeri Nessel 1971, sayfa 33; Akgün Yıldırır, 2018) burada

$$R_h(u):=\frac{2\pi}{h}K_{\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]}(u).$$

Not edelim ki R_h nüvesi aşağıdaki şartları sağlıyor (Butzeri Nessel 1971, sayfa 33; Akgün Yıldırır, 2018):

$$\int_{\mathbb{T}} R_h(u)du\le c_4\ ,\ |R_h(u)|\le c_5,\ h\le u\le\pi\ \text{ ve }\ \underset{u}{maks}|R_h(u)|\le c_6\frac{1}{h}.$$

$f\in L^{\varphi}$ ve $\varphi\in\Phi(N,DL)$ olsun.(Akgün, Yıldırır, 2018) çalışmasına göre v_h operatörü L^{φ} üzerinde sınırlı operatördür:

$$\|v_h(f)\|_{\varphi}\le c\|f\|_{\varphi}.$$

$f\in L^p(\mathbb{T})$ fonksiyonunun l *ci mertebeden düzgünlük modülü*

$$\Omega_{\varphi}^{l}(\delta,f):=\sup_{0<h_i\le\delta}\left\|\prod_{i=1}^{l}(I-v_{h_i})f\right\|_{\varphi}\ ,\ \delta>0\ \ l=1,2,3,...$$

olarak tanımlanır, burada I birim operatörüdür.

$f \in L^{\varphi}$ ve $\varphi \in \Phi(N, DL)$ olsun . (Akgün R, Yıldırır Y.E, 2018, Lemma 2)çalışması gereğince v_h operatörü L^{φ} : uzayı üzerinde sınırlı operatördür:

$$\|v_h(f)\|_{\varphi} \leq c\|f\|_{\varphi}.$$

$$\Omega_{\varphi}^{l}(\delta, f) := \sup_{0<h_i\leq\delta}\left\|\prod_{i=1}^{l}(I - v_{h_i})f\right\|_{\varphi}, \ \delta > 0 \ \ l = 1, 2, 3, ...$$

fonksiyonu $f \in L^p(\mathbb{T})$ fonksiyonunun l. *mertebeden düzgünlük modül*ü adlanır*, burada* I birim operatörüdür

Kolayca göstermek olur ki, $\Omega_{\varphi}^{l}(\cdot, f)$ fonksiyonu $f, g \in L^{\varphi}$ için

$$\lim_{\delta\to 0}\Omega_{\varphi}^{l}(\delta, f) = 0 \ , \ \Omega_{\varphi}^{l}(\delta, f+g) \leq \Omega_{\varphi}^{l}(\delta, f) + \Omega_{\varphi}^{l}(\delta, g)$$

şartını sağlayan sürekli, negatif olmayan ve azalmayan fonksiyondur.

$f \in L_1(\mathbb{T})$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x, f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{3.6}$$

olsun, burada $A_k(x, f) := (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$, $k = 1, 2, 3, ...,$ $a_k(f)$ ve $b_k(f)$ ise $f \in L_1(\mathbb{T})$.fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır.

(3.6) serisinin n *ci kısmi toplam*ı ve *De la Vallée – Poussin toplamı* (Vallée Poissin Ch La 1918) sırasıyla

$$S_n(f) := S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k(x, f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \ n = 1, 2, 3, ...$$

$$V_n(f) := V_n(x, f) = \frac{1}{n}\sum_{v=n}^{2n-1} S_v(x, f).$$

olarak tanımlanır.

Not edelim ki, De la Vallée – Poussin toplamı için

$$V_n(f):=V_n(x,f)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt,$$

integral şekli geçerlidir, burada $K_n(t)$ çekirdeği için

$$K_n(t):=\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\frac{3nt}{2})\sin(\frac{nt}{2})}{2n\sin^2(\frac{t}{2})}$$

eşitliği doğrudur.

Derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların Π_n sınıfında $f\in L^{\varphi}$ fonksiyonunun en iyi yaklaşımı

$$E_n(f)_{\varphi}:=\inf\left\{\|f-T_n\|_{\varphi}:T_n\in\Pi_n\right\}.$$

olarak tanımlanır.

[9, p.59] (Devore R.A and Lorentz G. G, 1993) çalışmasındaki Teorem 1.1 gereğince öyle $T_n^*\in\Pi_n$ polinomu var ki,

$$E_n(f)_{\varphi}=\|f-T_n^*\|_{\varphi}$$

olur.

$W_{\varphi}^r\ (r=1,2,3,...)$, $\varphi\in\Phi(N,DL)$ ile $f^{(r-1)}$ mutlak sürekli ve $f^{(r)}\in L^{\varphi}$ Banach uzayına ait olmak üzere fonksiyon sınıfını gösterelim. Bu sınıfta norm

$$\|f\|_{W_{\varphi}^r}:=\|f\|_{\varphi}+\|f^{(r)}\|_{\varphi}$$

3.4. Yardımçı sonuçlar

Lemma 3.1 (Israfilov, Guven, 2006) $L_M(T,\omega)$ uzayı $0<\alpha_M\le\beta_M<1$ Boyd indislerine sahip Orlicz uzayı olsun. Eğer $\omega\in A_{1/\alpha_M}(T)\cap A_{1/\beta_M}(T)$ ise bu durumda derecesi n olan T_n trigonometrik polinom için

$$\|T_n'\|_{L_M(T,\omega)}\le cn\|T_n\|_{L_M(T,\omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir, burada c sabiti n ’den bağımsızdır

Teorem 3.3 (Akgun, Israfilov, 2010). $L_M(T,\omega)$ refleksiv Orlicz uzayı be $k\in\mathbb{Z}^+$ olsun Bu durumda eğer

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{k-1}E_\nu(f)_M<\infty$$

eşitsizliği sağlanırsa, bu durumda

$$E_n\left(f^{(k)}\right)_M\le c\left\{n^kE_n(f)_M+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{k-1}E_n(f)_M\right\}$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $c=(M,k)>0$ dır

G, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde Γ düzeltilebilir Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge olsun. $G^-:=ext\Gamma$ ve

$$T.=\{w\in\mathbb{C}:|w|=1\},\ D:=\operatorname{int}T \text{ ve } D^-:=extT$$

gösterelim.

$w=\phi(z)$ ise G^- bölgesini D^- bölgesine dönüştüren fonksiyon olsun ve

$$\phi(\infty)=\infty,\ \lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}>0,$$

şartları sağlansın. ϕ fonksiyonunun tersini ψ ile gösterelim.

$\wp$ ile derece kısıtlaması olmadan bütün polinomlar ailesini ve $\wp(D)$ ile bu ailenin D üzerinde izini gösterelim.

$$A(P)(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{P(w)\psi'(w)}{w-z}dw,\ z\in G$$

olarak

$$A:\wp(D)\to E_M(G,\omega)$$

operatörünü tanımlayalım . Bu durumda (1.9) gereğince

$$A\left(\sum_{k=0}^{n}\beta_k w^k\right)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k\phi_k(z)$$

elde ederiz

A lineer operatörü ile ilgili aşağıdaki sonuç geçerlidir (Israfilov, Akğün 2006):

Teorem 3.4. Γ Dini-düzgün eğri, $0<\alpha_M,\ \beta_M<1$ ve $\omega\in A_{1/\alpha_M}(\Gamma)\cap A_{1/\beta_M}(\Gamma)$ olsun. Bu durumda $A:\wp(D)\to E_M(G,\omega)$ lineer öperatörü sınırlıdır.

Teorem 3.5. Γ Dini-düzgün eğri, $0<\alpha_M,\ \beta_M<1$ ve $\omega\in A_{1/\alpha_M}(\Gamma)\cap A_{1/\beta_M}(\Gamma)$ olsun. Bu durumda $A:E_M(D,\omega_0)\to E_M(G,\omega)$ lineer operatörü bire-bir ve örtendir

Teorem 3.6.(Akgün,Yıldırır , 2018) Her bir $f\in W_\varphi^r\ (r\in\mathbb{N}),\ \varphi\in\Phi(N,DL)$ *ve* $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$E_n(f)_\varphi\leq\frac{c_7}{(n+1)^r}E_n(f^{(r)})_\varphi$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $c_7>0$ *sabiti* φ *ve* r den bağımlıdır.

Teorem 3.7. (Akgün, Yıldırır, 2018) . $f\in L^\varphi$, $\varphi\in\Phi(N,DL)$ *ve* $n\in\mathbb{N}$ *olsun. Bu durumda*

$$E_n(f)_\varphi\leq c_8\Omega_\varphi^l(f,\frac{1}{n+1})$$

değerlendirmesi geçerlidir, burada $c_8>0$ *sabiti* φ *ve* r ’ den bağımlıdır.

Sonuç 3.1 Her bir $f\in W_\varphi^r\ (r\in\mathbb{N}),\ \varphi\in\Phi(N,DL)$ *ve* $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$E_n(f)_\varphi\leq\frac{c_9}{(n+1)^r}\Omega_\varphi^l(f^{(r)},\frac{1}{n+1})$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $c_9>0$ *sabiti* φ *ve* r den bağımlıdır.

Lemma 3.2. (Akgün, Yıldırır, 2018) $f \in L^{\varphi}$, $\varphi \in \Phi(N, DL)$ *ve* $n \in \mathbb{N}$ *olsun. Bu durumda derecesi* n *'yi aşmayan* T_n *trigonometrik polinomu için*

$$\left\|(T_n)^{(r)}\right\|_{\varphi} \le c_{10} n^r \left\|T_n\right\|_{\varphi}$$

eşitsizliği doğrudur, burada $c_{10} > 0$ *sabiti* φ *ve* r ' den bağımlıdır.

Teorem 3.8 . (Akgün, Yıldırır, 2018). $f \in W_{\varphi}^{r}$ $(r \in \mathbb{N}), \varphi \in \Phi(N, DL)$ *ve* $n \in \mathbb{N}$ *olsun. Bu durumda*

$$\| f - V_n(f)\|_{\varphi} \le \frac{c_{11}}{(n+1)^r} \Omega_{\varphi}^{l}(f^{(r)}, \frac{1}{n+1})$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $c_{11} > 0$ *sabiti yalnız* φ *ve* r ' den bağımlıdır.

Teorem 3.9. T_n^* *polinomu* f *fonksiyonuna en iyi yaklaşım veren polinom olsun.Bu durumda her bir* $f \in W_{\varphi}^{r}$ $(r = 0,1,2,...)$, $\varphi \in \Phi(N, DL)$ *ve* $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\left\| f^{(r)} - (T_n^*)^{(r)} \right\|_{\varphi} \le c_{12} E_n(f^{(r)})_{\varphi}$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $c_{12} > 0$ *sabiti yalnız* φ *ve* r ' den bağımlıdır.

İspat:

$$B_n(f) := B_n(x, f) = \frac{1}{n+1} \sum_{v=n}^{2n} S_v(x, f), \; n = 0,1,2,...$$

gösterelim.

$$B_n(., f^{(\alpha)}) = B_n^{(\alpha)}(., f),$$

olduğuna göre

$$\left\| f^{(\alpha)}(\cdot) - T_n^*(\cdot, f)\right\|_{\varphi}$$

$$\le \left\| f^{(\alpha)}(\cdot) - B_n(\cdot, f^{(\alpha)})\right\|_{\varphi}$$

$$+\left\|T_n^{(\alpha)}(\cdot,B_n(f))-T_n^{(\alpha)}(\cdot,f)\right\|_\varphi$$

$$+\left\|B_n^{(\alpha)}(\cdot,f)-T_n^{(\alpha)}(\cdot,B_n(f))\right\|_\varphi$$

$$=I_1+I_2+I_3\ . \tag{3.7}$$

elde edilir.

$T_n(x,f)$ polinomu L_φ uzayında derecesi n ’yi aşmayan ve f fonksiyonuna en iyi yaklaşım veren polinom olsun. B_n nin L_φ uzayında sınırlı olması dikkate alınırsa,

$$I_1\le\left\|f^{(\alpha)}(\cdot)-T_n^{(\alpha)}(\cdot,f)\right\|_\varphi+\left\|T_n^{(\alpha)}(\cdot,f)-B_n(\cdot,f^{(\alpha)})\right\|_\varphi$$

$$\le c_{14}E_n(f^{(\alpha)})_\varphi+\left\|B_n^{(\alpha)}(\cdot,T_n(f^{(\alpha)}))-f^{(\alpha)}\right\|_\varphi\le c_{15}E_n(f^{(\alpha)})_\varphi \tag{3.8}$$

ve Lemma 3.2 gereğince

$$I_2\le c_{16}n^\alpha\left\|T_n(\cdot,B_n(f))-T_n(\cdot,f)\right\|_\varphi \tag{3.9}$$

ve

$$I_3\le c_{17}(2n)^\alpha\left\|B_n(\cdot,f)-T(\cdot,B_n(f))\right\|_\varphi$$

$$\le c_{18}(2n)^\alpha E_n(B_n(f))_\varphi. \tag{3.10}$$

elde edilir.

Aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\left\|T_n(\cdot,B_n(f))-T_n(\cdot,f)\right\|_\varphi$$

$$\le\left\|T_n(\cdot,B_n(f))-B_n(\cdot,f)\right\|_\varphi$$

$$+\left\|B_n(\cdot,f)-f(\cdot)\right\|_\varphi+\left\|f(\cdot)-T_n(\cdot,f)\right\|_\varphi$$

$$\le c_{19}E_n(B_n(f))_\varphi.+c_{20}E_n(f)_\varphi+c_{21}E_n(f)_\varphi, \tag{3.11}$$

$$E_n(B_n(f))_\varphi.\le c_{22}E_n(f)_\varphi. \tag{3.12}$$

(3.9), (3.10) ve (3.12) eşitsizlikleri bize

$$I_2 \le c_{23} n^{\alpha} E_n(f)_{\varphi}, \tag{3.13}$$

$$I_3 \le c_{24} (2n)^{\alpha} E_n(f)_{\varphi}. \tag{3.14}$$

eşitsizliklerini verir.

(3.7), (3.8), (3.13) ve (3.14) değerlendirmeleri dikkate alınırsa,

$$\left\| f^{(\alpha)}(\cdot) - T_n^{(\alpha)}(\cdot, f) \right\|_{\varphi}$$

$$\le c_{25} E_n(f^{(\alpha)})_{\varphi} + c_{26} n^{\alpha} E_n(f)_{\varphi} + c_{27} (2n)^{\alpha} E_n(B_n(f))_{\varphi}.$$

$$\le E_n(f^{(\alpha)})_{\varphi} + c_{28} n^{\alpha} E_n(f)_{\varphi}. \tag{3.15}$$

elde ederiz.

Teorem 3.6 gereğince

$$E_n(f)_{\varphi} \le \frac{c_{29}}{(n+1)^{\alpha}} E_n(f^{(\alpha)})_{\varphi} \tag{3.16}$$

değerlendirmesi elde edilir.

(3.15) ve (3.16)) kullanılırsa,

$$\left\| f^{(\alpha)}(\cdot) - T_n^{(\alpha)}(\cdot, f) \right\|_{\varphi} \le c_{30} E_n(f^{(\alpha)})_{\varphi}.$$

elde ederiz.

Theorem 3.9 ispat edildi.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

4.1. Orliçz uzaylarında periyodik fonksiyonların Fourier serilerinin Zygmund ortalamaları ile yaklaşımı

Ağırlıksız ve ağırlıklı Orlicz uzaylarında trigonometrik polinomlarla yaklaşım problemi birçok yazarlar tarafından incelenmiştir.(Örneğin, bak. Akgün, Israfilov 2006; Akgün, Israfilov 2008; Akgün, Israfilov, 2010; Akgün, 2013; Güven, Israfilov, 2002; Güven, Israfilov2009; Israfilov, 2006; Jafarov, 2011; Jafarov, 2012; Jafarov, Mamedkhanov, 2012; Jafarov, 2013; Kokilashvili, 1968; Ponomarenko, 1966; Ramazanov, 1984; Runovski, 2001; 1991]). Farklı uzaylarda fonksiyonların Fourier serilerinin toplamları ile yaklaşımı (Baiborodov, 1980; Il'yasov, 1986; Il'yasov, 2001; Jafarov, 2015; Kokilashvili, Samko, 2009; Kokilashvili, Tsanava, 2010; Stechkin, 1961; Stechkin, 1980; Serdyuk, Ovsi, Musienko 2012; Timan, 1962; Timan, 1968; Zakharov, 1968) çalışmalarında incelenmiştir.

Bu bölümde fonksiyonla fonksiyonun Zygmund toplamları arasındaki hata $E_n(f)_M$ en iyi yaklaşım ve $L_M(T)$ Orlicz uzayında tanımlanan $\omega_k(\cdot, f)_M$ düzgünlük modülü cinsinden incelenmektedir. Ana sonuçların ispatında Timan,1965;ve Il'yasov 1986. çalışmalarındaki ispat metodu kullanılmaktadır. Çalışmadaki esas sonuçlar aşağıda ifade edilmiştir:

Teorem 4.1. $L_M(T)$ refleksiv Orlicz uzayı ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her bir $f \in L_M(T)$ fonksiyonu için

$$\left\| f - Z_{n,k}(\cdot, f) \right\|_{L_M(T)} \le \frac{c_1(M,k)}{(n+1)^k} \sum_{v=0}^{n} (v+1)^{k-1} E_v(f)_M \qquad (4.1)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat:

$$T_n(x) = \sum_{s=0}^{n} (\alpha_s \cos sx + \beta_s \sin sx)$$

biçiminde trigonometrik polinomu ele alalım. Aşagıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\|f-Z_{n,k}(\cdot,f)\|_{L_m(T)}=\left\|f-\sum_{s=0}^{n}\left(1-\frac{s^k}{(n+1)^k}\right)A_s(\cdot,f)\right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq\|f-T_n\|_{L_M(T)}+\left\|T_n-\sum_{s=0}^{n}\left(1-\frac{s^k}{(n+1)^k}\right)\left(\alpha_s\cos sx+\beta_s\sin sx\right)\right\|_{L_M(T)}$$

$$+\left\|\sum_{s=0}^{n}\left(1-\frac{s^k}{(n+1)^k}\right)A_s(\cdot,f)-\sum_{s=0}^{n}\left(\alpha_s\cos sx+\beta_s\sin sx\right)\left(1-\frac{s^k}{(n+1)^k}\right)\right\|_{L_M(T)}$$

$$=\|f-T_n\|_{L_M(T)}+\left\|T_n-\sum_{s=0}^{n}\left(1-\frac{s^k}{(n+1)^k}\right)\left(\alpha_s\cos sx+\beta_s\sin sx\right)\right\|_{L_M(T)}$$

$$+\left\|\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{f(x+\theta)-T_n(x+\theta)\right\}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{s=1}^{n}\left(1-\frac{s^k}{(n+1)^k}\right)\cos s\theta\right\}d\theta\right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq\|f-T_n\|_{L_M(T)}+K_n\|f(\cdot+h)-T_n(\cdot+h\|_{L_M(T)}$$

$$+\left\|T_n-\sum_{s=0}^{n}\left(1-\frac{s^k}{(n+1)^k}\right)\left(\alpha_s\cos sx+\beta_s\sin sx\right)\right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq(1+K_n)\|f-T_n\|_{L_M(T)}+R_n(T_n)_M\quad, \tag{4.2}$$

burada

$$K_r=\tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_{v=0}^{r}\lambda_v(n)\cos v\theta\right|d\theta,$$

$$R_n(T_n)_M=\left\|T_n-\sum_{s=0}^{n}\left(1-\frac{s^k}{(n+1)^k}\right)(\alpha_s\cos sx+\beta_s\sin sx)\right\|_{L_M(T)}$$

dir.

$f\in L_M(T)$ ve $T_n\in\prod_n$ $(n=0,1,2,3,...)$ f ’ye en iyi yaklaşım veren polinom olsun. Yani,

$$E_n(f)_M=\|f-T_n\|_{L_M(T)} \tag{4.3}$$

olsun

Bu durumda (4.2) ve (4.3) kullanılırsa,

$$\left\| f - Z_{n,k}(\cdot, f) \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq (1+K_n)E_n(f)_M + \frac{1}{(n+1)^k} \left\| \sum_{v=1}^{n} v^k \left(\alpha_v \cos vx + \beta_v \sin vx \right) \right\|_{L_M(T)} \quad (4.4)$$

eşitsizliği elde edilir.

(Nikol'ski 1948,) çalışması gereğince $K_n \leq c_3$ eşitsizliği geçerlidir. Bu durumda (4.4) eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\left\| f - Z_{n,k}(\cdot, f) \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq c_3 E_n(f)_m + \frac{1}{(n+1)^k} \left\| \sum_{v=1}^{n} v^k \left(\alpha_v \cos vx + \beta_v \sin vx \right) \right\|_{L_M(T)} \quad (4.5)$$

Kabul edelim ki, k sayısı çifttir ve $m \in N$ sayısı $2^m \leq n < 2^{m+1}$ eşitsizliğini sağlıyor. Bu durumda

$$\left\| f - Z_{n,k}(\cdot, f) \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq c_4 E_n(f)_M + \frac{1}{(n+1)^k} \left\| T_n^{(k)} \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq c_4 E_n(f)_M + \frac{1}{(n+1)^k} \left\{ \left\| T_2^{(k)} - T_0^{(k)} \right\|_{L_M(T)} \right.$$

$$\left. + \sum_{v=1}^{m} \left\| T_{2^{v+1}}^{(k)} - T_{2^v}^{(k)} \right\|_{L_M(T)} + \left\| T_n^{(k)} - T_{2^{m+1}}^{(k)} \right\|_{L_M(T)} \right\} \quad (4.6)$$

eşitsizliği elde edilir.

T_n en iyi yaklaşım veren polinom olduğuna göre aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left\| T_{2^{v+1}} - T_{2^v} \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq \left\| T_{2^{v+1}} - f \right\|_{L_M(T)} + \left\| f - T_{2^v} \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq E_{2^{v+1}}(f)_M + E_{2^v}(f)_M \leq 2E_{2^v}(f)_M \leq 2^{(v+1)k} E_{2^v}(f)_M \qquad (4.7)$$

(4.7) eşitsizliği ve Orlicz uzayında trigonometrik polinom için Bernstein eşitsizliği (Kokilashvili, 1968, Israfilov, Güven, 2006) kullanılırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left\| T_{2^{v+1}}^{(k)} - T_{2^v}^{(k)} \right\|_{L_M(T)} \leq c_5 2^{(v+1)k} \left\| T_{2^{v+1}} - T_{2^v} \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq c_6 2^{(v+1)k} E_{2^v}(f)_M \, . \qquad (4.8)$$

(4.6) ve(4.8) ’ dan

$$\left\| f - Z_{n,k}(\cdot, f) \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq c_5 E_n(f)_M + \frac{c_7}{(n+1)^k} \left\{ \left\| T_2 - T_0 \right\|_{L_M(T)} \right.$$

$$\left. + \sum_{v=1}^{m} 2^{(v+1)k} E_{2^v}(f)_M + \left\| T_n - T_{2^{m+1}} \right\|_{L_M(T)} \right\} \qquad (4.9)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$2^{(v+1)k} E_{2^v}(f)_M \leq 2^{2k} \sum_{m=2^{v-1}+1}^{2^v} m^{k-1} E_m(f)_M \qquad (4.10)$$

eşitsizliği geçerlidir. Gerçekten,

$$\sum_{m=2^{v-1}+1}^{2^v} m^{k-1} \geq (2^{v-1})^{k-1} 2^{v-1} = 2^{k(v-1)}$$

Ve $E_m(f)_M$ monoton azalan olduğundan

$$2^{(v+1)k} E_{2^v}(f)_M \leq 2^{2k} \sum_{m=2^{v-1}+1}^{2^v} m^{k-1} E_m(f)_M$$

sonucuna varılmış olur. (4.9) ve (4.10) eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$\left\| f - Z_{n,k}(\cdot, f) \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq c_5 E_n(f)_M + \frac{c_8}{(n+1)^k}\left\{E_0(f)_M + 2^{2k}\sum_{v=1}^{m}\left(\sum_{m=2^{v-1}+1}^{2^v} m^{k-1}E_m(f)_M\right)\right\}$$

$$\leq c_9 E_n(f)_M + \frac{c_{10}}{(n+1)^k}\left\{E_0(f)_M + 2^{2k}\sum_{m=2}^{2^m} m^{k-1}E_m(f)_M\right\}$$

$$\leq \frac{c_{11}}{(n+1)^k}\sum_{v=0}^{n}(v+1)^{k-1}E_v(f)_M$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak k çift ise (4.1) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

Şimdi $k \geq 3$ tek sayı olsun. Bu durumda

$$R_n(T_n)_M$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{k-1}}\left\| T_n^{(k-1)}\sum_{v=0}^{n}\left(1-\frac{v}{r+1}\right)v^{k-1}\left(\alpha_v \cos vx + \beta_v \sin vx\right)\right\|_{L_M(T)} \qquad (4.11)$$

yazılabilir. Jafarov 2013 çalışması gereğince ,

$$R_n(T_n)_M \leq \frac{c_{12}}{(r+1)^k}\sum_{v=0}^{n-1}E_v\left(T_n^{(k-1)}\right)_M \qquad (4.12)$$

eşitsizliği geçerlidir. Kokilashvili, 1968, Akgün. Israfilov, 2010 çalışmaları gereğince

$$E_n(f^{(k)})_M \leq c_{13}\left\{n^k E_n(f)_M + \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{k-1}E_v(f)_M\right\} \qquad (4.13)$$

eşitsizliği doğrudur. $\{E_n(f)_M\}$ dizisinin özelliği ve (4.13) eşitsizliği dikkate alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\sum_{v=0}^{n-1}E_v\left(T_n^{(k-1)}\right)_M$$

$$\leq c_{14}\sum_{v=0}^{n-1}\left\{(v+1)^{k-1}E_v(T_n)_M + \sum_{s=v}^{n-1}(s+1)^{k-2}E_s(T_n)_M\right\}$$

$$\leq c_{15}\sum_{v=0}^{n-1}\left\{(v+1)^{k-1}E_v(T_n)_M \leq c_{16}\sum_{s=v}^{n-1}(v+1)^{k-2}E_v(f)_M\right\} \qquad (4.14)$$

(4.14), (4.12 ve (4.5) eşitsizlikleri kullanılırsa, (4.1) eşitsizliği elde edilir. Teorem 4.1 ‘in ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2. $L_M(T)$ refleksiv Orlicz uzayı ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her bir $f \in L_M(T)$ fonksiyonu için

$$\left\| f - Z_{n,k}(\cdot, f)\right\|_{L_M(T)} \leq c_2(M,k)\omega_k(f, \tfrac{\pi}{n})_M \qquad (4.15)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $f \in L_M(T)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left\| f - Z_{n,k}(\cdot, f)\right\|_{L_M(T)} \leq \left\| f - S_n(\cdot, f)\right\|_{L_M(T)} + (n+1)^{-k}\left\| v^k A_v(\cdot, f)\right\|_{L_M(T)}$$

$$= U_1 + U_2^{(k)} \qquad (4.16)$$

Açıktır ki, Ryan, 1963, Israfilov, Güven, 2006 çalışmaları gereğince,

$$U_1 = \left\| f - S_n(\cdot, f)\right\|_{L_M(T)} \leq c_{17}(M)E_n(f)_M \qquad (4.17)$$

eşitsizliği elde edilir.

Ramazanıv, 1984 ve R. Akgün, D. M. Israfilov, 2008 çalışmaları gereğince aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$E_n(f)_M \leq c_{18}(k,M)\omega_k(f, \tfrac{\pi}{n})_M . \qquad (4.18)$$

Bu durumda (4.17) ve (4.18) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$U_1 = \left\| f - S_n(\cdot, f)\right\|_{L_M(T)} \leq c_{19}(k,M)\omega_k(f, \tfrac{\pi}{n})_M \qquad (4.19)$$

eşitsizliği elde edilir.

Not edelim ki, eger k çift ise

$$\sum_{v=1}^{n} v^k A_v(x, f) = (-1)^{k/2} S_n^{(k)}(x, f),$$

eşitliği, eğer k tek ise

$$\sum_{v=1}^{n} v^k A_v(x,f) = (-1)^{(k+3)/2} \tilde{S}_n^{(k)}(x,f),$$

eşitliği doğrudur, burada $g(x)$ fonksiyonu $g(x)$ 'in trigonometrik eşleniğidir.

Bu durumda

$$U_2^{(k)} = \begin{cases} (n+1)^{-k} \left\| S_n^{(k)}(\cdot,f) \right\|_{L_M(T)}, k-çift \\ (n+1)^{-k} \left\| \tilde{S}_n^{(k)}(\cdot,f) \right\|_{L_M(T)}, k-tek \end{cases} \tag{4.20}$$

Eger k çift ise (4.13), (4.20) ve Akgün, 2013 çalışmasındaki (3.1) eşitsizliği dikkate alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$U_2^{(k)} = (n+1)^{-k} \left\| S_n^{(k)}(\cdot,f) \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq c_{20}(n+1)^{-k} 2^{-k} n^{-k} \left\| \Delta_{\pi/n} S_n(\cdot,f) \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq 2^{-k} c_{21} \left\| \Delta_{\pi/n} S_n(\cdot,f) \right\|_{L_M(T)} = 2^{-k} c_{21} \left\| \Delta_{\pi/n} S_n(\cdot,f) - f + f \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq c_{22}(M,k) \left\{ \left\| f - S_n(\cdot,f) \right\|_{L_M(T)} + \left\| \Delta_{\pi/n}(f) \right\|_{L_M(T)} \right\}$$

$$\leq c_{23}(M,k) \omega_k(f, \tfrac{\pi}{n})_M \tag{4.21}$$

Ryan, 1963 ve Israfilov, Güven, 2006 çalışmaları dikkate alındığında

$$\left\| \tilde{S}_n^{(k)}(\cdot,f) \right\|_{L_M(T)} \leq c_{24} \left\| S_n^{(k)}(\cdot,f) \right\|_{L_M(T)} \qquad ((4.22)$$

eşitsizliği yazılabilir.

Eğer k tek ise (4.20), (4.22) ve (4.2) eşitsizlikleri'nin dikkate alınması bize şunu verir:

$$U_2^{(k)} = (n+1)^{-k} \left\| \tilde{S}_n^{(k)}(\cdot,f) \right\|_{L_M(T)}$$

$$\leq c_{25}(n+1)^{-k} \left\| S_n(\cdot,f) \right\|_{L_M(T)} \leq c_{26}(M,k) \omega_k(f, \tfrac{\pi}{n})_M \tag{4.23}$$

eşitsizliği elde edilir.(4.16) , (4.19) , (4.21) ve (4.23) eşitsizliklerinde istenen (4.15) eşitsizliği elde edilir. Teorem 4.2’ nin ispatı tamamlanmış olur.

$L_p(T)$, $p \geq 1$ Lebesgue uzaylarında Teorem 4.1 ve Teoremleri 4.2 sırasıyla Timan, 1965 ve Il’yasov, 1986 çalışmalarında elde edilmiştir.

4.2. Sürekli Fonksiyonlar Uzayında Fonksiyonların Fourier Serilerinin Zygmund Ortalamaları İle Lebesgue Uzayında Fonksiyonun En İyi Yaklaşımı Arasındaki İlişki

Lemma 4.1. $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = r + 1/p$, ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} E_{n-1}(f)_p < +\infty \qquad (4.24)$$

olsun. Bu durumda f hemen hemen her yerde $\psi \in C^r$ fonksiyonuyla çakışır ve aşağıdaki değerlendirme geçerlidir:

$$\begin{aligned} &\left\| \psi^{(r)} - Z_{n,k}(\psi^{(r)}) \right\| \\ &\leq C_1(k,r,p)\left(\sum_{v=n+1}^{\infty} v^{\sigma-1} E_{v-1}(f)_p + n^{-k} \sum_{v=1}^{n} v^{k+\sigma-1} E_{v-1}(f)_p) \right), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \qquad (4.25)$$

İspat: (4,24) serisi yakınsak olduğuna göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1} E_{n-1}(f)_p < +\infty$$

yazılabilir, buradan Konyushkov, 1968 çalışmasındaki Teorem 2 gereğince $f \sim \psi \in C$ (f hemen hemen her yerde $\psi \in C$ fonksiyonu ile çakışır) ve aşağıdaki aşağıdaki değerlendirme geçerlidir:

$$E_{n-1}(\psi) \leq C_2(p)\left(n^{\frac{1}{p}} E_{n-1}(f)_p + \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{\frac{1}{p}-1} E_{v-1}(f)_p \right). \qquad (4.26)$$

Ayrıca, (4.26) değerlendirmesine göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} E_{n-1}(\psi) \leq C_2(p)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} E_{n-1}(f)_p + \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{\frac{1}{p}-1} E_{v-1}(f)_p \right)$$

$$= C_2(p)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} E_{n-1}(f)_p + \sum_{n=1}^{\infty} v^{\frac{1}{p}-1} E_{v-1}(f)_p \sum_{n=1}^{v} n^{r-1} \right)$$

$$\leq 2C_2(p) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} E_{n-1}(f)_p < +\infty \ , \qquad\qquad r \in \mathbb{N};$$

elde edilir. Böylece, Bernstein teoremi (Örneğin bkz. Stechkin 1951, sayfa 236) $\psi \in C^r$ olur ve Stechkin eşitsizliği (bkz. Stechkin, 1951, sayfa 237, (5.23)) dikkate alınırsa,

$$E_{n-1}(\psi^{(r)}) \leq C_3(r)\left(n^r E_{n-1}(\psi) + \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{r-1} E_{v-1}(\psi) \right)$$

$$\leq C_3(r) \cdot C_2(p)\left(n^{\sigma} E_{n-1}(f)_p + n^r \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{\frac{1}{p}-1} E_{v-1}(f)_p \right.$$

$$\left. + \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{\sigma-1} E_{v-1}(f)_p + \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{r-1} \sum_{\mu=v+1}^{\infty} \mu^{\frac{1}{p}-1} E_{\mu-1}(f)_p \right)$$

$$\leq C_3(r).C_2(p)\left(n^{\sigma} E_{n-1}(f)_p + 2 \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{\sigma-1} E_{v-1}(f)_p \right.$$

$$\left. + \sum_{v=n+1}^{\infty} \mu^{\frac{1}{p}-1} E_{\mu-1}(f)_p \sum_{v=n+1}^{\mu} v^{r-1} \right)$$

$$\leq C_3(r).C_2(p)\left(n^{\sigma} E_{n-1}(f)_p + 3 \sum_{v=n+1}^{\infty} v^{\sigma-1} E_{v-1}(f)_p \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer son eşitsizlik ($k = 1$ için Stechkin, 1961, sayfa 48, (1.3) eşitsizliği ve $k \geq 1$ için Timan, 1962, sayfa 742, (4) eşitsizliği ve Timan, 1965, sayfa 589, (1.15) eşitsizliği çalışmalarında dikkate alınırsa,

$$\| g - Z_{n,k}(g) \| \leq C_4(k).n^{-k} \sum_{v=1}^{n} v^{k-1} E_{v-1}(g), \qquad g \in C \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $r \in \mathbb{Z}_+$ için

$$\| \psi^{(r)} - Z_{n,k}(\psi^{(r)}) \| \leq C_4(k).n^{-k} \sum_{v=1}^{n} v^{k-1} E_{v-1}(\psi^{(r)})$$

$$\le C_4(k).C_3(r).C_2(p)\left(n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}E_{\nu-1}(f)_p\right.$$

$$\left.+3n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{\sigma-1}E_{\mu-1}(f)_p+3n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{\sigma-1}E_{\mu-1}(f)_p\right)$$

$$\le C_4.C_3.C_2\left(n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}E_{\nu-1}(f)_p\right.$$

$$\left.+3n^{-k}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{\sigma-1}E_{\mu-1}(f)_p\sum_{\nu=1}^{\mu}\nu^{k-1}+3\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{\sigma-1}E_{\mu-1}(f)_p\right)$$

$$\le C_4(k).C_3(r).C_2(p)\left(3\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}E_{\nu-1}(f)_p+4n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}E_{\nu-1}(f)_p\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 4.1 ispatlanmış olur.

Teorem 4.3. $1\le p<\infty$, $r\in Z_+$, $k\in\mathbb{N}$, $\sigma=r+1/p$, $\varepsilon\in M_0$, ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\sigma-1}\varepsilon_n<+\infty \tag{4.27}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\sup\left\{\left\|\psi^{(r)}-Z_{n,k}(\psi^{(r)})\right\|;\, f\in E_p[\varepsilon]\right\}\\&\le c\left(k,r,p\right)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\sigma-1}\varepsilon_\nu+n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+\sigma-1}\varepsilon_\nu,\quad n\in\mathbb{N}\end{aligned} \tag{4.28}$$

burada ψ , C^r fonksiyon sınıfından olmak üzere (4.24) şartını sağlayan $f\in E_P[\varepsilon]$ fonksiyonuna denk olan fonksiyondur

İspat: (4.27) serişinin yakınsak olması $E_p\left[\varepsilon\right]\subset C^r$ olması için gerek ve yeter şarttır. Gerçekten, keyfi $f\in E_p\left[\varepsilon\right]$ fonksiyonu $\psi\in C^r$ fonksiyonuna denktir. (4.28) eşitsiliği Lemma 4.1' de ispat edilen (4.25) eşitsizliğinden elde edilir.

Teorem 4.4 $f\in C$ ve $k\in\mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim.

$$\omega_\ell\left(f:\frac{\pi}{n+1}\right)\le C_5(k)\left\|f-Z_{n,k}(f)\right\|,\qquad n\in\mathbb{Z}_+$$

eşitsizliği geçerlidir, burada $\ell = k+[1-(-1)^k]/2 = \{k,\ k$ çifttir; $k+1,\ k$ tektir$\}$ ve $C_5(k) = 2^{\ell} + (2k+1)\pi^{\ell}$ dir.

İspat: $T_n(f:x)$ trigonometrik polinomu C' de f ' ye en iyi yaklaşım veren polinom olsun. Yani, $\|f - T_n(f)\| = E_n(f)$ olsun. Bu durumda bilinen

$$T_n(f:x) - Z_{n,k}(T_n(f);x) = f(x) - Z_{n,k}(f;x)$$

$$+T_n(f:x) - f(x) + Z_{n,k}(f - T_n(f);x) \qquad k \in \mathbb{N}$$

özdeşliği ve ((bkz. Örneğin, Zhuk, 1982, , s.260, Lemma 8 , Tanım 2) çalışmasındaki, $\|Z_{n,k}(g;\cdot)\| \le (2k-1)\|g\|$ $\left(g \in C, n \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{N}\right)$ eşitsizliği gereğince

$$\|T_n(f) - Z_{n,k}(T_n(f))\| \le \|f - Z_{n,k}(f)\| + \|T_n(f) - f\| + \|Z_{n,k}(f - T_n(f)\|$$

$$\le \|f - Z_{n,k}(f)\| + 2kE_n(f) \le (2k+1)\|Z_{n,k}(f - Z_{n,k}(f)\|$$

elde edilir.

k sayısı çift sayı olduğunda

$$T_n(f;x) - Z_{n,k}(T_n(f);x) = (-1)^{k/2}(n+1)^{-k}T_n^{(k)}(f;x)$$

eşitliği ve düzgünlük modüllerinin iyi bilinen özelliklerinden (bakınız, örneğin, (Zhuk, 1982, s. 99–106), aşağıdakini elde ederiz:

$$\omega_k\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right) \le 2^k\|f - T_n(f)\| + \omega_k\left(T_n(f);\frac{\pi}{n+1}\right) \le 2^k E_n(f) + \pi^k(n+1)^{-k}\left\|T_n^{(k)}(f)\right\|$$

$$= 2^k E_n(f) + \pi^k\|T_n(f) - Z_{n,k}(T_n(f))\| \le 2^k E_n(f) + \pi^k(2k+1)\|f - Z_{n,k}(f)\|$$

$$\le \left(2^k + (2k+1)\pi^k\right)\|f - Z_{n,k}(f)\|$$

Eğer k sayısı tek sayı ise

$$T_n(f;x) - Z_{n,k}(T_n(f);x) = (-1)^{(k+3)/2}(n+1)^{-k}\tilde{T}_n^{(k)}(f;x)$$

eşitliği (burada $\tilde{g}$, g 'nin trigonometrik eşleniğidir) ve (Zhuk, 1982, sayfa 115 çalışmasındakı (127) eşitsizliğinden elde edilen

$$\left\|T_n^{(k+1)}(f)\right\| \le n\left\|\tilde{T}_n^{(k)}(f)\right\|$$

eşitsizliği gereğince,

$$\omega_{k+1}\pi\left(f;\frac{\pi}{n+1}\right) \le 2^{k+1}E_n(f)+\pi^{k+1}(n+1)^{-(k+1)}\left\|T_n^{(k+1)}(f)\right\|$$

$$\le 2^{k+1}E_n(f)+\pi^{k+1}(n+1)^{-k}\left\|\tilde{T}_n^{(k)}(f)\right\|$$

$$= 2^{k+1}E_n(f)+\pi^{k+1}\left\|T_n(f)-Z_{n,k}(T_n(f))\right\|$$

$$\le 2^{k+1}E_n(f)+\pi^{k+1}(2k+1)\left\|f-Z_{n,k}(f)\right\|$$

$$\le (2^{k+1}+(2k+1)\pi^{k+1})\left\|f-Z_{n,k}(f)\right\|$$

elde edilir. Teorem 4.4 ispatlanmıştır.

Bölüm 4.3. Fonksiyonların Ağırlıkli Orlicz Uzaylarında Fourier Serilerinin Lineer Ortalamaları İle Yaklaşımı

T ile $[-\pi,\pi]$ parçası gösterilmiş olsun. $L_M(T,\omega)$, $0<\alpha_M \le \beta_M <1$ olmak üzere , α_M, β_M Boyd indisleri ile ağırlıklı Orlicz uzayı ve $\omega \in A_{1/\alpha_M}(T)\cap A_{1/\beta_M}(T)$ olsun. $f \in L_M(T,\omega)$ fonksiyonu için

$$(s_h f)(x) := \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt,\ 0<h<\pi,\ x\in T$$

şekilinde tanımlanan operatörü göz önüne alalım. $f \in L_M(T,\omega)$ fonksiyonu için

$$\Omega_{M,\omega}^k(\delta,f) := \sup_{\substack{0<h_i\le\delta \\ 1\le i\le k}} \left\|\prod_{i=1}^{k}\left(I-s_{h_i}\right)\right\|_{L_M(T,\omega)},\ \delta>0,$$

şekilinde *k-düzgünlük modülünü* tanılayalım, burada I birim operatörüdür. Not edelim ki $\Omega_{M,\omega}^{k}(\delta, f)$ *k-düzgünlük modülü* iii tanımlı fonksiyondur, çünkü, s_h operatörü $L_M(T,\omega)$uzayında sınırlı operatördür. (Israfilov, Güven, 2006).

$f, g \in L_M(T,\omega)$ fonksiyonları için $\Omega_{M,\omega}^{k}(\cdot, f)$ fonksiyonu süreklidir, negatif değildir ve aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\lim_{\delta\to 0}\Omega_{M,\omega}^{k}(\cdot, f) = 0, \quad \Omega_{M,\omega}^{k}(\cdot, f+g) \le \Omega_{M,\omega}^{k}(\cdot, f) + \Omega_{M,\omega}^{k}(\cdot, g)$$

Ayrıca

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right) \tag{4.29}$$

$f \in L_1(T,\omega)$ fonksiyonunun Fourier serisi olsun, burada $a_k(f)$ve $b_k(f)$ ise f fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır. $f \in L_M(T,\omega)$ fonksiyonu için $\Lambda = \{\lambda_{i,j}\}_{i,j=0}^{j,\infty}$ üçgen matrisleri kullanarak,

$$U_n(x, f) = \lambda_{0n}\frac{a_0}{2} + \sum_{\imath=1}^{n}\lambda_i\left(a_{i,}(f)\cos ix + b_i(f)\sin ix\right).$$

lineer toplamlamları yardımı ile toplanabilme metodu tanımlayalım. Eğer f fonksiyonunun Fourier serisi (4.29) biçiminde ise, bu serinin k. mertebeden Zygmund-Riesz toplamları

$$Z_n^k(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\imath=1}^{n}\left(1 - \frac{i^k}{(n+1)^k}\right)\left(a_{i,}(f)\cos ix + b_i(f)\sin ix\right).$$

biçiminde tanımlanır.

$f \in L\ (T,\omega)$ fonksiyonu için derecesi n-yi aşmayan trigonometric polinomlarla $E_n(f)_{M,\omega}$, $(n = 0,1,2,...)$ en iyi yaklaşımı

$$E_n(f)_{M,\omega} := \inf\left\{\left\| f - T_n\right\|_{L_M(T,\omega)} : T_n \in \Pi_n\right\},$$

olarak tanımlanır, burada Π_n derecesi n-yi aşmayan trigonometric polinomlarlar sınıfıdır. De Vore, G. G. Lorentz, 1993, sayfa 59, Teorem 1.1 çalışması gereğince öyle $T_n^* \in \Pi_n$ polinomu var ki, en iyi yaklaşımı vermektedir. Yani,

$$E_n(f)_{M,\omega} = \left\| f - T_n^* \right\|_{L_M(T,\omega)}$$

olur

$T_n \in \Pi_n$ polinomu

$$T_n = \frac{c_0}{2} + \sum_{i=1}^{n} \left(c_i \cos ix + d_i \sin ix \right).$$

şekilinde olsun. T_n polinomumun T_n eşileniği

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i \sin ix - d_i \cos ix \right).$$

biçiminde tanımlanır.

Bu çalışmada, yalnızca ilgilenilen sorular için önemli olmayan niceliklere bağlı olan $c, c_1, c_2, \ldots$ sabitleri (genel olarak, farklı ilişkilerde farklı) kullanıyoruz.

Eğer $T_n \in \Pi_n$ polinomu için

$$\left\| T_n - U_n(T_n) \right\|_{L_M(T,\omega)} \le c(n+1)^{-k} \left\| T_n^{(k)} \right\|_{L_M(T,\omega)}$$

$$\left(\left\| T_n - U_n(T_n) \right\|_{L_M(T,\omega)} \le c(n+1)^{-k} \left\| T_n^{(k)} \right\|_{L_M(T,\omega)} \right)$$

eşitsizliği sağlanırsa, bu durumda diyeceyiz ki, toplanabilme metodu Λ matris şartı ile $b_{k,M}$ (uygun olarak $b_{k,M}^*$) şartını sağlıyor ve

$$\left\| \Lambda \right\|_1 := \int_0^{2\pi} \left| \frac{\lambda_{0,n}}{2} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} \cos it \right| dt$$

normları sınırlıdır

Yaklaşım teorisinin problemleri ağırlıklı ve ağırlıksız Orlicz uzaylarında bir çok yazarlar tarafından incelenmiştir. (Örneğin, bak Akgün, Israfilov2006; 2010; Akgün, 2013; Güven, D. M. Israfilov 2009; Israfilov, Guven, 2005; Jafarov, 2013; Jafarov 2015; Jafarov, 2018; Ramazanov 1984).

Bu bölümde ağırlıklı Orlicz uzaylarında fonksiyonların Fourier serilerinin lineer toplamları ile yaklaşımı ile, fonksiyonların k. mertebeden Zygmund-Riesz toplamları ile yaklaşımı arasında ilişki hakkında gerekli ve yeterli koşul incelenmiştit. Ayrıca, ağırlıklı Orlicz uzaylarında düzgünlük modülü cinsinden fonksiyonların Fourier serilerinin toplamları ile yaklaşımı incelenir. Bu sonuç Smirnov-Orlicz sınıflarında kompleks düzlemin basit bağlantılı bölgelerinde tanımlanmış fonksiyonların Faber serilerinin toplamları ile yaklaşımına uygulanmıştır. Benzer problemler farklı uzaylarda Cao, 1997; Chikina, 2013; Il'yasov 1986; Jafarov 2018; Jafarov, 2015; Jafarov, 2020; Kokilashvili, Samko, 2009; Kokilashvili,Tsanava, 2010; Stechkin, 1961; Timan, 1965 çalışmalarında incelenmiştir.

Bu çalışmada sonuçların elde edilmesinde Chikina, 2013; Israfilov, Akgün, 2006 ve Il'yasov, 1986 çalışmalarındaki ispat metodu kullanılmaktadır.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıdaki teoremler ile verilir:

Teorem 4.5. $L_M(T,\omega)$, $1<\alpha_M \le \beta_M <1$, şartını sağlayan α_M ve β_M Boyd indisleri ile ağırlıklı Orlicz uzayı ve $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ olsun Bu durumda $f \in L_M(T,\omega)$ fonksiyonu için

$$\left\| f(\cdot)-U_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} \le c_1 \left\| f(\cdot)-Z_n^k(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} \qquad (4.30)$$

olması için gerek ve yeter şart $f \in L_M(T,\omega)$ için

$$\left\| T_n(\cdot)-U_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} \le c_2 \left\| T_n(\cdot)-Z_n^k(\cdot,T_n)\right\|_{L_M(T,\omega)} \qquad (4.31)$$

olmasıdır.

İspat: Gereklilik. Açıktır ki, (4.31) eşitsizliği (4.30 eşitsizliğinden elde edilir

Yeterlilik. $f \in L_M(\Gamma,\omega)$ ve $T_n \in \Pi_n$ $(n=0,1,2,...)$ en iyi yaklaşım veren polinom olsun. Bu durumda aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
&\left\| f-U_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} \\
&\leq \left\| f-T_n\right\|_{L_M(T,\omega)} - \left\| T_n-U_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} + \left\| U_n(\cdot,f-T_n)\right\|_{L_M(T,\omega)} \\
&\leq E_n(f)_{M,\omega} + c_9 \left\| T_n - Z_n^k(\cdot,T_n)\right\|_{L_M(T,\omega)} + c_{10}E_n(f)_{M,\omega} \leq c_{11}E_n(f)_{M,\omega} \\
&+c_{12}\left(\left\| T_n - f\right\|_{L_M(T,\omega)} + \left\| f - Z_n^k(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} + \left\| Z_n^k(\cdot,f-T_n)\right\|_{L_M(T,\omega)}\right) \\
&\leq c_{13}E_n(f)_{M,\omega} + c_{14}E_n(f)_{M,\omega} + c_{15}\left\| f - Z_n^k(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} + c_{16}c_{17}E_n(f)_{M,\omega} \\
&\leq c_{18}E_n(f)_{M,\omega} + c_{19}\left\| f - Z_n^k(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} \leq c_{20}\left\| f - Z_n^k(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)}.
\end{aligned}$$

Teorem 4.5 ispat edildi.

Teorem 4.6. $L_M(T,\omega)$, $1<\alpha_M \leq \beta_M <1$, şartını sağlayan α_M ve β_M Boyd indisleri ile ağırlıklı Orlicz uzayı ve $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ olsun Bu durumda $f \in L_M(T,\omega)$ fonksiyonu için

$$\left\| f(\cdot)-U_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} \leq c_3 \left\| f(\cdot)-Z_n^k(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} \qquad (4.32)$$

olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

(i) $\left\| U_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} = O(1)$;

(ii) Eğer k çift ise $U_n(\cdot,f)$ toplamı $(b_{k,M})$ şartını sağlıyor; eğer k tek ise $U_n(\cdot,f)$ toplamı $(b_{k,M}^*)$ şartını sağlıyor.

İspat: Gereklilik. $1<q<p<\infty$ olsun. Timan 1965 çalışması gereğince $Z_n^k(\cdot,f)$ toplamı $L_p(T)$ ve $L_q(T)$ Lebesgue uzaylarında sınırlıdır. Bu durumda (Israfilov, Guven, 2006, Teorem 7 , Lemma 1) çalışmasına göre $\left\| Z_n^k(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} = O(1)$ olur. (4.32) gereğince $\left\| U_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} = O(1)$ elde ederiz. $f \in L_M(T,\omega)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}&\left\| f - Z_n^k\left(\cdot, f\right)\right\|_{L_M(T,\omega)} \\ &\leq \left\| f - S\left(\cdot, f\right)\right\|_{L_M(T,\omega)} + \left(n+1\right)^{-k}\left\| \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k A_\nu\left(\cdot, f\right)\right\|_{L_M(T,\omega)} \\ &= U_1 + U_2^{(k)}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Açıktır ki Israfilov., A, Guven, 2006 çalışmasından

$$\begin{aligned}U_1 = \left\| f - S\left(\cdot, f\right)\right\|_{L_M(T,\omega)} &\leq c_{21} E_n\left(f\right)_{M,\omega} \\ &\leq c_{22}\left(n+1\right)^{-k}\left\| f^{(k)}\right\|_{L_M(T,\omega)}.\end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir

Eğer k çift sayı ise

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^k A_\nu\left(x, f\right) = \left(-1\right)^{k/2} S_n^{(k)}\left(x, f\right),$$

ve k tek sayısı ise

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^k A_\nu\left(x, f\right) = \left(-1\right)^{(k+3)/2} \tilde{S}_n^{(k)}\left(x, f\right),$$

elde edilir, burada $\tilde{g}\left(x\right)$ fonksiyonu $g\left(x\right)$ fonksiyonunun trigonometric eşleniğidir. Bu durumda

$$U_2^{(k)} = \begin{cases} \left(n+1\right)^{-k}\left\| S_n^{(k)}\left(\cdot, f\right)\right\|_{L_M(T,\omega)}, & k-even \\ \left(n+1\right)^{-k}\left\| \tilde{S}_n^{(k)}\left(\cdot, f\right)\right\|_{L_M(T,\omega)}, & k-odd. \end{cases} \tag{4.35}$$

olur.

(4.35) bağıntısı ve Israfilov., A, Guven, 2006 çalışması gereğince k çift sayı olduğunda

$$\begin{aligned} U_2^{(k)} &= (n+1)^{-k} \left\| S_n^{(k)}(\cdot, f) \right\|_{L_k(T,\omega)} \\ &\le c_{23} (n+1)^{-k} \left\| f^{(k)} \right\|_{L_M(T,\omega)}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir, eğer k tek sayı ise

$$\begin{aligned} U_2^{(k)} &= (n+1)^{-k} \left\| S_n^{(k)}(\cdot, f) \right\|_{L_k(T,\omega)} \\ &\le c_{24} (n+1)^{-k} \left\| f^{(k)} \right\|_{L_M(T,\omega)}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

bulunur.

(4.33), (4.34) ve (4.37) bağıntıları dikkate alınırsa, k çift sayı olduğunda $f \in L_M(T,\omega)$ ve $f^{(k)} \in L_M(T,\omega)$ için

$$\left\| f - Z_n^{(k)}(\cdot, f) \right\|_{L_M(T,\omega)} \le c_{25} (n+1)^{-k} \left\| f^{(k)} \right\|$$

eşitsizliği elde edilir ve k tek sayı olduğunda $f \in L_M(T,\omega)$ ve $f^{(k)} \in L_M(T,\omega)$ fonksiyonları için

$$\left\| f - Z_n^{(k)}(\cdot, f) \right\|_{L_M(T,\omega)} \le c_{26} (n+1)^{-k} \left\| f^{(k)} \right\|.$$

eşitsizliği bulunur.

Yeterlilik $T_n \in \Pi_n$ polinomu için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\left\| T_n - Z_n^{(k)}(\cdot, T_n) \right\|_{L_M(T,\omega)} \le (n+1)^{-k} \left\| T_n^{(k)} \right\|_{L_M(T,\omega)}, \text{ eğer } k \text{ çift sayı} \tag{4.38}$$

$$\left\| T_n - Z_n^{(k)}(\cdot, T_n) \right\|_{L_M(T,\omega)} \le (n+1)^{-k} \left\| \widetilde{T}_n^{(k)} \right\|_{L_M(T,\omega)}, \text{ eğer } k \text{ tek sayı ise} \tag{4.39}$$

(4.38), (4.39) ve (ii) şartı kullanılırsa

$$\left\| T_n - U_n(\cdot, T_n) \right\|_{L_M(T,\omega)} \le c_{27} \left\| T_n - Z_n^{(k)}(\cdot, T_n) \right\|_{L_M(T,\omega)}.$$

eşitsizliği elde edilir

Son eşitsizlikten ve Teorem 4.5 den (4.32) elde edilir. Teorem 4.6 ispat edildi.

Teorem 4.7. $L_M(T,\omega)$, $1<\alpha_M \le \beta_M <1$, şartını sağlayan α_M ve β_M Boyd indisleri ile ağırlıklı Orlicz uzayı ve $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ olsun. Eğer toplama metodu Λ matrisi ile $(b_{k,M})$ veya $b^*_{k,M}$ şartını sağlıyorsa, bu durumda $f \in L_M(T,\omega)$ fonksiyonu için

$$\|f(\cdot)-U_n(\cdot,f)\|_{L_M(T,\omega)} \le c_4 \Omega^k_{M,\omega}\left(\frac{1}{n+1}, f\right) \tag{4.40}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $c_4>0$ sabiti n-den bağımsızdır.

İspat: Kabul edelim ki $(b^*_{k,M})$ şartı sağlanır. $f \in L_M(T,\omega)$ ve $T_n \in \Pi_n$ polinomu f ’ ye en iyi yaklaşım veren polinom olsun. Not edelim ki $U_n(f)=\Lambda * f$ dir. Bu durumda $1<q<p<\infty$ ise (Timan, 1965) çalışması gereğince $U_n(f)$ operatörü $L_p(T)$ ve $L_q(T)$ Lebesgue uzaylarında sınırlıdır. (Israfilov., A, Guven, 2006) çalışmasındaki Lemma 1’in ispat metodu kullanılırsa, göstermek olur ki, $U_n(f)$ operatörü $L_M(T,\omega)$ uzayında sınırlıdır. Yani, $\|U_n(f)\|_{L_M(T,\omega)} \le c_{28}\|f\|_{L_M(T,\omega)}$ dir. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\|f-U_n(\cdot,f)\|_{L_M(T,\omega)} \\
&\le \|f-T_n\|_{L_M(T,\omega)} - \|T_n-U_n(\cdot,f)\|_{L_M(T,\omega)} \\
&+\|U_n(\cdot,T_n)-U_n(\cdot,f)\|_{L_M(T,\omega)} \\
&\le c_{29}E_n(f)_{M,\omega}+c_{30}E_n(f)_{M,\omega}+c_{31}n^{-k}\left\|T_n^{(k)}\right\|_{L_M(T,\omega)} \\
&\le c_{32}E_n(f)_{M,\omega}+c_{33}n^{-k}\left\|T_n^{(k)}\right\|_{L_M(T,\omega)}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Bernstein eşitsizliği ve (Israfilov, Guven, 2006, Lemma 3 ve bağıntı (15)) çalışması gereğince $f \to f$ operatörünün $L_M(T,\omega)$ uzayında sınırlı olduğu dikkate alınırsa,

$$n^{-k}\left\|T_n^{(k)}\right\|_{L_M(T,\omega)} \le c_{34}n^{-k}\left\|T_n^{(k)}\right\|_{L_M(T,\omega)}$$

$$\le c_{35}\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\frac{1}{n+1}, f\right). \tag{4.42}$$

elde edilir.

Öte yandan (Israfilov, Guven, 2006) çalışması gereğince $L_M(T,\omega)$ uzayında yaklaşım teorisinin düz teoremine göre

$$E_n(f)_{M,\omega} \le c_{36}\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\frac{1}{n+1}, f\right). \tag{4.43}$$

eşitsizliği geçerlidir. (4.41)-(4.43) bağıntıları dikkate alınırsa,

$$\left\|f-U_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)} \le c_{37}\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\frac{1}{n+1}, f\right). \tag{4.44}$$

elde edilir.

Eğer Λ matriis yardımı ile oluşan toplama metodu $\left(b_{k,M}^{*}\right)$ şartını sağlıyorsa, bu durumda ispat yukarıdakına benzer şekilde yapılır. Teorem 4.7 ispat edildi.

Teorem 4.8.. $L_M(T,\omega)$, $1<\alpha_M \le \beta_M <1$, şartını sağlayan α_M ve β_M Boyd indisleri ile ağırlıklı Orlicz uzayı ve $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ olsun. Eğer toplama metodu Λ matrisi ile $\left(b_{k,M}\right)$ veya $b_{k,M}^{*}$ şartını sağlıyorsa, bu durumda $f \in L_M(T,\omega)$ fonksiyonu için

$$\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\delta, U_n(\cdot,f)\right) \le c_5\Omega_{M,\omega}^{k}(\delta, f) \tag{4.45}$$

olur, burada $c_5>0$ sabiti n, f ve δ dan bağımlı değildir.

İspat: (D. M. Israfilov, Guven, 2006) çalışması gereğince

$$\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\delta,\ U_n\left(f\right)-f,\right)\leq c_{38}\left\|U_n\left(\cdot,f\right)-f\right\|_{L_M(T,\omega)} \qquad (4.46)$$

eşitsizliği geçerlidier.

$\delta\geq(n+1)^{-1}$ olsun. Teorem 4.7 ve (4.46) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\delta,U_n\left(f\right)\right)\leq\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\delta,f\right)+\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\delta,U_n\left(\cdot,f\right)-f\right)_{L_M(T,\omega)}\\
&\leq\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\delta,f\right)+c_{39}\left\|U_n\left(\cdot,f\right)-f\right\|_{L_M(T,\omega)}\\
&\leq\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\delta,f\right)+c_{40}\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\frac{1}{n+1},f\right)\leq c_{41}\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\delta,f\right).
\end{aligned} \qquad (4.47)$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki $\delta<(n+1)^{-1}$ eşitsizliği sağlanır. (Israfilov, Guven, 2006) çalışmaları gereğince

$$\begin{aligned}
&\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\delta,U_n\left(f\right)\right)\leq c_{42}\delta^{k}\left\|U_n^{(k)}\left(\cdot,f\right)\right\|_{L_M(T,\omega)}\\
&\leq c_{43}\delta^{k}n^{k}\left\|U_n\left(\cdot,f\right)\right\|_{L_M(T,\omega)}\leq c_{44}\delta^{k}n^{k}\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\frac{1}{n},U_n\left(f\right)\right)\\
&\leq c_{45}\delta^{k}\left(n+1\right)^{k}\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\frac{1}{n},U_n\left(f\right)\right)\leq c_{46}\Omega_{M,\omega}^{k}\left(\delta,f\right).
\end{aligned} \qquad (4.48)$$

olur. (4.47) ve (4.48] eşitsizlikleri kullanılırsa, Teorem 4.8 in (4.45) eşitsizliği elde edilir.

G, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde Γ düzeltilebilir Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge olsun. $G^{-}:=ext\Gamma$ ve

$$T.=\left\{w\in\mathbb{C}:|w|=1\right\},\ D:=\operatorname{int}T \text{ ve } D^{-}:=extT$$

gösterelim.

$w=\phi(z)$ ise G^{-} bölgesini D^{-} bölgesine dönüştüren fonksiyon olsun ve

$$\phi(\infty)=\infty,\ \lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z}>0,$$

şartları sağlansın. ϕ fonksiyonunun tersini ψ ile gösterelim.

Γ üzerinde tanımlı ω ağırlık fonksiyonuna karşılık T çemberi üzerinde $\omega_0(t):=\omega(\psi(t)),\ t\in T$ biçiminde tanımlı ω_0 ağırlık fonksiyonunu tanımlayalım.

$f\in L_M(\Gamma,\omega)$ fonksiyonu için

$$f_0(t):=f(\psi(t)),\ t\in T$$

biçiminde fonksiyon tanımlayalım.

Eğer Γ Dini-düzgün eğri ise bu durumda öyle c_6 ve c_7 sabitleri var ki,

$$0\le c_6\le|\psi'(t)|\le c_7<\infty,\ |t|>1 \tag{4.49}$$

şartı sağlanır (Warschawskii, 1932) .

Eğer Γ Dini-düzgün eğri ise bu durumda (4.49) gereğince $f_0\in L_M(T,\omega_0)$ ve $f\in L_M(\Gamma,\omega)$ olur.

Γ düzeltilebilir eğri ve $f\in L^1(\Gamma)$ olsun. Bu durumda

$$f^+(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(s)}{s-z}ds,\ z\in G$$

biçiminde tanımlanan f^+ fonksiyonu G bölgesinde analitik olur. Not edelim ki eğer $0<\alpha_M,\ \beta_M<1,\ \omega\in A_{\frac{1}{\alpha_M}}(\Gamma)\cap A_{\frac{1}{\beta_M}}(\Gamma)$ ve $f\in L_M(\Gamma,\omega)$ ise [16, Israfilov, R. Akgün, 2006] çalışması gereğince $f^+\in E_M(G,\omega)$ olur.

Kabul edelimki $\phi_k(z),\ k=0,1,2,...$ polinomları G bölgesine göre Faber polinomlardır. $G\cup\Gamma$ ile ilişkili $\phi_k(z),\ k=0,1,2,...$ Faber polinomları

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi_k(z)}{t^{k+1}},\ \ z\in G,\ \ t\in D^- \qquad (4.50)$$

açılımından tanımlanır ve aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Suetin, 1998, sayfa 33-48):

$$\phi_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{t^k\psi'(t)}{\psi(t)-z}dt,\quad z\in G, \qquad (4.51)$$

$$\phi_k(z)=\phi^k(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{\phi^k(s)}{s-z}dt,\quad z\in G^-$$

$f\in E_M(G,\omega)$ olsun. $f\ \in E^1(G)$ olduğuna göre her bir $z\in G$ için

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(s)ds}{s-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f(\psi(t))\psi'(t)}{\psi(t)-z}dt$$

olur.

. Son eşitlik ve (4.50) açılımı kullanılırsa f fonksiyonu ile ilgili

$$f(z)\sim\sum_{i=0}^{\infty}a_i(f)\phi_i(z),\ \ z\in G \qquad (4.52)$$

seri açılımını elde ederiz, burada,

$$a_i(f):=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f(\psi(t))}{t^{i+1}}dt,\ \ i=0,1,2,...$$

(4.52) serisine f fonksiyonun *Faber serisi* adı verilir $a_i(f)$ katsaylarına ise f fonksiyonunun *Faber katsayları* dır

Kabul edelimki (4.52) serisi $f\in E_M(G,\omega)$ fonksiyonunun Faber serisidir.. f fonksiyonu için $\Lambda=\{\lambda_{i,j}\}_{i,j=0}^{j,\infty}$ üçgen matrislerini kullanarak,

$$U_n(z,f)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_{i,n}a_i(f)\phi_i(z)$$

lineer toplamlarını tanımlayalım

(4.52) serisinin $n.$ kısmi toplamları ve k. mertebeden Zygmund toplamları sırasıyla

$$S_n(z,f)=\sum_{k=0}^{n}a_k(f)\phi_k(z),$$
$$Z_n^k(z,f)=\sum_{i=0}^{n}\left(1-\frac{i^k}{(n+1)^k}\right)a_k(f)\phi_i(z).$$

olarak tanımlanır.

Γ Dini-düzgün eğri olsun. f_0^+ fonksiyonunun T üzerinde açısal sınır değerlerini kullanarak, $f\in L_M(\Gamma,\omega)$ fonksiyonunun $k=1,2,3,...$ için $k.$ düzgünlük modülünü

$$\Omega_{\Gamma,M,\omega}^k(f,\delta):=\Omega_{M,\omega_0}^k(f_0^+,\delta),\ \delta>0$$

biçiminde tanımlayalım

Teorem 4.9.. Γ Dini-düzgün eğri, $L_M(\Gamma)$ refleksiv Orlicz uzayı ve $\omega\in A_{1/\alpha_M}\cap A_{1/\beta_M}$ olsun. Eğer toplanabilme metodu Λ matrisi ile $(b_{k,M})$ veya $(b_{k,M})$ şartını sağlıyorsa, bu durumda $f\in E_M(G,\omega)$ fonksiyonu için

$$\left\|f(\cdot)-U_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(\Gamma,\omega)}\le c_8\Omega_{\Gamma,M,\omega}^k\left(f,\frac{1}{n+1}\right)\qquad(4.53)$$

değerlendirmesi geçerlidir, burada c_8 sabiti n den bağımsızdır.

İspat:. $f\in L_M(\mathrm{G},\omega)$ olsun. Teorem 3.5 gereğince $A:E_M(D,\omega)\to E_M(G,\omega)$ operatörü bire-bir ve ortendir ve $A(f_0^+)=f$ olur. f fonksiyonu için

$$f(z)\sim\sum_{m=0}^{\infty}a_m(f)\phi_m(z).$$

Faber serisi geçerlidir. [16, D. M. Israfilov, R. Akgün, 2006] çalışmasındaki Lemma 1 kullanılırsa $f_0^+ \in E_M(D,\omega)$ elde edilir. Bu durumda f_0^+ fonksiyonu için

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)w^m.$$

açılımı doğrudur. Not edelim ki $f_0^+ \in E^1(D)$ dir. Bu durumda sınır fonksiyon $f_0^+ \in L_M(T,\omega)$ dir. (Duren, 1970, Teorem 3.4) çalışması gereğince f_0^+ sınır fonksiyonu için

$$f_0^+(w) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)e^{imw}.$$

Fourier seri açılımı elde edilir. Teorem 3.4 gereğince $A: E_M(D,\omega) \to E_M(G,\omega)$ operatörü sınırlıdır. Eğer $A: E_M(D,\omega) \to E_M(G,\omega)$ operatörünün sınırlı olduğu ve Teorem 4.7 dikkate alınırsa, bu durumda aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
&\left\| f - U_n(\cdot, f) \right\|_{L_M(T,\omega)} \\
&= \left\| A(f_0^+) - A\left(U_n(\cdot, f_0^+)\right) \right\|_{L_M(\Gamma,\omega)} \le c_{47} \left\| f_0^+ - U_n(\cdot, f_0^+) \right\|_{L_M(T,\omega_0)} \\
&\le c_{48} \Omega_{M,\omega_0}^k \left(\frac{1}{n}, f_0^+ \right) = c_{49} \Omega_{\Gamma,M,\omega}^k \left(\frac{1}{n}, f \right).
\end{aligned}$$

.

(4.53) eşitsizliği ispat edildi.

Sonuç 4.1. Teorem 4.5 ve Teorem 4.7 de elde edlen sonuçlar k. mertebeden Zygmund- Riesz toplamları içinde geçerlidir

Uyarı 4.1. $L_M(T,\omega)$, $1 < \alpha_M \le \beta_M < 1$, şartını sağlayan α_M ve β_M Boyd indisleri ile ağırlıklı Orlicz uzayı ve $\omega \in A_{1/\alpha_M} \cap A_{1/\beta_M}$ olsun. Bu durumda (Israfilov., A, Guven,2006 çalışmasındaki Teorem 4 gereğince $f \in L_M(T,\omega)$ fonksiyonu için

$$\Omega^{k}_{M,\omega}\left(\frac{1}{n},f\right)\le c_{50}n^{-2k}\left\{E_0(f)_{M,\omega}+\sum_{m=1}^{n}m^{2k-1}E_m(f)_{M,\omega}\right\} \qquad (4.54)$$

eşitsizliği geçerlidir, burada c_{50} sabiti n 'den bağımsızdır. Eğer Λ matrisi yardımıyla oluşan toplanabilme metodu $(b_{k,M})$ veya $(b^{*}_{k,M})$ şarını sağlıyorsa, bu durumda $f\in L_M(T,\omega)$ fonksiyonu için (4.40) bağıntısı ve (4.54) eşitsizliğinden

$$\left\|f-U_n(\cdot,f)\right\|_{L_M(T,\omega)}\le c_{51}n^{-2k}\left\{E_0(f)_{M,\omega}+\sum_{m=1}^{n}m^{2k-1}E_m(f)_{M,\omega}\right\} \qquad (4.55)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.55) eşitsizliği k. mertebeden Zygmund-Riesz toplamları için de geçerlidir. Not edelim ki, (4.55) eşitsizliği $L_p(T),\,1<p<\infty$ uzayı için [40, M.F. Timan 1965] çalışmasında ispat edilmiştir.

4.4. Musielak-Orlicz Uzaylarında De la Vallée-Poussin Ortalamalarının Eşzamanlı Yaklaşım Özellikleri

Musielak – Orlicz uzaylarında fonksiyonların polinomsal yaklaşım problemlerinin uzun bir geçmişi bulunkaktadır. Öteleme değişmezliği özelliğini sağlayan Orlicz uzayları, Musielak – Orlicz uzaylarının özel bir halidir. Bu uzaylarda fonksiyonların polinomsal yaklaşım problemleri çeşitli matematikçiler tarafından Cohen , 1978; Garidi , 1991; Israfilov, Guven , 2006; Israfilov, Oktay, Akgun , 2005; Israfilov, Akgün, 2006 ; Jafarov, 2011; Jafarov, 2016; Jafarov, 2012; Jafarov, 2013; Kokilashvili, 1965; Kokilashvili, 1966; Ponomarenko, 1966; Ramazanov, 1984; Tsyganok, 1966; Yıldırır, 2012; Yıldırır, Israfilov, 2010) çalışmalarında incelenmiştir. Genel olarak Musielak – Orlicz uzaylarında, $L^{p(x)}$ değişken üslü Lebesgue uzaylarında görülebileceği gibi öteleme değişmezliği özelliği sağlanmayabilir. $L^{p(x)}$ uzayında trigonometrik polinomsal yaklaşımla ilgili çeşitli eşitsizlikler Akgün , 2011; Akgün, Kokilasvili , 2012; Guven , Israfilov , 2010; Israfilov,Kokilashvili, 2007; Sharapudinov, 2007; Sharapudinov, 2013; çalışmalarında elde edilmiştir. Not edelm ki, Musielak – Orlicz uzayındaki öteleme değişmezliği hipotezi altında Musielak'in 1997 çalışmasında bazı trigonometrik yaklaşım eşitsizlikleri elde edilmiştir. .

Bu bölümde Musielak – Orlicz uzaylarında De la Vallée – Poussin ortalamalarının eş zamanlı yaklaşım özellikleri l ci mertebeden düzgünlük modülü cinsinden incelenmektedir.. Ayrıca, Musielak – Orlicz uzaylarında düzgünlük modülü n ci kısmi toplamlar ve De la Vallée – Poussin ortalamaları cinsinden alttan ve üstten değerlendirilmektedir. Farklı uzaylardaki benzer problemler birçok yazarlar tarafından incelenmiştir (örneğin bakınız, Gavriljuk, 1963; Guven, Israfilov,, 2009; Israfilov, Testici, 2018; Israfilov, Testici, 2018; Kokilashvili, Samko , 2009; Ovsi le Yu, Serdyuk, 2011; Prestin, 1987; Stechkin, 1961; Stechkin, 1978; Sharapudinov, 2014; Serdyuk, Ovsı le Yu, Musienko, 2012; Simonov, Tikhonov , 2006; Simonov, Tikhonov, 2008; Timan, 1965; Timan , 1963; Yıldırır, Israfilov, 2011; Vallée- Poussin Ch La 1918)

Teeorem 4.10. $f \in W_\varphi^r \ (r \in \mathbb{N}),\ \varphi \in \Phi(N, DL),\ m = 0,1,2,...,r$ *ve* $n \in \mathbb{N}$ *olsun. Bu durumda*

$$\left\| f^{(m)} - V_n^{(m)}(f) \right\|_\varphi \le \frac{c_{31}}{n^{r-m}} \Omega_\varphi^l \left(\frac{1}{n}, f^{(r)} \right)$$

değerlendirmesi doğrudur, burada $c_{31} > 0$ *sabiti* n *' den bağımsızdır.*

İspat: $f \in W_\varphi^r$ ve $T_n^* \in \Pi_n \ (n = 0,1,2,...)$ ise f fonksiyonuna en iyi yaklaşım veren polinom olsun. Aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left\| f^{(m)} - V_n^{(m)}(f) \right\|_\varphi$$

$$\le \left\| f^{(m)} - (T_n^*)^{(m)} \right\|_\varphi + \left\| (T_n^*)^{(m)} - V_n^{(m)}(f) \right\|_\varphi \qquad (4.56)$$

Teorem 3.7 ve 3.8 gereğince

$$\left\| f^{(m)} - (T_n^*)^{(m)} \right\|_\varphi \le c_{36} E_n (f^{(m)})_\varphi$$

$$\le \frac{c_{37}}{n^{r-m}} E_n (f^{(r)})_\varphi \le \frac{c_{38}}{n^{r-m}} \Omega_\varphi^l \left(\frac{1}{n}, f^{(r)} \right). \qquad (4.57)$$

değerlendirmesi elde edilir**.**

Diğer taraftan Lemma 3.2, Teorem 3.8 ve Sonuç 3.1 kullanılırsa,

$$\left\| (T_n^*)^{(m)} - V_n^{(m)}(f) \right\|_\varphi$$
$$\le c_{39} n^m \left\{ \left\| V_n(f) - f \right\|_\varphi + \left\| f - T_n^* \right\|_\varphi \right\}$$

$$\leq c_{40} n^{m} \left\{ \frac{c_{16}}{n^{r}} \Omega_{\varphi}^{l}\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right) + E_{n}(f)_{\varphi.} \right\}$$

$$\leq \frac{c_{41}}{n^{r-m}} \Omega_{\varphi}^{l}\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right). \qquad (4.58)$$

elde edilir.

(4.56) , (4.57) ve (4.58) değerlendirmeleri bize

$$\left\| f^{(m)} - T_{n}^{(m)} \right\|_{\varphi} \leq \frac{c_{42}}{n^{r-m}} \Omega_{\varphi}^{l}\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right)$$

eşitsizliğini verir.

Teorem 4.10 ispat edildi.

Teorem4.11. *$f \in L^{\varphi}$, $\varphi \in \Phi(N, DL)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:*

1.

$$c_{32}\Omega_{\varphi}^{l}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \left(n^{-2l} \left\| V_{n}^{(2l)}(f) \right\|_{\varphi} + \left\| f - V_{n}(f) \right\|_{\varphi} \right)$$

$$\leq c_{33}\Omega_{\varphi}^{l}\left(\frac{1}{n}, f\right), \qquad (4.59)$$

burada c_{32} ve c_{33} sabitleri n ' den bağımsızdılar,

2.

$$c_{34}\Omega_{\varphi}^{l}\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \left(n^{-2l} \left\| S_{n}^{(2l)}(f) \right\|_{\varphi} + \left\| f - S_{n}(f) \right\|_{\varphi} \right)$$

$$\leq c_{35}\Omega_{\varphi}^{l}\left(\frac{1}{n}, f\right), \qquad (4.60)$$

burada c_{34} ve c_{35} sabitleri n ' den bağımsızdılar.

İspat: (Akgün, Yıldırır, 2018) çalışması gereğince

$$\Omega_{\varphi}^{l}\left(\frac{1}{n},V_n(f)\right)\le c_{43}n^{-2l}\left\|V_n^{(2l)}(f)\right\|_{\varphi} \qquad (4.61)$$

eşitsizliği geçerlidir. $\Omega_{\varphi}^{l}(\frac{1}{n},f)$ düzgünlük modülünün özelliği ve (4.61) dikkate alınırsa,

$$\Omega_{\varphi}^{l}\left(\frac{1}{n},f\right)$$
$$\le\left(\Omega_{\varphi}^{l}(\frac{1}{n},f-V_n(f))+\Omega_{\varphi}^{l}(\frac{1}{n},V_n(f))\right)$$
$$\le c_{44}\left(\left\|f-V_n(f)\right\|_{\varphi}+n^{-2l}\left\|V_n^{(2l)}(f)\right\|_{\varphi}\right). \qquad (4.62)$$

elde edilir.

$\Omega_{M,w}^{l}(\cdot,f)$ düzgünlük modülünü alttan değerlenırelim. Teorem 3.7 ve (Akgün, Yıldırır, 2018) çalışması gereğince aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$E_n(f)_{\varphi}\le c_{45}\Omega_{\varphi}^{l}\left(\frac{1}{n+1},f\right), \qquad (4.63)$$

$$n^{-2l}\left\|V_n^{(2l)}(f)\right\|_{\varphi}\le c_{46}\Omega_{\varphi}^{l}\left(\frac{1}{n+1},f\right). \qquad (4.64)$$

$V_n(f,x)$, (3.6) serisinin Vallée – Poussin toplamı ve $T_n^{*}\in\Pi_n$ ise f fonksiyonunun L_{φ} uzayında en iyi polinomsal yaklaşımı olsun, yani $\left\|f-T_n^{*}\right\|_{\varphi}=E_n(f)_{\varphi}$ dir. Bu durumda aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|f-V_n(f)\right\|_{\varphi}$$
$$\le\left\|f-T_n^{*}\right\|_{\varphi}+\left\|T_n^{*}-V_n(f)\right\|_{\varphi}$$
$$\le c_{47}E_n(f)_{\varphi}+\left\|V_n(T_n^{*}-f,\cdot)\right\|_{\varphi}$$
$$\le c_{48}E_n(f)_{\varphi}. \qquad (4.65)$$

(4.63) , (4.64) ve (4.65) değerlendirmeleri kullanılırsa,

$$n^{-2l}\left\|V_n^{(2l)}(f)\right\|_{\varphi}+\|f-V_n(f)\|_{\varphi}$$

$$\leq c_{49}\left(\Omega_{\varphi}^{l}\left(\frac{1}{n+1},V_n(f)\right)+E_n(f)_{\varphi}\right)$$

$$\leq c_{50}\left(\Omega_{\varphi}^{l}(\frac{1}{n+1},f)+\Omega_{\varphi}^{l}(\frac{1}{n+1},f-V_n(f))+E_n(f)_{\varphi}\right)$$

$$\leq c_{51}\Omega_{\varphi}^{l}(\frac{1}{n+1},f). \tag{4.66}$$

bulunur.

(4.62) ve (4.66) değerlendirmeleri dikkate alınırsa, Teorem 4.11'in (4.59) değerlendirilmesi elde edilir.

(Akgün, Yıldırır, 2018) çalışması gereğince öyle $c_{52}>0$ sabiti var ki

$$\|f-S_n(f)\|_{\varphi}\leq c_{52}E_n(f)_{\varphi}. \tag{4.67}$$

eşitsizliği sağlanır.

(4.67) eşitsizliği kullanılarak, (4.60) değerlendirilmesinin ispatı (4.59) değerlendirilmesinin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.11 ispat edildi.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1.Sonuçlar

Bu tez çalışmasında ilk önce Orlicz uzayında fonksiyonun Fourier serisinin Zygmund toplamları ile yaklaşımı incelenir. Elde edilen sonuçlar en iyi yaklaşım ve düzgünlük modülü cinsinden verilmektedir. İlave olarak sürekli fonksiyonlar uzayında fonksiyonların Fourier serilerinin Zygmund toplamları ile Lebesgue uzayında fonksiyonun en iyi yaklaşımı arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca, sürekli fonksiyonlar uzayında fonksiyonun düzgünlük modülü, fonksiyonun Fourier serilerinin Zygmund toplamlarının yaklaşımı ile üstten değerlendirilmektedir. Bu çalışmada ağırlıklı Orlicz uzaylarında Fourier serilerinin lineer ortalamaları ile fonksiyonların yaklaşımı incelenir. Bu sonuç, kompleks düzlemin basit bağlantılı bölgesinde tanımlanan ağırlıklı Smirnov-Orlicz sınıflarındaki fonksiyonların Faber serilerinin liner ortalamaları ile yaklaşımına uygulanmaktadır. Musielak-Orlicz uzaylarında Fourier serilerinin De la Vallée-Poussin ortalamalarının eşzamanlı yaklaşım özellikleri düzgünlük modülü cinsinden incelenir. Düzgünlük modülü cinsinden eşzamanlı yaklaşımın düz teoremi ispat edilir. Ayrıca Musielak-Orlicz uzaylarında düzgünlük modülü, kısmi toplamlar ve De la Vallée-Poussin ortalamaları cinsinden aşağıdan ve yukarıdan değerlendirilmektedir.

5.2. Öneriler

Fonksiyonun Fourier serisinin Zygmund toplamları ile yaklaşımı diğer uzaylarda (Morrey, Değişken üslü Lebesgue uzaylarında, Lorentz uzaylarında) incelenebilir. Elde edilen sonuçlar daha genel uzaylarda en iyi yaklaşım ve düzgünlük modülü cinsinden incelenebilir. Sürekli fonksiyonlar uzayında fonksiyonların Fourier serilerinin Zygmund toplamları ile başka uzaylarda fonksiyonun en iyi yaklaşımı arasındaki ilişki incelenebilir. Ayrıca, sürekli fonksiyonlar uzayında fonksiyonun düzgünlük modülü, fonksiyonun Fourier serilerinin Zygmund toplamlarının yaklaşımı ile alttan değerlendirilebilir. Başka uzaylarında Fourier serilerinin lineer ortalamaları ile fonksiyonların yaklaşımı incelenebilir. Elde edilen sonuç, kompleks düzlemin basit bağlantılı bölgesinde tanımlanan diğer fonksiyon sınıflarındaki (örneğin, Morrey-Smirnov), fonksiyonların Faber serilerinin liner ortalamaları ile yaklaşımına uygulanabilir. Diğer fonksiyon uzaylarında Fourier serilerinin De la Vallée-Poussin ortalamalarının eşzamanlı yaklaşım özellikleri düzgünlük modülü cinsinden incelenebilir. Düzgünlük modülü cinsinden eşzamanlı yaklaşımın düz teoremi diğer uzaylarda ispat edilebir. Ayrıca diğer uzaylarda düzgünlük modülü, kısmi toplamlar ve De la Vallée-Poussin ortalamaları cinsinden aşağıdan ve yukarıdan değerlendirilebilir.

KAYNAKLAR

Akhiezer, N.I., 1965. Lectures on Approximation Theory, Nauka, Moscow, (Russian)

Akgün R, 2011. Inequalities for one sided approximation in Orlicz spaces, Hacet. J. Math. Stat. 40, 231-240.

Akgün A, 2011.Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth, Georgian Math. J. 18, 203-235

Akgün R, Kokilasdhvili V, 2012. Refined estimates of trigonometric approximation for functions with generalized derivatives in weighted variable exponent Lebesgue spaces, Georgian Math. J. 19, 611-626.

Akgun, R.,Israfilov, D. M., 2008. Approximation and moduli of functional orders in Smirnov Orlicz classes, Glas. Mat. Ser.III 48 (63) (1), 121-136.

Akgun, R. and Israfilov, D. M.,2010. Simultaneous and converse approximation theorems in weighted Orlicz spaces, Bull. Belg. Math. Soc. Simon. Stevin. 17 , 13-28.

Akgün R, Yildirir Y.E, 2018, Convolution and Jackson inequalities in Musielak – Orlicz spaces, Turkish Journal of Mathematics, 42, 2166-2185.

Alaouia M. K, Nabilah T, Altanjia M, 2014. On some new non – linear diffusionmodels for the image filtering, Appl. Anal. 93, 269-280

Andrievskii, V.V., Blatt, H. P., 2002, Discrepancy of Signed Measures and Polynomial Approximation, Springer-Verlag New York.

Andrievskii, V.V., Belyi, V.I., Dzydyk, V.K., 1995, Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Plane Atlanta: World Federation Publ. Comp., 199.

Bernstein, S. N., 1912. Sur les recherches récentes erlatives à la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes, Proceedings of 5th International Mathematical Congress Vol. 1, 256-266.

Bary, N. K., 1964. A Treatise on Trigonometric Series, Fizmatgiz, Moscow, 1961 (Russian).- English transl.: Pergamon Press, MacMillan, New York.

Baskan, T, 1998. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, 3. Baskı Vipaş, 360.s.

Böttcher, A., Karlovich, Yu. I., 1997. Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Teoplitz Operators, Birkhäuser

Chebyshev, P. L., 1854. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, Mémoires de l' Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg, 7, 539-568.

Cao J. D, 1997. Stechkin inequalities for summability methods, Internat. J. Math. Sci., 20 (1), 93-100.

Chikina, T.S., 2013. Approximtion by Zygmund –Riesz means in the $p-$variation metric, Anal.. Math. 39 (1), ,29-44.

Chen Y, Levine S, Rao M, 2006. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, SIAM J. Appl. Math. 66, 1383-1406.

Cohen F, 1978, On the degree of approximationof a function by the partial sums o its Fourier series, T Am. Math. Soc. 235, 35-74.

Duren P. L, 1970. Theory of H^p spaces, Academic Press.

De Vore R.A., 1986, Approximation by Rational Functions, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (4), 601-604.

De Vore, R.A. and Lorentz, G. G., 1993, Constructive Approximation, Springer Berlin Heidelberg New York.

Depree, J.D., Gehring, C.C., 1969. Elements of Comlex Analysis, Addison Wesley Publishing Company, USA.

Dzyadyk, V., 1977. Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials, Nauka, Moscow.

++ Dzyadyk, V. K., Shevchuk, I. A., 2009. Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomils, Brill Academic Publishers.

Daniela, N., Kokilashvili V. and Ts. Tsanava., 2014. Two weight uniform boundedness criteria for the Cesáro means with variable order, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 165, 137-141

Favard, J., 1936, Application de la formüle sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques on presquepériodiques, Matematick Tidskrift K B.H. 4, 81-94.

Favard, J., 1937. Sur les meilleurs procédés d' approx,imation de certaines classes des fonctions par des polynômes trigonométriques, Bulletin des Sciences Mathematiques, 61, 209-224, 243-256.

Favard, J., 1949. Sur l'approximation dans les espaces vectoriels, Anali di Matematica Pure ed Applicable., (4) 24, 259-291.

Garidi W , 1991. On approximation by polynomials in Orlicz spaces, Approx. Thery Appl. 7, 97-110.

Gavriljuk V. T, 1963. Linear summability methods for Fourier series and best approximation, Ukrain. Math. Zh. 15 (4), 412-418 (in Russian).

Gaier, L., 1987, On Complex Approximation, Birkhause, Boston, Stut Basel.
properties of singular integrals, Izv.Vuzov.Matematica, 4, 89-95. (Rusca).

Guven, A., Israfilov, D. M., 2009. Approximation by mans of Fourier trigonometric series in weighted Orlicz spaces, Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyundshang), 19 (2) , 283-295.

Guven, A, Israfilov D. M., 2010. Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$, J. Math. Inequal. 4, 285-299.

Gabidzashvili M., Ts. Tsanava, Ts., 2009. On the estimates of the deviation by Cesaro and Abel-Poussion means in weighted Lorentz spaces, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 149 , 11-113.

Giannetti F, Passarelli di Napoli A, 2013. Regularity results for a new class of functionals with nonstandard growth conditions, J. Differ. Equations 254, 1280-1305.

Goluzin, G. M., 1968. Geometric Theory of Functions of a Complex Variable, Translation of Mathematical Monographs vol. 26, R.I. AMS, Providence.

Gwiazda A. S, 2014. Nonlinier parabolie problems in Musielak – Orlicz spaces, Nonlinear Anal. 98, 48-65.

Harjulehto P, Hastö, P, Latvala V, Toivanen O, 2013. Critical variable exponent functionals in image restoration, Appl. Math. Lett. 26, 56-60.

Il'yasov, N. A., 1986.. Approximation of periodic functions by Zygmund means, Mat. Zametki, 39 (3), 367-382.)in Russian).

Il'yasov,N. A., 2001. On the order of approximation in the uniformmetric by the Fejer-Zygmund means on the classes $E_p\left[\varepsilon\right]$, Mat. Zametki, 69 (5), 679-687. (in Russian).

Israfilov D. M. and Akgün R, 2006. Approximation in weighted Smirnov-Orlicz classes, Journal of Mathematics of Kyoto University, 46 (4), 755-770.

Israfilov, D. M. and Guven A., 2006. Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces, Studia Math. 174 (2), 147-168.

Israfilov D. M, Koilashvili V, Samko S, 2007. Approximation in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with variable exponents, Proc, A. Razmadze Math. Inst. 143, 25-35.

Israfilov D. M, Oktay B and Akgün R, 2005. Approximation in Smirnov- Orlicz classes, Glas. Math. Ser. III 40 (60) , 87-102.

Israfilov D. M, Testici A, 2018. Simultaneous approximation in Lebesgue spaces with variable exponent, Proceedings of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 44 (1) , 3-18.

Jackson, D., 1911, Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganzerationale Functionen gegebenen Grades und trigonometrichen Summen gegeneber Ordnung, Diss., Göttingem.

Jackson, D., 1912. On approximation by trigonometricsums and polynomials, Transaction American Mathematica Society, 13, 491-515.

Jackson, D., 1924. Ageneral class of problemsin approximation, American Journal. Of Mathematics, 46, 215-234.

Jackson, D., 1930. The Theory of Approximation, Amer. Math. Soc., New York.

Jackson, D., 1941. Fourier series and ortogonal polynomials, Carus Mathematical Monographs.

Jafarov S. Z, 2011. Approximation by rational functions in Smirnov- Orlicz classes , J. Math. Anal. Appl. 379, 870-877.

Jafarov S. Z, 2012. On approximation in weighted Smirnov- Orlicz classes , Complex Var. Elliptic Equ. 57 (5), 567-577.

Jafarov S. Z, 2013. Approximation of conjugate functions by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces, J. Math. Ineq. 7,(2). 271-281.

Jafarov S. Z, 2015. Linear methids of summing Fourier series and approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces, Ukr. Math. J. 66(10), 1509-1518.

Jafarov S. Z , 2006.Approximation of functions by De la Vallee- Poussin sums in weighted Orlicz spaces, Arab. J. Math. 5, 125-137.

Jafarov, S.Z., 2020. Estimates of the approximation by Zygmund sums in Morrey-Smirnov classes of analytic functions, Azerbaijan Journal of Mathematics, 10 (2), 110-124.

Jafarov, S..Z., 2020. Approximation by means of Fourier trigonometric series in Lebesgue spaces with variable exponent, Kazakh Mathematical Journal, **20** : 3, 57-68.

Jafarov, S. Z., 2021. Simultaneous approximation properties of De La Vallee- Poussin means in weighted Orlicz spaces, Journal of Classical Analysis, **17** (2), 189-198

Jafarov S.Z. ,2018 Linear methods of summing Fourier series and approximation in weighted Orlicz spaces, Turkish Journal of Mathematics, 42 , 2916-2925.

Jafarov S. Z, , 2020 Estimates of the approximation by Zygmund sums in Morrey-Smirnov classes of analytic functions, Azerbaijan Journal of Mathematics, 10 , 110-124.

Kaminska A.W, 2014. Existence result fort he motion of several rigid bodies in an incompressible non- Newtonian fluid with growht conditions in Orlicz spaces, Nonlinearity , 27 , 685-716.

Karaoğlu, B., 2006. Fizik ve mühendislikte Matematik Yöntemleri, Seçkin Yayınları, Ankara, 320s.

Kreyszıg, E. 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley& Sons, New York

Karlovich, A.Yu., 1996. Algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients on reflexive Orlicz spaces, Mathematische Nachrichten, 179, 187-222.

Kolmogorov, A.N., 1935. Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Fonktionen, Ann. of Mathem. 36, 521-526.

Krasnoselskii, M. A., Rutıckıı, YA. B. 1961. Convex Functions and Orlicz Spaces, P. Norrdhoff Ltd., Groningen.

Kövari, T. and Pommerenkei C., 1967. On Faber polynomials and Faber expansions, Mathematische Zeitschrift 99, 193-206.

Kokilashvili V.M, ,Samko S.G, 2009. Operators of harmonic analysis in weighted spaces with non-standart growth, J. Math. Anal. Appl. 352 , 15-34.

Kokilashvili V. M, 1965. An inverse theorem of the constructive theory of functions in Orlicz spaces, Soob. Akad. Nauk Gruzin SSR, 37, 263-270 (in Russian).

Kokilashvili V. M, 1966.On approximation of periodic functions in Orlicz spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom Phys. 77-80.

Kokilashvili, V., 1968. On analytic functions of Smirnov-Orlicz classes, Studia Mathematica, 31,43-59.

Kokilashvili V. M., 1968. On approximation of periodic functions, Trudy Tbiliss. Mat. Inst. im. Razmadze Akad. Nauk Grusin. SSR 34, 51-31 (in Russian).

Kokilashvili V. and Tsanava,Ts.,2010. On the norm estimate of deviation by linear summability means and extension of the Bernstein inequality, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 154, 144-146.

Kokilashvili V., Ts. Tsanava., 2010. Approximation by linear summabality means in weighted variable exponent Lebesgue spaces, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 154, 147-150.

Konyushov, A. A., 1958. Best approximation by trigonometric polynomials and Fourier coefficients, Mat. Sb. [Math. USSR-Sb.], 44 (1), 53-84.

Lebesgue, H., 1898. Sur l'approximation des fonctions, Bulletin Science Mathematica, 2 , 22, 278-287.

Lorentz, G.G., 1966, Approximation of Functions, New York, Chicago, San Francisco, Toronto, London.

Maddox, I. J. 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge Unıversity Press, Cambridge, Londonand New York

Matuszewska, W. and Orlıcz, W. 1960. On certain properties of φ -functions, Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques, 8-7, 439–443.

++ Mhaskar, H. N., 1996. Introduction to the Theory of Weighted Polynomial Approximation, Series in Approximation and Decompositions 7, World Sci., River Edge, NJ.

Musielak J, Approximation in modular function spaces, Dedicated to Roman Taberski on the occasion of his 70 th birthday, Funct. Approximateo Comment Mat. 25 (1997), 25, 45-57.

Musayev, B., 2000, Fonksiyonel Analiz, Balcı yayınları, 470 S.

Natanson, I. P., 1949, Constructive theory of functions, Moskow-Leningrad:

Nasibov F, 2013. Reel değişkenli fonksiyonlar teorisi, Nobel Yayınları, 583 s.

Nikolski, S.M.,1948. O linear methods of summations of Fourierv series, Akad. Nauk SSSR ser. Math. 12, 259-278. (in Russian).

Nikolski, S. M., 1946. Approximation of functions by trigonometric polynomials in the mean, Izvestia Akademia Nauk SSSR, Ser. Mat., 10, 207-256. (Russian).

Ok J, 2016.Gradient estimates for elliptic equations with $L^{p(\cdot)}$ $LogL$ growth, Cale Var Partial Dif. 55, 1-30.

Ovsi le.Yu, Serdyuk A. S, 2011. Approximation of continuous periodic functions by de la Vallée Poussin sums, Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. 8 (1), 151-16

Prestin J, 1987. On the approximation by de la Vallée Poussin sums and interpolatory polynomials in Lipschitz norms, Anal. Math. 14, 251-259

Ponomarenko V.G, 1966. Approximation of periodic functions in a Orlicz space, Sibirsk. Math. J. 7, 1337-1346 (in Russian)

Pommerenke C., 1992, Boundar behaviour of conformal maps, Springer-Verlag, 1992.

Rao, M. M. and Ren, Z. D., 1991. Theory of Orlicz Spaces, Marcel Dekker, 449pp.

Ramazanov, A-R. K., 1984. On approximation by poynomials and rational functions in Orlicz spaces, Anal. Math. 10, 117-132.

Ryan, R., 1963. Conjugate functions in Orlicz spaces, Pacific J. Math. 13, 1271-1377.

Sarıgöl, M. A. Jafarov, S., 2014. Analiz I-II, Nokta Yayın Evi, 440s.

Stechkin, S. B., 1951. On the order of approximation of continuous function, Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Ser. Mat. [Math. USSSR-Izv.], 15 (3), 219-242.

Stechkin, S.B., 1961. The approximation of periodic functionsby Fejer sums, Trudy Math. Inst. Steklov, G2, 48-60. (in Russian).

Stechkin S. B, 1978. On the approximation of periodic functions by de la ValléePoussin sums, Anal. Math. 4, 61-74.

Sharapudinov I. I, 2007. Some problems in approximation theory in the spaces $L^{p(x)}(E)$ Anal. Math. 33, 135-153)in Russian).

Sharapudinov I. I, 2013. Approximation of functions in $L_{2\pi}^{p(x)}$ by trigonometric polynomials, Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Mat. 77, 197-224 (in Russian)

Sharapudinov I. I, 2014. On direct and inverse theorems of approximation theory in variable Lebesgue space and Sobolev spaces, Azerbaijan Journal of Math. 4 (1), 55-72.

Serdyuk A.S, Ovsi le Yu, Musienko A.P, 2012. Approximation of classes of analytic functions by de la Vallée-Poussin sums in uniform metric, Rend. Mat. Appl. 32, 1-15.

Simonov B. V and Tikhonov S.Yu, On embeddings of function classes deÖned by constructive characteristics, Approximation and probability (Bedlewo, Poland 2004), Banach Center Publ. vol. 72, Polish Acad. Sci., Warsaw 2006, pp.285-307.

Simonov B. V, Tikhonov S.Yu, 2008. Embedding theorems in the constructive theory of approximations, Mat. Sb. 199 (9), 107-148 (in Russian); translation in Sb. Math. 199 (9-10), 1367-1407.

Suetin, P.K., 1998. Series of Faber popynomials, Gordon and Breach Science Publishers, 1998.

Stepanets, A. I., 1995. Clasification and Approximation of Periodic Functions, Naukova Dumka, Kiev, 1987. (Russian). English transl.: Kluwer, Dordrecht.

Timan, A. F., 1994, Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. Dover Publications. Russian original, Moscow: Fizmatgiz, 1960. First English edition, Oxford: Pergamon Press, 1963.

Timan, A. F., and Timan, M.F., 1950. Generalized modulus of continuity and best approximation in the mean, Doklad Akademia Nauk SSSR 71, 17-20.

Timan, M. F., 1958. Converse Theorems of the Constructive Theory of Functions, Matematicheskii Sbornik, 46, 125-132.

Timan,M. F., 1962. Certain linear processes of summation of Fourier series and best approximation, Dokl. Akad. Nauk SSSR [Soviet Math. Dokl.] 145 (4), 74-743.

Timan, M. F., 1966. On Jackson's Theorem in spaces, Ukrainian Mathematica Journal, 18, 134-137.

Timan,M. F., 1965. Best approximation of a function and linear methods of summing Fourier series (Russian). Izv. Nauk SSSR Ser. Mat. 20, 587-604.

Timan, M. F., 1962. Some linear summation processes for Fourier series and best approximation. Dokl. Akad. Nauk SSSR 145, 741-743.

Timan, M. F., 1965. Best approximation of a function and linear methods of summing Fourier series. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser: Math. 29, 587- 604.

Timan, M. F., 1968. The approximation of continuous periodic functions by linear operators which are constructed on the basis of their Fourier series. Dokl. Akad. Nauk SSSR 181, 1339-1342.

Tsyganok I. I, 1966. A generalization of a therem of Jackson, Mat. Sb. 71 , 257-260)in Russian

Trigub, R.M., 1965. Constructive characteristics of certain classes of functions, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. [Math. USSSR-Izv.], 29 (3), 615-630.

Trigub, R.M. and Belinsky, E.S., 2004. Fourier Analysis and Approximation of Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

Vallée-Poussin, Ch. J. La., 1910. Sur les polynomes d' approximation et la représentation approchée d'un angle, Bulletin Academie Science Belgique, 12, 808-844.

Vallée-Poussin, Ch. J. La., 1911. Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe, Buletin de l'Academie Royali des Sciences de Belgique Clesse des Sciences, 199-211.

Vallée Poussin Ch La , 1918. Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable reelle par des expressions d'ordre donné, Comptes dendus de l'Académie des Sciences, 166 (4) , 799-802

Vallée-Poussin, Ch. J. La., 1919, Leçons sur l'approximation des fonctions d'unevariable reele, Paris, Gautier-Villars.

Volısivets, S. S., 2021.Modified modulus of smoothness and approximation ,in weighted Lorentz spaces by Borel and Euler means, Probl. Anal. Issues Anal. 10(28) (2), 87-100.

Warschawskii S. E, 1932. Über das Ranverhalten der Ableitung der Abbildungs-functionen bei konformer Abbildung. Math. Z., 35, 321-456.

Weierstrass, K., 1885. Über die analytische Darsdellung sogenannter willkürlicher Funktionen einerieelen Veränderlichen, Sitzungsberichte der Akad. zu. Berlin, 633-639, 789-805.

Wunsch, A.D. 2005. Complex Variableswith Applications, Third Edition, Addison Wesley Publishing Company, USA, 696 s.

Yildirir Y. E, Israfilov D. M, Simultaneous and converse approximation theorems in weighted Lebesgue spaces, Math. Inequal. Appl. 14 (2) (2011), 359-371.

Yildirir, Y. E, 2012. Approximation of periodic functions in weighted Orlicz spaces, Glas. Mat.47, 401-413.

Yildirir Y. E, Israfilov, D. M, 2010. The properties of convolution type transforms in weighted Orlicz spaces, Glas. Mat.45, 461-474.

Zill, D. G. and Shanahan, P.D. 2003. A First Caurse in Comlex Analysis with Applications, Jones and Bartlett Publishers, USA, 449s.

Zhuk, V.V, 1982. Approximation of periodic functions, Leningrad State Univ., Leningrad (in Russian).

Zygmund, A, 1959. Trigonometric series, 2nd ed. Voll I.II, Cambridge University

Press, Ca

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Ferat ELİŞ

EĞİTİM

Derece Adı , İlçe , İl	Bitirme Yılı
Lise : Mezopotamya Anadolu Lisesi / Kızıltepe / Mardin	2016
Üniversite : Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi / Erzincan	2022
Yüksek Lisans : Muş Alparslan Üniversitesi / Muş	2024