



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-MANYETİK EĞRİLERİN AKIŞLARI

Eylem Berku İBİŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2024
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-MANYETİK EĞRİLERİN AKIŞLARI

Eylem Berku İBİŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU

Jüri Üyesi: Prof. Doç. Dr. Talat KÖRPİNAR

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Ahmet SAZAK

Temmuz-2024
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2- MANYETİK EĞRİLERİN AKIŞLARI

Eylem Berku İBİŞ

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, öncelikle fiziksel tanım ve kavramlar verilmiştir ve daha sonra 3-boyutlu Öklid uzayında 2-manyetik eğriler üzerinde yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, manyetik eğriler ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında 2-T manyetik eğriler, 2-N manyetik eğriler, 2-B manyetik eğriler ve vektör alanları elde edilmiştir. Bunun sonucunda 2 manyetik eğrilerin akışları bulunmuştur.

2024, 56 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Frenet çatısı, Lorentz kuvveti, manyetik eğriler, 2- manyetik eğriler, vektör alanı , 2- manyetik eğrilerin akışları

ABSTRACT

MS THESIS

FLOWS OF 2- MAGNETIC CURVES

Eylem Berku İBİŞ

**Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics**

Advisor: Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR

This study consists of four parts. The first chapter is the introduction of the study, firstly, physical definitions and concept are given and then information about the studies on 2-magnetic curves in 3-dimensional Euclidean space are given.

In the second chapter, the basic definitions and theorems used in our study are given.

In the third chapter, magnetic curves are discussed.

In the fourth chapter, 2-T magnetic curves, 2-N magnetic curves, 2-B magnetic curves and vector fields are obtained in 3-dimensional Euclidean space. As a result the flows of 2 magnetic curves are found.

2024, 56 Pages

Keywords: Frenet frame, Lorentz force, magnetic curves, 2-magnetic curves, vector field, flows of 2-magnetic curves

TEŐEKKÜR

Bu tez alıőmamn hazırlanması sűrecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, alıőmamn baőından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayıran Prof. Dr. Talat KÖRPINAR'a ve desteğini, yardımlarını ve bilgilerini esirgemeyen saygıdeğer hocam Do. Dr. Muhsin İNCESU 'ya teőekkűr etmeyi bir bor bilir, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu sűre boyunca her daim yanımda olan aileme teőekkűr ederim.

Eylem Berku İBİŞ
MUŞ-2024



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. MATERYAL ve YÖNTEM.....	6
3 .MANYETİK EĞRİLER.....	16
3.1. Öklid Uzayında 2-T Manyetik Eğriler.....	16
3.2. Öklid Uzayında 2-N Manyetik Eğriler	25
3.3. Öklid Uzayında 2-B manyetik Eğriler	31
4 . 2-MANYETİK EĞRİLERİN AKIŞLARI.....	36
4.1.2-T Manyetik Eğrilerin Akışları.....	36
KAYNAKLAR.....	46

SİMGELER ve KISALTMALAR

Kısaltmalar

$\kappa(s)$:Eğrilik
$\tau(s)$:Burulma
F	:Vektör Alanı
Φ	:Lorentz Kuvveti
R^3	:Üç Boyutlu Öklid Uzay
(M, g)	:Riemann Manifoldu
$\{T, N, B\}$:Frenet Çatı
$C^\infty(M, R)$:	Diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi

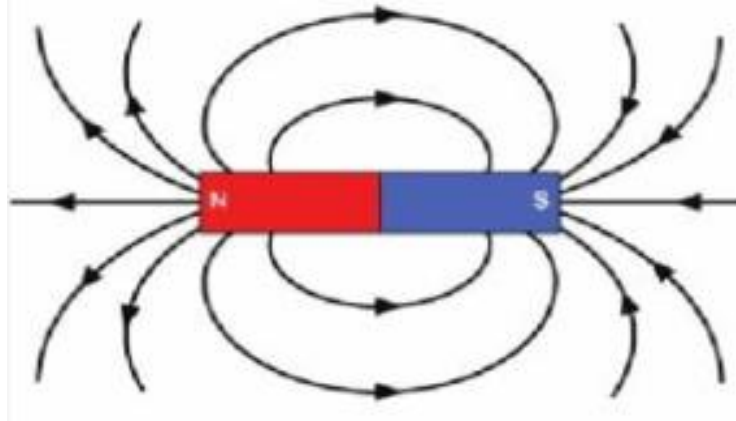
ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Manyetik alan çizgileri	1
Şekil 1.2 Güneş Rüzgarları	2
Şekil 1.3 Kuzey Işıkları	2
Şekil 1.4 Elektriksel Alan Çizgileri	3
Şekil 1.5 Lorentz kuvveti	4
Şekil 3.1 Frenet Çatısı	16



1. GİRİŞ

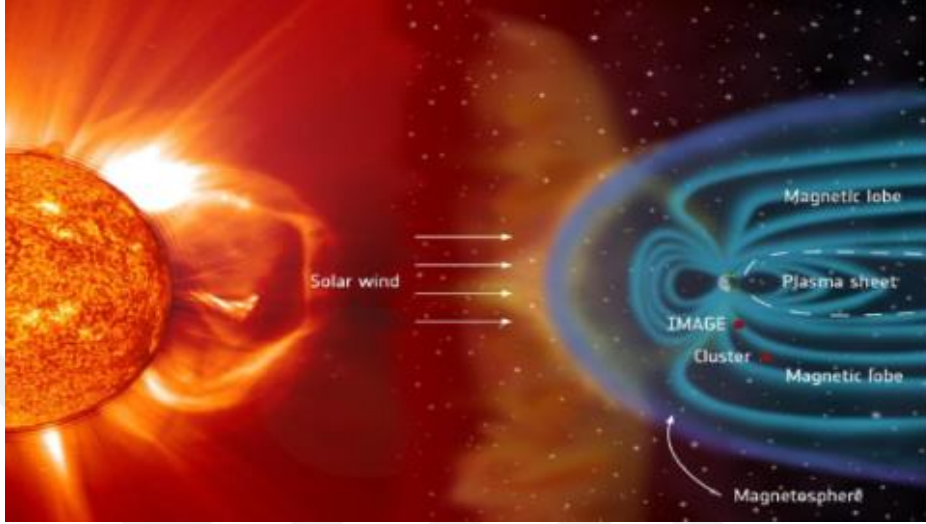
Frenet çatı, bir eğriyi analiz etmek için kullanılan araçlardan biridir. Ele alınan eğrinin verilen bir noktasında bir koordinat sistemi sağlayan hareketli olan bir çatıdır. Bu çatıyı kullanarak burulma ve eğrilik fonksiyonları hesaplanabilir. Burulma ve eğrilik fonksiyonları eğrileri ayırt etmemizi sağlar. Bu eğrilik ve burulma fonksiyonları eğrinin diferansiyel invariantlarıdır(Öztürk,2015).Manyetik alan ise hareketli yüklerin birbirlerine etki ettirdikleri kuvvetin kaynağı olan alana denir. Temel fizik seviyesinde baktığımızda, manyetik alan oluşumundan sorumlu olan hareketli yüklerdir. Elektrik yükleri yer değiştirdiğinde elektrik akımı sirkülasyonu ortaya çıkar.Manyetik alan formülü ise vektörel bir büyüklük olup manyetik alanın herhangi bir noktasında yönü ve şiddeti ile tanımlanır. Bu alanda hareket eden yükler ise Lorentz kuvveti ile hesaplanır. Manyetik alan çizgileri ise kuzey (N) kutbundan güney (S) kutbuna doğrudur. B ile gösterilir ve birimi Tesla'dır. Çizgilerin sık geçtiği alanlar manyetik alanın fazla olduğu alanlardır. Dünyada manyetik alan var olmasaydı zamanla güneşten gelen yüklü parçacıklar atmosferi yok ederdi. Atmosferin olmadığı bir yerde de yaşam mümkün değildir. Manyetik alanın yönü defalarca değişse de asla yok olmamıştır.



Şekil 1.1 Manyetik Alan Çizgileri

Manyetik alan Dünyamızın koruyucu bir güç tabakasıdır. Bu manyetik alan Dünyayı radyasyon ve olumsuz hava koşullarından korur. Örneğin: Dünyamız her birkaç saatte Güneşin yüklü parçacıklar içeren rüzgârlarına maruz kalır. Bu olaya da güneş rüzgârları (solar wind) denir. İşte bu manyetik alan sayesinde bu yüklü parçacıkların Dünya'ya zarar vermeden Dünya'nın çevresinden akması sağlanır.

Dünyanın çevresinden akan bu akım sayesinde Kuzey ve Güney ışıkları (auroraborealis) oluşur ve belli zaman aralıklarında Dünyamızda da görülür. Manyetik alan Dünya da sürdürülebilir yaşam olmasını sağlar. Venüs ve Mars zayıf bir manyetik alana sahip olduklarından ölümcül radyasyona ve olumsuz koşullara karşı korumasızdırlar.



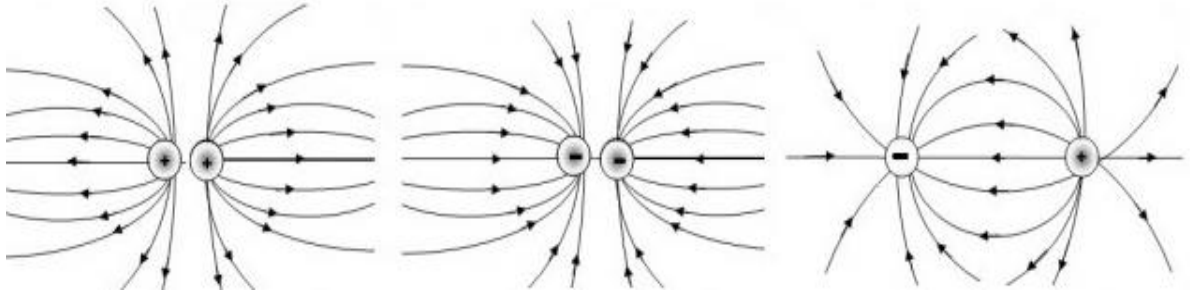
Şekil 1.2 Solar Wind



Şekil 1.2 Kuzey Işıkları

Elektriksel alan, oluşumu yüklere bağlı, bir elektrik yükünün başka elektrik yükü üzerinde oluşturduğu çekme ya da itme kuvvetidir. Elektrik yüklerinin çevresinde elektrik alan çizgileri oluşur. Elektriksel alan yerçekimine benzer bir kuvvettir ve vektörel bir büyüklüktür. E ile gösterilir. Günümüzde elektriksel alan, teknolojik

büyümlerimiz ışığında ortaya çıkmaktadır. Elektrikli cihazlar, baz istasyonları, cep telefonları gibi cihazlar bu alana örnektir.



Şekil 1.4 Elektriksel Alan Çizgileri

Lorentz kuvveti ise; fizikte özellikle elektromanyetizmada, elektromanyetik alanların noktasal yük üzerinde oluşturduğu elektrik ve manyetik kuvvetlerin bileşkesidir. Bir yüklü parçacık bir V manyetik alanına girdiği zaman bu parçacığın Serret-Frenet vektörleri bu alandan etkilenirler. Bu etkiyle Lorentz Kuvveti denen bir kuvvet açığa çıkar. Dolayısıyla parçacık bu alan içerisinde bir yörünge izlemeye başlar. Bu yörüngeye manyetik eğri adı verilir. (Özdemir, 2018). Özetle manyetik alan içerisinde hareketli bir parçacığa etki eden manyetik kuvvet Lorentz kuvvetidir. Manyetik eğrinin teğet vektör alanı T olmak üzere, Lorentz kuvveti

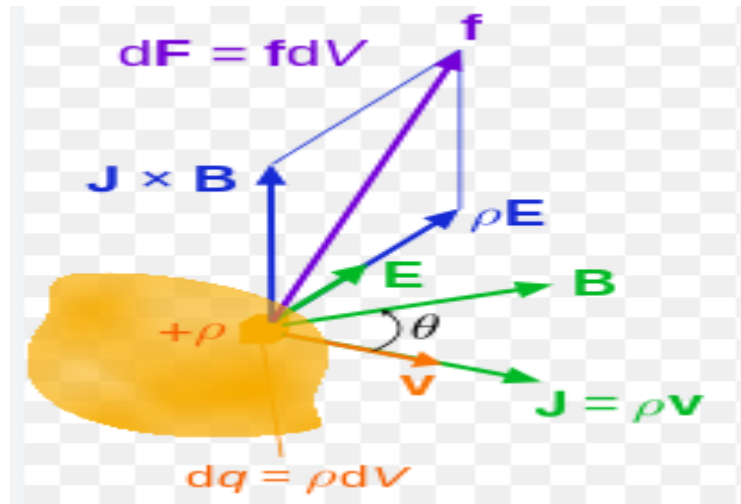
$$\Phi(T) = V \times T$$

şeklindedir ifade edilir.

T vektör alanı, V manyetik alanına paralel ise Lorentz kuvveti '0' olacağından parçacık manyetik alana paralel ilerler.

T vektör alanını, V manyetik alanına dik ise Lorentz kuvveti maksimum olup parçacık çember eğrisi şeklinde bir yörünge izler.

T vektör alanı, V manyetik alanıyla sabit açı yapıyorsa Lorentz kuvvetinin etkisiyle parçacık helis eğrisi şeklinde bir yörünge izler. (Özdemir, 2018)



Şekil 1.5 Lorentz Kuvveti

Manyetik alanın T vektör alanını etkilemesiyle oluşan yörünge ise T - manyetik alanını etkilemesiyle oluşan yörüngeler ise T - manyetik eğrilerdir.

$$\Phi(\gamma') = V \times \gamma'$$

Bir (M, g) Riemann üzerindeki manyetik eğriler, F manyetik alanın etkisi altında M üzerinde hareket eden yüklü paçacıkların yörüngeleridir. Buradan M üzerinde F kapalı formu manyetik alanıdır ve (M, g) manifoldu üzerindeki F manyetik alanın Lorentz kuvveti Φ , herhangi $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için,

$$g\langle \Phi(X, Y) \rangle = F(X, Y)$$

eşitliği ile verilen $(1,1)$ - tensör alanıdır.(Özdemir, 2015).

Üç boyutta manyetik alanlar, sapma içermeyen vektör alanları kullanılarak tanımlanabilir. Killing vektör alanlarının sıfır sapması olduğu için, Killing manyetik alan adı verilen özel bir manyetik alan sınıfı tanımlanabilir.(Bishop, 1975).

Belirli bir manyetik alan ve sabit enerji seviyesi için manyetik eğrilerin çalışılmasında farklı yaklaşımlar M.I. Munteanu tarafından yeniden incelenmiştir. Munteanu, manyetik yörüngelerin 3- boyutlu Öklid uzayında bir vida hareketiyle ilişkili bir Killing vektör alanına karşılık gelmesi durumunda bu yaklaşımları vurgulanmıştır. (Munteanu, 2013).

2. MATERYAL ve YÖNTEM

Tanım 2.1

Boş olmayan bir küme A ve bir K cisim üstünde bir vektör uzayı V olsun. $f: A \times A \rightarrow V$ Fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir.

$$i) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R) \text{ ve}$$

$$ii) \alpha \in V \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) = \alpha$$

olacak biçimde tek $Q \in A$ noktası vardır(Hacısalıhoğlu,1998).

Tanım2.2

$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in R\}$ vektör uzayında $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

eşitliği ile gösterilen,

$$\langle, \rangle : R^n \times R^n \rightarrow R; (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle \quad (2.1)$$

fonksiyonu, R^n uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma Öklid iç çarpımı denir.

$x \in R^n$ için, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olmak üzere

$$\|, \| = R^n \rightarrow R \quad x \rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (2.2)$$

fonksiyonu, R^n uzayında bir normdur. Buna göre R^n uzayına normlu vektör uzay denir.

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanan, $d: R^n \times R^n \rightarrow R$ fonksiyonu, R^n uzayında bir metriktir. Bu metrik ile R^n bir metrik uzay olur. Bu uzaya **Öklid uzay** denir ve E^n ile de gösterilir(Hacısalıhoğlu,1998).

Tanım 2.3

I, R 'nin bir açık aralığı olmak üzere,

$\alpha: I \subset R \rightarrow R^n$ biçiminde diferansiyellenebilir bir α dönüşümüne, R^n uzayı içinde bir **eğri** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.4

$\alpha: I \subset R \rightarrow R^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α' 'nin $\alpha(t)$ nokta vektörüne,

$$\alpha(t) = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t) \right) \quad (2.4)$$

α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **hız vektörü** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.5

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α 'nın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise, α eğrisine **regüler bir eğri** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.6

Bir $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $s \rightarrow \alpha(s)$ eğrisi için, $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine **birim hızlı eğri** denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.7

\mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi için,

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (2.5)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir. T vektör alanına, α eğrisinin **teğet vektör alanı** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.8

\mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için, $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$k(s) = \|T'(s)\| \quad (2.6)$$

fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $k(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.9

\mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için, eğrinin birim normal vektör alanı

$$N(s) = \frac{1}{k(s)} T'(s) \quad (2.7)$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.10

\mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için, eğrinin birim normal vektör alanı

$$B(s) = T(s) \times N(s) \quad (2.8)$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.11

$T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine, $\alpha: I \subset R \rightarrow R^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Serret-Frenet vektörleri** denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir ve T , N , B vektör alanlarına, α eğrisi üzerinde **Frenet vektör alanları** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.12

R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \rightarrow R^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T , N , B ve $\tau: I \rightarrow R$ olmak üzere,

$$\tau(s) = \langle B(s), N(s) \rangle \quad (2.9)$$

dır.

Tanım 2.13

R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \rightarrow R^3$ eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları T , N , B ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla k ve τ olmak üzere ;

$$\begin{aligned} T' &= kN \\ N' &= -kT + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \quad (2.10)$$

dır.

Tanım 2.14

Birim hızlı olmayan,

$$\alpha: I \subset R \rightarrow R^3$$

$$u \rightarrow \alpha(u)$$

eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları T , N , B ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla k ve τ olmak üzere,

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$

$$N = B \times T$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.15

M diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$g: X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

dönüşümü verilsin,

- i) g simetrik yani her $X, Y \in X(M)$ için $g(X, Y) = g(Y, X)$
- ii) g bilineer yani her $X, Y, Z \in X(M)$ ve her $f, h \in C^\infty(M, R)$ için

$$g(fX + hY, Z) = fg(X, Z) + hg(Y, Z)$$

- iii) g dönüşümü pozitif tanımlı yani her $X \in X(M)$ için $g(X, X) \geq 0$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme M üzerinde **Riemann metriği** veya **Metrik tensör** ve üzerinde Riemann metriği tanımlanmış manifolda **Riemann manifoldu** denir (Hacısalihioğlu, 1980).

Tanım 2.16

(M, g) n - boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ 'ya M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olmak üzere $\forall X, Y, Z \in X(M)$ için

- i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
- ii) $X_g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
- iii) şartları sağlandığında ∇ 'ya M üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyonu veya M 'nin **Levi-Civita koneksiyonu** denir (Hacısalihioğlu, 2002).

Tanım 2.17

(M, g) n - boyutlu semi-Riemann manifoldu olsun. M üzerinde F kapalı 2- formu manyetik alandır ve (M, g) manifoldu üzerindeki F manyetik alanın **Lorentz kuvveti** ϕ herhangi X ve Y vektör alanları için,

$$g(\phi(X), Y) = F(X, Y) \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilir (Kazan ve Karadağ, 2017).

Tanım 2.18

Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki manyetik eğriler, F manyetik alanın etkisi altında M üzerinde hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Yani F 'nin manyetik yörüngeleri, Lorentz denklemindeki M 'nin eğrileridir. Buradan,

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = \phi(\alpha') \quad (2.12)$$

olur. M nin geodeziklerinden elde edilen genelleştirilmiş Lorentz denklemi de,

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0 \quad (2.13)$$

dır.

Tanım 2.19

3- boyutlu Semi-Riemann manifoldunda sapma içermeyen bir vektör alanı, manyetik alan tanımlar. $V \in \chi(M^n)$ 'nin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart,

$$L_V g = 0 \quad (2.14)$$

olmasıdır ya da eş değer olarak tüm $p \in M^n$ noktalarında ters-simetrik bir operatördür.

Üç boyutta manyetik alanlar; sapma içermeyen vektör alanları kullanılarak tanımlanabilir. Killing vektör alanlarının sıfır sapması olduğu için, Killing manyetik alan adı verilen özel bir manyetik alan sınıfı tanımlanabilir (Barros vd., 2007).

V nin Lorentz kuvveti;

$$\phi(X) = V \times V \quad (2.15)$$

dir. (2.9) ve (2.11) denklemlerinden,

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = V \times \alpha' \quad (2.16)$$

elde edilir (Munteanu, 2013; Özdemir vd., 2015).

Tanım 2.20

E^3 Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \rightarrow E^3$ eğrisinin teğet vektör alanı T olsun. Eğri boyunca

$$\langle T, N_1 \rangle = \langle T, N_2 \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle = 0$$

şartını sağlayan vektör alanları N_1 ve $N_2 = \langle T, N_1 \rangle$ olmak üzere T, N_1, N_2 vektör alanları hareketli α eğrisi boyunca ortonormal bir çatı oluşturur. Bu $\{T, N_1, N_2\}$ çatısına Bishop Çatısı denir (Bishop, 1975).

E^3 de bir eğrinin Serret-Frenet formüllerini hatırlayım. T, N, B birim teğet vektör alanı ise birim vektörler sırasıyla bir eğrinin birim ikili vektör alanları $\{T, N, B\}$ frenet-serret çatısı olarak adlandırılır.

Şimdi frenet ve serret vektörlerinin formülünü verelim.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

matris gösterimi ile verilebilir ya da

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

elde edilir (Kazan, H.B.Karadağ).

Aynı zamanda

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = 1 \\ \langle T, N \rangle &= \langle N, B \rangle = \langle B, T \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

dır.

Şimdi ise 3-boyutlu Semi-Riemann manifoldunda sapma içermeyen bir vektör alanı, manyetik alan tanımlarını vereceğiz. $V \in \chi(M^n)$ 'nin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart,

$$L_V g = 0$$

olmasıdır ya da eş değer olarak tüm $p \in M^n$ noktalarında ters-simetrik bir operatördür.

Üç boyutta manyetik alanlar; sapma içermeyen vektör alanları kullanılarak tanımlanabilir. Killing vektör alanlarının sıfır sapması olduğu için, Killing manyetik alan adı verilen özel bir manyetik alan sınıfı tanımlanabilir (Barros vd., 2007).

V nin Lorentz kuvveti;

$$\phi(X) = V \times V \quad (2.19)$$

dir. (2.12) ve (2.15) denklemlerinden

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = V \times \alpha' \quad (2.20)$$

elde edilir (Munteanu, 2013; Özdemir vd., 2015).

Tanım 2. 21

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ 3 boyutlu Öklid uzayında bir eğri olsun ve $V E^3$ de bir manyetik alan olsun. Teğet vektör alanı T ise Lorentz kuvveti çatlara göre sırasıyla şöyledir;

$$\Phi(T) = V \times T$$

$$\Phi(N) = V \times N$$

$$\Phi(B) = V \times B$$

diye gösterilir. Sırasıyla T, N, B manyetik eğrileri olarak adlandırılır.

Tanım 2. 22

Öklid 3 uzayında sırasıyla T, N, B manyetik eğrileri birim hızlı olsun. Lorentz kuvvetine göre Frenet çatısı şu şekilde ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} \Phi(T) \\ \Phi(N) \\ \Phi(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \rho \\ 0 & -\rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Matris gösterimi ile verilebilir ya da

$$\Phi(T) = \kappa N$$

$$\Phi(N) = \kappa T + \rho B$$

$$\Phi(B) = -\rho N$$

elde edilir (Kazan, H.B.Karadağ).

Burada $\rho = \langle \Phi(N), B \rangle$ ile tanımlanan bildiğimiz bir fonksiyondur.

$$\rho = \langle \Phi(N), B \rangle$$

ise

$$\langle -\kappa T + \rho B, B \rangle = (-\kappa \langle T, B \rangle + \rho \langle B, B \rangle) = \rho$$

elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \Phi(T) \\ \Phi(N) \\ \Phi(B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & \mu \\ -\kappa & 0 & \tau \\ -\mu & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

matris gösterimi ile verilebilir ya da

$$\Phi(T) = \kappa N + \mu B$$

$$\Phi(N) = -\kappa T + \tau B$$

$$\Phi(B) = -\mu T - \tau N$$

elde ederiz.

Burada μ fonksiyonu $\mu = \langle \Phi(T), B \rangle$ ile tanımlanan bir fonksiyondur. Böylelikle;

$$\mu = \langle \Phi(T), B \rangle$$

ise

$$\langle (\kappa N + \mu B), B \rangle = \kappa \langle N, B \rangle + \mu \langle B, B \rangle = \mu$$

olur.

$$\begin{bmatrix} \Phi(\mathbf{T}) \\ \Phi(\mathbf{N}) \\ \Phi(\mathbf{B}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

matris gösterimi ile verilebilir ya da

$$\Phi(\mathbf{T}) = \gamma \mathbf{N}$$

$$\Phi(\mathbf{N}) = -\gamma \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$$

$$\Phi(\mathbf{B}) = -\tau \mathbf{N}$$

elde edilir (Kazan, H.B.Karadağ).

Burada γ fonksiyonu $\gamma = \langle \Phi(\mathbf{T}), \mathbf{N} \rangle$ ile tanımlanan bir fonksiyondur. Böylelikle

$$\gamma = \langle \Phi(\mathbf{T}), \mathbf{N} \rangle$$

dir.



3. MANYETİK EĞRİLER

Bu bölümde Öklid uzayında 2-T manyetik, 2-N manyetik, 2-B manyetik eğrileri için bazı sonuçlar elde edilecektir.

3.1 Öklid Uzayında 2-T Manyetik Eğriler

Tanım 3.1

$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ Öklid uzayında bir T manyetik eğri V de E^3 boyunca bir manyetik alan olsun. Eğer Frenet çatısındaki T teğet vektör alanı

$$\nabla_{\alpha'} \nabla_{\alpha'} T = \Phi(T') = V \times T'$$

2-Lorentz kuvvet denklemini karşılırsa bu eğriye 2-T manyetik eğri denir.

Teorem 3.2

$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı 2-T manyetik eğri olsun. V nin 2-manyetik vektör alanınının 2-T manyetik yörüngesi olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{bmatrix} \Phi(T') \\ \Phi(N') \\ \Phi(B') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\kappa^2 & \kappa' & \kappa\tau \\ 0 & -\kappa^2 - \tau\rho & 0 \\ \kappa\tau & 0 & -\tau\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

veya

$$\Phi(T') = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B$$

$$\Phi(N') = (-\kappa^2 - \tau\rho) N$$

$$\Phi(B') = \kappa\tau T - \tau\rho B$$

olmasıdır (Kazan, H.B.Karadağ).

İspat:

$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ Öklid uzayında Frenet çatısına göre **2-T** manyetik bir eğri olsun. Öklid uzayına ve Frenet çatısına göre $\{T, N, B\}$ tanımından Frenet çatısına göre **2-T** manyetik eğri ve (3.1) den biliyoruz ki

$$\Phi(T') = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B$$

dir. Ayrıca $\Phi(T') \in \{T, N, B, \kappa, \tau\}$

$$\Phi(T') = a_1 T + a_2 N + a_3 B$$

bilgisine sahibiz. Öte yandan (2.1), (2.2) ve (2.6) dan

$$\Phi(N') = (-\kappa^2 - \tau\rho) N$$

olduğunu biliyoruz.

Son olarak

$$\Phi(N') = b_1T + b_2N + b_3B$$

bilgisinden

$$\Phi(N') = (-\kappa^2 - \tau\rho)N$$

olur. Ayrıca

$$\Phi(N') = a_1T + a_2N + a_3B$$

şeklinde verilsin.

a_1 değerini hesaplamak için $\Phi(N')$ ifadesi T ile skaler çarpılırsa;

$$a_1 = \langle \Phi(N'), T \rangle = -\langle N', \Phi(T) \rangle = -\langle -\kappa T + \tau B, \kappa N \rangle$$

olduğundan

$$a_1 = -(-\kappa^2 \langle T, N \rangle + \kappa\tau \langle B, N \rangle) = 0$$

olarak elde edilir.

a_2 değerini hesaplamak için $\Phi(N')$ ifadesi ile N skaler çarpılırsa;

$$a_2 = \langle \Phi(N'), N \rangle = -\langle \Phi(N), N' \rangle$$

olduğundan

$$a_2 = -\langle (-\kappa T + \rho B, -\kappa T + \tau B) \rangle$$

eşitliği düzenlenirse

$$a_2 = -(\kappa^2 \langle T, T \rangle - \kappa\tau \langle T, B \rangle - \kappa\rho \langle B, T \rangle + \rho\tau \langle B, B \rangle)$$

dır. Dolayısıyla

$$a_2 = -\kappa^2 - \rho\tau$$

elde edilir.

a_3 değerini bulmak için $\Phi(N')$ ifadesi ile B skaler çarpılırsa;

$$a_3 = \langle \Phi(N'), B \rangle = -\langle N', \Phi(B) \rangle$$

eşitliği düzenlenirse

$$a_3 = -\langle (-\kappa T + \tau B, -\rho N) \rangle$$

dır. Dolayısıyla

$$a_3 = -(\kappa\rho \langle T, N \rangle - \rho\tau \langle B, N \rangle) = 0$$

elde edilir.

O halde bulduğumuz değerler ($a_1 = 0$, $a_2 = -\kappa^2 - \rho\tau$, $a_3 = 0$) yerlerine yazılırsa;

$$\Phi(N') = (-\kappa^2 - \rho\tau)N$$

elde edilir.

b_1 değerini bulmak için $\Phi(B')$ ifadesi T ile skaler çarpılırsa:

$$b_1 = \langle \Phi(\mathbf{B}'), \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{B}', \Phi(\mathbf{T}) \rangle$$

eşitliği düzenlenirse

$$b_1 = -\langle (\tau \mathbf{N}, \kappa \mathbf{N}) \rangle = -(-\tau \kappa \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle)$$

dır. Dolayısıyla

$$b_1 = \tau \kappa$$

elde edilir.

b_2 değerini bulmak için $\Phi(\mathbf{B}')$ ifadesi \mathbf{N} ile skaler çarpılırsa:

$$b_2 = \langle (\Phi(\mathbf{B}'), \mathbf{N}) \rangle = -\langle \mathbf{B}', \Phi(\mathbf{N}) \rangle$$

eşitliği düzenlenirse

$$b_2 = -\langle (-\tau \mathbf{N}, -\kappa \mathbf{T} + \rho \mathbf{B}) \rangle = -(\tau \kappa \langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle - \tau \rho \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle) = 0$$

elde edilir.

b_3 değerini bulmak için $\Phi(\mathbf{B}')$ ifadesi \mathbf{B} ile skaler çarpılırsa:

$$b_3 = \langle \Phi(\mathbf{B}'), \mathbf{B} \rangle = -\langle \mathbf{B}', \Phi(\mathbf{B}) \rangle$$

eşitliği düzenlenirse

$$b_3 = -\langle (-\tau \mathbf{N}, \rho \mathbf{N}) \rangle = -(\tau \rho \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle)$$

dır. Dolayısıyla

$$b_3 = -\tau \rho$$

elde edilir.

O halde bulduğumuz değerler ($b_1 = \tau \kappa$, $b_2 = 0$, $b_3 = -\tau \rho$) yerine yazılırsa;

$$\Phi(\mathbf{B}') = \kappa \tau \mathbf{T} - \tau \rho \mathbf{B}$$

elde edilir.

Teorem 3.3

$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ Öklid uzayında Frenet çatısında birim hızlı \mathbf{T} manyetik eğrisi olsun. O zaman, \mathbf{V} , 2- Manyetik vektör alanının bir 2- \mathbf{T} manyetik bir yörüngesidir. \mathbf{V} nin 2-manyetik vektör alanının 2- \mathbf{T} manyetik yörüngesi olması için gerek ve yeter şart

$$\mathbf{V} = \tau \mathbf{T} \times \kappa \mathbf{B} \quad (3.2)$$

dır (Kazan, H.B.Karadağ).

İspat:

Tanım 3.2 yi kullanarak ve

$$\mathbf{V} = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}$$

eşitliğini baz alarak

$$\Phi(\mathbf{T}') = \mathbf{V} \times \mathbf{T}'$$

denklemden şunu elde ederiz.

$$a = \tau, \quad c = \kappa, \quad \kappa' = 0 \quad (3.3)$$

olduğuna göre

$$(a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}) \times \kappa\mathbf{N} = \kappa(a\mathbf{B} + 0 - c\mathbf{T})$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\Phi(\mathbf{T}') = -\kappa^2\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}$$

olduğundan

$$\kappa(a\mathbf{B} + 0 - c\mathbf{T}) = -\kappa^2\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}$$

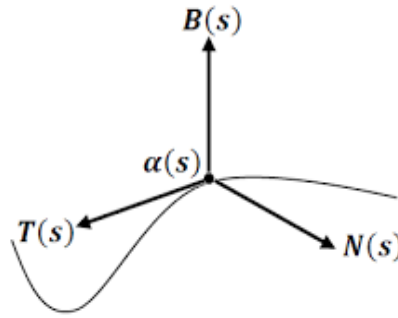
elde ederiz.

$$\kappa a\mathbf{B} = \kappa\tau\mathbf{B}, \quad \kappa'\mathbf{N} = 0, \quad -\kappa c\mathbf{T} = -\kappa^2\mathbf{T}$$

olduğuna göre

$$a = \tau, \quad \kappa' = 0, \quad c = 0$$

değerleri elde edilir. Şimdi ise b yi bulalım.



Şekil 3.1 Frenet Çatısı

$$V = \tau\mathbf{T} + b\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}$$

olsun. $\Phi(V) = 0$ olduğundan

$$\Phi(\tau\mathbf{T} + b\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}) = 0$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\tau\Phi(\mathbf{T}) + b\Phi(\mathbf{N}) + \kappa\Phi(\mathbf{B}) = 0$$

elde edilir. (3.1) den bildiğimiz Frenet vektörleri yerine yazılırsa

$$\tau(\kappa\mathbf{N}) + b(-\kappa\mathbf{T} + \rho\mathbf{B}) + \kappa(-\rho\mathbf{N}) = 0$$

eşitliği düzenlenirse

$$(\kappa\tau - \kappa\rho)\mathbf{N} - b\kappa\mathbf{T} + b\rho\mathbf{B} = 0$$

bulunur. Böylece

$$\kappa\tau\mathbf{N} - \kappa\rho\mathbf{N} = 0 \quad -b\kappa\mathbf{T} = 0, \quad \kappa\tau\mathbf{N} = \kappa\rho\mathbf{N} \quad b\rho\mathbf{B} = 0$$

eşitlikleri düzenlenirse

$$\tau = \rho, \quad b = 0$$

elde edilir.

O halde bulduğumuz değerler ($a = \tau$, $b = 0$, $c = \kappa$) yerine yazılırsa;

$$V = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$$

elde edilir.

Şimdi $\Phi(\mathbf{N}')$ ifadesini bulalım.

$$\Phi(\mathbf{N}') = V \times \mathbf{N}'$$

dır.

$$V = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}$$

olduğuna göre

$$\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$

Verilen çarpım yapılırsa;

$$(a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}) \times (-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) = a\tau\mathbf{N} - b\kappa\mathbf{B} - b\tau\mathbf{T} - \kappa c\mathbf{N}$$

eşitliği elde edilir.

$$\Phi(\mathbf{N}') = a\tau\mathbf{N} - b\kappa\mathbf{B} - b\tau\mathbf{T} - \kappa c\mathbf{N}$$

ise

$$(-\kappa^2 - \tau\rho)\mathbf{N} = a\tau\mathbf{N} - b\kappa\mathbf{B} - b\tau\mathbf{T} - \kappa c\mathbf{N}$$

elde edilir.

$$(-\kappa^2 - \tau\rho)\mathbf{N} = (a\tau - \kappa c)\mathbf{N}$$

dır.

$$c = \kappa \quad a = \rho \tag{3.4}$$

elde edilir.

$$-b\kappa\mathbf{B} - b\tau\mathbf{T} = 0$$

eşitliği düzenlenirse;

$$b = 0 \tag{3.5}$$

bulduğumuz değerler yerine yazılırsa;

$$V = \rho\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$$

elde edilir.

Son olarak $\Phi(\mathbf{B}')$ yi bulalım.

$$\Phi(\mathbf{B}') = V \times \mathbf{B}'$$

olduğuna göre

Verilen çarpım yapılırsa;

$$(a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}) \times (-\tau\mathbf{N}) = -a\tau\mathbf{B} + \tau c\mathbf{T}$$

elde edilir.

$$\Phi(\mathbf{B}') = \kappa\tau\mathbf{T} - \tau\rho\mathbf{B}$$

ise

$$-a\tau\mathbf{B} + \tau c\mathbf{T} = \kappa\tau\mathbf{T} - \tau\rho\mathbf{B}$$

elde edilir. Buradan

$$-a\tau\mathbf{B} = -\tau\rho\mathbf{B}, \quad \tau c\mathbf{T} = \kappa\tau\mathbf{T}$$

dır.

$$a = \rho, \quad c = \kappa$$

elde edilir.

b değerini bulmak için ise

$$\Phi(V) = 0$$

dır.

$$\rho\Phi(\mathbf{T}) + b\Phi(\mathbf{N}) + \kappa\Phi(\mathbf{B}) = 0$$

olduğundan (3.1) den bildiğimiz Frenet vektörleri yerine yazılırsa;

$$\rho\kappa\mathbf{N} - \kappa b\mathbf{T} + b\rho\mathbf{B} - \kappa\rho\mathbf{N} = 0$$

olur. Eşitlik düzenlenirse;

$$\rho\kappa\mathbf{N} - \kappa\rho\mathbf{N} = 0, \quad -\kappa b\mathbf{T} = 0$$

dır.

$$\rho\kappa\mathbf{N} = \rho\kappa\mathbf{N}, \quad b\rho\mathbf{B} = 0$$

eşitliği düzenlenirse

$$b = 0$$

elde edilir.

Bulduğumuz değerler ($a = \rho$, $b = 0$, $c = \kappa$) yerine yerleştirilirse;

$$V = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B} = V = \rho\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$$

elde edilir.

Tanım 3.4

$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$, bir V- 2-manyetik vektör alanının 2-T manyetik yörüngesi olsun. O zaman, α nın κ eğriliği sıfırdır ve

$$\rho = \tau = \langle \Phi(\mathbf{N}), \mathbf{B} \rangle \quad (3.6)$$

elde edilir.

İspat:

$$V = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B} \quad (3.1)$$

$$V = \rho\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B} \quad (3.3)$$

$$\tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B} = \rho\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$$

dir. O halde;

$$\tau = \rho$$

elde edilir.

(3.1), (3.2) ve (3.4) den aşağıdaki ifade elde edilir.

Tanım 3.5

$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$, bir V 2-manyetik vektör alanının 2-T manyetik yörüngesi olsun. O zaman, E^3 deki α boyunca \mathbf{T} vektör alanı, \mathbf{N} normal vektör alanı ve \mathbf{B} binormal vektör alanına göre kovaryant türeve Φ Lorentz kuvveti karşılık gelir yani $\forall X \in \{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ için $\nabla_{\alpha'} X = \Phi(X)$ dir. Ayrıca $\forall X \in \{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ için

$$\Phi^2(X) = \Phi(X')$$

elde ederiz. (Kazan, H.B.Karadağ).

Tanım 3.6

$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$, bir V - 2-manyetik vektör alanının 2-T manyetik yörüngesi olsun. O zaman,

$$\langle \mathbf{T}, \Phi(\mathbf{T}') \rangle = \langle \mathbf{B}, \Phi(\mathbf{B}') \rangle = \langle \mathbf{N}, \Phi(\mathbf{N}') \rangle = -(\kappa^2 + \tau^2)$$

elde edilir. (Kazan, H.B.Karadağ).

İspat:

(3.1) ve Tanım 3. 5 den

$$\langle \mathbf{T}, -\kappa^2 \mathbf{T} + \kappa' \mathbf{N} + \kappa \tau \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{B}, \kappa \tau \mathbf{T} - \tau \rho \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{N}, (-\kappa^2 - \tau \rho) \mathbf{N} \rangle = -(\kappa^2 + \tau^2)$$

verilen çarpımlar yapılırsa;

$$-\kappa^2 - \tau \rho = -\kappa^2 - \tau \rho = -(\kappa^2 + \tau^2)$$

Tanım 3.4 den

$$\tau = \rho$$

bulunmuştur.

3.2 Öklid Uzayında 2-N Manyetik Eğriler

Tanım 3.8

$\alpha; I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ Öklid uzayında bir N manyetik eğri ve V de E^3 de bir manyetik alan olsun. Eğer Frenet çatısındaki N teğet vektör alanı

$$\nabla_{\alpha'} \nabla_{\alpha'} N = \Phi(N') = V \times N'$$

2- Lorentz kuvvet denklem

ini karşılırsa bu eğriye 2- N manyetik eğri denir (Kazan, H.B.Karadağ).

Tanım 3.9

α , Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı 2- N manyetik eğri olsun.

O halde

$$\begin{bmatrix} \Phi(T') \\ \Phi(N') \\ \Phi(B') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\kappa^2 & 0 & \kappa\tau \\ -\kappa' & -\kappa^2 - \tau^2 & \tau' \\ \kappa\tau & 0 & -\tau^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

matris gösterimi ile verilebilir yani

$$\Phi(T') = -\kappa^2 T + \kappa\tau B$$

$$\Phi(N') = -\kappa' T + (-\kappa^2 - \tau^2)N + \tau' B$$

$$\Phi(B') = \kappa\tau T - \tau^2 B$$

elde edilir (Kazan, H.B.Karadağ).

İspat:

Öklid uzayında Frenet çatısına göre 2- N manyetik bir eğri olsun. Öklid uzayına ve Frenet çatısına göre $\{T, N, B\}$ tanımından Frenet çatısına göre 2- N manyetik eğri ve (3.1) de biliyoruz ki

$$\Phi(N') = -\kappa' T + (-\kappa^2 - \tau^2)N + \tau' B$$

dir. $\Phi(T') \in \{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olduğundan

$$\Phi(T') = a_1 T + a_2 N + a_3 B$$

dir. Öte yandan (3.1), (3.2) ve (3.7) den

$$\Phi(B') = \kappa\tau T - \tau^2 B$$

dir. Son olarak

$$\Phi(N') = b_1 T + b_2 N + b_3 B$$

olduğundan $\Phi(B') = \kappa\tau T - \tau^2 B$ kanıtlanır.

a_1 değerini hesaplamak için $\Phi(T')$ ifadesi ile T skaler çarpılırsa;

$$a_1 = \langle \Phi(\mathbf{T}'), \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{T}', \Phi(\mathbf{T}) \rangle = -\langle (\kappa \mathbf{N}, \kappa \mathbf{N}) \rangle = -\kappa^2 \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = -\kappa^2$$

elde edilir.

a_2 değerini hesaplamak için $\Phi(\mathbf{T}')$ ifadesi ile \mathbf{N} ile skaler çarpılırsa;

$$a_2 = \langle (\Phi(\mathbf{T}'), \mathbf{N}) \rangle = -\langle \mathbf{T}', \Phi(\mathbf{N}) \rangle = -\langle (\kappa \mathbf{N}, -\kappa \mathbf{T} + \rho \mathbf{B}) \rangle$$

olduğundan

$$a_2 = -(-\kappa^2 \langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle + \kappa \rho \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle) = 0$$

elde edilir.

Son olarak a_3 değerini hesaplamak için $\Phi(\mathbf{T}')$ ifadesi ile \mathbf{B} ile skaler çarpılırsa;

$$a_3 = \langle \Phi(\mathbf{T}'), \mathbf{B} \rangle = -\langle \mathbf{T}', \Phi(\mathbf{B}) \rangle = -\langle (\kappa \mathbf{N}, -\rho \mathbf{N}) \rangle = -\kappa \rho \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = -\kappa \rho$$

elde edilir. O halde;

$$\Phi(\mathbf{T}') = a_1 \mathbf{T} + a_2 \mathbf{N} + a_3 \mathbf{B}$$

olduğuna göre bulduğumuz a_1, a_2 ve a_3 değerlerini yerine yazılırsa;

$$\Phi(\mathbf{T}') = -\kappa^2 \mathbf{T} + \kappa \tau \mathbf{B}$$

olur. Şimdi ise sırasıyla b_1, b_2 ve b_3 değerlerini bulalım.

b_1 değerini bulmak için $\Phi(\mathbf{B}')$ ifadesi \mathbf{T} ile skaler çarpılırsa;

$$b_1 = \langle \Phi(\mathbf{B}'), \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{B}', \Phi(\mathbf{T}) \rangle = -\langle \tau \mathbf{N}, \kappa \mathbf{N} \rangle = -(-\tau \kappa \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle) = \tau \kappa$$

elde edilir. b_2 değerini bulmak için $\Phi(\mathbf{B}')$ ifadesi \mathbf{N} ile skaler çarpılırsa:

$$b_2 = \langle \Phi(\mathbf{B}'), \mathbf{N} \rangle = -\langle \mathbf{B}', \Phi(\mathbf{N}) \rangle = -\langle (-\tau \mathbf{N}, -\kappa \mathbf{T} + \rho \mathbf{B}) \rangle$$

olduğundan

$$b_2 = -(\tau \kappa \langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle - \tau \rho \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle) = 0$$

elde edilir. b_3 değerini bulmak için $\Phi(\mathbf{B}')$ ifadesi \mathbf{B} ile skaler çarpılırsa:

$$b_3 = \langle (\Phi(\mathbf{B}'), \mathbf{B}) \rangle = -\langle \mathbf{B}', \Phi(\mathbf{B}) \rangle = -\langle (-\tau \mathbf{N}, \rho \mathbf{N}) \rangle = -(\tau \rho \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle) = -\tau \rho$$

elde edilir.

O halde bulduğumuz değerler yerine ($b_1 = \tau \kappa$ $b_2 = 0$ $b_3 = -\tau \rho$) yerine yerleştirilirse;

$$\Phi(\mathbf{B}') = \kappa \tau \mathbf{T} - \tau \rho \mathbf{B}$$

elde edilir. Son olarak tanım 3.4

$$\tau = \rho$$

dir. O halde denklemi yeniden şöyle düzenleyebiliriz;

$$\Phi(\mathbf{B}') = \kappa \tau \mathbf{T} - \tau^2 \mathbf{B}$$

Tanım 3.10

$\alpha; I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ Öklid uzayında Frenet çatısında birim hızlı N manyetik eğrisi olsun. O zaman α , bir 2- manyetik V vektör alanının 2- N manyetik bir yörüngesidir ancak ve ancak 2- manyetik V vektör alanı α boyunca;

$$V = \tau T - \frac{\kappa'}{\tau} N + \kappa B = \tau T + \frac{\tau'}{\kappa} N + \kappa B$$

dir (Kazan, H.B.Karadağ).

İspat:

Manyetik vektör alanı V nin 2- N manyetik yörüngesiye Frenet çatısına göre Tanım 3.9 dan ve

$$V = aT + bN + cB$$

olarak $\Phi(T') = V \times T'$ den

$$a = \tau, \quad c = \kappa$$

olur.

Şimdi bulduğumuz değerleri denklemde yerine yazalım.

$$\Phi(T') = aT + bN + cB \times \kappa N = a\kappa B - c\kappa T$$

elde edilir.(3.9) denklemden;

$$\Phi(T') = -\kappa^2 T + \kappa \tau B$$

di. Bu iki ifade eşitlenirse

$$a\kappa B - c\kappa T = -\kappa^2 T + \kappa \tau B$$

eşitliği düzenlenirse

$$a\kappa B = \kappa \tau B, \quad -c\kappa T = -\kappa^2 T,$$

ya da

$$a = \kappa, \quad c = \kappa \tag{3.5}$$

elde edilir.

Şimdi aynı şekilde adım adım $\Phi(N')$ ifadesini bulalım;

$$\Phi(N') = V \times N'$$

dir.(3.9) dan $\Phi(N') = -\kappa' T + (-\kappa^2 - \tau^2)N + \tau' B$ olduğunu biliyoruz. Şimdi bildiğimiz değerleri yerine yazılırsa

$$\Phi(N') = (aT + bN + cB) \times (-\kappa T + \tau B) = a\tau N - b\kappa B - b\tau T - c\kappa N$$

elde ederiz. İfade düzenlenirse

$$-\kappa' T + (-\kappa^2 - \tau^2)N + \tau' B = a\tau N - b\kappa B - b\tau T - c\kappa N$$

elde edilir.Ayrıca gerekli denklemler yerine yazılırsa

$$(a\tau - c\kappa)N - b\kappa B - b\tau T = -\kappa' T + (-\kappa^2 - \tau^2)N + \tau' B$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$a\tau - c\kappa = (-\kappa^2 - \tau^2), \quad -b\kappa B - b\tau T = -\kappa' T + \tau' B$$

dır. Dolayısıyla

$$a = \tau, \quad c = \kappa, \quad b = \frac{-\kappa'}{\tau} = \frac{\tau'}{\kappa} \quad (3.6)$$

elde edilir.

Bulduğumuz değerleri denklemden yerine yazılırsa ;

$$V = aT + bN + cB$$

olduğundan

$$V = \tau T - \frac{\kappa'}{\tau} N + \kappa B = \tau T + \frac{\tau'}{\kappa} N + \kappa B$$

elde ederiz.

Son olarak $\Phi(B')$ ifadesinin değerini bulalım;

$$\Phi(B') = V \times B'$$

olduğundan

$$B' = -\tau N$$

dir.

$$(3.9) \text{ dan } \Phi(B') = \kappa\tau T - \tau^2 B$$

dir.

Şimdi bildiğimiz değerleri yerine yazılırsa;

$$\Phi(B') = (aT + bN + cB) \times (\kappa\tau T - \tau^2 B) = -a\tau B + c\tau T$$

Şimdi bildiğimiz ifadeleri eşitlenirse;

$$-a\tau B + c\tau T = \kappa\tau T - \tau^2 B$$

elde edilir. Buradan

$$c\tau T = \kappa\tau T - a\tau B = -\tau^2 B$$

olduğundan

$$c = \kappa, \quad a = \tau \quad (3.7)$$

elde edilir.

3.3 Öklid Uzayında 2-B Manyetik Eğriler

Tanım 3. 11

$\alpha; I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ Öklid uzayında bir B manyetik eğri ve V de E^3 de bir manyetik alan olsun. Eğer Frenet çatısındaki B teğet vektör alanı

$$\nabla_{\alpha'} \nabla_{\alpha'} B' = \Phi(B') = V \times B'$$

2- Lorentz kuvvet denklemini karşılırsa bu eğriye 2- \mathbf{B} manyetik eğri denir. (Kazan, H.B.Karadağ).

Tanım 3.12

Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı bir 2- \mathbf{B} manyetik eğri olsun.

O halde

$$\begin{bmatrix} \Phi(\mathbf{T}') \\ \Phi(\mathbf{N}') \\ \Phi(\mathbf{B}') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\kappa\gamma & 0 & \kappa\tau \\ 0 & -\kappa\gamma - \tau^2 & 0 \\ \kappa\tau & -\tau' & -\tau^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

matris gösterimi ile verilebilir ya da

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{T}') &= -\kappa\gamma\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{B} \\ \Phi(\mathbf{N}') &= (-\kappa\gamma - \tau^2)\mathbf{N} \\ \Phi(\mathbf{B}') &= \kappa\tau\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. Burada γ fonksiyonu $\gamma = \langle (\Phi(\mathbf{T}), \mathbf{N}) \rangle$ ile tanımlanan bir fonksiyondur (Kazan, H.B.Karadağ).

İspat:

$\alpha; I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ Öklid uzayında Frenet çatısına göre 2- \mathbf{B} manyetik bir eğri olsun. Öklid uzayına ve Frenet çatısına göre $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ tanımından Frenet çatısına göre 2- \mathbf{B} manyetik eğri ve (3.1) de biliyoruz ki $\Phi(\mathbf{B}') = \kappa\tau\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}$ dir. Önceden de $\Phi(\mathbf{T}') \in \{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$

$$\Phi(\mathbf{T}') = a_1\mathbf{T} + a_2\mathbf{N} + a_3\mathbf{B}$$

dir. Öte yandan (3.1),(3.2) ve (3.3) den

$$\Phi(\mathbf{T}') = -\kappa\gamma\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{B}$$

olduğunu biliyoruz.

Son olarak

$$\Phi(\mathbf{N}') = b^1\mathbf{T} + b^2\mathbf{N} + b^3\mathbf{B}$$

bilgisinden $\Phi(\mathbf{B}') = \kappa\tau\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}$ kanıtlanır.

Tanım 3.13

$\alpha; I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ Öklid uzayında Frenet çatısında \mathbf{B} manyetik eğrisi birim hızlı olsun. O zaman α , bir 2- manyetik \mathbf{V} vektör alanının 2- \mathbf{B} manyetik bir yörüngesidir ancak ve ancak 2- manyetik \mathbf{V} vektör alanı α boyunca;

$$\mathbf{V} = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B} \quad (3.9)$$

sağlar (Kazan, H.B.Karadağ).

İspat:

Manyetik vektör alanı \mathbf{V} nin $2-\mathbf{B}$ manyetik yörüngesiye Frenet çatısına göre Tanım (3.12) ü kullanarak ve

$$\mathbf{V} = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}$$

olarak

$\Phi(\mathbf{T}') = \mathbf{V} \times \mathbf{T}'$ den şunu elde ederiz (Kazan, H.B.Karadağ).

$$(a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}) \times (\kappa\mathbf{N}) = a\kappa\mathbf{B} - c\kappa\mathbf{T}$$

elde edilir.

$$\Phi(\mathbf{T}') = -\kappa\gamma\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{B}$$

olduğuna göre

$$-\kappa\gamma\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{B} = a\kappa\mathbf{B} - c\kappa\mathbf{T}$$

olduğundan

$$a = \tau, c = \kappa$$

elde edilir. Ayrıca

$$\Phi(\mathbf{N}') = \mathbf{V} \times \mathbf{N}'$$

eşitliğinden

$$a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B} \times -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} = -a\tau\mathbf{N} - \kappa b\mathbf{B} - c\kappa\mathbf{N}$$

olur. Böylece

$$\Phi(\mathbf{N}') = (-\kappa\gamma - \tau^2)\mathbf{N}$$

olduğuna göre

$$(-\kappa\gamma - \tau^2)\mathbf{N} = -a\tau\mathbf{N} - \kappa b\mathbf{B} - c\kappa\mathbf{N}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$-\kappa b = 0(-\kappa\gamma - \tau^2) = -a\tau - c\kappa$$

olduğundan

$$b = 0, a = \tau, c = \gamma \quad (3.10)$$

elde edilir. Son olarak

$$\Phi(\mathbf{B}') = \mathbf{V} \times \mathbf{B}'$$

eşitliğinden

$$a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B} \times -\tau\mathbf{N} = -a\tau\mathbf{B} + c\tau\mathbf{T}$$

bulunur. Ayrıca

$$\Phi(\mathbf{B}') = \kappa\tau\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}$$

olduğuna göre

$$\kappa\tau\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B} = -a\tau\mathbf{B} + c\tau\mathbf{T}$$

eşitliğinden

$$-a\tau\mathbf{B} = -\tau^2\mathbf{B}, \quad c\tau\mathbf{T} = \kappa\tau\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} = 0$$

dır. Dolayısıyla

$$a = \tau \quad c = \kappa \quad -\tau' = 0 \quad (3.11)$$

olur. Böylece bulunan değerler yerine yazılırsa;

$$\mathbf{V} = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$$

elde edilir.

Tersinden, Frenet çatısında 2-manyetik vektör alanı \mathbf{V} ve (3.9) olduğu kolayca görülebilir. Yani 2-B manyetik bir eğridir.

Tanım 3.14

α , bir 2- manyetik \mathbf{V} vektör alanının 2- \mathbf{B} manyetik bir yörüngesi olsun. Bu takdirde α nın τ burulması sabittir ve

$$\gamma = \kappa = \langle (\Phi(\mathbf{T}), \mathbf{N}) \rangle$$

eşitliği sağlanır (Kazan, H.B.Karadağ).

İspat:

(3.2) ve (3.4) ifadelerinde şu sonuca varılır;

$$c = \gamma, \quad c = \kappa$$

dır. Dolayısıyla

$$\gamma = \kappa$$

elde edilir.

Tanım 3.15

$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$, bir \mathbf{V} - 2- Manyetik vektör alanının 2-B manyetik yörüngesi olsun. O zaman, E^3 deki α boyunca \mathbf{T} vektör alanı, \mathbf{N} normal vektör alanı ve \mathbf{B} binormal vektör alanına göre kovaryant türeve Φ Lorentz kuvveti karşılık gelir yani $\forall X \in \{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ için $\nabla_{\alpha'} X = \Phi(X)$ dir. Ayrıca $\forall X \in \{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ için

$$\Phi^2(X) = \Phi(X')$$

elde ederiz.

Tanım 3.16

α , bir 2- manyetik \mathbf{V} vektör alanının 2- \mathbf{B} manyetik bir yörüngesi olsun. Bu takdirde

$$\langle \mathbf{T}, \Phi(\mathbf{T}') \rangle = \langle \mathbf{B}, \Phi(\mathbf{B}') \rangle = \langle \mathbf{N}, \Phi(\mathbf{N}') \rangle = -(\kappa^2 + \tau^2)$$

dir (Kazan, H.B.Karadağ).

İspat:

$$\langle (\mathbf{T}, -\kappa^2 \mathbf{T} + \kappa' \mathbf{N} + \kappa \tau \mathbf{B}) \rangle + \langle (\mathbf{B}, \kappa \tau \mathbf{T} - \tau \rho \mathbf{B}) \rangle = \langle (\mathbf{N}(-\kappa^2 - \tau \rho) \mathbf{N}) \rangle = -(\kappa^2 + \tau^2)$$

verilen çarpımlar yapılırsa;

$$-\kappa^2 - \tau \rho = -\kappa^2 - \tau \rho = -(\kappa^2 + \tau^2)$$

elde edilir.

Tanım 3.14 den

$$\gamma = \kappa$$

olur.



4. 2- MANYETİK EĞRİLERİN AKIŞLARI

Bu bölümde Öklid uzayında 2-**T** manyetik, 2-**N** manyetik, 2-**B** manyetik eğrilerin akışlarını inceleyeceğiz ve bazı sonuçlar elde edeceğiz.

4.1 2-T Manyetik Eğrilerin Akışları

Tanım 4. 1

$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^3$ Öklid uzayında bir T -manyetik eğri olmak üzere ve $V \in E^3$ de bir manyetik alan olsun. Eğer Frenet çatısındaki T teğet vektörü

$$\nabla_{\alpha'} \nabla_{\alpha'} T = \Phi(T') = V \times T'$$

2-Lorentz kuvvet denklemini karşılırsa bu eğriye 2- T manyetik eğri denir. Ayrıca T, N, B vektörlerinin akış denklemleri

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) N + \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) B$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) T + \Psi B$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left(-g\tau - \frac{\partial h}{\partial s} \right) T - \Psi N$$

dır (Kwon, D.Y., Park, F.C., Chi, D.P.).

Şimdi 2-**T** manyetik alanlar için akış denklemlerini oluşturalım.

Teorem 4.1:

α, E^3 de bir 2-**T** manyetik eğri olsun. O zaman

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(T') = (-\kappa^3 - \kappa\tau) N + \kappa(\tau) B \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(N') = (\kappa^3 + c\kappa) T + (-\kappa^2\tau - \tau^2\rho) B \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(B') = \left(-g\tau - \frac{\partial h}{\partial s} \right) T - \Psi N \quad (4.3)$$

dır.

İspat. Öncelikle 3.1 de verilen denklemin s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{T}') = & \frac{\partial(-\kappa^2)}{\partial s} \mathbf{T} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 s} \kappa \right) \mathbf{N} + \frac{\partial}{\partial s} (\kappa\tau) \mathbf{B} - \kappa^2 (\kappa\mathbf{N}) + \frac{\partial}{\partial s} (-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) \\ & + (\kappa\tau)(-\tau\mathbf{N})\end{aligned}\quad (4.5)$$

elde edilir. Şimdi ifade düzenlenirse

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi(\mathbf{T}') = (-3\kappa\kappa')\mathbf{T} + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2)\mathbf{N} + (2\kappa'\kappa\tau + \kappa\tau')\mathbf{B}\quad (4.6)$$

bulunur. Verilen akış denkleminin t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \phi(\mathbf{T}') = & \frac{\partial}{\partial t} (-3\kappa\kappa')\mathbf{T} + \frac{\partial}{\partial t} (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2)\mathbf{N} + \frac{\partial}{\partial t} (2\kappa'\kappa\tau + \kappa\tau')\mathbf{B} \\ & + (-3\kappa\kappa') \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) \mathbf{N} + \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) \mathbf{B} + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2) \left(f\kappa \right. \\ & \left. + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) \mathbf{T} + \Psi \mathbf{B} + (2\kappa'\kappa\tau + \kappa\tau') \left(-g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) \mathbf{T} - \Psi \mathbf{N}\end{aligned}\quad (4.7)$$

elde edilir. Bu denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \phi(\mathbf{T}') = & \left(-3 \frac{\partial \kappa}{\partial t} \kappa' - 3\kappa \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) - (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2) \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) + (2\kappa'\tau \right. \\ & \left. + h\tau') g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) \mathbf{T} + \frac{\partial}{\partial t} (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2) \left(-3\kappa\kappa' \right) \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) \\ & + (2\kappa'\kappa\tau + \kappa\tau') \Psi \mathbf{N} + \frac{\partial}{\partial t} (2\kappa'\kappa\tau + \kappa\tau') - 3\kappa\kappa' \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) \\ & + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2) \Psi\end{aligned}\quad (4.8)$$

elde edilir. Burada \mathbf{T} , \mathbf{N} ve \mathbf{B} vektörleri ortak parantezine alınırsa

$$\begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \phi(\mathbf{T}') \\ = & \left(-3 \frac{\partial \kappa}{\partial t} \kappa' - 3\kappa \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial s} \right) - (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2) \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) - (2\kappa'\tau + \kappa\tau') \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) \right) \mathbf{T} \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial t} \kappa'' - 3\kappa\kappa^2 \frac{\partial \kappa}{\partial t} - \frac{\partial \kappa}{\partial t} \tau^2 - 2\kappa\tau \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) - 3\kappa\kappa' \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') \Psi \mathbf{N} \\ & + \left(2 \frac{\partial \kappa'}{\partial t} \tau + 2\kappa' \frac{\partial \tau}{\partial t} - 3\kappa\kappa' + \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) \right. \\ & \left. + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2) \Psi \right) \mathbf{B}\end{aligned}\quad (4.9)$$

elde edilir. Şimdi verilen akış denkleminin önce t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{T}') \\
&= \left(-2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial t}\right) \mathbf{T} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \kappa'\right) \mathbf{N} + \frac{\partial}{\partial t} (\kappa \tau) \mathbf{B} - \kappa^2 \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau\right) \mathbf{N} \\
&+ \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}\right) \mathbf{B} - \kappa' \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau\right) \mathbf{T} + \Psi \mathbf{B} - (\kappa \tau) \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}\right) \mathbf{T} \\
&+ \Psi \mathbf{N}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. Burada \mathbf{T} , \mathbf{N} ve \mathbf{B} vektörleri ortak parantezine alınır

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{T}') &= \left(-2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial t} - \kappa' \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau\right) - \kappa \tau \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}\right)\right) \mathbf{T} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \kappa' - \kappa^2 \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau\right) - \kappa \tau \Psi\right) \mathbf{N} \\
&+ \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} \tau + \kappa \frac{\partial \tau}{\partial t} - \kappa^2 \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}\right) - \kappa' \Psi\right) \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Şimdi verilen bu akış denkleminin s ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{T}') &= \left(-2\kappa' \frac{\partial \kappa}{\partial t} - 2\kappa \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t}\right) - \kappa'' \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau\right) - \kappa' \frac{\partial f}{\partial s} + f\kappa'\right) \\
&+ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} - \frac{\partial h}{\partial s} \tau - h\tau' - (\kappa' \tau + \kappa \tau') \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}\right) - \kappa \tau \left(\frac{\partial g}{\partial s} \tau + g\tau' + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2}\right)\right) \mathbf{T} \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \kappa'}{\partial t} - 2\kappa \kappa' \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau\right) - \kappa^2 \left(\frac{\partial f}{\partial s} \kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial h}{\partial s} \tau - h\tau'\right) - (\kappa' \tau + \kappa \tau') \Psi - (\kappa \tau) \frac{\partial \Psi}{\partial s}\right) \mathbf{N} \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t}\right) \tau + \frac{\partial \kappa}{\partial t} \tau' + \kappa' \frac{\partial \tau}{\partial t} + \kappa \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right) - 2\kappa \kappa' \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}\right) + \kappa^2 \left(\frac{\partial}{\partial s} g\tau + g\tau' + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} - \kappa'' \Psi - \kappa' \frac{\partial}{\partial s} \Psi\right)\right) \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemlerden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 1

$$\begin{aligned}
& -\kappa' \kappa g - \kappa'^2 f - \kappa' \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} - \kappa' \tau \frac{\partial h}{\partial s} - \kappa' \tau' h + \kappa \tau \tau' g - \kappa \tau \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} + \kappa' \frac{\partial \kappa}{\partial t} \\
& + \kappa \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t}\right) - \kappa^4 f - \kappa^3 \frac{\partial g}{\partial s} - \kappa^3 h\tau - \kappa^2 \tau^2 f - \kappa \tau^3 = 0
\end{aligned}$$

dır.

Sonuç 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \kappa'' - 3\kappa\kappa^2 \frac{\partial \kappa}{\partial t} - \frac{\partial \kappa}{\partial t} \tau^2 - 2\kappa\tau \frac{\partial \tau}{\partial t} - \kappa\kappa'' (f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau) + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') \\ + \frac{\partial}{\partial s} (\frac{\partial \kappa'}{\partial f}) - \kappa^2 (\frac{\partial f}{\partial s} \kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial h}{\partial s} \tau - h\tau') - (\kappa'\tau + \kappa\tau')\Psi - \kappa' \frac{\partial}{\partial s} \Psi = 0 \end{aligned}$$

dır.

Sonuç 3

$$\begin{aligned} -\kappa\kappa' (g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}) + (2\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2)\Psi + 2 \frac{\partial \kappa}{\partial t} \tau \\ + (2\kappa' - \frac{\partial \tau}{\partial t} \kappa') - \frac{\partial}{\partial s} (\frac{\partial \kappa}{\partial t}) \tau - \frac{\partial \kappa}{\partial t} \tau' - \kappa \frac{\partial}{\partial s} (\frac{\partial \tau}{\partial t}) + \kappa^2 (\frac{\partial}{\partial s} g\tau) + g\tau' + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} \\ + \kappa' \frac{\partial}{\partial s} \Psi = 0 \end{aligned}$$

dır. Ayrıca (3. 1) de verilen denklemin önce s ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi(N') = \frac{\partial}{\partial s} (-\kappa^2 - \tau\rho) \mathbf{N} + (-\kappa^2 - \tau\rho) (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) \quad (4.13)$$

elde edilir. Verilen bu akış denklemi düzenlenirse

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi(N') = \left(-2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial s} - \frac{\partial \tau}{\partial s} \rho - \tau \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) \mathbf{N} + (\kappa^3 + \tau\rho\kappa) \mathbf{T} - (\kappa^2 + \tau^2\rho) \mathbf{B} \quad (4.14)$$

elde edilir. Şimdi verilen akış denkleminin t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \phi(N') &= \frac{\partial}{\partial t} (\kappa^3 + \tau\rho\kappa) \mathbf{T} - \frac{\partial}{\partial t} \left(-2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial s} - \frac{\partial \tau}{\partial s} \rho - \tau \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) \mathbf{N} - \frac{\partial}{\partial t} (\kappa^2 + \tau^2\rho) \mathbf{B} \\ &+ (\kappa^3 + \tau\rho\kappa) \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) \mathbf{N} + \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) \mathbf{B} \\ &+ \left(2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial s} \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) \mathbf{T} - \Psi \mathbf{B} + (\kappa^2\tau + \tau^2\rho) (g\tau \\ &+ \frac{\partial h}{\partial s}) \mathbf{T} + \Psi \mathbf{N} \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Verilen akış \mathbf{T} , \mathbf{N} ve \mathbf{B} ortak parantezine alınıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \phi(\mathbf{N}') &= (3\kappa^2 \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial \tau \rho}{\partial t} \kappa + \tau \rho \frac{\partial \kappa}{\partial t} + (2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial s} \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial s} (f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau)) \\
&+ (\kappa^2 \tau + \tau^2 \rho) (g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}) \mathbf{T} \\
&+ (-2 \frac{\partial \kappa}{\partial t} \frac{\partial \kappa}{\partial s} - 2\kappa \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \kappa}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial s} \rho - \frac{\partial \tau}{\partial s} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial s} - \tau \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial s} + (\kappa^3 \\
&+ \tau \rho \kappa) (f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau) + (\kappa^2 \tau + \tau^2 \rho) \Psi \mathbf{N} \\
&+ (-2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial t} \tau - \kappa^2 \frac{\partial \tau}{\partial t} - 2\tau \frac{\partial \tau}{\partial t} \rho - \tau^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\kappa^3 + \tau \rho \kappa) (g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}) - (2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial \tau}{\partial s} \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial s}) \Psi) \mathbf{B} \tag{4.16}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\phi(\mathbf{N}')$ nin t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{N}') = \frac{\partial}{\partial t} (-\kappa^2 \tau \rho) \mathbf{N} - (\kappa^2 + \tau \rho) \left(- \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) \mathbf{T} + \Psi \mathbf{B} \right) \tag{4.17}$$

elde edilir. Verilen akış \mathbf{T} , \mathbf{N} ve \mathbf{B} ortak parantezine alınıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{N}') &= (\kappa^2 + \tau \rho) \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) \mathbf{T} - \left(2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \mathbf{N} - (\kappa^2 \\
&+ \tau \rho) \Psi \mathbf{B} \tag{4.18}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\phi(\mathbf{N}')$ nin s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{N}') &= \frac{\partial}{\partial s} (\kappa^2 + \tau \rho) \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) \mathbf{T} - \frac{\partial}{\partial s} \left(2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \mathbf{N} - \frac{\partial}{\partial s} (\kappa^2 \\
&+ \tau \rho) \Psi \mathbf{B} - \left(2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) \\
&+ (\kappa^2 + \tau \rho) \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) (\kappa \mathbf{N}) - (\kappa^2 + \tau \rho) \Psi (-\tau \mathbf{N}) \tag{4.19}
\end{aligned}$$

elde edilir. Verilen akış \mathbf{T} , \mathbf{N} ve \mathbf{B} ortak parantezine alınıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \phi(N') \\
&= (2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial s} \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial s})(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau) + (\kappa^2 + \tau\rho)(\frac{\partial f}{\partial s} \kappa + f \frac{\partial \kappa}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} - \frac{\partial h}{\partial s} \tau - h \frac{\partial \tau}{\partial s} + 2\kappa^2 \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \kappa\rho \frac{\partial \tau}{\partial t} + \kappa\tau \frac{\partial \rho}{\partial t})\mathbf{T} + (\kappa^2\tau + \tau^2\rho)\Psi + (\kappa^3 + \tau\rho\kappa)(f\kappa \\
&+ \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau) - 2\frac{\partial \kappa}{\partial s} \frac{\partial \kappa}{\partial t} - 2\kappa \frac{\partial}{\partial s} (\frac{\partial \kappa}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial s} (\frac{\partial \tau}{\partial t})\rho - \frac{\partial \tau}{\partial t} (\frac{\partial \rho}{\partial s}) - \frac{\partial \tau}{\partial s} (\frac{\partial \rho}{\partial t}) - \tau \frac{\partial}{\partial s} (\frac{\partial \rho}{\partial t})\mathbf{N} - (2\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial s} \\
&+ \frac{\partial \tau}{\partial s} \rho + \tau \frac{\partial \rho}{\partial s})\Psi + (\kappa^2 + \tau\rho) \frac{\partial}{\partial s} \Psi + 2\kappa\tau \frac{\partial \kappa}{\partial s} + \frac{\partial \kappa}{\partial t} \rho\tau + \tau^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{B} \tag{4.20}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemlerden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4

$$\begin{aligned}
& \kappa^2 \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial \tau \rho}{\partial t} \kappa + \tau \rho \frac{\partial \kappa}{\partial t} + (\kappa^2\tau + \tau^2\rho)(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}) - (\kappa^2 + \tau\rho) - \frac{\partial f}{\partial s} \kappa - f \frac{\partial \kappa}{\partial s} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial s^2} + \frac{\partial h}{\partial s} \tau \\
&+ h \frac{\partial \tau}{\partial s} - \kappa\tau (\frac{\partial \tau}{\partial t}) = 0
\end{aligned}$$

dır.

Sonuç 5

$$\frac{\partial}{\partial s} (\frac{\partial}{\partial t})\rho + \tau \frac{\partial}{\partial s} (\frac{\partial \rho}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \tau}{\partial s})\rho - \tau \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \rho}{\partial s}) = 0$$

dır.

Sonuç 6

$$(\kappa^3 + \tau\rho\kappa)(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s}) + (\kappa^2 + \tau\rho) \frac{\partial}{\partial s} - \kappa^2 \frac{\partial \tau}{\partial t} - \tau \frac{\partial \tau}{\partial t} \rho = 0$$

dır. Daha sonra (3.1) de verilen denkleminin önce s ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi(\mathbf{B}') = \frac{\partial}{\partial s} (\kappa\tau)\mathbf{T} + \kappa\tau(\kappa\mathbf{N}) - \frac{\partial}{\partial s} (\tau\rho)\mathbf{B} - (\tau\rho)(-\tau\mathbf{N}) \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada denklemimizi \mathbf{T} , \mathbf{B} ve \mathbf{N} ortak parantezine alınıp düzenlenirse

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi(\mathbf{B}') = (\kappa'\tau + \kappa\tau')\mathbf{T} + (\kappa^2\tau + \tau^2\rho)\mathbf{N} - (\tau'\rho + \tau\rho')\mathbf{B} \tag{4.22}$$

bulunur. Şimdi $\phi(\mathbf{B}')$ nin t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \phi(\mathbf{B}') &= \frac{\partial}{\partial t} (\kappa' \tau + \kappa \tau') \mathbf{T} + \frac{\partial}{\partial t} (\kappa^2 \tau + \tau^2 \rho) \mathbf{N} - \frac{\partial}{\partial t} (\tau' \rho + \tau \rho') \mathbf{B} + (\kappa' \tau \\
&+ \kappa \tau') (f \kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h \tau) \mathbf{N} + (g \tau + \frac{\partial h}{\partial s}) \mathbf{B} + (\kappa^2 \tau + \tau^2 \rho) (-f \kappa \\
&+ \frac{\partial g}{\partial s} - h \tau) \mathbf{T} + \Psi \mathbf{B} + (\tau' \rho + \tau \rho') (g \tau + \frac{\partial h}{\partial s}) \mathbf{T} \\
&+ \Psi \mathbf{N}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

bulunur. Burada verilen akış denklemi \mathbf{T} , \mathbf{B} ve \mathbf{N} ortak parantezine alınıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \phi(\mathbf{B}') &= \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \kappa}{\partial s}) \tau + \kappa' \frac{\partial}{\partial t} (\tau) + \frac{\partial \kappa}{\partial t} \tau' + \kappa \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \tau}{\partial s}) - (\kappa^2 \tau + \tau^2 \rho) (f \kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h \tau) \\
&+ (\tau' \rho + \tau \rho') (g \tau + \frac{\partial h}{\partial s}) \mathbf{T} + 2 \kappa \tau \frac{\partial \kappa}{\partial t} + \kappa^2 (\frac{\partial \tau}{\partial t}) + 2 \tau \rho \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau^2 (\frac{\partial \rho}{\partial t}) \\
&+ (\kappa' \tau + \kappa \tau') (f \kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h \tau) + (\tau' \rho + \tau \rho') \Psi \mathbf{N} + (\kappa^2 \tau + \tau^2 \rho) \Psi + (\kappa' \tau \\
&+ \kappa \tau') (g \tau + \frac{\partial h}{\partial s}) - \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial}{\partial s} \tau) \rho + \tau \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \rho}{\partial s}) \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

bulunur. $\phi(\mathbf{B}')$ önce t ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{B}') &= (\frac{\partial}{\partial t} (\kappa \tau) \mathbf{T} - \frac{\partial}{\partial t} (\tau \rho) \mathbf{B} + (\kappa \tau) (f \kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h \tau) \mathbf{N} + (g \tau + \frac{\partial h}{\partial s}) \mathbf{B} + \tau \rho (g \tau \\
&+ \frac{\partial h}{\partial s}) \mathbf{T} + \Psi) \mathbf{N}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

bulunur. Burada verilen akış denklemi \mathbf{T} , \mathbf{B} ve \mathbf{N} ortak parantezine alınıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{B}') &= (\frac{\partial}{\partial t} (\kappa \tau) + \kappa (\frac{\partial \tau}{\partial t}) + (\tau \rho) (g \tau + \frac{\partial h}{\partial s}) \mathbf{T} + (\kappa \tau) (f \kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h \tau) + \tau \rho \Psi) \mathbf{N} \\
&+ (g \tau + \frac{\partial h}{\partial s}) (\kappa \tau) - \frac{\partial \tau}{\partial t} \rho - \tau \frac{\partial \rho}{\partial t}) \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

bulunur. Verilen akış denkleminin s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{B}') &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} \right) \tau + \kappa \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau \rho \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) \mathbf{T} + \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} \right) \tau + \kappa \frac{\partial \tau}{\partial t} + (\tau \rho) (g\tau \\
&+ \frac{\partial h}{\partial s} (\kappa \mathbf{N}) + \frac{\partial}{\partial s} (\kappa \tau) \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) + \tau \rho \mathbf{N} + (-\kappa \tau + \tau \mathbf{B}) + \frac{\partial}{\partial s} (g\tau \\
&+ \frac{\partial h}{\partial s} (\kappa \tau) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \rho - \tau \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \mathbf{B} + (g\tau \\
&+ \frac{\partial h}{\partial s} (\kappa \tau) - \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \rho - \tau \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) (-\tau \mathbf{N})
\end{aligned} \tag{4.27}$$

bulunur. Burada verilen akış denklemi \mathbf{T} , \mathbf{B} ve \mathbf{N} ortak parantezine alınıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{B}') &= \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial t} \right) \tau + \frac{\partial}{\partial t} \kappa \tau' + \kappa' \frac{\partial \tau}{\partial t} + \kappa \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right) + (\tau' \rho + \tau \rho') \right) \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) \\
&+ (\tau \rho) \left(\frac{\partial g}{\partial s} \tau + g\tau' + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} - (\kappa^2 \tau) \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) \right) \mathbf{T} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \kappa \right) \tau \kappa \\
&+ \kappa^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right) + \tau \rho \kappa \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) + (\kappa' \tau + \kappa \tau') \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) + (\kappa \tau) \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \kappa \\
&+ f\kappa' + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} - \frac{\partial h}{\partial s} \tau - h\tau' + (\tau' \rho + \tau \rho') \Psi + (\tau \rho) \frac{\partial \Psi}{\partial s} - g\tau^3 \kappa - \kappa \tau^2 \frac{\partial h}{\partial s} \\
&+ (\tau \rho) \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{N} + (\kappa \tau^2) \left(f\kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h\tau \right) + \tau^2 \rho \Psi + \left(\frac{\partial g}{\partial s} \tau + g\tau' \right. \\
&+ \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} \left. \right) (\kappa \tau) + \left(g\tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) + (\kappa' \tau \\
&+ \kappa \tau') - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \rho - \frac{\partial \tau}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right) - \tau' \frac{\partial \rho}{\partial t} - \tau \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemlerden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 7

$$\tau \rho (f\kappa - h\tau^2 + \rho \tau' + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} + \frac{\partial g}{\partial s} \tau^2) = 0$$

dır.

Sonuç 8

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \kappa (\tau \kappa) - \tau \rho \kappa \left(g \tau + \frac{\partial h}{\partial s} \right) - (\tau \kappa) \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right) \kappa + f \kappa' + \frac{\partial^2 g}{\partial s^2} - \frac{\partial h}{\partial s} \tau - h \tau' \\ + (\tau \rho) \frac{\partial \Psi}{\partial s} - \rho \tau^3 \kappa - \kappa \tau^2 \frac{\partial h}{\partial s} + (\tau \rho) \frac{\partial}{\partial t} \tau + \tau^2 \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \end{aligned}$$

dır.

Sonuç 9

$$(\kappa \tau^2) \left(f \kappa + \frac{\partial g}{\partial s} - h \tau \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial s} \tau + g \tau' + \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} \right) (\kappa \tau) - \tau' \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho \right) - \tau \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho \right) + \kappa \tau^2 \Psi = 0$$

dır.

KAYNAKLAR

- Barros M.,Cabrerizo, L.,Fernandez, M., Romero,A., (2007), Magnetic vortex Filament flows, J Math Phys, 48, 1-27
- Bishop, R.L., (1975), There is more than one way to frame a curve, TheAmer. Math. Monthly, 82(3), 246-251.
- Bozkurt, Z., Gök, I., Yaylı, Y. And Ekmekci, F.N., (2013), A New Approach for Magnetic Curves in 3D Riemannian Manifolds, J. Math. Physics, DOI:10.1063/1.4870583,.
- Clain, C.,Crasmareanu, M., (2015), Magnetic Curves in Three-DimensionalQuasi-Para-Sasakian Geometry, Mediterr. J. Math., DOI 10.1007/s00009-015-0570-y.
- Do Carmo,M.P., (1976), Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Druta-Romaniucand, S.L.,Munteanu, M.I. , (2013), Killing magnetic curves in a Minkowski 3-space, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 14,383-396.
- Kwon, D.Y., Park, F.C., Chi, D.P., (2005), Inextensible Flows of Curves and Developable Surfaces , Apple. Math. Lett.,18, 1156-1162
- Hacısalıhoğlu, H. H., (2002), Diferensiyel Geometri, *Fen Fakültesi Yayınları*, Cilt 1. 269, Ankara.
- Kazan,A., Karadağ,H.B., (2017), Magnetic Curves According to Bishop Frame and Type-2 Bishop Frame in Euclidean 3-Space, British J. Math., 22(4), 1-18.
- Kazan,A., Karadağ, H.B., (2017), Magnetic Non-Null Curves According To Parallel Transport Frame In Minkowski 3-Space, Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1.,147-160.
- Kazan,A., Karadağ, H.B., (2017), 2 Magnetic curves in Euclidean 3-space,Theoretical Mathematic Applications, (7) 1, 15-28
- Kazan , A.,Karadağ,H.B., (2016), Magnetic Pseudo Null and Magnetic Null Curves in Minkowski 3-Space, Submitted.
- Munteanu, M.I., Nistor, A.I., (2012), The Classification of Killing Magnetic Curves in $S^2 \times \mathbf{R}$, Journal of Geometry and Physics, 62, 170-182.
- Munteanu, M.I., (2013), Magnetic Curves in a Euclidean Space: One example, Several Applications, Publications de L'Institut Mathematique, 94(108), 141-150.
- Özdemir,Z.,Gök, İ., Yaylı,Y., Ekmekçi, F.N., (2015), Notes on Magnetic Curves in 3D semi-Riemannian Manifolds, Turk J. Math., 39, 412-426.
- Sabuncuoğlu, A., (2001), Diferensiyel Geometri, *Nobel Yayınları*, 522, Ankara.
- Yılmaz, S.,Turgut, M., (2010), A new Version of Bishop Frame and an Application to Spherical Images,J. Math. Anal. Appl., 371, 764-776.