



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN
BAZI ANALİTİK ÇÖZÜMLERİNİN
İNCELENMESİ

Özlem OKUMUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2023
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN
BAZI ANALİTİK ÇÖZÜMLERİNİN
İNCELENMESİ

Özlem OKUMUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Zeliha KÖRPİNAR

Temmuz-2023
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

Özlem OKUMUŞ tarafından hazırlanan “Kesirli Bir Diferansiyel Denklemin Bazı Analitik Çözümlerinin İncelenmesi” adlı tez çalışması 20/06/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Doç. Dr. Erdal KORKMAZ
Muş Alparslan Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Danışman

Doç. Dr. Zeliha KÖRPINAR
Muş Alparslan Üniversitesi,
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi,
İşletme Bölümü

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Hatice Yalman KOŞUNALP
Bandırma Onyedli Eylül Üniversitesi,
Gönen Meslek Yüksekokulu, Muhasebe ve
Vergi Uygulamaları Pr.

.....

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu/...../..... Tarih ve/..... nolu kararı
ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Özlem OKUMUŞ

Temmuz 2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN BAZI ANALİTİK ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

Özlem OKUMUŞ

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Zeliha KÖRPİNAR

Bu çalışmada bazı kesirli diferansiyel denklemlerin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla analitik çözümleri elde edildi. Bulunan çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri Matlab programı kullanılarak çizildi. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde ρ -Laplace dönüşümü kullanılmasının avantajları incelendi.

2023, 34 Sayfa

Anahtar Kelimeler: ρ -Laplace Dönüşümü, Caputo Kesirli Türev Operatörü, Gamma Fonksiyonu, Boussinesq Denklem Sistemi.

ABSTRACT

MASTER THESIS

INVESTIGATION OF THE SOME ANALYTICAL SOLUTIONS OF A FRACTIONAL DIFFERENTIAL

Özlem OKUMUŞ

**Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics**

Advisor: Assoc. Prof.Dr.Zeliha KÖRPINAR

In this study, analytical solutions are obtained by using ρ -Laplace transformation with the help of caputo derivative operator. 2- dimensional and 3- dimensional graphs are drawn for the obtained solutions by using Matlab program. The advantages of using the ρ -Laplace transform in solving fractional differential equations are examined.

2023, 34 Pages

Keywords: ρ -Laplace Transform, Caputo Fractional Derivative Operator, Gamma Function, Boussinesq System of Equations.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın her aşamasında bilgisinden her zaman faydalandığım, çalışmamın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli vaktini ayıran saygı değer hocam Doç. Dr. Zeliha KÖRPINAR'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca hayatım boyunca beni destekleyen, haklarını asla ödeyemeyeceğim kıymetli annem ve babama, benden desteklerini esirgemeyen değerli eşim Fatih OKUMUŞ'a teşekkür ederim.

Özlem OKUMUŞ
MUŞ-2023



İÇİNDEKİLER

| | |
|---|------|
| ÖZET | iv |
| ABSTRACT..... | v |
| ÖNSÖZ | vi |
| İÇİNDEKİLER | vii |
| SİMGELER ve KISALTMALAR..... | viii |
| ŞEKİLLER DİZİNİ..... | ix |
| ÇİZELGELER DİZİNİ..... | x |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI | 4 |
| 2.1. Temel Tanım ve Teoremler | 4 |
| 2.2. Bir fonksiyonun ρ -Laplace Dönüşümünün Varlığının Koşulları | 7 |
| 2.3.Genelleştirilmiş Kesirli İntegrallerin ve Türevlerin ρ -Laplace Dönüşümleri..... | 10 |
| 3. ρ -LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ | 12 |
| 4. ρ -LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ KULLANILARAK KESİRLİ TÜREVLİ LİNEER OLMAYAN BOUSSINESQ DENKLEM SİSTEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNÜN ELDE EDİLMESİ..... | 14 |
| 5. GRAFİKSEL İFADELER VE FİZİKSEL YORUMLAR | 23 |
| 6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER..... | 29 |
| 6.1 Sonuçlar | 29 |
| KAYNAKLAR | 31 |

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

| | |
|------------|----------------------------|
| Γ | : Gamma |
| α | : Alfa |
| ∂ | : Kısmi Türev |
| $!$ | : Faktöriyel |
| Σ | : Sigma |
| λ | : Lagrange Çarpımı |
| L | : Laplace dönüşümü |
| L_ρ | : ρ -Laplace dönüşümü |
| N | : Doğal Sayılar Kümesi |
| R | : Reel Sayılar Kümesi |

Kısaltmalar

| | |
|--|---|
| $\rho - LD$: ρ -Laplace dönüşümü | |
| LFFPE | : Yerel Kesirli Fokker-Planck Denklemi |
| RDTM | : Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Metodu |
| LFSEM | : Yerel Kesirli Seri Genişletme Yöntemi |

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 5.1.** Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u ve v yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri. ($\alpha = 0.25$) 24
- Şekil 5.2.** Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u ve v yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri. ($\alpha = 0.50$) 25
- Şekil 5.3.** Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u ve v yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri. ($\alpha = 0.75$) 25
- Şekil 5.4.** Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u ve v yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri. ($\alpha = 0.95$) 26
- Şekil 5.5.** Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u ve v yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri. ($\alpha = 1$) 26
- Şekil 5.6.** Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin u ve v gerçek çözümlerinin yüzey grafikleri. ($\alpha = 1$) (Özkan ve Özkan, 2022) 27
- Şekil 5.7.** Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u yaklaşık çözümlerinin α 'nın farklı değerleri için oluşturulan iki boyutlu grafikleri. ($t=1$) ($\alpha=0.25, \alpha=0.5, \alpha=0.75, \alpha=0.95, \alpha=1$) 27
- Şekil 5.8.** Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen v yaklaşık çözümlerinin α 'nın farklı değerleri için oluşturulan iki boyutlu grafikleri. ($t=1$) ($\alpha=0.25, \alpha=0.5, \alpha=0.75, \alpha=0.95, \alpha=1$) 28

ÇİZELGELER DİZİNİ

- Çizelge 5.1.**Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u çözümlerinin ve gerçek çözümünün sayısal değerleri ve bu değerlerden elde edilen mutlak hata değerleri..... 23
- Çizelge 5.2.**Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen v çözümlerinin ve gerçek çözümünün sayısal değerleri ve bu değerlerden elde edilen mutlak hata değerleri..... 24



1. GİRİŞ

Kesirli analiz, klasik diferansiyelin geliştirilmesi ve keyfi tamsayı olmayan düzene entegre edilmesidir. Kesirli analizin avantajı, kesirli türev ve kesirli integralin yerel olmamasıdır. Son zamanlarda, fizik (Morales-Delgado ve ark., 2018; Hristov, 2019), mekanik bilimler (Hristov, 2019; Sheikh ve ark., 2017), mühendislik ve biyoloji (Iyiola ve Zaman, 2014) gibi pek çok alanlardaki birçok olay kesirli türevler kullanılarak modellenmektedir. Kesirli hesap, biyolojik yapıdan etkilenmiş bellek ya da harcanan zaman gibi belirli fiziksel özellikleri tanımlamak için mükemmel bir araçtır. Kesirli difüzyon denklemleri fizikte olduğu kadar biyolojide de kesirli hesaplamaların uygulamaları açısından önemli bir yere sahiptir (Hristov, 2017). Podlubny (1998) yaptığı çalışmada, kesirli operatörlerin kullanımıyla difüzyon denklemini oluşturmuştur. Biyolojik bir topluluğun uzamsal-zamansal dinamiklerinin, difüzyon-reaksiyon denklemleriyle niteliksel olarak tanımlanabileceği yaygın olarak kabul edilmektedir (Khan ve ark., 2011). İstisnai bir durum, popülasyon dinamiklerinin karmaşık tanımlamaları olmasına rağmen birkaç durumda nispeten kolay tek tür modelleri sunmasıdır. Bu anlamda bazı bilim adamları (El-Sayed ve ark., 2019.) biyolojik popülasyonların uzaysal difüzyonunda ortaya çıkan tek tür parabolik doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemleri inceledi. Biyolojik modellerde, biyolojik hücre hacmi sabit tutulur ve hücre büyümesi, yapısal bozulma hızı şeklini alan seyreltme ile modellenir (Sjöberg ve ark., 2009). Adriaen ve Max Planck, istatistiksel fiziğin yaygın olarak kullanılan klasik denklemlerinden biri olan parçacığın konum ve hızının olasılık yoğunluk fonksiyonunun tome evrimini açıklamak için Fokker-Planck denklemini tanıttı. Fokker-Planck denklemleri, astrofizik problemleri, biyolojik uygulamalar, kimyasal fizik, ekonomi, gazlarda elektron gevşemesi, çekirdeklenme, optik kararsızlık, polimer dinamiği, kuantum optiği, reaktif sistemler ve çok sayıda başka uygulama dahil olmak üzere çeşitli alanlarda ortaya çıkar. Fokker-Planck denklemi zamana bağlıdır ve sonlu bir hacim şemasıyla ayrıştırılır (Farm ve ark., 2004). Santos ve arkadaşları (2018) Fokker-Planck denklemini tekil olmayan çekirdekle bir kesirli türev operatörü kullanarak incelemişlerdir. Singh ve arkadaşları (2020) Cantor kümesinde yerel kesirli Fokker-Planck denkleminin (LFFPE) çözümünü hesaplamış ve yerel nitelikte kesirli türev operatörüne sahip diferansiyel denklemleri çözmek için çok başarılı ve basit olan iki RDTM ve LFSEM tekniğinin önemli

özelliklerini göstermişlerdir. Zhou ve ark., (2017) Fokker–Planck denklemiyle nöral tümör ve ilaç molekülleri arasında incelenen sinyal iletim sorununu incelemişlerdir.

Son zamanlarda birçok farklı alanda yapılan araştırmalarda farklı kesirli türev ve integral operatörleri kullanılarak kesirli hesaplamalar yapılmıştır (Gómez-Aguilar ve ark., 2015; Prajapati ve ark., 2016; Kachhia ve Atangana, 2021; Saad ve ark., 2018). Caputo kesirli türev (Caputo, 1969), Caputo–Fabrizio kesirli türev (Caputo ve ark., 2015), Atangana–Baleanu kesirli türev (Atangana ve Baleanu, 2016), Atangana–Koca kesirli türev (Atangana ve Koca, 2017), Fraktal kesirli türev (Atangana, 2007) bu kesirli türev operatörlerinden bazılarıdır. Singh ve arkadaşları (2020) bazı olayların dinamik davranışlarını analiz etmek için Atangana–Baleanu türevi kullanarak doğrusal olmayan bir denklem sistemini incelemişlerdir. Saad ve arkadaşları (2017) zaman-uzay kesirli gaz dinamiği denklemi için q-homotopi analiz yöntemi kullanarak grafiksel çözümler elde etmişlerdir. Veerasha ve arkadaşları (2020) tarafından kesirli genelleştirilmiş Fisher–Kolmogorov denklemi ile Mittag-Leffler çekirdeği için analitik yaklaşım elde edilmiştir.

Kesirli hesaplamaların en önemli avantajlarından biri diferansiyel denklemleri çözerken çeşitli kesirli diferansiyel operatörlerle çalışmaktır. Kesirli diferansiyel denklemlerin analitik ve sayısal çözümlerini bulmak için çeşitli yöntemler vardır (Kachhia, 2020; Prakash and Kumar, 2018; Solís-Pérez ve ark., 2018; Atangana ve Owolabi, 2018; Daftardar-Gejji ve Jafari, 2006; Saad ve ark., 2020).

Genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi Katungampola (2020) tarafından tanıtılmıştır. Sene ve Gomez-Aguilar (2019), Caputo genelleştirilmiş kesirli türevle açıklanan elektrik devrelerinin analitik çözümlerini araştırmışlardır. Sene (2019), belirli genelleştirilmiş kesirli difüzyon denklemlerinin analitik ve sayısal çözümlerini elde etmiştir. Sene ve Gomez-Aguilar (2019), genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi ile tanımlanan kesirli kütle yayı damper sistemini incelemişlerdir. Bhangale ve Kachhia, Caputo genelleştirilmiş kesirli türev ile plazma ve dielektrik ortamda kesirli elektromanyetik dalgaları incelemişlerdir (Bhangale ve Kachhia, 2020).

Genelleştirilmiş Caputo kesirli türevle kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Son zamanlarda, Kachhiave Prajapoti(2020), bileşik kesirli türev operatörü ile doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için genelleştirilmiş yinelemeli yöntemi kullanmışlardır. Sene ve Fall (2019), genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi ile kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için homotopi pertürbasyon yöntemini geliştirmişlerdir. Sene (2019),

genelleştirilmiş Caputo kesirli türevi ile belirli genelleştirilmiş kesirli difüzyon modellerini çözmek için sayısal şemalar önermiştir. Son zamanlarda, Fahd ve Abdeljawad (2018), genelleştirilmiş Caputo kesirli türevlerinin Laplace dönüşümlerini incelemiştir.

Bu çalışmada bazı kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini Genelleştirilmiş Caputo kesirli türevleri kullanılarak ρ -Laplace dönüşümü yardımıyla yeni bir iteratif yöntemle elde edilmiştir. Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sistemi üzerinde çalışılmıştır. Bu denklem sistemi şu şekilde tanımlanabilir.

Kesirli Türevli Lineer Olmayan Boussinesq Denklem Sistemi

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \beta \frac{\partial}{\partial x} (u^2) - \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

denklem sistemidir. ($0 < \alpha \leq 1$) (Özkan ve Özkan, 2022).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1

Gama fonksiyonu, $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-1} du \quad (2.1)$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır (Kannappan 2009). Gama fonksiyonunun bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$1) \Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!$$

$$2) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1$$

Tanım 2.2

Caputo türevi, m pozitif tam sayı olmak üzere $m - 1 < \alpha < m$ için

$${}_a D_z^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^z (z - t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \quad (2.2)$$

Şeklindedir (Kılbas ve ark., 2006; Podlubny, 1999).

$f(z)$ fonksiyonunun normal koşullar altında $\alpha \rightarrow m$ için Caputo türevi, $f(z)$ fonksiyonunun m . basamaktan klasik türevine eşittir.

Caputo türevi için,

$$D^\alpha x^\beta = 0, \beta < \alpha$$

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} x^{\beta-\alpha}, \beta \geq \alpha.$$

özellikleri geçerlidir.

Tanım 2.3

α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali,

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, x > 0$$

$$J^0 f(x) = f(x).$$

olarak tanımlanır (Podlubny et al. 2009).

$$J^0 f(x) = f(x)$$

$$1. J^\alpha J^\beta f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x)$$

$$2. J^\alpha J^\beta f(x) = J^\beta J^\alpha f(x)$$

$$3. J^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}$$

$$4. D_t^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} x^{\alpha-\gamma}$$

$m - 1 < \alpha \leq m, m \in N$ olmak üzere

$$D_*^\alpha J^\alpha f(x) = f(x)$$

$$J^\alpha D_*^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!}, \quad x > 0$$

Tanım 2.4

Sürekli bir $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\rho > 0, t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere f fonksiyonunun α mertebesinde genelleştirilmiş kesirli integrali

$$(I^{\alpha,\rho} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(\frac{t^\rho - s^\rho}{\rho} \right)^{\alpha-1} \frac{f(s) ds}{s^{1-\rho}} \quad (2.3)$$

şeklindedir. Burada $\Gamma(\bullet)$ Gama Fonksiyonunu gösterir (Bhangale ve ark., 2020).

Tanım 2.5

Sürekli bir $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\rho > 0, t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere α mertebesinde sol genelleştirilmiş kesirli türevi

$$(D^{\alpha,\rho} f)(t) = (I^{1-\alpha,\rho} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_0^t \left(\frac{t^\rho - s^\rho}{\rho} \right)^{-\alpha} f(s) \frac{ds}{s^{1-\rho}} \quad (2.4)$$

şeklindedir (Bhangale ve ark., 2020).

Tanım 2.6

Sürekli bir $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\rho > 0, t > 0, \gamma = t^{1-\rho} \frac{d}{dt}$ ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere α mertebesinde Caputo genelleştirilmiş kesirli türevi

$$({}^{GC} D^{\alpha,\rho} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left(\frac{t^\rho - s^\rho}{\rho} \right)^{-\alpha} \gamma^n f(s) \frac{ds}{s^{1-\rho}} \quad (2.5)$$

şeklindedir (Bhangale ve ark., 2020).

Tanım 2.7

$t > 0$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü limit mevcut iken

$$L\{f(t), s\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-st} f(t) dt \quad (s > 0) \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır. (2.6) integrali limit mevcut iken yakınsaktır, limit mevcut değilse integral ıraksaktır denir ve f için tanımlanan Laplace dönüşümü yoktur.

Tanım 2.8

Sürekli bir $f: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ρ -Laplace dönüşümü

$$L_{\rho}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} (e)^{-s \frac{t^{\rho}}{\rho}} f(t) \frac{dt}{t^{1-\rho}}, \quad \rho > 0, s \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır. Sürekli bir f fonksiyonunun Caputo Genelleştirilmiş kesirli türevinin ρ -Laplace dönüşümü

$$L_{\rho}\{(D^{\alpha, \rho} f)(t)\} = s^{\alpha} L_{\rho}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} (I^{\alpha, \rho} \gamma^n f)(0) \quad (2.8)$$

şeklinde (Bhangale ve ark., 2020).

Tanım 2.9

Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu, $\alpha > 0, \beta > 0$ ve $E_{\alpha}(z) = E_{\alpha, 1}(z)$ olmak üzere

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.9)$$

şeklinde (Bhangale ve ark., 2020).

Tanım 2.10

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ρ -Laplace dönüşümü mevcut olan gerçek değerli bir fonksiyon olsun. Klasik Laplace dönüşümü ile ρ -Laplace dönüşümü arasındaki ilişki

$$L_{\rho}\{f(t)\}(s) = L\left\{f(\rho t)^{\frac{1}{\rho}}\right\}(s) \quad (2.10)$$

şeklinde (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

Tanım 2.11

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f fonksiyon, $e^{\frac{ct^{\rho}}{\rho}}$ ρ - üstel durumda $t \geq T$ için M, c ve T negatif olmayan sabitler olmak üzere $|f(t)| \leq M e^{\frac{ct^{\rho}}{\rho}}$ dir (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

2.2 Bir Fonksiyonun ρ -Laplace Dönüşümünün Varlığının Koşulları

Teorem 2.1

$f: [0, \infty) \rightarrow R$, f parçalı sürekli bir fonksiyon ve ρ -üstel durumda ($f(t) = e^{c \frac{t^\rho}{\rho}}$) olmak üzere $s > c$ için ρ -Laplace dönüşümü mevcuttur. (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

Teorem 2.2

$f: [0, \infty) \rightarrow R$ 'nin ρ -Laplace dönüşümü $s > c_1$ için ve $g: [0, \infty) \rightarrow R$ 'nin ρ -Laplace dönüşümü $s > c_2$ için mevcutsa o halde herhangi bir a ve b sabiti için $af + bg$ 'nin ρ -Laplace dönüşümü mevcuttur.

$s > \max\{c_1, c_2\}$ olmak üzere

$$L_\rho\{af(t) + bg(t)\}(s) = aL_\rho\{f(t)\}(s) + bL_\rho\{g(t)\}(s) \quad (2.11)$$

olur (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

Lemma 2.1

Bazı temel fonksiyonların ρ -Laplace dönüşümlerinden bazıları

1. $L_\rho\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. $L_\rho\{t^p\}(s) = \rho^\rho \frac{\Gamma(1+\frac{p}{\rho})}{s^{1+\frac{p}{\rho}}}, \quad p \in R \text{ ve } s > 0$
3. $L_\rho\left\{e^{\lambda \frac{t^\rho}{\rho}}\right\}(s) = \frac{1}{s-\lambda}, \quad s > \lambda$

olarak verilir (Abdeljawad, 2015).

Teorem 2.3

$f(t)$ fonksiyonu sürekli ve $e^{c \frac{t^\rho}{\rho}}$ üstel durumda olsun. Öyle ki $\gamma f(t)$ her sonlu $[0, T]$ aralığında parçalı sürekli olsun.

$$L_\rho\{\gamma f(t)\}(s) = sL_\rho\{f(t)\}(s) - f(0) \quad (2.12)$$

olur (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

İspat: $t_1, t_2, \dots, t_n [0, T]$ aralığında γf 'nin süreksiz olduğu noktalar olsun. O halde,

$$\int_0^T e^{-s \frac{t^\rho}{\rho}} (\gamma f)(t) \frac{dt}{t^{1-\rho}} = \int_0^T e^{-s \frac{t^\rho}{\rho}} f'(t) dt$$

$$\int_0^{t_1} e^{-s \frac{t^\rho}{\rho}} f'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-s \frac{t^\rho}{\rho}} f'(t) dt + \dots + \int_{t_n}^T e^{-s \frac{t^\rho}{\rho}} f'(t) dt.$$

Şimdi parçalara göre integral yazalım,

$$\int_0^T e^{-s\frac{t^\rho}{\rho}} (\gamma f)(t) \frac{dt}{t^{1-\rho}} = e^{-s\frac{t^\rho}{\rho}} f(t) \Big|_0^{t_1} + e^{-s\frac{t^\rho}{\rho}} f(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \dots + e^{-s\frac{t^\rho}{\rho}} f(t) \Big|_{t_n}^T$$

$$+ s \left[\int_0^{t_1} e^{-s\frac{t^\rho}{\rho}} f(t) \frac{dt}{t^{1-\rho}} + \int_{t_1}^{t_2} e^{-s\frac{t^\rho}{\rho}} f(t) \frac{dt}{t^{1-\rho}} + \dots + \int_{t_n}^T e^{-s\frac{t^\rho}{\rho}} f(t) \frac{dt}{t^{1-\rho}} \right]$$

Böylece sahip olduğumuz

$$\int_0^T e^{-s\frac{t^\rho}{\rho}} (\gamma f)(t) \frac{dt}{t^{1-\rho}} = e^{-s\frac{T^\rho}{\rho}} f(T) - f(0) + s \left(\int_0^T e^{-s\frac{t^\rho}{\rho}} f(t) \frac{dt}{t^{1-\rho}} \right)$$

denkleminde her iki tarafın limiti $T \rightarrow \infty$ alınarak sonuç elde edilir (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

Sonuç 2.1

$f \in C_{\gamma}^{n-1}[0, \infty)$ öyle ki $\gamma^i f, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ve $e^{\frac{c t^\rho}{\rho}}$ da ρ -üstel durumda olsun. $\gamma^n f, [0, T]$ aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon ise $s > c$ için $\gamma^n f(t)$ 'nin ρ -Laplace dönüşümü mevcuttur (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

$$L_{\rho}\{(\gamma^n f)(t)\}(s) = s^n L_{\rho}\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} (\gamma^k f)(0) \quad (2.13)$$

Tanım 2.12

Eğers $\alpha \geq 0$ için $F(s) = L\{f(t)\}$ ve $G(s) = L\{g(t)\}$ dönüşümlerinin her ikisi de var ise bu durumda

$$H(s) = F(s).G(s) = L\{h(t)\}, \quad s > \alpha$$

şeklinde olur. Burada $h(t)$ fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu denir ve

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan ifadeye konvolüsyon integrali denir (Şan, 2013).

Genelleştirilmiş kesirli integrallerin ve türevlerin ρ -Laplace dönüşümlerini bulmak için ρ -konvülyasyon integralini tanımlamamız gerekir.

Tanım 2.13

f ve g , her $[0, T]$ aralığında parçalı sürekli ve üstel iki fonksiyon olsun. f ve g nin ρ -konvülyasyonu şu şekilde tanımlanır;

$$(f *_{\rho} g)(t) = \int_0^t f\left((t^{\rho} - \tau^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}\right) g(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} \quad (2.15)$$

İki fonksiyonun ρ -konvülyasyon değışmeliliği aşağıdaki tanımda verilmiştir (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

Teorem 2.4

f ve g , her $[0, T]$ aralığında parçalı sũrekli ve ũstel iki fonksiyon olsun. O halde

$$f *_{\rho} g = g *_{\rho} f \quad (2.16)$$

olur (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

İspat:

$$\begin{aligned} (f *_{\rho} g)(t) &= \int_0^t f\left((t^{\rho} - \tau^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}\right) g(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} \\ &= - \int_t^0 f(u) g\left((t^{\rho} - u^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}\right) \frac{du}{u^{1-\rho}}, \quad (u^{\rho} = t^{\rho} - \tau^{\rho}) \\ &= \int_0^t f(u) g\left((t^{\rho} - u^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}\right) \frac{du}{u^{1-\rho}} \\ &= (g *_{\rho} f)(t). \end{aligned}$$

ρ -konvülyasyon integralinin ρ -Laplace dũnüşũmũnũ aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem 2.5

f ve g , her $[0, T]$ aralığında parçalı sũrekli ve $e^{c\frac{t^{\rho}}{\rho}}$ ũstel durumda olan iki fonksiyon olsun. $s > c$ olmak ũzere

$$L_{\rho}\{f *_{\rho} g\} = L_{\rho}\{f\}L_{\rho}\{g\} \quad (2.17)$$

dir (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

İspat:

$$\begin{aligned} L_{\rho}\{f\}L_{\rho}\{g\} &= \int_0^{\infty} e^{-s\frac{t^{\rho}}{\rho}} f(t) \frac{dt}{t^{1-\rho}} \int_0^{\infty} e^{-s\frac{u^{\rho}}{\rho}} g(u) \frac{du}{u^{1-\rho}} \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s\frac{t^{\rho}+u^{\rho}}{\rho}} f(t) g(u) \frac{dt}{t^{1-\rho}} \frac{du}{u^{1-\rho}}, \quad (\tau^{\rho} = t^{\rho} + u^{\rho}) \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s\frac{\tau^{\rho}}{\rho}} f\left((\tau^{\rho} - u^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}\right) g(u) \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}} \frac{du}{u^{1-\rho}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} e^{-s\frac{\tau^\rho}{\rho}} \left[\int_0^{\tau} f\left((\tau^\rho - u^\rho)^{\frac{1}{\rho}}\right) g(u) \frac{du}{u^{1-\rho}} \right] \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}, \\
&= \int_0^{\infty} e^{-s\frac{\tau^\rho}{\rho}} \left[\int_0^{\tau} f\left((\tau^\rho - u^\rho)^{\frac{1}{\rho}}\right) g(u) \frac{du}{u^{1-\rho}} \right] \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}}, \\
&= L_\rho\{f *_\rho g\}
\end{aligned}$$

2.3 Genelleştirilmiş Kesirli İntegrallerin ve Türevlerin ρ -Laplace Dönüşümleri

Teorem 2.6 (Genelleştirilmiş Kesirli İntegralin ρ -Laplace Dönüşümü)

$a > 0$ ve her $[0, t]$ aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon $f = e^{\frac{ct^\rho}{\rho}}$ olsun.

$s > c$ olmak üzere

$$L_\rho\{({}_0I^{\alpha,\rho} f)(t)\} = s^{-\alpha} L_\rho\{f(t)\} \quad (2.18)$$

dir (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

Teorem 2.7 (Genelleştirilmiş Kesirli Türevin ρ -Laplace Dönüşümü)

Herhangi bir $a > 0$ ve $I^{n-k-\alpha,\rho} f$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için $\alpha > 0$ ve $f \in AC_Y^n[0, \alpha]$ olmak üzere $f = e^{\frac{ct^\rho}{\rho}}$ olsun. O halde $s > c$ olmak üzere,

$$L_\rho\{({}_0D^{\alpha,\rho} f)(t)\} = s^\alpha L_\rho\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} ({}_\alpha I^{n-k-\alpha} f)(0) \quad (2.19)$$

dir (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

Sonuç 2.2 (Genelleştirilmiş Sol Caputo Kesirli Türevinin ρ -Laplace Dönüşümü)

$a > 0$ ve $\gamma^k f$, $k = 0, 1, \dots, n$ için $f \in AC_Y^n[0, \alpha]$ ve $f = e^{\frac{ct^\rho}{\rho}}$ olsun. O halde $s > c$ olmak üzere,

$$L_\rho\{({}_0^C D^{\alpha,\rho} f)(t)\}(s) = s^\alpha \left[L_\rho\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{-k-1} (\gamma^k f)(0) \right] \quad (2.20)$$

dir (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

Tanım 2.14 (Mittag-Leffler Fonksiyonları)

Mittag-Leffler fonksiyonları kesirli diferansiyel yönteminde önemli bir yere sahiptir. Üstel fonksiyon e^z , tamsayı dereceden diferansiyel denklemler teorisinde oldukça önemlidir. Onun bir parametrelili genişletilmiş şekli

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad (2.21)$$

formülü ile Mittag-Leffler tarafından verilmiştir (Çavuş, 2006). İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad (2.22)$$

şeklinde verilir (Çavuş, 2006). (2.21) ve (2.22) denklemlerinden açıkça görülmektedir ki,

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$$

Bazı Mittag-Leffler fonksiyonlarının ρ -Laplace dönüşümleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Lemma 2.2

$\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ ve $\frac{\lambda}{s^\alpha} < 1$. O halde

$$L_{\rho} \left\{ E_{\alpha} \left(\lambda \left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right) \right\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \lambda} \quad (2.23)$$

$$L_{\rho} \left\{ \left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(\lambda \left(\frac{t^{\rho}}{\rho} \right)^{\alpha} \right) \right\} = \frac{1}{s^{\alpha} - \lambda} \quad (2.24)$$

eşitlikleri sağlanır (Jarad ve Abdeljawad, 2018).

3.ρ-LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

f bir fonksiyon olmak üzere L ve N sırasıyla u 'nun doğrusal ve doğrusal olmayan fonksiyonu olsun. Aşağıda verilen fonksiyonel denklemi düşünelim.

$$u = f + L(u) + N(u) \quad (3.1)$$

(3.1) denkleminin çözümünün

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

formunda olduğunu varsayalım.

$$u_0 = f,$$

$$u_1 = L(u_0) + N(u_0),$$

$$u_{m+1} = L(u_m) + \left(N \left(\sum_{k=0}^m u_k(r) \right) - N \left(\sum_{k=0}^{m-1} u_k(r) \right) \right), \quad m = 1, 2, \dots$$

lineer ve lineer olmayan fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade edebiliriz;

$$L(u) = L \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} L(u_k),$$

$$N(u) = N \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) = N(u_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ N \left(\sum_{j=0}^k u_j \right) - N \left(\sum_{j=0}^{k-1} u_j \right) \right\}$$

O halde (3.1)'in çözümünü şu şekilde elde ederiz:

$$u = f + \sum_{k=0}^{\infty} L(u_k) + N(u_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ N \left(\sum_{j=0}^k u_j \right) - N \left(\sum_{j=0}^{k-1} u_j \right) \right\}$$

Genelleştirilmiş Caputo kesirli türevli başlangıç değer problemini şu şekilde düşünelim:

$${}^{GC}D_t^{\alpha, \rho} u(x, t) + Nu(x, t) = f(x, t) \quad (3.2)$$

$u(x, 0) = g(x)$ başlangıç koşulu olmak üzere burada N doğrusal olmayan bir operatördür.

Şimdi (3.2)'nin her iki tarafına da ρ -Laplace dönüşümü uygulayarak şunu elde ederiz

$$L_{\rho}({}^{GC}D_t^{\alpha, \rho} u(x, t) + Nu(x, t)) = L_{\rho}(f(x, t))$$

(2.7)'i kullanarak,

$$s^{\alpha} \bar{u}(x, s) - s^{\alpha-1} u(x, 0) = L_{\rho}(f(x, t)) - L_{\rho}(Nu(x, t)) \quad (3.3)$$

elde ederiz. (3.3)'ü sadeleştirerek,

$$\bar{u}(x, s) = \frac{u(x, 0)}{s} + s^{-\alpha} L_{\rho}(f(x, t)) - s^{-\alpha} L_{\rho}(Nu(x, t)) \quad (3.4)$$

(3.4)'ün her iki tarafının ters ρ -Laplace dönüşümünü alarak,

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_{\rho}^{-1} \left(s^{-\alpha} L_{\rho}(f(x, t)) \right) - L_{\rho}^{-1} \left(s^{-\alpha} L_{\rho}(Nu(x, t)) \right)$$

elde ederiz.

$$f = u(x, t),$$

$$L(u) = L_{\rho}^{-1} \left(s^{-\alpha} L_{\rho}(f(x, t)) \right),$$

$$N(u) = -L_{\rho}^{-1} \left(s^{-\alpha} L_{\rho}(Nu(x, t)) \right).$$

alınarak (3.2)'nin çözümü

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = f + L \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) + N \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) \quad (3.5)$$

şeklinde elde edilir.

4.ρ-LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ KULLANILARAK KESİRLİ TÜREVLİ LİNEER OLMAYAN BOUSSİNESQ DENKLEM SİSTEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNÜN ELDE EDİLMESİ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \beta \frac{\partial}{\partial x}(u^2) - \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sistemidir. ($0 < \alpha \leq 1$) (Özkan ve Özkan, 2022).

Bu denklem sisteminin gerçek çözümü

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \tan^2 \left[\frac{1}{4} \left(x - \frac{t^\alpha}{2\alpha} \right) \right] \\ v(x, t) &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \tan^2 \left[\frac{1}{4} \left(x - \frac{t^\alpha}{2\alpha} \right) \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

dir (Özkan ve Özkan, 2022). O halde $\beta = 1, \gamma = -1$ alalım.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

ve başlangıç şartı

$$\left\{ \begin{aligned} u(x, 0) &= -\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \tan^2 \frac{x}{4} \\ v(x, 0) &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \tan^2 \frac{x}{4} \right) \end{aligned} \right. \quad (4.4)$$

olsun (Özkan ve Özkan, 2022).

(4.3) denklemsistemine (4.4) başlangıç şartı kullanılarak ρ -Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\left. \begin{aligned} s^\alpha \bar{u}(x, t) - s^{\alpha-1} u(x, 0) + L_\rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 0 \\ s^\alpha \bar{v}(x, t) - s^{\alpha-1} v(x, 0) + L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x}(u^2) \right) + L_\rho \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} s^\alpha \bar{u}(x, t) &= s^{\alpha-1} u(x, 0) - L_\rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ s^\alpha \bar{v}(x, t) &= s^{\alpha-1} v(x, 0) - L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x}(u^2) \right) - L_\rho \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

elde edilir. Burada

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(x, t) &= \frac{1}{s} u(x, 0) - \frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \bar{v}(x, t) &= \frac{1}{s} v(x, 0) - \frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} (u^2) \right) - \frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

bulunur. (4.7) denklem sisteminin her iki tarafına da ters ρ -Laplace dönüşümünü uygulayarak

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x, 0) - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ v(x, t) &= v(x, 0) - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} (u^2) \right) \right) - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \right) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \tan^2 \frac{x}{4} - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ v(x, t) &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \tan^2 \frac{x}{4} \right] - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} (u^2) \right) \right) - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

elde edilir.

ρ -Laplace dönüşümü algoritmasını ve

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \tan^2 \frac{x}{4} \\ v_0 &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \tan^2 \frac{x}{4} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

başlangıç şartlarını kullanarak, (4.8) denklem sisteminin lineer kısımları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left. \begin{aligned} L(v_k) &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \right) \\ L(u_k) &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} (u_k^2) \right) \right) - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial^3 u_k}{\partial x^3} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

$k \geq 0$

(4.9) başlangıç şartları $k = 0$ için (4.10) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L(v_0) &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \tan^2 \frac{x}{4} \right) \right) \right) \right) \\ &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{3}{64} 2 \tan \frac{x}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{4} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{3}{32} \tan \frac{x}{4} + \frac{3}{32} \tan^3 \frac{x}{4} \right) \right) \\
&= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} \left(\frac{3}{32s} \tan \frac{x}{4} + \frac{3}{32s} \tan^3 \frac{x}{4} \right) \right) \\
&= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^{\alpha+1}} \frac{3}{32} \tan \frac{x}{4} + \frac{1}{s^{\alpha+1}} \frac{3}{32} \tan^3 \frac{x}{4} \right) \\
&= -\frac{3}{32} \tan \frac{x}{4} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha - \frac{3}{32} \tan^3 \frac{x}{4} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \\
u_1 &= - \left(\frac{3}{32} \tan \frac{x}{4} + \frac{3}{32} \tan^3 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha . \\
L(u_0) &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \tan^2 \frac{x}{4} \right)^2 \right) \right) \\
&\quad - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(-\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \tan^2 \frac{x}{4} \right) \right) \right) \\
&= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{64} + \frac{3}{32} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{9}{64} \tan^4 \frac{x}{4} \right) \right) \right) \\
&\quad - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(-\frac{3}{32} \tan \frac{x}{4} - \frac{3}{32} \tan^3 \frac{x}{4} - \frac{9}{64} \tan^3 \frac{x}{4} - \frac{9}{64} \tan^5 \frac{x}{4} \right) \right) \\
&= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{3}{64} \tan \frac{x}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{4} \right) + \frac{9}{64} \tan^3 \frac{x}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{4} \right) \right) \right) \\
&\quad - L_\rho^{-1} \left(-\frac{1}{s^{\alpha+1}} \frac{3}{32} \tan \frac{x}{4} - \frac{1}{s^{\alpha+1}} \frac{15}{64} \tan^3 \frac{x}{4} - \frac{9}{64} \tan^5 \frac{x}{4} \right) \\
&= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^{\alpha+1}} \frac{3}{64} \tan \frac{x}{4} + \frac{1}{s^{\alpha+1}} \frac{3}{64} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{1}{s^{\alpha+1}} \frac{9}{64} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{1}{s^{\alpha+1}} \frac{9}{64} \tan^5 \frac{x}{4} \right) \\
&\quad + \frac{3}{32} \tan \frac{x}{4} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha + \frac{15}{64} \tan^3 \frac{x}{4} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \\
&\quad + \frac{9}{64} \tan^5 \frac{x}{4} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \\
&= -\frac{3}{64} \tan \frac{x}{4} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha - \frac{3}{16} \tan^3 \frac{x}{4} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \\
&\quad - \frac{9}{64} \tan^5 \frac{x}{4} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha + \frac{3}{32} \tan \frac{x}{4} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \\
&\quad + \frac{15}{64} \tan^3 \frac{x}{4} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha + \frac{9}{64} \tan^5 \frac{x}{4} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha
\end{aligned}$$

$$v_1 = \left(\frac{3}{64} \tan \frac{x}{4} + \frac{3}{64} \tan^3 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha$$

bulunur. Buradan,

$$\left. \begin{aligned} u_1 = L(v_0) &= - \left(\frac{3}{32} \tan \frac{x}{4} + \frac{3}{32} \tan^3 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \\ v_1 = L(u_0) &= \left(\frac{3}{64} \tan \frac{x}{4} + \frac{3}{64} \tan^3 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

elde edilir.

(4.11) çözümleri $k = 1$ için (4.10) denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} L(v_1) &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{3}{64} \tan \frac{x}{4} + \frac{3}{64} \tan^3 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \right) \right) \\ &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\left(\frac{3}{256} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) + \frac{9}{256} \tan^2 \frac{x}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \right) \\ &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\left(\frac{3}{256} + \frac{3}{64} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{9}{256} \tan^4 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \right) \\ &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} \left(\left(\frac{3}{256} + \frac{3}{64} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{9}{256} \tan^4 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1) \rho^\alpha} \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}} \right) \right) \\ &= -L_\rho^{-1} \left(\left(\frac{3}{256} + \frac{3}{64} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{9}{256} \tan^4 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{s^{2\alpha+1}} \right) \\ u_2 &= - \left(\frac{3}{256} + \frac{3}{64} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{9}{256} \tan^4 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{2\alpha}, \\ L(u_1) &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(- \left(\frac{3}{32} \tan \frac{x}{4} + \frac{3}{32} \tan^3 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right)^2 \right) \right) \\ &\quad - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(- \left(\frac{3}{32} \tan \frac{x}{4} + \frac{3}{32} \tan^3 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(u_1) &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{9}{1024} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{9}{512} \tan^4 \frac{x}{4} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{9}{1024} \tan^6 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{(\Gamma(\alpha+1))^2} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{2\alpha} \right) \right) \\
&\quad - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(- \left(\frac{3}{256} + \frac{51}{512} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{45}{256} \tan^4 \frac{x}{4} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{45}{512} \tan^6 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \right) \\
&= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\left(\frac{9}{2048} \tan \frac{x}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{4} \right) + \frac{9}{512} \tan^3 \frac{x}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{4} \right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{27}{2048} \tan^5 \frac{x}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{4} \right) \right) \frac{1}{(\Gamma(\alpha+1))^2} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{2\alpha} \right) \right) \\
&\quad - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} \left(- \left(\frac{3}{256} + \frac{51}{512} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{45}{256} \tan^4 \frac{x}{4} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{45}{512} \tan^6 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha+1) \rho^\alpha} \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \right) \right) \\
&= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} \left(\left(\frac{9}{2048} \tan \frac{x}{4} + \frac{45}{2048} \tan^3 \frac{x}{4} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{63}{2048} \tan^5 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{(\Gamma(\alpha+1))^2 \rho^{2\alpha}} \frac{\rho^{2\alpha} (\Gamma(\alpha+1))^2}{s^{2\alpha+1}} \right) \right) \\
&\quad - L_\rho^{-1} \left(- \left(\frac{3}{256} + \frac{51}{512} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{45}{256} \tan^4 \frac{x}{4} + \frac{45}{512} \tan^6 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{s^{2\alpha+1}} \right) \\
&= -L_\rho^{-1} \left(\left(\frac{9}{2048} \tan \frac{x}{4} + \frac{45}{2048} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{63}{2048} \tan^5 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{s^{3\alpha+1}} \right) \\
&\quad + \left(\frac{3}{256} + \frac{51}{512} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{45}{256} \tan^4 \frac{x}{4} + \frac{45}{512} \tan^6 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{2\alpha}
\end{aligned}$$

$$v_2 = -\left(\frac{9}{2048} \tan \frac{x}{4} + \frac{45}{2048} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{63}{2048} \tan^5 \frac{x}{4}\right) \frac{1}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{3\alpha} \\ + \left(\frac{3}{256} + \frac{51}{512} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{45}{256} \tan^4 \frac{x}{4} + \frac{45}{512} \tan^6 \frac{x}{4}\right) \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{2\alpha}$$

bulunur. Buradan,

$$\left. \begin{aligned} u_2 = L(v_1) &= -\left(\frac{3}{256} + \frac{3}{64} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{9}{256} \tan^4 \frac{x}{4}\right) \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{2\alpha} \\ v_2 = L(u_1) &= -\left(\frac{9}{2048} \tan \frac{x}{4} + \frac{45}{2048} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{63}{2048} \tan^5 \frac{x}{4}\right) \frac{1}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{3\alpha} \\ &+ \left(\frac{3}{256} + \frac{51}{512} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{45}{256} \tan^4 \frac{x}{4} + \frac{45}{512} \tan^6 \frac{x}{4}\right) \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{2\alpha} \end{aligned} \right\} (4.12)$$

elde edilir.

(4.12) çözümleri $k = 2$ için (4.10) denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} L(v_2) &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right) \\ &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(-\left(\frac{9}{8192} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{4}\right) + \frac{135}{8192} \tan^2 \frac{x}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{4}\right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{315}{8192} \tan^4 \frac{x}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{4}\right) \right) \frac{1}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{3\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{51}{1024} \tan \frac{x}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{4}\right) + \frac{45}{256} \tan^3 \frac{x}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{135}{1024} \tan^5 \frac{x}{4} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{4}\right) \right) \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{2\alpha} \right) \right) \\ &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} \left(-\left(\frac{9}{8192} + \frac{9}{512} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{225}{4096} \tan^4 \frac{x}{4} + \frac{315}{8192} \tan^6 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{s^{3\alpha+1}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{51}{1024} \tan \frac{x}{4} + \frac{231}{1024} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{315}{1024} \tan^5 \frac{x}{4} + \frac{135}{1024} \tan^7 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{s^{2\alpha+1}} \right) \right) \\ u_3 &= \left(\frac{9}{8192} + \frac{9}{512} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{225}{4096} \tan^4 \frac{x}{4} + \frac{315}{8192} \tan^6 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(4\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{4\alpha} \\ &\quad - \left(\frac{51}{1024} \tan \frac{x}{4} + \frac{231}{1024} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{315}{1024} \tan^5 \frac{x}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{135}{1024} \tan^7 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho}\right)^{3\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(u_2) &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} (u_2)^2 \right) \right) - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \right) \right) \\
L(u_2) &= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(- \left(\frac{3}{256} + \frac{3}{64} \tan^2 \frac{x}{4} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{9}{256} \tan^4 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{2\alpha} \right) \right) \\
&\quad \left. - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(- \left(\frac{3}{256} + \frac{3}{64} \tan^2 \frac{x}{4} \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{9}{256} \tan^4 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{2\alpha} \right) \right) \right) \\
&= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{9}{65536} + \frac{9}{4096} \tan^4 \frac{x}{4} + \frac{81}{65536} \tan^8 \frac{x}{4} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \left(\frac{9}{16384} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{27}{16384} \tan^6 \frac{x}{4} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{27}{65536} \tan^4 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{(\Gamma(2\alpha + 1))^2} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{4\alpha} \right) \right) \\
&\quad - L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(- \left(\frac{51}{2048} \tan \frac{x}{4} + \frac{231}{2048} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{315}{2048} \tan^5 \frac{x}{4} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{135}{2048} \tan^7 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{2\alpha} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\left(\frac{9}{4096} \tan^3 \frac{x}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) + \frac{81}{32768} \tan^7 \frac{x}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{9}{16384} \tan \frac{x}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) + \frac{81}{16384} \tan^5 \frac{x}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{27}{32768} \tan^3 \frac{x}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) \right) \left(\frac{1}{(\Gamma(2\alpha + 1))^2} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{4\alpha} \right) \right) \right) \\
&\quad + L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} L_\rho \left(\left(\frac{51}{2048} \tan \frac{x}{4} + \frac{231}{2048} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{315}{2048} \tan^5 \frac{x}{4} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{135}{2048} \tan^7 \frac{x}{4} \right) \left(\frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{2\alpha} \right) \right) \right) \\
&= -L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} \left(\frac{9}{4096} \tan^3 \frac{x}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) + \frac{81}{32768} \tan^7 \frac{x}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9}{16384} \tan \frac{x}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) + \frac{81}{16384} \tan^5 \frac{x}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{27}{32768} \tan^3 \frac{x}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4}) \right) \frac{1}{(\Gamma(2\alpha + 1))^2} \frac{\rho^{4\alpha} (\Gamma(2\alpha + 1))^2}{\rho^{4\alpha} s^{4\alpha+1}} \right) \\
&\quad + L_\rho^{-1} \left(\frac{1}{s^\alpha} \left(\frac{51}{2048} \tan \frac{x}{4} + \frac{231}{2048} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{315}{2048} \tan^5 \frac{x}{4} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{135}{2048} \tan^7 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} \frac{\rho^{2\alpha} \Gamma(2\alpha + 1)}{\rho^{2\alpha} s^{2\alpha+1}} \right) \\
&= -L_\rho^{-1} \left(\left(\frac{9}{16384} \tan \frac{x}{4} + \frac{81}{32768} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{225}{32768} \tan^5 \frac{x}{4} + \frac{243}{32768} \tan^7 \frac{x}{4} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{81}{32768} \tan^9 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{s^{5\alpha+1}} \right) \\
&\quad + L_\rho^{-1} \left(\left(\frac{51}{2048} \tan \frac{x}{4} + \frac{231}{2048} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{315}{2048} \tan^5 \frac{x}{4} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{135}{2048} \tan^7 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{s^{3\alpha+1}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3 = & - \left(\frac{9}{16384} \tan \frac{x}{4} + \frac{81}{32768} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{225}{32768} \tan^5 \frac{x}{4} + \frac{243}{32768} \tan^7 \frac{x}{4} \right. \\
& + \left. \frac{81}{32768} \tan^9 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(5\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{5\alpha} \\
& + \left(\frac{51}{2048} \tan \frac{x}{4} + \frac{231}{2048} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{315}{2048} \tan^5 \frac{x}{4} \right. \\
& + \left. \frac{135}{2048} \tan^7 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{3\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
u_3 = L(v_2) = & \left(\frac{9}{8192} + \frac{9}{512} \tan^2 \frac{x}{4} + \frac{225}{4096} \tan^4 \frac{x}{4} + \frac{315}{8192} \tan^6 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(4\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{4\alpha} \\
& - \left(\frac{51}{1024} \tan \frac{x}{4} + \frac{231}{1024} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{315}{1024} \tan^5 \frac{x}{4} \right. \\
& + \left. \frac{135}{1024} \tan^7 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{3\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3 = L(u_2) = & - \left(\frac{9}{16384} \tan \frac{x}{4} + \frac{81}{32768} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{225}{32768} \tan^5 \frac{x}{4} + \frac{243}{32768} \tan^7 \frac{x}{4} \right. \\
& + \left. \frac{81}{32768} \tan^9 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(5\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{5\alpha} \\
& + \left(\frac{51}{2048} \tan \frac{x}{4} + \frac{231}{2048} \tan^3 \frac{x}{4} + \frac{315}{2048} \tan^5 \frac{x}{4} \right. \\
& + \left. \frac{135}{2048} \tan^7 \frac{x}{4} \right) \frac{1}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{3\alpha}
\end{aligned}$$

çözümleri elde edilir.

5. GRAFİKSEL İFADELER VE FİZİKSEL YORUMLAR

Bu bölümde, ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak elde edilen yukarıdaki çözümlerin güvenilirliği ve etkinliğini göstermek için grafikler çizilmiş ve tablolar oluşturulmuştur. Sayısal çözümler elde edilirken, Caputo türev operatörleri kullanılmıştır. Elde edilen çözümün sayısal değerleri ile gerçek çözüm aşağıdaki tablo ve grafiklerde karşılaştırılmıştır.

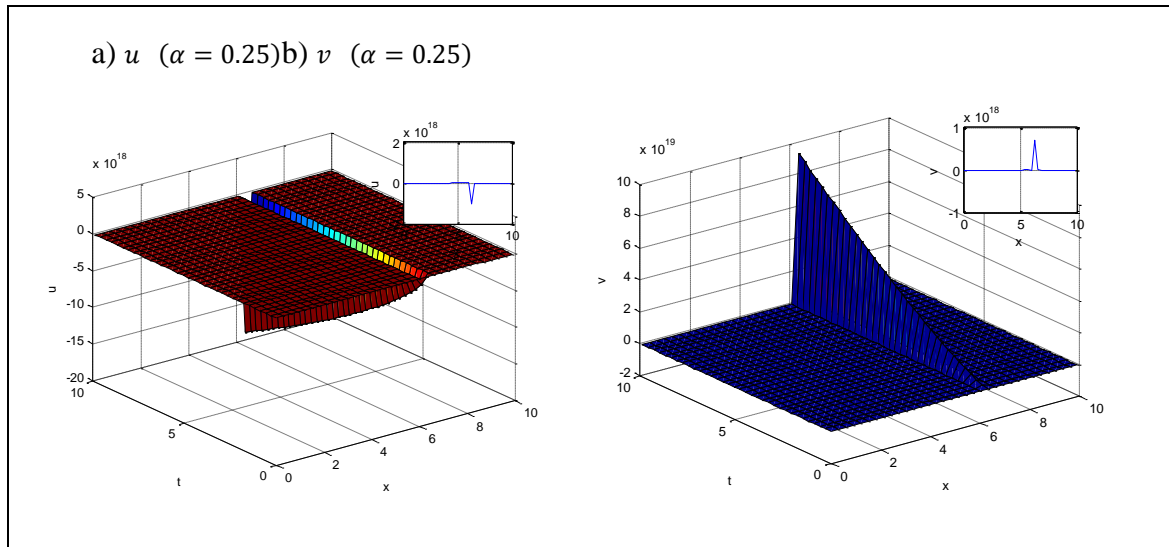
Çizelge 5. 1Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u çözümlerinin ve gerçek çözümünün sayısal değerleri ve bu değerlerden elde edilen mutlak hata değerleri

| | | $\alpha = 1$ | | |
|------------|------|---------------|-----------|--------------------------|
| $t = 0.01$ | x | $u_{\rho-LD}$ | u_G | u_{MUTLAK} |
| | 0.01 | -0.125006 | -0.125001 | 4.87679×10^{-6} |
| | 0.02 | -0.125016 | -0.125005 | 9.68538×10^{-6} |
| | 0.03 | -0.125031 | -0.125015 | 0.0000144945 |
| | 0.04 | -0.125051 | -0.125029 | 0.0000193043 |
| | 0.05 | -0.125075 | -0.125047 | 0.000024115 |
| $t = 0.03$ | x | | | |
| | 0.01 | -0.125019 | -0.125001 | 0.0000148329 |
| | 0.02 | -0.125035 | -0.125001 | 0.0000291786 |
| | 0.03 | -0.125055 | -0.125005 | 0.0000435257 |
| | 0.04 | -0.12508 | -0.125015 | 0.0000578751 |
| | 0.05 | -0.12511 | -0.125029 | 0.0000722273 |
| $t = 0.05$ | x | | | |
| | 0.01 | -0.125038 | -0.125005 | 0.0000250406 |
| | 0.02 | -0.125059 | -0.125001 | 0.0000488903 |
| | 0.03 | -0.125084 | -0.125001 | 0.0000727424 |
| | 0.04 | -0.125115 | -0.125005 | 0.0000965982 |
| | 0.05 | -0.12515 | -0.125015 | 0.0000120459 |

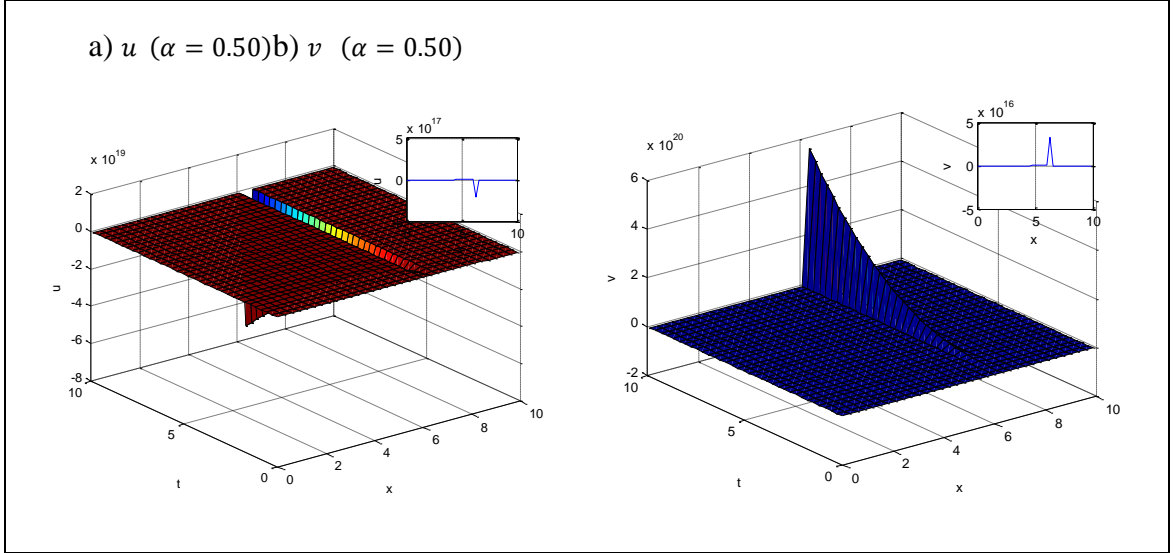
Çizelge 5. 2 Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen v çözümlerinin ve gerçek çözümünün sayısal değerleri ve bu değerlerden elde edilen mutlak hata değerleri

| | | $\alpha = 1$ | | |
|------------|------|---------------|-----------|--------------------------|
| $t = 0.01$ | x | $v_{\rho-LD}$ | v_G | v_{MUTLAK} |
| $t = 0.01$ | 0.01 | 0.0625037 | 0.0625003 | 2.63677×10^{-6} |
| | 0.02 | 0.0625087 | 0.0625026 | 4.98074×10^{-6} |
| | 0.03 | 0.0625161 | 0.0625073 | 7.32499×10^{-6} |
| | 0.04 | 0.0625258 | 0.0625144 | 9.66964×10^{-6} |
| | 0.05 | 0.0625378 | 0.0625237 | 0.0000120148 |
| $t = 0.03$ | x | | | |
| | 0.01 | 0.0625136 | 0.0625003 | 9.66851×10^{-6} |
| | 0.02 | 0.0625214 | 0.0625003 | 0.0000167011 |
| | 0.03 | 0.0625316 | 0.0625026 | 0.0000237348 |
| | 0.04 | 0.0625441 | 0.0625073 | 0.0000307701 |
| $t = 0.05$ | x | | | |
| | 0.01 | 0.0625298 | 0.0625026 | 0.0000190448 |
| | 0.02 | 0.0625402 | 0.0625003 | 0.0000307674 |
| | 0.03 | 0.062553 | 0.0625003 | 0.0000424924 |
| | 0.04 | 0.0625682 | 0.0625026 | 0.0000542203 |
| | 0.05 | 0.0625857 | 0.0625073 | 0.0000659517 |

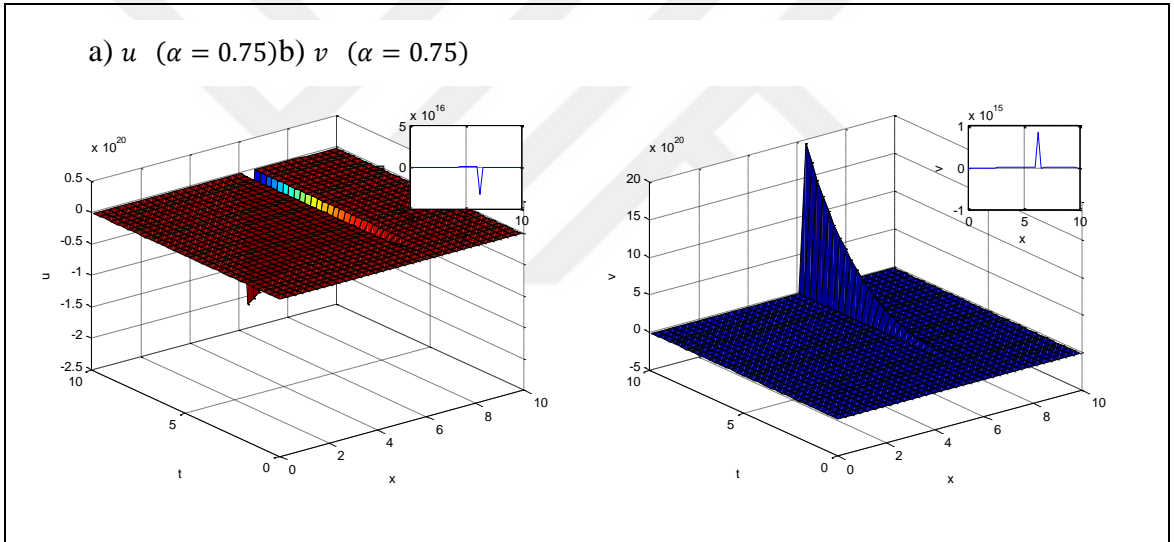
Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin, Caputo türev operatörleri yardımıyla ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak elde edilen u ve v yaklaşık çözümlerinin sayısal değerleri x ve t değıştikçe $\alpha = 1$ değeri kullanılarak hesaplanmıştır. Ayrıca Çizelge 5.1'de u yaklaşık çözümleri için ve Çizelge 5.2 'de v yaklaşık çözümleri için $\alpha = 1$ alınarak mutlak hata hesaplanmıştır



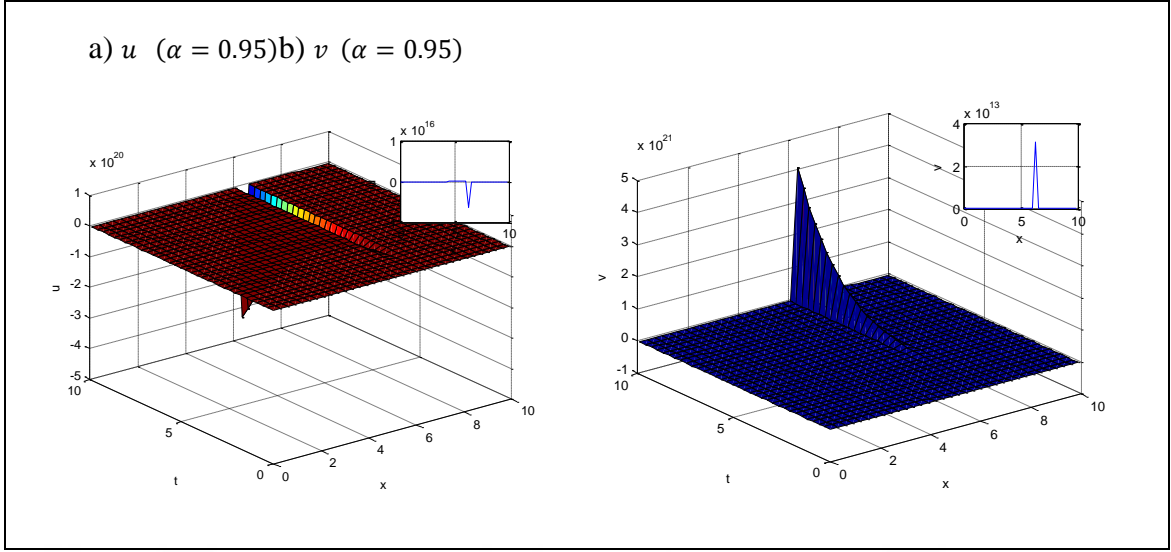
Şekil 5. 1 Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u ve v yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri. ($\alpha = 0.25$)



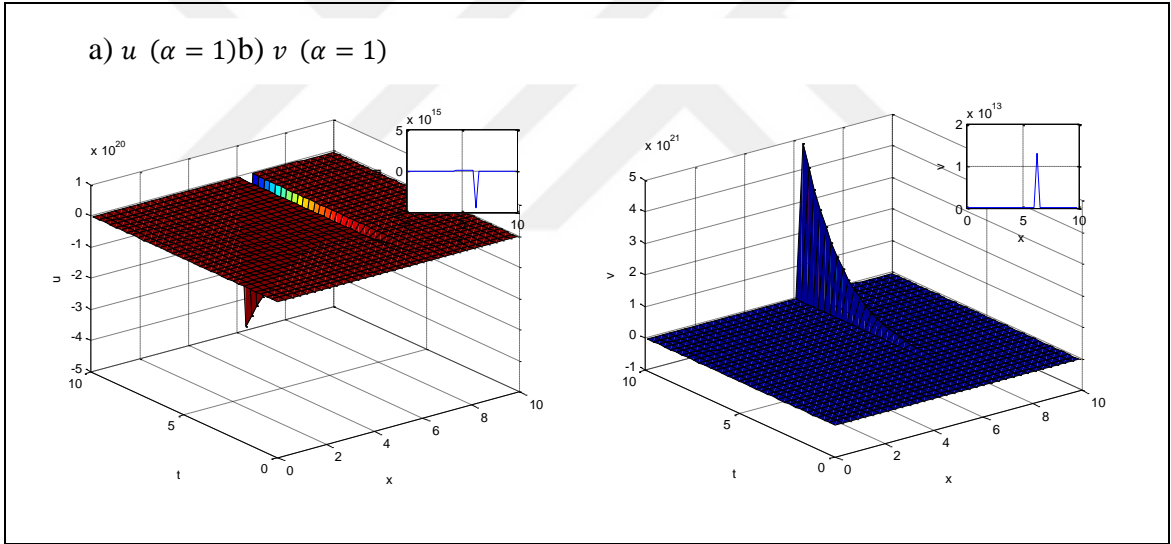
Şekil 5. 2 Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u ve v yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri. ($\alpha = 0.50$)



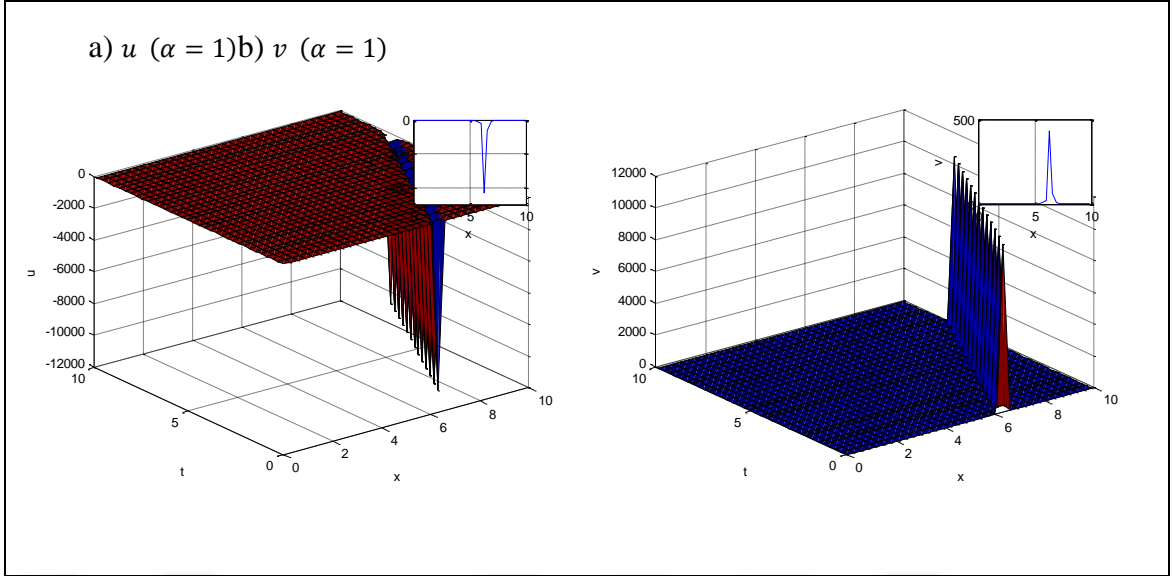
Şekil 5. 3 Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u ve v yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri. ($\alpha = 0.75$)



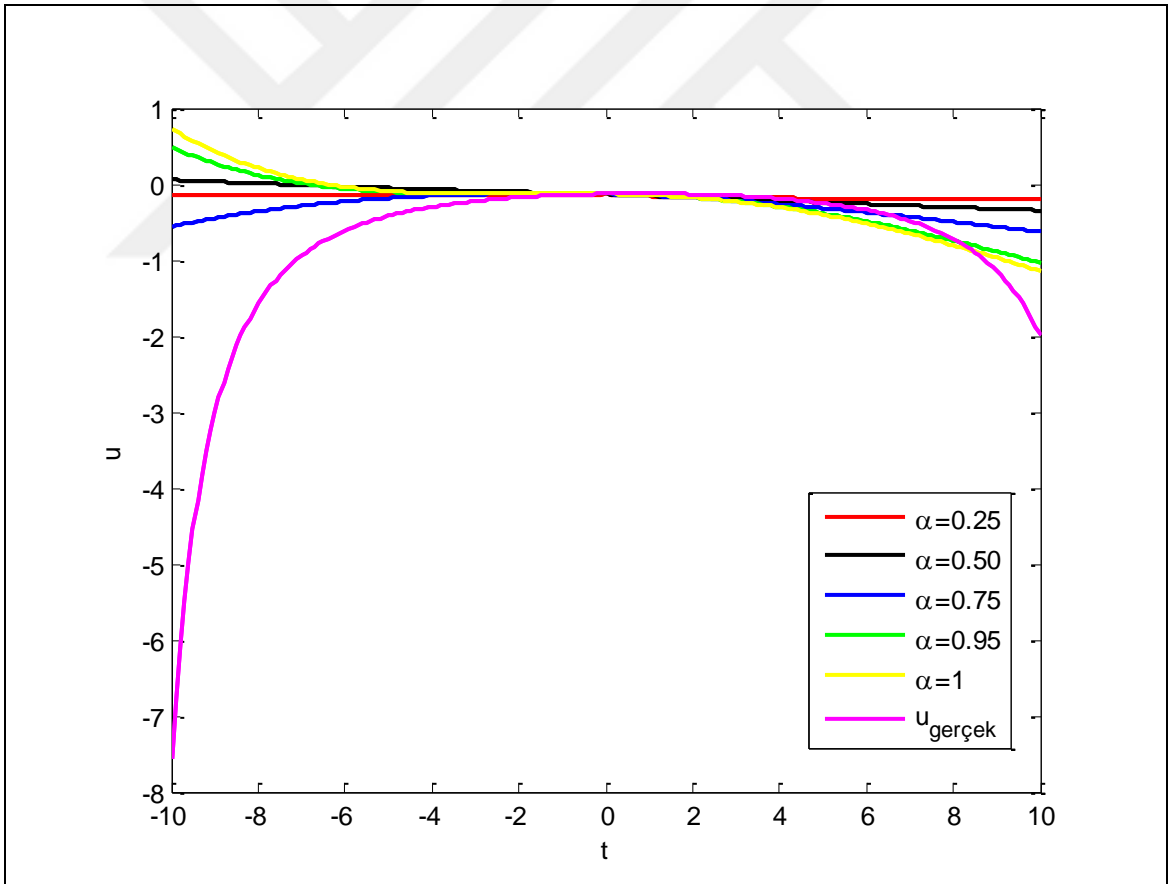
Şekil 5. 4 Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u ve v yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri. ($\alpha = 0.95$)



Şekil 5. 5 Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u ve v yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri. ($\alpha = 1$)



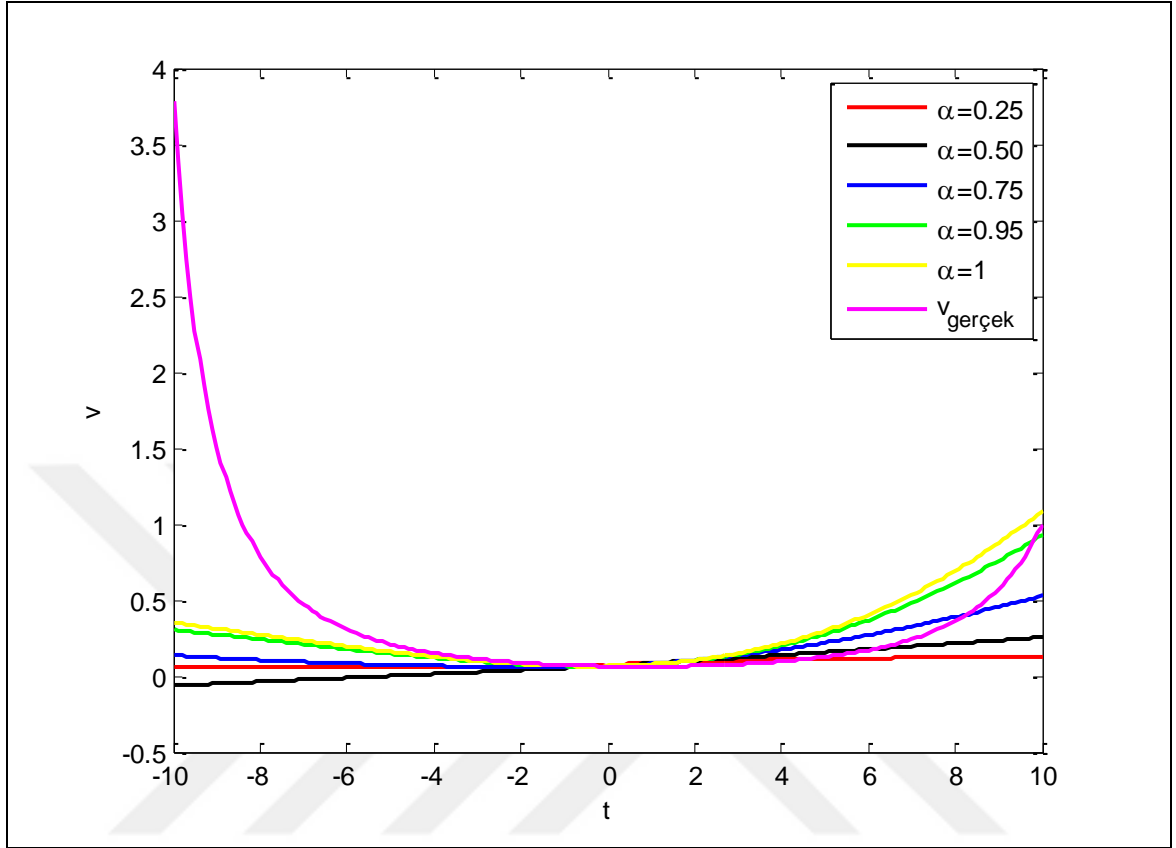
Şekil 5. 6 Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin u ve v gerçek çözümlerinin yüzey grafikleri. ($\alpha = 1$) (Özkan ve Özkan, 2022)



Şekil 5. 7 Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u yaklaşık çözümlerinin α 'nın farklı değerleri için oluşturulan iki boyutlu grafikleri. ($t=1$) ($\alpha=0.25$, $\alpha=0.5$, $\alpha=0.75$, $\alpha=0.95$, $\alpha=1$)

Şekil 5.7'de ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u yaklaşık çözümünün α ve t 'nin farklı değerler için hazırlanmış

iki boyutlu grafiğini incelediğimizde t , 0'a yaklaştıkça gerçek çözüme daha yakın sonuçlar elde ettiğimizi görebiliyoruz. Grafikte belirli noktalarda yaklaşık çözüm ile gerçek çözümün çakıştığı aşikardır.



Şekil 5.8 Kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denkleminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen v yaklaşık çözümlerinin α 'nın farklı değerleri için oluşturulan iki boyutlu grafikleri. ($t=1$) ($\alpha=0.25$, $\alpha=0.5$, $\alpha=0.75$, $\alpha=0.95$, $\alpha=1$)

Şekil 5.8'de ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen v yaklaşık çözümünün α ve t 'nin farklı değerler için hazırlanmış iki boyutlu grafiğini incelediğimizde t , 0'a yaklaştıkça gerçek çözüme daha yakın sonuçlar elde ettiğimizi görebiliyoruz. $\alpha = 0.95$ değeri için gerçek çözüme en yakın sonuçları elde ediyoruz.

6.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu çalışmada Boussinesq denklem sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla yaklaşık çözümleri hesaplandı. Bu hesaplamalar yapılırken belirli bir başlangıç şartından hareket edildi. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde ρ -Laplace dönüşümünü kullanmanın bazı avantajları vardır. ρ -Laplace dönüşümü (conformable/uyumlu Laplace dönüşümü) Riemann-Liouville ve Caputo kesirli genelleştirilmiş operatörlerin yardımıyla dinamik sistemleri çözmek için bir araçtır. $\rho \rightarrow 1$ limit durumunda klasik Laplace (1- Laplace) dönüşümü ifade edilir.

Bu yöntemin avantajlardan birkaçını şu şekilde ifade edebiliriz.

- Bu yöntem hesaplama açısından oldukça kolaydır.
- Daha az hesaplama terimleriyle yüksek doğruluk sunar.
- Doğrusal olmayan kesirli sınır değer problemlerinin bu metotla elde edilen yaklaşık çözümleri düzgün yakınsak seriler şeklindedir.
- Herhangi kısıtlayıcı varsayım ve doğrusallaştırma gerektirmez.
- Tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümü bilinmediğinde de uygun çözüm verebilir.
- α kesirli mertebesinin yanı sıra ρ teriminin de farklı değerler aldığında çözümdeki etkisi araştırılabilir.

Yaklaşık çözümler elde edilirken kesirli diferansiyel operatörlerinin etkili olması yanında kullanılan metodun etkisi vardır. Bu sonuçlardan hareketle söyleyebiliriz ki sayısal çözümler elde edilirken, gerçek çözüme yakın sonuçlar elde edebilmek için birçok parametre geçerlidir. Ele alınan denklem, denklemin başlangıç şartı, kullanılan kesirli türev operatörü ve adım sayısı bunlara örnek verilebilir. Bunlara ilaveten bu çalışmada ele alınan metot için ρ parametresi de önemlidir.

Bu çalışmada, ele alınan metodun ve kesirli türevin güvenilirliğini ve etkinliğini göstermek amacıyla grafikler çizilip, kesirli mertebeye 0 ile 1 arasında değıştikçe sayısal çözümün gerçek çözümden ne kadar uzaklaştığı gözlemlendi. Adım sayısını arttırdıkça gerçek çözüme daha yakın sonuçlar elde edilebilir. Bu çalışmada ele alınan kesirli türevli lineer olmayan Boussinesq denklem sisteminin yaklaşık çözümleri araştırılırken işlem kolaylığı olması açısından seri çözüm üç adım ilerletildi. Boussinesq denklem

sisteminin ρ -Laplace dönüşümü kullanılarak Caputo türev operatörleri yardımıyla elde edilen u ve v yaklaşık çözümleri elde edildi.

Bulunan çözümlerin gerçek çözüme yakınsaklığı grafikler ile ifade edildi. α kesirli mertebesinin 0.25, 0.5, 0.75, 0.95 ve 1 değerleri ve $\rho = 1$ için grafik sonuçları incelendi. Bu değerler keyfi olarak seçildi. $\alpha = 1$ için ele alınan çözüm daha önce bulunmuş olan gerçek çözümdür. Ayrıca bu değerler için iki boyutlu grafik çizilerek kesirli mertebe değıştikçe çözümdeki değışiklikler gözlemlendi. Bu grafiklere bakıldığında α kesirli mertebesi 1'e yaklaştıkça bulunan seri çözümün bilinen gerçek çözüme yakınsadığı görülmektedir.



KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T., 2015. On conformable fractional calculus , *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57–66.
- Atangana, A., 2007. Fractal-fractional differentiation and integration: connecting fractal calculus and fractional calculus to predict complex system, *Chaos Solitons Fractals*, 102, 396–406.
- Atangana, A. and Baleanu, D. 2016. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model, *Thermal Science*, 20(2), 763–769.
- Atangana, A. and Koca, I. 2017. New direction in fractional differentiation, *Mathematics in Natural Science*, 1, 18–25.
- Atangana, A. and Owolabi, K. 2018. New numerical approach for fractional differential equations, *Mathematical Modeling of Natural Phenomena*, 13(1).
- Bhangale, N. and Kachhia, K. 2020. Fractional electromagnetic waves in plasma and dielectric media with Caputo generalized fractional derivative, *Revista Mexicana de Fisica*, 66(6), 848-855.
- Bhangale, N., Kachhia, K.B. and Gomez-Aguila, J.F. 2020. A new iterative method with ρ -Laplace transform for solving fractional differential equations with Caputo generalized fractional derivative, *Engineering with Computers*.
- Caputo, M., 1969, *Elasticity e Dissipazione*, Zanichelli Bologna.
- Caputo, M. and Fabrizio, M. 2015. A new definition of fractional derivative without singular kernel, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1(2), 73–85.
- Çavuş, M.S. (2006), "Kesirli(Fractional) Diferansiyel Denklemler Teorisi ve Dielektrik Durulmanın Kesirli Master Denklemi Yöntemiyle Analizi", Yüksek lisans tezi, *Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Adana, 33-34.
- Daftardar-Gejji, V. and Jafari, H. 2006. An iterative method for solving nonlinear fractional equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 316(2), 735–763.
- El-Sayed, A.M.A., Rida, S.Z. and Arafa, A.A.M. 2019. Exact solutions of fractional-order biological populations model, *Communications in Theoretical Physics*, 52(6), 992–996.
- Farm, L., Lötstedt, P. and Sjöberg, P. 2004. Adaptive, conservative solution of the Fokker–Planck equation in molecular biology, *Computer Science*.
- Gómez-Aguilar, J.F., Yopez-Martinez, H., Ramon, C., Orduña, I., Jiménez, R.F.F. and Peregrino, V. 2015. Modelling of a mass-spring damper system by Fractional derivatives with and without singular kernel, *Entropy*, 17 (9), 6289–6303.
- Hristov, J. 2017. Current developments in Mathematical sciences, Derivatives with non-singular kernels from the caputo-fabrizio definition and beyond: appraising analysis with emphasis on diffusion models, In: Bhalekar S (ed) *Frontiers in fractional calculus*, *Bentham Science Publishers*, Sharjah, 269–341.

- Hristov, J., 2019. Mathematical Methods In Engineering, 24, Taş, K., Baleanu, D., Machado, J., Atransient flow of a non-newtonian fluid modelled by a mixed time-space derivative: an improved integral-balance approach, *Nonlinear systems and complexity*, Springer-Cham, 153–174.
- Iyiola, O., Zaman, F. 2014. A fractional difussion equation model for cancer tumor, *American Institute of Physics* , 4:107121.
- Jarad, F. and Abdeljawad, T. 2018. A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators, *Results in Nonlinear Analysis*, 2, 88–98.
- Kachhia, K., 2020. Comparative study of fractional Fokker-Planck equations with various fractional derivatie operators, *Discrete and Continuous Dynamical Systems- Series S*, 13(3), 741–754.
- Kachhia, K. and Atangana, A. 2021. Electromagnetic waves described by a fractional derivative of variable and constant order with non singular kernel, *Discrete and Continuous Dynamical Systems- Series S*.
- Kachhia, K.B. and Prajapati, J.C. 2020. Generalized iterative method for the solution of linear and nonlinear fractional differential equations with composite fractional derivative operator, *AIMS Mathematics*, 5(4), 2888–2898.
- Kannappan, Palaniappan. 2009. Functional equations and inequalities with applications (Springer Science & Business Media).
- Katugampola, U., 2020. New approach to generalized fractional integral, *Applied Mathematics and Computation*, 218(3), 860–865.
- Khan, N., Ayaz, M., Jin, L. and Yıldırım, A. 2011. On approximate solutions for the time-fractional reaction-diffusion equation of Fisher type, *International Journal of the Physical Sciences*, 6(10), 2483–2496.
- Kilbas, A.A., Srivastiva H.M. and Trujillo, J.J. 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equation, *Elsevier B.V.*, Amsterdam.
- Morales-Delgado, V.F., Gómez-Aguilar, J.F., Taneco-Hernández, M.A. and Escobar-Jiménez, R.F. 2018. A novel fractional derivative with variable order and constant order applied to mass-spring-damper system, *The European Physical Journal Plus*, 133:78.
- Özkan, E.M and Özkan, A. 2022. On exact solutions of some important nonlinear conformable time-fractional differential equations, *SeMA Journal*.
- Podlubny, I., 1998. Fractional Differential Equations, 198, An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, 1-340
- Podlubny, I., 1999, Fractional Order Systems and PID Controllers *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, 208-214
- Podlubny, I., Chechkin, A., Skovranek, T., Chen, Y. and Jara, M. 2009. Matrix approach to discrete fractional calculus II: partial fractional differential equations, *Journal of Computational Physics*, 228: 3137-53.
- Prajapati, J., Kachhia, K. and Kosta, S. 2016. Fractional Calculus approach to study temprature distribution within a spinning satellite, *Alexandria Engineering Journal*, 55 (3), 2345–2350.

- Prakash, A. and Kumar, M. 2018. A new iterative technique for a fractional model of nonlinear Zakherov-Kunetsov equations via Sumudu transform, *Applied Mathematics and Computation*, 334, 30–40.
- Saad, K.M., Al-Shareef, E.H., Mohamed, M.S. et al. 2017. Optimal q-homotopy analysis method for time-space fractional gas dynamics equation, *The European Physical Journal Plus*, 132(23).
- Saad, K.M., Gómez-Aguilar, J. and Almadiy, A. 2020. A fractional numerical study on a chronic hepatitis C virus infection model with immune response, *Chaos Solitons Fractals*, 139.
- Saad, K.M., Iyiola, O.S. and Agarwal, P. 2018. An effective homotopy analysis method to solve the cubic isothermal auto-catalytic chemical system, *AIMS Math*, 3(1), 183–194.
- Santos, M.A. and Gomez, I.S. 2018. A Fokker-Planck equation for nonsingular kernel operators, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2018, 123205.
- Sene, N., 2019. Analytical solutions and numerical schemes of certain generalized fractional diffusion models, *The European Physical Journal Plus*, 134, 199.
- Sene, N. and Fall, A. 2019. Homotopy perturbation ρ -Laplace transform method and its application to the fractional diffusion equation and the fractional diffusion-reaction equation, *Fractal Fractional*, (3)2, 14.
- Sene, N. and Gómez-Aguilar, J.F. 2019. Analytical solutions of electrical circuits considering certain generalized fractional derivative, *The European Physical Journal Plus*, 134, 260.
- Sene, N. And Gómez-Aguilar, J.F. 2019. Fractional mass-spring-damper system described by generalized fractional derivatives, *Fractal and Fractional*.
- Sheikh, N., Ali, F., Saqib, M., Khan, I., Jan, S., Alshomrani, A. and Alghamdi, M. 2017. A comparison and analysis of Atangana-Baleanu and Caputo-Fabrizio derivatives for generalised Casson fluid model with heat generation and chemical reaction, *Results in Physics*, 7:789–800.
- Singh, J., Jassim, H.K. and Kumar, D. 2020. An efficient computational technique for local fractional Fokker Planck equation, *Physica A*, 555 (1), 124525.
- Singh, J., Kumar, D. and Baleanu, D. 2020. A new analysis of fractional fish farm model associated with Mittag-Leffler type kernel, *International Journal of Biomathematics*, 13(2), 2050010
- Sjöberg, P., Lötstedt, P. and Elf, J. 2009. Fokker-Planck approximation of the master equation in molecular biology, *Computing and Visualization in Science*, 12(1), 37–50.
- Solís-Pérez, J.E., Gómez-Aguilar, J.F. and Atangana, A. 2018. Novel numerical method for solving variable-order fractional differential equation with power, exponential and Mittag-Leffler law, *Chaos Solitons Fractals*, 114, 175–185.
- Şan, M. (2013). "Konvolüsyon ve Uygulamaları", Yüksek Lisans Tezi, *Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Erzurum.

Veerasha, P., Prakasha, D.G., Singh, J. And Devendra, K. 2020. Analytical approach for fractional extended Fisher-Kolmogorov equation with Mittag-Leffler kernel, *Advances in Difference Equations*, 174, 1–17.

Zhou, L. and Shen, J. 2017. Signal transmission biological reaction-diffusion system by using synchronization, *Frontiers in Computational Neuroscience*.

