



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**UYUMLU UZAY ZAMAN KESİRLİ KİSMİ**  
**DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ İÇİN BAZI**  
**ANALİTİK ÇÖZÜMLER**

**Kübra AYCAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Şubat-2023**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**UYUMLU UZAY ZAMAN KESİRLİ KISMİ  
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ İÇİN BAZI  
ANALİTİK ÇÖZÜMLER**

**Kübra AYCAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Zeliha KÖRPİNAR**

**Şubat-2023**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL ve ONAYI

Kübra AYCAN tarafından hazırlanan “Uyumlu Uzay Zaman Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemleri İçin Bazı Analitik Çözümler” adlı tez çalışması 10/02/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Doç. Dr. Erdal KORKMAZ  
Muş Alparslan Üniversitesi,  
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

#### Danışman

Doç. Dr. Zeliha KÖRPINAR  
Muş Alparslan Üniversitesi,  
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi,  
İşletme Bölümü

.....

#### Üye

Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA  
Bitlis Eren Üniversitesi,  
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Yukarıdaki sonuç;  
Enstitü Yönetim Kurulu .../.../.... Tarih ve .../.... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI  
FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION THESIS**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Kübra AYCAN

Şubat 2023

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

### UYUMLU UZAY ZAMAN KESİRLİ KISMI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ İÇİN BAZI ANALİTİK ÇÖZÜMLER

**Kübra AYCAN**

**Muş Alparslan Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Zeliha KÖRPİNAR**

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, öncelikle tanım ve kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamızda kullanılan ADM ve VIM yöntemine ait bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, kesirli mertebeden uzay zaman Fisher denklemi VIM ve ADM yolu ile çözülmüştür. Dördüncü bölümde, elde edilen analitik çözümlerin fiziksel yorumları yapılmıştır.

**2023, 37 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Adomian ayrıştırma metodu, Conformable türev operatörü, kesirli Fisher denklemi, Varyasyonel iterasyon metodu.

## **ABSTRACT**

### **MS THESIS**

# **THE SOME ANALYTICAL SOLUTIONS FOR CONFORMABLE SPACE TIME FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION**

**Kübra AYCAN**

**Muş Alparslan University  
Natural and Applied Science  
Department of Mathematics**

**Advisor: Doç. Dr. Zeliha KÖRPINAR**

This study consists of four parts. The first part is the introduction of the study, and the definitions and concepts are given first. The second part, contains information on the ADM and VIM method used in our study. In the third part, the fractional space time Fisher equation and solved by the VIM and ADM path. In the fourth part, physical comments of analytical solutions obtained in section 3 were made.

**2023, 37 Pages**

**Keywords:** Adomian decomposition method, Conformable derivative operator, fractional Fisher equation, Variational iteration method

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, çalışmamın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayıran saygı değer hocam Doç. Dr. Zeliha KÖRPİNAR'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu süreç boyunca her daim yanımda olan değerli eşim Samet AYCAN'a teşekkür ederim.

Kübra AYCAN  
MUŞ-2023



## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	x
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....</b>	<b>3</b>
2.1 Temel Tanım ve Teoremler.....	3
2.2 Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller.....	8
<b>3. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜM BULMA METODLARI .....</b>	<b>15</b>
3.1 Varyasyonel İterasyon Metodu .....	15
3.2 Adomian Ayırıştırma Metodu .....	17
<b>4. ADM ve VIM KULLANILARAK ELDE EDİLEN ÇÖZÜMLER .....</b>	<b>19</b>
4.1 VIM İle Elde Edilen Çözüm .....	19
4.2 ADM İle Elde Edilen Çözüm.....	25
<b>5. GRAFİKSEL İFADELER ve FİZİKSEL YORUMLAR.....</b>	<b>28</b>
<b>6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....</b>	<b>35</b>
6.1 Sonuçlar .....	35
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>36</b>

## SİMGELER ve KISALTMALAR

### Simgeler

$\Gamma$	: Gamma
$\Sigma$	: Sigma
$\alpha$	: Alfa
$\Delta$	: Delta
$\partial$	: Kısmi Türev
!	: Faktöriyel
$\lambda$	: Lagrange çarpanı
Z	: Tam Sayılar Kümesi

### Kısaltmalar

ADM	: Adomian Ayrıştırma Metodu
VIM	: Varyasyonel İterasyon Metodu

## ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 5. 1** 2.16 denkleminin a) varyasyonel iterasyon metodu b) adomian ayrıştırma metodu kullanılarak conformable türev operatörü ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri ( $\alpha = 0.2$ ) ..... 30
- Şekil 5. 2** 2.16 denkleminin a) varyasyonel iterasyon metodu b) adomian ayrıştırma metodu kullanılarak conformable türev operatörü ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri ( $\alpha = 0.4$ ) ..... 31
- Şekil 5. 3** 2.16 denkleminin a) varyasyonel iterasyon metodu b) adomian ayrıştırma metodu kullanılarak conformable türev operatörü ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri ( $\alpha = 0.6$ ) ..... 31
- Şekil 5. 4** 2.16 denkleminin a) varyasyonel iterasyon metodu b) adomian ayrıştırma metodu kullanılarak conformable türev operatörü ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri ( $\alpha = 0.8$ ) ..... 31
- Şekil 5. 5** 2.16 denkleminin a) varyasyonel iterasyon metodu b) adomian ayrıştırma metodu kullanılarak conformable türev operatörü ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri ( $\alpha = 1$ ) ..... 32
- Şekil 5. 6** 2.16 denkleminin gerçek çözümünün yüzey grafiği ( $\alpha = 1$ ) (odibat ve momani, 2008), ..... 32
- Şekil 5. 7** 2.16 denkleminin varyasyonel iterasyon metodu kullanılarak conformable türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümlerinin ve gerçek çözümünün 2-boyutlu grafikleri ( $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, x = 0.4$ ) ..... 33
- Şekil 5. 8** 2.16 denkleminin adomian ayrıştırma metodu kullanılarak conformable türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümlerinin ve gerçek çözümünün 2-boyutlu grafikleri ( $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, x = 0.4$ ) ..... 34

## ÇİZELGELER DİZİNİ

- Çizelge 5. 1** 2.16 denkleminin adomian ayrıştırma metodu ve varyasyonel iterasyon metodu kullanılarak conformable kesirli türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümlerinin sayısal değerleri ..... 28
- Çizelge 5. 2** 2.16 denkleminin adomian ayrıştırma metodu kullanılarak conformable kesirli türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümlerinin ve gerçek çözümünün sayısal değerleri ve bu değerlerden elde edilen mutlak hata değerleri. .... 29
- Çizelge 5. 3** 2.16 denkleminin varyasyonel iterasyon metodu kullanılarak conformable kesirli türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümlerinin ve gerçek çözümünün sayısal değerleri ve bu değerlerden elde edilen mutlak hata değerleri. .... 30



## 1. GİRİŞ

Mühendislik ve fiziki bilimlerin birçok dalında meydana gelen problemlerin matematiksel modelleri, lineer olmayan diferensiyel denklemler barındırır. Bu nedenle lineer olmayan diferensiyel denklemlerin analitik veya sayısal çözümlerinin hesaplanması oldukça önemlidir. Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin, çok sınırlı sayıda olanları dışında büyük bir çoğunluğunun analitik çözümleri elde edilemez. Bundan dolayı lineer olmayan denklemlerin çözümleri sayısal metotlar ya da analitik yaklaşım metotlar aracılığıyla bulunabilmektedir.

Leibniz ve Newton tarafından detaylı bir şekilde incelenen bilinen türev ve integral terimlerinin geliştirilmesiyle kesirli dereceden türev ve integral terimleri elde edilmiştir. Kesirli türev için literatürde çeşitli tanımlar mevcuttur. Sık kullanılan bazı tanımlar Riemann-Liouville (R-L), Conformable, Caputo, Grünwald-Letnikov, türevleridir (Sökmen, 2012). Tanımlar arasında bağlantılar olmasına karşın tanımları, özellikleri ve fiziksel yorumları açısından değişkenlik gösterirler (Sökmen, 2012). Mesela, sabit bir fonksiyonun kesirli mertebeden türevi Riemann-Liouville kesirli türev tanımına göre sıfıra eşit olmamaktadır. Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türev tanımları bilinen türev özelliklerinden bölüm ve çarpım kuralını sağlamamaktadır (Ulu Akdaş, 2019). Conformable türev operatörü incelendiğinde ise çarpımın ve bölümün özellikleri gibi birçok türev özelliklerini sağladığı görülmektedir.

Kesirli dereceden diferansiyel denklemler; biyoloji, elektromanyetik, fizik, finans, mekanik mühendisliği, uygulamalı bilimler, kimya, kontrol teorisi, optik, fiber, termodinamik, ısı transferi, sinyal işleme, sürekli ortamlar mekaniği, elektrik kontrol teorisi, olasılık ve istatistik, hidrodinamik, sistem tanımlama, katı hal fiziği, kesirli dinamik gibi birçok dalda karşılaşılan problemleri meydana getiren olayları tanımlamak için kullanılır. Bununla birlikte kesirli mertebeden diferansiyel denklemler fiziksel durumların ifade edilmesine ve açıklanmasına yarar sağlar. Genel anlamda, bir kesirli dereceden kısmi türevli diferansiyel denkleme ait kesin bir çözüme ulaşılmasını sağlayan bir metot yoktur. Bu tarz denklemlere yönelik yaklaşık çözüm metotlarından birkaçı sonlu farklar metodu (Cui, 2009), sonlu elemanlar metodu (Huang ve ark., 2008), diferansiyel dönüşüm metodu (Odibat ve Momani, 2008), Adomian ayrıştırma metodu (El-Sayed ve ark., 2010), varyasyonel iterasyon metodu (Wu ve Lee, 2010), Homotopi pertürbasyon metodu (Ganji ve Sadighi, 2006) ve lineerleştirme metodu şeklindedir. Yaklaşık çözümler ve bunların bulunmasında kullanılan metotlar

matematikte ve mühendislikte oldukça sık kullanılan yöntemlerdir. Bazı diferansiyel denklemler analitik yöntemlerle çözülemiyor olabilir bu nedenle çözümün yaklaşık olarak hesaplanması verilerin incelenmesi ve karşılaştırılması açısından oldukça önemlidir.

Fisher denklemi fizik, nükleer fizik, biyofiziksel plazma fiziği gibi farklı uygulama alanlarında sıkça kullanılır. Bu yüzden bu denklem tipinin analitik çözümünü bulmak önemlidir. Çünkü bu çözümler bu modelin özelliklerini ve fiziksel yorumunu bilmek için yararlıdır. Aynı zamanda bu denklem fizikteki farklı dalga olaylarını da tanımlar (Arshad ve ark., 2017).



## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

### 2.1 Temel Tanım ve Teoremler

**Tanım 2.1** Diferansiyel denklemler, bir fonksiyonun ve bu fonksiyonun bazı derecelerden türevlerinin olduğu matematiksel denklemler olarak adlandırılır. Adi diferansiyel denklemler ise bir tek bağımsız değişkene bağlı türev barındıran diferansiyel denklemlerdir. Bir diferansiyel denklemin mertebesi denkleminde görülen en yüksek mertebeden türevin derecesidir.  $n$ . dereceden bir adi diferansiyel denklem genel ifadeyle,

$$F(x, y, y' \dots y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

kapalı şekilde ifade edilebilir (Duchateau ve Zachmann, 1986).

Bir  $\alpha < x < b$  aralığında tanımlanmış bir  $\Phi$  fonksiyonunun  $\alpha < x < b$  aralığında varolan bütün  $x$  ler için tanımlı ve ilk  $n$ . dereceden türeve sahip fonksiyonu,

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0$$

ise  $\Phi$  fonksiyonuna  $F(x, y, y' \dots y^{(n)}) = 0$  için bu denklemin çözümdür denir.

Genel çözüm, adi bir diferansiyel denklemde denklemin derecesi kadar sabit değeri parametre olarak varsayan bir eğri ailesidir. Çözüm fonksiyonunda ulaşılan sabitlerin her bir değerine karşılık bulunan çözüm de özel çözüm olarak adlandırılır. (Cerit, 1997)

**Tanım 2.2** Bir bağımlı ve en az iki bağımsız değişken içeren ve bağımlı değişkenin bağımsızlara göre farklı kademedeki kısmi türevlerini barındıran denklemler kısmi türevli diferansiyel denklemler olarak adlandırılır.  $z$  bağımlı;  $x$  ve  $y$  bağımsız değişkenleri temsil etmek üzere bir kısmi türevli diferansiyel denklem genel şekliyle,

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

olarak gösterilir. Burada,

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$$

şeklindedir. Bir tane bağımlı ve  $n$  adet bağımsız değişken içeren kısmi türevli denklemlerin genel ifadesi,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad z = z(x)$$

olsun,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, z_{x_1}, z_{x_2}, \dots, z_{x_n}, z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

şeklindedir. Burada  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bağımsız değişkenleri;  $z$  ise bağımlı değişkeni ifade etmektedir.

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x_i}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial y_j}; i, j = 1, 2, \dots, n$$

Kısmi türevli denklemin bir özel çözümü, keyfi fonksiyon veya parametre içermeyen kısmi türevli bir diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan bir fonksiyondur. Bir diğer deyişle bir kısmi türevli denklemin derecesi kadar keyfi fonksiyon içeren ve denklemi özdeş olarak karşılayan bir yüzey ailesi bu kısmi türevli denklemin genel çözümü olarak adlandırılır (Duchateau ve Zachmann, 1986).

**Tanım 2.3** Kısmi türevli bir diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken ve bu değişkenlerin denklemdeki tüm kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişkenle birlikte türevleri parantezine aldığımızda katsayılar sadece bağımsız değişkenlerin fonksiyonu haline geliyorsa bu denklem lineer diferansiyel denklem olarak isimlendirilir. Karşıt durumda lineer olmayan diferansiyel denklem olarak isimlendirilir.

**Tanım 2.4** Kısmi bir diferansiyel denklemin genel çözümü, denklemin derecesi kadar keyfi fonksiyon barındırır. Bu sebeple, bayağı diferansiyel denklemlerle karşılaştırıldığında kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek zordur. Başlangıçta modellenen probleme elverişli çözümün tespiti için problem meydana

getirilirken bir takım yardımcı şartlar lazımdır. Bu şartlar genel anlamda iki başlıkta ifade edilebilir.

i) Sınır Şartları: Sınır koşulları kısmi bir diferansiyel denklemin sağladığı  $\Omega$  bölgesinin  $T$  sınır boyunca sağlaması lazım olan şartları ifade eder. Sınır koşullarının üç çeşitli şekli  $\alpha, \beta$  ve  $g$  fonksiyonları  $\Gamma$  da tanımlı fonksiyonlar olarak özel adlarıyla aşağıdaki şekildedir:

Dirichlet şartı:  $u_{\Gamma} = g$ ,

Neumann şartı:  $\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma}} = g$ ,

karışık (mixed) veya Robin şartı:  $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$ ,

ii) Başlangıç Şartları: Başlangıç koşulları sistemin başlangıcında  $\Omega$  bölgesi boyunca sağlaması lazım olan şartları ifade eder. Genel anlamda, başlangıç gereksinimleri fonksiyonun ve zamana göre türevinin bileşimi şeklindedir.

Başlangıç gereksinimleri bir arada verilmiş diferansiyel denklem ‘Cauchy problemi’ olarak adlandırılır.

İkinci mertebeden, iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem,

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

yaygın haliyle ifade edilebilir. Burada katsayı fonksiyonları  $A, B, C, D, E, F$  ve  $G$  fonksiyonu da sabit veya değişken içeren fonksiyondur anlamına gelir. Bu denklem,  $\Delta = B^2 - 4AC$  diskriminantının işaretine göre aşağıdaki gibi gruplandırılır;

$\Delta > 0$  ise Hiperbolik,

$\Delta = 0$  ise Parabolik,

$\Delta < 0$  ise Eliptik,

rastgele bir kalıptaki problemin çözümü, klasik Hadamard testinin gerektirdiği gibi aşağıdaki üç koşulu geçerli kılan problem ‘iyi durumlu’ en az bir koşulu geçerli kalmazsa ‘kötü durumlu’ şeklinde ifade edilir. Bu koşullar aşağıda verildiği gibi ifade edilmektedir.

1) Varlık

2) Teklik

3) Kararlılık

Bir denkleme ait çözümün var olduğunu göstermenin en iyi yöntemi problemdeki tüm koşulları geçerli kılan ve problemde yerleştirildiğinde denklemi sağlayan bir çözüm

yapılandırılmaktadır. Eğer ki çözümün tekliği ifade edilirse denklemin çözümüne ulaşılmış anlamına gelir. Kısmi diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklemlere nazaran çözüm yöntemleri seri veya integraller gibi limit metotları barındırır ve çözümler daima elementer fonksiyonların kapalı halinde gösterilemez. Bu halde, bir yaklaşık çözüm incelenir ve başlangıç koşulundaki küçük bir değişim, çözüme küçük bir değişiklik olarak etki ederse bu çözüme kararlıdır denir ve çözüm kararlı kabul edilir (Gustafson, 2012).

**Tanım 2.5** Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyonu ve fonksiyonun türevleri üstünde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen gereksinimler altında çözümlerinin problemi başlangıç değer problemi, verilen gereksinimler de başlangıç şartı olarak adlandırılır (Dennemeyer, 1968).

**Tanım 2.6** Kompleks değişkenli bir  $f$  fonksiyonu, bir  $z_0$  noktasının belirli bir  $D(z_0, \delta)$  komşuluğundaki tüm noktalarda diferansiyellenebiliyorsa  $f$ ,  $z_0$  noktasında analitik olarak ifade edilir. Eğer kompleks değişkenli bir  $f$  fonksiyonu  $C$  Kompleks sayılar kümesindeki tüm noktalarda analitikse  $f$  tam fonksiyon olarak ifade edilir (Franklin, 1964).

**Tanım 2.7**  $D$  kapalı bölgesinde  $f(x, y)$  fonksiyonu tanımlansın. Eğer her  $(x, y_1) \in D$  ve  $(x, y_2) \in D$  çiftleri için,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \quad (2.3)$$

olacak biçimde bir  $K$  sayısı elde edilebiliyorsa,  $f(x, y)$  fonksiyonu  $D$  üzerinde Lipschitz şartını sağlıyor olarak ifade edilir (Özer ve Eser, 2002).

**Tanım 2.8** Diferansiyel denklemlere ait varlık ve teklik teoremi aşağıdaki haliyle verilebilir (Özer ve Eser, 2002).

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \quad (2.4)$$

başlangıç değer problemini inceleyelim.  $D$  bölgesi merkezi  $(x_0, y_0)$  noktasında olan

$$|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, \quad (2.5)$$

şeklinde bir dikdörtgensel bölge olarak tanımlandığını kabul edelim. Bununla birlikte (2.3) denklemindeki  $f$  fonksiyonu ve  $\frac{\partial f}{\partial y}$  kısmi türevi  $D$  de  $y'$ 'ye göre Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu şartlar altında  $|f(x, y)| \leq m$  ve  $h = \min\left(a, \frac{b}{m}, \frac{1}{K}\right)$  olsun ve aşağıda verilen özelliklere sahip bir  $F(x)$  fonksiyonu  $|x - x_0| \leq h$  aralığı vardır.

- i)  $y = F(x)$ , (2.3) denkleminin  $|x - x_0| \leq h$  aralığında bir çözümdür.
- ii)  $F(x)$  fonksiyonu  $|x - x_0| \leq h$  aralığında  $|F(x) - y_0| \leq b$  eşitsizliğini karşılar.
- iii)  $F(x_0) = y_0$  dır.
- iv) i,ii,iii, özelliklerinin tümünü aynı anda sağlayan  $|x - x_0| \leq h$  aralığında tanımlı olan  $F(x)$  fonksiyonu bir tanedir.

**Tanım 2.9**  $X$  ve  $Y$  boş olmayan kümeler ve  $D \subset X$  olarak verilsin.  $D$ 'nin tüm elemanına  $Y$ 'nin bir elemanını karşılık getiren bir kural  $D$ 'den  $Y$ 'ye bir operatör veya dönüşüm olarak adlandırılır.

**Tanım 2.10**  $X$  ve  $Y$  aynı bir  $K$  cismi üzerinde iki lineer uzay olsun ve  $A: X \rightarrow Y$  dönüşümü verilmiş olsun.  $X_0$  cümlesi  $X$  uzayının bir alt uzayı olarak verilsin. Eğer  $\forall x, y \in X_0$  ve  $\forall a, \beta \in K$  için

$$A(ax + \beta y) = aA(x) + \beta A(y)$$

ise  $A$  operatörü lineer operatör olarak adlandırılır.

**Tanım 2.11**  $L$ ,  $D(L)$  tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olsun,  $Ly = \lambda y$  eşitsizliğini karşılayan  $y(x) \neq 0$  fonksiyonu var ise  $\lambda$ 'ya  $L$  operatörünün öz değeri,  $y(x, \lambda)$  fonksiyonu ise  $\lambda$ 'ya denk öz fonksiyon olarak adlandırılır (Levitan ve ark., 1975).

**Tanım 2.12**  $a \in R$  ve  $\forall k = 0, 1, 2, \dots$  için  $c_k \in R$  olmak üzere

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_k (x - a)^k = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + \dots$$

şeklinde ifade edilen seri *kuvvet serisi* olarak adlandırılır. Buradaki  $c_k$  sayıları serinin katsayıları olarak isimlendirilir.

## 2.2 Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller

**Tanım 2.13** Gama fonksiyonu,  $n > 0$  için,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n-1} du$$

ile ifade edilir. Bu integral  $n > 0$  için yakınsaktır (Kannappan, 2009). Gama fonksiyonunun birkaç özelliği aşağıdaki gibidir.

$$1) \Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!$$

$$2) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}, \quad 0 < p < 1$$

**Tanım 2.14**  $f$  fonksiyonun her sonlu  $(a, x)$  aralığında sürekli ve integrallenebilir olduğunu varsayalım.  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $m - 1 < \alpha \leq m$  olarak verilsin,  $x > a$  için reel bir  $f$  fonksiyonunun  $\alpha$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x f(t)(x-t)^{m-\alpha-1} dt \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilir.

$\alpha$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali,

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, x > 0 \quad (2.7)$$

$$J^0 f(x) = f(x)$$

şeklinde ifade edilir (Podlubny ve ark., 2009).

$$J^0 f(x) = f(x).$$

$$1. J^\alpha J^\beta f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x)$$

$$2. J^\alpha J^\beta f(x) = J^\beta J^\alpha f(x)$$

$$3. J^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}$$

**Teorem 2.1**  $\lambda > -1$  olmak üzere  $f(x) = x^\lambda$  fonksiyonunun  $\alpha$ .mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_x^\alpha \{x^\lambda\} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} x^{\lambda-\alpha} \text{ şeklindedir.}$$

**Tanım 2.15** (2.6)'da verilen Riemann-Liouville kesirli türev tanımı, kesirli türev ve integral teorisinin ilerlemesinde ve bu tanım ve teorinin matematikteki uygulamalarında dikkate değer bir yer edinir. Uygulama problemleri, başlangıç şartları fiziksel olarak yorumlanabilir kesirli türev tanımlarına ihtiyaç duyar. Buradan, Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımının uygulama problemlerini yorumlamada yeterli olmadığı elde edilmiştir. Çünkü Riemann-Liouville tanımı

$t = 0$  noktasında Riemann-Liouville kesirli türevinin limit değerleri şeklinde tanımlanan başlangıç şartlarına sahiptir. Mesela;  $b_1, b_2, \dots, b_m$  keyfi sabitler olarak verilsin,

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(z) = b_1$$

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(z) = b_2$$

... = ...

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-m} f(z) = b_m$$

şeklinde tanımlanan başlangıç şartları ortaya çıkar. Bu şekildeki başlangıç şartlarına sahip başlangıç-değer problemleri matematiksel anlamda başarılı olarak çözülmesine karşın, bu sonuçlar kullanışsızdır. Çünkü bu tipe ait başlangıç şartlarının bilinen fiziksel bir yorumu mevcut değildir.

Kesirli diferansiyel tanımlarında başlangıç şartlarını fiziksel yorumlara en uygun biçimde ifade eden M. Caputo olmuştur. Caputo'nun tanımı;  $m$  pozitif tam sayı olsun  $m - 1 < \alpha \leq m$  için

$${}_a D_z^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^z (z-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir.

$f(z)$  fonksiyonunun normal şartlar altında  $\alpha \rightarrow m$  için Caputo türevi,  $f(z)$  fonksiyonunun  $m$ . mertebeden genel türevine eşittir.

Caputo türevi için,

$$D^\alpha x^\beta = 0, \quad \beta < \alpha$$

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha}, \quad \beta \geq \alpha.$$

nitelikleri geçerlidir.

**Tanım 2.16**  $\alpha$ 'dan büyük en küçük tam sayı  $n$  olacak şekilde  $u(x, t)$  fonksiyonunun  $\alpha$ . basamaktan Caputo zaman-kesirli türev operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir (Podlubny ve Igor, 2000).

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial \tau^n} d\tau,$$

$$n-1 < \alpha \leq n, \quad (2.9)$$

$$D_t^n u(x, t) = \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n}, \quad n \in N$$

**Tanım 2.17**  $t = t_0$  noktasında bir kesirli kuvvet serisi açılımı

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (t-t_0)^{m\alpha} = c_0 + c_1(t-t_0)^\alpha + c_2(t-t_0)^{2\alpha} + \dots,$$

$$0 \leq m-1 < \alpha \leq m, \quad t \geq t_0, \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilir (Podlubny ve Igor, 2000).

**Tanım 2.18**  $t = t_0$  noktasında  $f(x)$  fonksiyonunun bir kesirli kuvvet serisi açılımı

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x) (t-t_0)^{m\alpha} = f_0(x) + f_1(x)(t-t_0)^\alpha + f_2(x)(t-t_0)^{2\alpha} + \dots,$$

$$0 \leq m - 1 < \alpha \leq m, \quad t \geq t_0, \quad (2.11)$$

şeklinde verilir (Podlubny ve Igor, 2000).

**Tanım 2.19**  $t = t_0$  noktasında  $u(x, t)$  fonksiyonunun Caputo kesirli türev operatörü kullanılarak kesirli kuvvet serisi açılımı

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_t^{m\alpha} u(x, t_0)}{\Gamma(m\alpha + 1)} (t - t_0)^{m\alpha}, \quad (2.12)$$

$$0 \leq m - 1 < \alpha \leq m, \quad x \in I, \quad t_0 \leq t < t_0 + R,$$

şeklinde verilir. Bu ifadede genelleştirilmiş Taylor seri formüllerinden yararlanılmıştır.

$\alpha = 1$  olduğunda (2.12) denklemi genel Taylor serisine eşit olur.

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^m u(x, t_0)}{\partial t^m} \frac{(t - t_0)^m}{m!}, \quad x \in I, \quad t_0 \leq t < t_0 + R, \quad (2.13)$$

**Tanım 2.20** Araştırmacılar son zamanlarda, gerçek dünyada karşılaştığımız bazı problemleri modelleyebilmek amacıyla birçok kesirli türev tanımı sunmuşlardır. Yaygın kesirli türev tanımlarından biri Riemann-Liouville kesirli dereceden türevidir. Bu tanım, gerçek dünyada karşılaşılan problemleri modellemek amacıyla her zaman elverişli olmayabilir. Diğer bir kesirli türev tanımı ise Caputo türevidir. Caputo türev tanımı, fiziksel alanda karşılaşılan problemleri modellemekte ve çözüm bulmakta son derece avantaj sahibidir ama yeterli olduğu söylenemez. Bununla beraber, Khalil ve arkadaşları, kompleks sistemlerin dinamiklerini daha iyi modelleyebilmek amacıyla kısa bir zaman önce sundukları yeni türev tanımının genel türevin niteliklerini sağladığını ifade etmişlerdir. Conformable kesirli türev tanımının, başka kesirli türev tanımlarının tersine bölüm kuralını, Çarpım kuralını, Zincir kuralını karşıladığını Khalil ve arkadaşları izah etmişlerdir. Önerilen bu yeni kesirli türevin klasik türevin sağladığı bu özellikleri sağlaması bu yeni tanımın var olan kesirli türev tanımlarına kıyasla daha yararlı olduğunu göstermektedir.

Bir  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu olmak üzere, burada bütün  $t > 0$  ve  $\alpha \in (0, 1]$  için  $f$  fonksiyonunun  $\alpha$ . basamaktan conformable kesirli türevi,

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.14)$$

şeklinde ifade edilir (Khalil ve ark, 2014).

Burada  $a > 0$  olarak verilsin,  $(0, a)$  aralığındaki değerler için  $f$  fonksiyonu,  $\alpha$ -diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$  mevcut ise

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

olduğuna ulaşılır.

Bazen,  $T_{\alpha}(f)(t)$  ifadesinde  $f^{(\alpha)}(0)$  yazarak,  $\alpha$ . mertebeden  $f$  fonksiyonunun, conformable kesirli türevleri ifade edilebilir. Bununla birlikte,  $\alpha$ . dereceden  $f'$  nin conformable kesirli türevi bulunuyorsa, o zaman  $f$ ,  $\alpha$ -türevlenebilirdir olarak ifade edilir (Khalil ve ark., 2014).

**Teorem 2.2** Eğer  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\alpha \in (0, 1]$  aralığında tanımlanmış ve  $t_0 > 0$  da  $\alpha$  diferansiyellenebilen bir fonksiyon olduğu zaman  $f$  fonksiyonu  $t_0$  da süreklidir şeklinde ifade edilir (Khalil ve ark., 2014).

**Teorem 2.3**  $\alpha \in (0, 1]$  ve  $f, g$  bir  $t > 0$  noktasında  $\alpha$ -diferansiyellenebilen iki fonksiyon kabul edilsin. Dolayısıyla  $T_{\alpha}$  aşağıda gösterilen tüm nitelikleri geçerli kılar (Khalil ve ark., 2014).

- a)  $T_{\alpha}(af + bg) = aT_{\alpha}(f) + bT_{\alpha}(g), \forall a, b \in \mathbb{R}$
- b)  $T_{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha}, \forall p \in \mathbb{R}$  için,
- c) Bütün sabit  $f(t) = \lambda$  için,  $T_{\alpha}(\lambda) = 0$  dır.
- d)  $T_{\alpha}(fg) = fT_{\alpha}(g) + gT_{\alpha}(f)$
- e)  $T_{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_{\alpha}(f) - fT_{\alpha}(g)}{g^2}$
- f)  $f$  diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise,  $T_{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$  dır.

Bazı fonksiyonlara ait conformable kesirli türevleri aşağıdaki gibi gösterilmiştir (Khalil ve ark., 2014).

- a)  $T_{\alpha}(1) = 0$

- b)  $T_\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha}e^{cx}, c \in \mathbb{R}$   
c)  $T_\alpha(\sin bx) = bx^{1-\alpha}\cos bx, b \in \mathbb{R}$ .  
d)  $T_\alpha(\cos bx) = -bx^{1-\alpha}\sin bx, b \in \mathbb{R}$ .  
e)  $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = 1$   
f)  $T_\alpha\left(\sin \frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = \cos \frac{1}{\alpha}t^\alpha$   
g)  $T_\alpha\left(\cos \frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = -\sin \frac{1}{\alpha}t^\alpha$   
h)  $T_\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}\right) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$

**Teorem 2.4**  $f$  fonksiyonunu, bir  $t_0$  komşuluğundaki  $0 < \alpha \leq 1$  için, sonsuz  $\alpha$ -türevlenebilir bir fonksiyon olarak kabul edelim.  $f$  fonksiyonuna ait kesirli kuvvet serisi açılımı,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T_\alpha^{t_0} f)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}, t_0 < t < t_0 + R\frac{1}{\alpha}, \quad R > 0 \quad (2.15)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $(T_\alpha^{t_0} f)^{(k)}(t_0)$  ifadesi kesirli türevin  $k$  defa uygulanması demektir (Ünal ve ark., 2016).

**Tanım 2.21**  $0 < \alpha \leq 1$  için

$$I_\alpha^a(f)(t) = \int_a^t f(x) d_\alpha(x, a) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx$$

$I_\alpha^a$  operatörüne  $\alpha$ - mertebeden soldan conformable kesirli integral denir.

**Tanım 2.22** Conformable türev  $\alpha \in (0,1)$  olmak üzere aşağıdaki ifade olarak tanımlanır (Khalil ve ark., 2014)

$${}_t D^\alpha f(t) = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{f(t + \vartheta t^{1-\alpha}) - f(t)}{\vartheta}, \quad f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Conformable türevin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir (Khalil ve ark, 2014).

$$\begin{aligned}
a) {}_t D^\alpha t^n &= n t^{\alpha-n}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\
b) {}_t D^\alpha (f \circ g) &= t^{1-\alpha} g'(t) f'(g(t)), \\
c) {}_t D^\alpha \left( \frac{f}{g} \right) &= \frac{g {}_t D^\alpha f - f {}_t D^\alpha g}{g^2}, \\
d) {}_t D^\alpha (fg) &= f {}_t D^\alpha g + g {}_t D^\alpha f, \\
e) {}_t D^\alpha f(t) &= t^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\
f) {}_t D^\alpha (\sin bt) &= b t^{1-\alpha} \cos(bt), \quad b \in \mathbb{R}, \\
g) {}_t D^\alpha (\cos bt) &= -b t^{1-\alpha} \sin(bt) \quad b \in \mathbb{R}, \\
h) {}_t D^\alpha (af + bg) &= a {}_t D^\alpha (af) + b {}_t D^\alpha (bg), \quad \forall \alpha, b \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

Son zamanlarda, kesirli hesaplamaların conformable türeviyle ilgili bir çok çalışma yapılmıştır.

Doğrusal olmayan Fisher denklemi, birçok uygulama alanında kullanıldığı için önemli bir fiziksel denklemdir. Örneğin, relativistik kuantum mekaniklerinde, sıfır spin parçacıkları içeren süreçleri açıklar. Doğrusal olmayan kesirli uzay-zaman Fisher denklemi,

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha u(x, t) - D_x^{2\alpha} u(x, t) - 6u(x, t) - 6u(x, t)^2 &= 0, \\
t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \leq 1, & \quad (2.16)
\end{aligned}$$

şekilde verilir (Odibat ve Momani, 2008). Bu çalışmadaki amacımız, doğrusal olmayan uzay-zaman Fisher denkleminin conformable türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümlerini araştırmaktır.

### 3. KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜM BULMA METODLARI

#### 3.1 Varyasyonel İterasyon Metodu

VIM nun uygulama adımları aşağıdaki gibi açıklanabilir. (Odibat ve Momani, 2008). Zaman kesirli bir kısmi diferansiyel denklemi şu şekilde ifade edelim

$$D_t^\alpha u(x, t) = f(u, u_x, u_{xx}) + g(x, t), \quad m - 1 < \alpha \leq m, \quad (3.1)$$

burada  $D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$  Conformable kesirli türev operatörüdür ve  $\alpha, m \in N$ ,  $f$  doğrusal olmayan bir fonksiyon ve  $g$  kaynak fonksiyonudur. Denklem (2.16) için başlangıç ve sınır koşullarını aşağıdaki gibi verebiliriz,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= h(x), \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x, t) &\rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

ve

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= h(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = k(x), \quad 1 < \alpha \leq 2, \\ u(x, t) &\rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.1) denklemine VIM nu uygularsak

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \int_0^t \lambda(\xi) \left( \frac{\partial^\alpha u_k(x, \xi)}{\partial \xi^\alpha} - f(\tilde{u}_k, (\tilde{u}_k)_x, (\tilde{u}_k)_{xx}) - g(x, \xi) \right) d\xi, \quad (3.4)$$

yazabiliriz. Burada  $\tilde{u}_k, (\tilde{u}_k)_x, (\tilde{u}_k)_{xx}$  f fonksiyonunun sınırlı varyasyonları,  $\delta \tilde{u}_n = 0$  ve  $\lambda$  genel Lagrange çarpanıdır (İnokuti ve ark., 1978).  $\lambda$  varyasyon terimi olarak tanımlanabilir. (2.16) denklemini sabit hale getirmek için (3.4) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\delta u_{(k+1)}(x, t) = \delta u_k(x, t) + \delta \int_0^t \lambda(\xi) \left( \frac{\partial^\alpha u_k(x, \xi)}{\partial \xi^\alpha} - g(x, \xi) \right) d\xi, \quad (3.5)$$

$$m-1 < \alpha \leq m$$

Lagrange çarpanı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\lambda = -1, \rightarrow m = 1$$

$$\lambda = \xi - t, \rightarrow m = 2$$

Dolayısıyla,  $m = 1$  için aşağıdaki yineleme formülünü elde ederiz:

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) - \int_0^t \left( \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x, \xi) - f(u_k, (u_k)_x, (u_k)_{xx}) - g(x, \xi) \right) d\xi \quad (3.6)$$

Bu durumda başlangıç şartı

$$u_0(x, t) = h(x). \quad (3.7)$$

şeklindedir.  $m = 2$  için aşağıdaki yineleme formülünü elde ederiz:

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \int_0^t (\xi - t) \left( \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x, \xi) - f(u_k, (u_k)_x, (u_k)_{xx}) - g(x, \xi) \right) d\xi \quad (3.8)$$

Bu durumda başlangıç şartı

$$u_0(x, t) = h(x) + tk(x)$$

şeklindedir. Düzeltme fonksiyonu (3.4) birkaç adım uygulanabilir. Bu metotla analitik çözüm

$$u(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x, t)$$

olarak elde edilir.

### 3.2 Adomian Ayrıştırma Metodu

Adomian ayrıştırma yöntemi, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde de sıklıkla kullanılır. Zaman kesirli doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemi aşağıdaki şekilde ifade edelim

$$D_t^\alpha u(x, t) + Lu(x, t) - Nu(x, t) = g(x, t), \quad x > 0 \quad (3.9)$$

(Odibat ve Momani, 2008).  $D_t^\alpha$  operatörünün tersi olan  $J^\alpha$  operatörü denklem (3.9)'un her iki tarafına da uygulanırsa ve ilk koşullar göz önünde bulundurulursa,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} + J^\alpha g(x, t) - J^\alpha [Lu(x, t) - Nu(x, t)], \quad (3.10)$$

elde edilir.  $u(x, t)$  çözüm fonksiyonu

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.11)$$

şeklinde ve denklem (3.10) daki doğrusal olmayan fonksiyon aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

Burada  $A_n$ , Adomian polinomları olarak adlandırılır. (3.11) i (3.10) denkleminde yerine yazarsak (Odibat ve Momani, 2008),

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} + J^\alpha g(x, t) - J^\alpha [L \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n] \quad (3.12)$$

elde edilir. Burada

$$u_0(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} + J^\alpha g(x, t) \quad (3.13)$$

$$u_1(x, t) = -J^\alpha(Lu_0 + Au_0),$$

$$u_2(x, t) = -J^\alpha(Lu_1 + Au_1),$$

.

.

.

$$u_{n+1}(x, t) = -J^\alpha(Lu_n + Au_n).$$

şeklindedir.



#### 4. ADM ve VIM KULLANILARAK ELDE EDİLEN ÇÖZÜMLER

##### 4.1 VIM İle Elde Edilen Çözüm

(2.16) Doğrusal olmayan uzay zaman kesirli Fisher denklemini

$$D_t^\alpha u(x, t) - D_x^{2\alpha} u(x, t) - 6u(x, t) - 6u(x, t)^2 = 0,$$

dikkate alalım (Odibat ve Momani, 2008). Bu denklem için başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = 1/(1 + e^x)^2 \quad (4.1)$$

olsun. (2.16) Fisher denkleminin tam çözümlerinden biri aşağıdadır (Odibat ve Momani, 2008).

$$u(x, t) = \frac{1}{(1 + e^{x-5t})^2} \quad (4.2)$$

(2.16) denklemini için iterasyon formülü, (3.6) formülünden

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) - \int_0^t \left( \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x, \xi) - \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} u(x, \xi) - 6u(x, \xi) - 6u(x, \xi)^2 \right) d\xi. \quad (4.3)$$

olarak verilir. Burada  $\int_0^t$ ,  $D_t^\alpha$  için 0 dan t'ye tanımlanan integral operatörüdür. O halde VIM algoritması kullanılarak,

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) - \int_0^t \left( \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x, \xi) - \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} u(x, \xi) - 6u(x, \xi) - 6u(x, \xi)^2 \right) d\xi. \quad (4.4)$$

yazılabilir. Yukarıdaki varyasyon iterasyon metoduna göre,  $u_0 = 1/(1 + e^x)^2$  ile başlayarak aşağıdaki yaklaşımları elde edebiliriz

$$u_0 = 1/(1 + e^x)^2 \quad (4.5)$$

$$u_1 = 1/(1 + e^x)^2 + (2e^x t x^{-2\alpha})((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} + (1 + e^x)x(-1 + \alpha))/(1 + e^x)^4$$

$$\begin{aligned} u_2 = & 1/(1 + e^x)^8((1 + e^x)^6 + 2e^x(1 + e^x)^4 t x^{-2\alpha}((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} \\ & + (1 + e^x)x(-1 + \alpha)) - 2e^x(-t(3(1 + e^x)^4(2 + e^x) + 3(1 \\ & + e^x)^2(-1 + 2e^x + e^{2x})t x^{-2\alpha}((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} + (1 \\ & + e^x)x(-1 + \alpha)) - 4e^x t^2 x^{-4\alpha}((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} + (1 \\ & + e^x)x(-1 + \alpha))^2) - 1/(-2 + \alpha)(1 + e^x)^4 t^{2-\alpha} x^{-2\alpha}(3(2 + e^x)x^{2\alpha} \\ & + x(-1 - x + \alpha + e^x(-1 + 2x + \alpha))) - (1 + e^x)^2 x^{1-4\alpha}((1 \\ & + e^x)^2 t x^{2\alpha}(-1 - x + \alpha + e^x(-1 + 2x + \alpha)) + 1/2 t^2(-1 - 7x \\ & - 6x^2 - x^3 + 6x^{2\alpha}(1 + x - \alpha) + 6\alpha + 18x\alpha + 6x^2\alpha - 11\alpha^2 \\ & - 11x\alpha^2 + 6\alpha^3 + 3e^x(-1 + 12x^2 + 6x^3 - 2x^{2\alpha}(1 + 8x - \alpha) + 6\alpha \\ & - 12x^2\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3) + 3e^{2x}(-1 + 7x + 6x^2 - 11x^3 + 6\alpha \\ & - 18x\alpha - 6x^2\alpha - 11\alpha^2 + 11x\alpha^2 + 6\alpha^3 + 6x^{2\alpha}(-1 + x + \alpha)) \\ & + e^{3x}(-1 + 8x^3 + 12x^{1+2\alpha} + 24x^2(-1 + \alpha) + 6x^{2\alpha}(-1 + \alpha) + 6\alpha \\ & + \alpha^2(-11 + 6\alpha) + 2x(-1 + \alpha)(-7 + 11\alpha)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 = & 1/(1 + e^x)^{10}(6e^x(1 + e^x)^6(2 + e^x)t + 12e^x(1 + e^x)^4(-1 + 2e^x \\ & + e^{2x})t^2 x^{-2\alpha}((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} + (1 + e^x)x(-1 + \alpha)) \\ & - (384e^{4x}t^7 x^{-8\alpha}((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} \\ & + (1 + e^x)x(-1 + \alpha))^4)/7(1 + e^x)^6 \\ & + (24e^{2x}(1 + e^x)^2 t^{5-2\alpha} x^{-4\alpha}((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} \\ & + (1 + e^x)x(-1 + \alpha))^2)/(-2 + \alpha)^2(-5 + 2\alpha) \\ & - (2e^x(1 + e^x)^6 t^{3-2\alpha} x^{-2\alpha}((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} \\ & + (1 + e^x)x(-1 + \alpha)))/(-3 + 2\alpha) + 2e^x(1 + e^x)^6 t x^{1-2\alpha}(-1 - x \\ & + \alpha + e^x(-1 + 2x + \alpha)) \\ & + 1/(1 + e^x)^4 16e^{3x}t^6 x^{-8\alpha}((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} \\ & + (1 + e^x)x(-1 + \alpha))^2((-1 + 18e^x - 33e^{2x} + 8e^{3x})x^4 + 18(-2 \\ & + 3e^x + 4e^{2x} + e^{3x})x^{4\alpha} + 12(1 - 6e^x + 3e^{2x} + 2e^{3x})x^{2+2\alpha} + 6(1 \\ & - 6e^x - 3e^{2x} + 4e^{3x})x^3(-1 + \alpha) + 12(-1 + e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3e^{2x} + e^{3x})x^{1+2\alpha}(-1 + \alpha) + (1 + e^x)^2(-1 + 2e^x)x^2(7 - 18\alpha + 11\alpha^2) \\
& + (1 + e^x)^3x(-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3)) - 4e^{2x}t^4x^{1-6\alpha}(2(1 - 17e^x \\
& + 63e^{2x} - 65e^{3x} + 16e^{4x})x^5 + 3(-8 + 91e^x - 154e^{2x} - 5e^{3x} \\
& + 32e^{4x})x^{3+2\alpha} + 18(4 - 23e^x + 2e^{2x} + 15e^{3x} + 4e^{4x})x^{1+4\alpha} + (-13 \\
& + 113e^x - 123e^{2x} - 145e^{3x} + 104e^{4x})x^4(-1 + \alpha) + 18(-2 + e^x \\
& + 7e^{2x} + 5e^{3x} + e^{4x})x^{4\alpha}(-1 + \alpha) + 6(14 - 61e^x - 48e^{2x} + 55e^{3x} \\
& + 28e^{4x})x^{2+2\alpha}(-1 + \alpha) + 6(1 + e^x)^2(1 - 5e^x + 4e^{2x})x^3(4 - 9\alpha \\
& + 5\alpha^2) + (1 + e^x)^4x(-1 + \alpha)^2(2 - 9\alpha + 10\alpha^2) + 3(1 + e^x)^3(2 \\
& + e^x)x^{2\alpha}(-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3) + (1 + e^x)^3(-1 + 2e^x)x^2(-14 \\
& + 55\alpha - 70\alpha^2 + 29\alpha^3) + 3(1 + e^x)^2x^{1+2\alpha}(-1 + \alpha)(20 - 32\alpha \\
& + 4e^{2x}(-5 + 8\alpha) + e^x(-33 + 53\alpha))) - 12e^{2x}t^4x^{-6\alpha}((1 - 20e^x \\
& + 69e^{2x} - 74e^{3x} + 16e^{4x})x^6 + 63(2 + e^x)^2(-1 + 2e^x + e^{2x})x^{6\alpha} \\
& + (-19 + 207e^x - 335e^{2x} + e^{3x} + 76e^{4x})x^{4+2\alpha} + 12(10 - 47e^x \\
& + 4e^{2x} + 35e^{3x} + 10e^{4x})x^{2+4\alpha} + (-7 + 65e^x - 69e^{2x} - 85e^{3x} \\
& + 56e^{4x})x^5(-1 + \alpha) + 2(31 - 150e^x - 133e^{2x} + 110e^{3x} \\
& + 62e^{4x})x^{3+2\alpha}(-1 + \alpha) + 60(-2 + e^x + 7e^{2x} + 5e^{3x} \\
& + e^{4x})x^{1+4\alpha}(-1 + \alpha) + (1 + e^x)^4x^2(-1 + \alpha)^2(1 - 5\alpha + 6\alpha^2) \\
& + 3(1 + e^x)^3(2 + e^x)x^{1+2\alpha}(-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3) + (1 + e^x)^3(-1 \\
& + 2e^x)x^3(-8 + 31\alpha - 40\alpha^2 + 17\alpha^3) + (1 + e^x)^2x^4(-1 + \alpha)(-13 \\
& + e^x(70 - 86\alpha) + 17\alpha + e^{2x}(-52 + 68\alpha)) + (1 + e^x)^2x^{2+2\alpha}(-1 \\
& + \alpha)(55 - 79\alpha + e^{2x}(-55 + 79\alpha) + e^x(-89 + 125\alpha))) \\
& + 2e^x(1 + e^x)^4t^2x^{1-4\alpha}(-1 - x^3 + 6x^{1+2\alpha} + 6x^2(-1 + \alpha) \\
& - 6x^{2\alpha}(-1 + \alpha) + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3 + x(-7 + 18\alpha - 11\alpha^2) \\
& - 3e^x(1 - 6x^3 + 16x^{1+2\alpha} + 12x^2(-1 + \alpha) - 2x^{2\alpha}(-1 + \alpha) - 6\alpha \\
& + 11\alpha^2 - 6\alpha^3) + 3e^{2x}(-1 - 11x^3 + 6x^{1+2\alpha} - 6x^2(-1 + \alpha) \\
& + 6x^{2\alpha}(-1 + \alpha) + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3 + x(7 - 18\alpha + 11\alpha^2)) \\
& + e^{3x}(-1 + 8x^3 + 12x^{1+2\alpha} + 24x^2(-1 + \alpha) + 6x^{2\alpha}(-1 + \alpha) + 6\alpha \\
& - 11\alpha^2 + 6\alpha^3 + 2x(7 - 18\alpha + 11\alpha^2))) \\
& - 1/((-3 + \alpha)(-2 + \alpha))2e^x(1 + e^x)^4t^{3-\alpha}x^{1-4\alpha}(-1 - x^3 + 6x^{1+2\alpha} \\
& + 6x^2(-1 + \alpha) - 6x^{2\alpha}(-1 + \alpha) + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3 + x(-7 + 18\alpha \\
& - 11\alpha^2) - 3e^x(1 - 6x^3 + 16x^{1+2\alpha} + 12x^2(-1 + \alpha) - 2x^{2\alpha}(-1 + \alpha) \\
& - 6\alpha + 11\alpha^2 - 6\alpha^3) + 3e^{2x}(-1 - 11x^3 + 6x^{1+2\alpha} - 6x^2(-1 + \alpha) \\
& + 6x^{2\alpha}(-1 + \alpha) + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3 + x(7 - 18\alpha + 11\alpha^2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{3x}(-1 + 8x^3 + 12x^{1+2\alpha} + 24x^2(-1 + \alpha) + 6x^{2\alpha}(-1 + \alpha) + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3 \\
& \quad + 2x(7 - 18\alpha + 11\alpha^2))) + 2e^x(1 + e^x)^2 t^3 x^{-4\alpha}((1 - 36e^x \\
& \quad + 132e^{2x} - 120e^{3x} - 17e^{4x} + 8e^{5x})x^4 + 18(2 - 39e^x - 32e^{2x} \\
& \quad + 2e^{3x} + 6e^{4x} + e^{5x})x^{4\alpha} + 12(-1 + 24e^x - 38e^{2x} - 18e^{3x} + 7e^{4x} \\
& \quad + 2e^{5x})x^{2+2\alpha} + 2(-3 + 40e^x - 40e^{2x} - 80e^{3x} + 15e^{4x} \\
& \quad + 12e^{5x})x^3(-1 + \alpha) + 12(1 - 19e^x - 26e^{2x} - 2e^{3x} + 5e^{4x} \\
& \quad + e^{5x})x^{1+2\alpha}(-1 + \alpha) + (1 + e^x)^3(-1 + 2e^x + e^{2x})x(-1 + 6\alpha \\
& \quad - 11\alpha^2 + 6\alpha^3) + (1 + e^x)^2 x^2(7 - 18\alpha + 11\alpha^2 + 3e^{2x}(7 - 18\alpha \\
& \quad + 11\alpha^2) + 2e^{3x}(7 - 18\alpha + 11\alpha^2) - 4e^x(11 - 26\alpha + 15\alpha^2))) \\
& \quad - 1/(5(1 + e^x)^2) 6e^{2x} t^5 x^{-8\alpha}((1 - 18e^x + 33e^{2x} - 8e^{3x})^2 x^8 \\
& \quad + 108(2 + e^x)^2(3 - 44e^x - 10e^{2x} + 12e^{3x} + 3e^{4x})x^{8\alpha} + 8(-3 \\
& \quad + 80e^x - 480e^{2x} + 870e^{3x} - 397e^{4x} - 126e^{5x} + 48e^{6x})x^{6+2\alpha} \\
& \quad + 36(6 - 119e^x + 396e^{2x} - 236e^{3x} - 214e^{4x} + 47e^{5x} \\
& \quad + 24e^{6x})x^{4+4\alpha} + 432(-2 + 31e^x - 36e^{2x} - 46e^{3x} + 4e^{4x} + 11e^{5x} \\
& \quad + 2e^{6x})x^{2+6\alpha} + 12(-1 + 24e^x - 138e^{2x} + 148e^{3x} + 123e^{4x} \\
& \quad - 156e^{5x} + 32e^{6x})x^7(-1 + \alpha) + 24(7 - 99e^x + 288e^{2x} + 48e^{3x} \\
& \quad - 375e^{4x} + 27e^{5x} + 56e^{6x})x^{5+2\alpha}(-1 + \alpha) + 72(-10 + 105e^x \\
& \quad - 64e^{2x} - 264e^{3x} - 30e^{4x} + 75e^{5x} + 20e^{6x})x^{3+4\alpha}(-1 + \alpha) \\
& \quad + 432(2 - 21e^x - 39e^{2x} - 10e^{3x} + 12e^{4x} + 7e^{5x} + e^{6x})x^{1+6\alpha}(-1 \\
& \quad + \alpha) + 24(1 + e^x)^4(-1 + 2e^x + e^{2x})x^{2+2\alpha}(-1 + \alpha)^2(1 - 5\alpha + 6\alpha^2) \\
& \quad + (1 + e^x)^6 x^2(1 - 6\alpha + 11\alpha^2 - 6\alpha^3)^2 + 36(1 + e^x)^3(-2 + 3e^x \\
& \quad + 4e^{2x} + e^{3x})x^{1+4\alpha}(-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3) + 2(1 + e^x)^5(-1 \\
& \quad + 2e^x)x^3(-1 + \alpha)^2(-7 + 46\alpha - 97\alpha^2 + 66\alpha^3) \\
& \quad + 24(1 + e^x)^2 x^{4+2\alpha}(-13 + 30\alpha - 17\alpha^2 + e^{2x}(-223 + 506\alpha \\
& \quad - 283\alpha^2) + 4e^{4x}(13 - 30\alpha + 17\alpha^2) + e^{3x}(34 - 84\alpha + 50\alpha^2) \\
& \quad + 2e^x(59 - 134\alpha + 75\alpha^2)) + 36(1 + e^x)^2 x^{2+4\alpha}(18 - 44\alpha + 26\alpha^2 \\
& \quad + e^x(-97 + 222\alpha - 125\alpha^2) + 2e^{2x}(3 - 10\alpha + 7\alpha^2) + 2e^{4x}(9 \\
& \quad - 22\alpha + 13\alpha^2) + e^{3x}(65 - 158\alpha + 93\alpha^2)) + 8(1 + e^x)^3 x^{3+2\alpha}(-1 \\
& \quad + \alpha)(24 - 69\alpha + 51\alpha^2 + 9e^{2x}(8 - 23\alpha + 17\alpha^2) + 6e^{3x}(8 - 23\alpha \\
& \quad + 17\alpha^2) - 2e^x(55 - 161\alpha + 124\alpha^2)) + (1 + e^x)^4 x^4(-1 + \alpha)^2(61 \\
& \quad - 214\alpha + 193\alpha^2 + 4e^{2x}(61 - 214\alpha + 193\alpha^2) - 4e^x(70 - 259\alpha \\
& \quad + 247\alpha^2)) + 2(1 + e^x)^3 x^5(-1 + \alpha)(-43 + 113\alpha - 72\alpha^2 + 18e^x(22 \\
& \quad - 59\alpha + 39\alpha^2) + 8e^{3x}(43 - 113\alpha + 72\alpha^2) - 3e^{2x}(263 - 703\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 462\alpha^2)) + 2(1 + e^x)^2 x^6 (25 - 54\alpha + 29\alpha^2 + 16e^{4x}(25 - 54\alpha \\
& + 29\alpha^2) - 8e^x(49 - 108\alpha + 59\alpha^2) + 3e^{2x}(503 - 1098\alpha + 595\alpha^2) \\
& - 2e^{3x}(763 - 1674\alpha + 911\alpha^2))) \\
& - 2e^x(1 + e^x)^2 t^{2-\alpha} x^{-4\alpha} ((12e^x t^2((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} \\
& + (1 + e^x)x(-1 + \alpha))^2)/(-4 + \alpha) - (2(1 + e^x)^4 x^{2\alpha}((-1 + 2e^x)x^2 \\
& + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} + (1 + e^x)x(-1 + \alpha)))/(-2 \\
& + \alpha) - 1/(-3 + \alpha)(1 + e^x)^2 t((-1 + 18e^x - 33e^{2x} + 8e^{3x})x^4 \\
& + 18(-2 + 3e^x + 4e^{2x} + e^{3x})x^{4\alpha} + 12(1 - 6e^x + 3e^{2x} \\
& + 2e^{3x})x^{2+2\alpha} + 6(1 - 6e^x - 3e^{2x} + 4e^{3x})x^3(-1 + \alpha) + 12(-1 + e^x \\
& + 3e^{2x} + e^{3x})x^{1+2\alpha}(-1 + \alpha) + (1 + e^x)^2(-1 + 2e^x)x^2(7 - 18\alpha \\
& + 11\alpha^2) + (1 + e^x)^3 x(-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3))) \\
& + \frac{1}{3}e^x(1 + e^x)^2 t^3 x^{1-6\alpha}(-1 - x^5 + 12x^{3+2\alpha} - 36x^{1+4\alpha} + 15x^4(-1 \\
& + \alpha) + 36x^{4\alpha}(-1 + \alpha) - 72x^{2+2\alpha}(-1 + \alpha) + 15\alpha - 85\alpha^2 + 225\alpha^3 \\
& - 274\alpha^4 + 120\alpha^5 + 12x^{1+2\alpha}(7 - 18\alpha + 11\alpha^2) - 5x^3(13 - 30\alpha \\
& + 17\alpha^2) - 12x^{2\alpha}(-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3) + 15x^2(-6 + 25\alpha \\
& - 34\alpha^2 + 15\alpha^3) + x(-31 + 225\alpha - 595\alpha^2 + 675\alpha^3 - 274\alpha^4) \\
& + e^{5x}(-1 + 32x^5 + 96x^{3+2\alpha} + 72x^{1+4\alpha} + 240x^4(-1 + \alpha) \\
& + 36x^{4\alpha}(-1 + \alpha) + 288x^{2+2\alpha}(-1 + \alpha) + 15\alpha - 85\alpha^2 + 225\alpha^3 \\
& - 274\alpha^4 + 120\alpha^5 + 24x^{1+2\alpha}(7 - 18\alpha + 11\alpha^2) + 40x^3(13 - 30\alpha \\
& + 17\alpha^2) + 12x^{2\alpha}(-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3) + 60x^2(-6 + 25\alpha \\
& - 34\alpha^2 + 15\alpha^3) + 2x(31 - 225\alpha + 595\alpha^2 - 675\alpha^3 + 274\alpha^4)) \\
& - 2e^{2x}(359x^5 - 1104x^{3+2\alpha} + 720x^{1+4\alpha} - 975x^4(-1 + \alpha) \\
& + 144x^{4\alpha}(-1 + \alpha) + 600x^{2+2\alpha}(-1 + \alpha) - 5x^3(13 - 30\alpha + 17\alpha^2) \\
& + 24x^{1+2\alpha}(17 - 44\alpha + 27\alpha^2) - 24x^{2\alpha}(-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3) \\
& + 105x^2(-6 + 25\alpha - 34\alpha^2 + 15\alpha^3) + x(-31 + 225\alpha - 595\alpha^2 \\
& + 675\alpha^3 - 274\alpha^4) + 5(1 - 15\alpha + 85\alpha^2 - 225\alpha^3 + 274\alpha^4 \\
& - 120\alpha^5)) - 2e^{3x}(-604x^5 + 816x^{3+2\alpha} + 288x^{1+4\alpha} - 300x^4(-1 \\
& + \alpha) - 72x^{4\alpha}(-1 + \alpha) + 1200x^{2+2\alpha}(-1 + \alpha) - 24x^{1+2\alpha}(2 - 5\alpha \\
& + 3\alpha^2) + 100x^3(13 - 30\alpha + 17\alpha^2) - 48x^{2\alpha}(-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 \\
& + 6\alpha^3) + 60x^2(-6 + 25\alpha - 34\alpha^2 + 15\alpha^3) - 4x(31 - 225\alpha \\
& + 595\alpha^2 - 675\alpha^3 + 274\alpha^4) + 5(1 - 15\alpha + 85\alpha^2 - 225\alpha^3 + 274\alpha^4 \\
& - 120\alpha^5)) + e^x(88x^5 - 480x^{3+2\alpha} + 792x^{1+4\alpha} - 600x^4(-1 + \alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 252x^{4\alpha}(-1 + \alpha) + 1200x^{2+2\alpha}(-1 + \alpha) + 80x^3(13 - 30\alpha \\
& + 17\alpha^2) - 24x^{1+2\alpha}(17 - 44\alpha + 27\alpha^2) - 12x^{2\alpha}(-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 \\
& + 6\alpha^3) - 60x^2(-6 + 25\alpha - 34\alpha^2 + 15\alpha^3) - 2x(31 - 225\alpha \\
& + 595\alpha^2 - 675\alpha^3 + 274\alpha^4) + 5(-1 + 15\alpha - 85\alpha^2 + 225\alpha^3 \\
& - 274\alpha^4 + 120\alpha^5)) + e^{4x}(-473x^5 - 204x^{3+2\alpha} + 252x^{1+4\alpha} \\
& - 1725x^4(-1 + \alpha) + 180x^{4\alpha}(-1 + \alpha) + 360x^{2+2\alpha}(-1 + \alpha) \\
& + 84x^{1+2\alpha}(7 - 18\alpha + 11\alpha^2) - 85x^3(13 - 30\alpha + 17\alpha^2) + 60x^{2\alpha}(-1 \\
& + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3) + 75x^2(-6 + 25\alpha - 34\alpha^2 + 15\alpha^3) + 7x(31 \\
& - 225\alpha + 595\alpha^2 - 675\alpha^3 + 274\alpha^4) + 5(-1 + 15\alpha - 85\alpha^2 + 225\alpha^3 \\
& - 274\alpha^4 + 120\alpha^5))) \\
& + 1/(-2 + \alpha) 12e^x(1 + e^x)^2 t^{3-\alpha} x^{-6\alpha} (- (16e^{2x} t^3 ((-1 + 2e^x)x^2 \\
& + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} + (1 + e^x)x(-1 + \alpha))^3) / ((1 + e^x)^4(-6 + \alpha)) \\
& + (8e^x t x^{2\alpha} ((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} + (1 + e^x)x(-1 + \alpha))^2) \\
& / (-4 + \alpha) - ((1 + e^x)^2(-1 + 2e^x + e^{2x})x^{4\alpha} ((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 \\
& + e^x)x^{2\alpha} + (1 + e^x)x(-1 + \alpha))) / (-3 \\
& + \alpha) + 1/((1 + e^x)^2(-5 + \alpha)) 2e^x t^2 ((1 - 20e^x + 69e^{2x} - 74e^{3x} \\
& + 16e^{4x})x^6 + 54(2 + e^x)^2(-1 + 2e^x + e^{2x})x^{6\alpha} + 3(-6 + 67e^x \\
& - 108e^{2x} - e^{3x} + 24e^{4x})x^{4+2\alpha} + 18(6 - 29e^x + 2e^{2x} + 21e^{3x} \\
& + 6e^{4x})x^{2+4\alpha} + (-7 + 65e^x - 69e^{2x} - 85e^{3x} + 56e^{4x})x^5(-1 + \alpha) \\
& + 6(10 - 49e^x - 44e^{2x} + 35e^{3x} + 20e^{4x})x^{3+2\alpha}(-1 + \alpha) + 54(-2 \\
& + e^x + 7e^{2x} + 5e^{3x} + e^{4x})x^{1+4\alpha}(-1 + \alpha) \\
& + (1 + e^x)^4 x^2 (-1 + \alpha)^2 (1 - 5\alpha + 6\alpha^2) + 3(1 + e^x)^3 (2 \\
& + e^x)x^{1+2\alpha} (-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3) + (1 + e^x)^3 (-1 + 2e^x)x^3 (-8 \\
& + 31\alpha - 40\alpha^2 + 17\alpha^3) + 3(1 + e^x)^2 x^{2+2\alpha} (-1 + \alpha) (18 - 26\alpha \\
& + 2e^{2x}(-9 + 13\alpha) + e^x(-29 + 41\alpha)) + (1 + e^x)^2 x^4 (-1 + \alpha) (-13 \\
& + e^x(70 - 86\alpha) + 17\alpha + e^{2x}(-52 + 68\alpha))) + (1 + e^x)^2 ((1 + e^x)^6 \\
& + 2e^x(1 + e^x)^4 t x^{-2\alpha} ((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} + (1 \\
& + e^x)x(-1 + \alpha)) - 2e^x(-t(3(1 + e^x)^4(2 + e^x) + 3(1 + e^x)^2(-1 \\
& + 2e^x + e^{2x})t x^{-2\alpha} ((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} + (1 + e^x)x(-1 \\
& + \alpha)) \\
& - 4e^x t^2 x^{-4\alpha} ((-1 + 2e^x)x^2 + 3(2 + e^x)x^{2\alpha} + (1 + e^x)x(-1 + \alpha))^2) \\
& - (((1 + e^x)^4 t^{2-\alpha} x^{-2\alpha} (3(2 + e^x)x^{2\alpha} + x(-1 - x + \alpha + e^x(-1 + 2x \\
& + \alpha)))) / (-2 + \alpha) - (1 + e^x)^2 x^{1-4\alpha} ((1 + e^x)^2 t x^{2\alpha} (-1 - x + \alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^x(-1 + 2x + \alpha)) + \frac{1}{2}t^2(-1 - 7x - 6x^2 - x^3 + 6x^{2\alpha}(1 + x - \alpha) \\
& + 6\alpha + 18x\alpha + 6x^2\alpha - 11\alpha^2 - 11x\alpha^2 + 6\alpha^3 + 3e^x(-1 + 12x^2 \\
& + 6x^3 - 2x^{2\alpha}(1 + 8x - \alpha) + 6\alpha - 12x^2\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3) + 3e^{2x}(-1 \\
& + 7x + 6x^2 - 11x^3 + 6\alpha - 18x\alpha - 6x^2\alpha - 11\alpha^2 + 11x\alpha^2 + 6\alpha^3 \\
& + 6x^{2\alpha}(-1 + x + \alpha)) + e^{3x}(-1 + 8x^3 + 12x^{1+2\alpha} + 24x^2(-1 + \alpha) \\
& + 6x^{2\alpha}(-1 + \alpha) + 6\alpha + \alpha^2(-11 + 6\alpha) + 2x(-1 + \alpha)(-7 \\
& + 11\alpha))))))
\end{aligned}$$

Bu şekilde, yineleme devam ettirilerek adım sayısı genişletilebilir. Buradan, denklem (4.1) kullanılarak yaklaşık çözümün ilk üç terimi şu şekilde elde edilir.

$$u_{VIM}(x, t) = \lim_{k \rightarrow 3} u_k(x, t).$$

#### 4.2 ADM İle Elde Edilen Çözüm

(2.16) Doğrusal olmayan uzay-zaman kesirli Fisher denklemini göz önünde bulunduralım.

$$D_t^\alpha u(x, t) - D_x^{2\alpha} u(x, t) - 6u(x, t) - 6u(x, t)^2 = 0,$$

Bu denklem için başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = 1/(1 + e^x)^2 \quad (4.6)$$

olsun (Odibat ve Momani, 2008). Burada  $J^\alpha$ ,  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$  için 0 dan t'ye tanımlanan conformable integral operatörüdür. Conformable integral operatörü  $J^\alpha$ ,

$$J^\alpha[u(x, t)] = \xi^{\alpha-1} \int_0^t (u(x, t)) d\xi \quad (4.7)$$

ve buradan ADM algoritması kullanılarak,

$$u_0(x, t) = 1/(1 + e^x)^2, \quad (4.8)$$

$$u_{k+1}(x, t) = -J^\alpha[L(u_k) + A_k] \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
&= -J^\alpha \left[ \frac{\partial^\alpha}{\partial \kappa^\alpha} u_k(x, t) + \eta u_k(x, t) + \mu A_k \right] \\
&= -\xi^{\alpha-1} \left( \frac{\partial^\alpha}{\partial \kappa^\alpha} u_k(x, t) + \eta u_k(x, t) + \mu A_k \right) d\xi, \quad k \geq 1.
\end{aligned}$$

burada,

$$A_0 = u_0(x, t)^2, \quad (4.10)$$

$$A_1 = 2u_0(x, t)u_1(x, t),$$

$$A_2 = u_1(x, t)^2 + 2u_0(x, t)u_2(x, t),$$

⋮

ardından,

$$u_0(x, t) = 1/(1 + e^x)^2, \quad (4.11)$$

$$u_1(x, t) = (2e^x t^\alpha x^{-2\alpha} (3(2 + e^x)x^{2\alpha} + x(-1 - x + \alpha + e^x(-1 + 2x + \alpha)))) / ((1 + e^x)^4 \alpha),$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = 1/((1 + e^x)^6 \alpha^2) e^x t^{2\alpha} x^{-4\alpha} &((-1 + 18e^x - 33e^{2x} + 8e^{3x})x^4 + (18(-2 \\
&+ 3e^x + 4e^{2x} + e^{3x})x^{4\alpha} + 12(1 - 6e^x + 3e^{2x} + 2e^{3x})x^{2+2\alpha} + 6(1 \\
&- 6e^x - 3e^{2x} + 4e^{3x})x^3(-1 + \alpha) + 12(-1 - e^x + 3e^{2x} \\
&+ e^{3x})x^{1+2\alpha}(-1 + \alpha) + (1 + e^x)^2(-1 + 2e^x)x^2(7 - 18\alpha + 11\alpha^2) \\
&+ (1 + e^x)^3 x(-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) = 1/3((1 + e^x)^8 \alpha^3) e^x t^{3\alpha} x^{-6\alpha} &(-1 + 88e^x - 718e^{2x} + 1208e^{3x} - 473e^{4x} \\
&+ 32e^{5x})x^6 + (108(2 - 15e^x - 8e^{2x} + 8e^{3x} + 6e^{4x} + e^{5x})x^{6\alpha} + 6(3 \\
&- 104e^x + 452e^{2x} - 344e^{3x} - 51e^{4x} + 24e^{5x})x^{4+2\alpha} + 36(-3 \\
&+ 46e^x - 80e^{2x} - 28e^{3x} + 21e^{4x} + 6e^{5x})x^{2+4\alpha} + 15(1 - 40e^x \\
&+ 130e^{2x} + 40e^{3x} - 115e^{4x} + 16e^{5x})x^5(-1 + \alpha) + 12(-9 + 128e^x \\
&- 128e^{2x} - 256e^{3x} + 45e^{4x} + 36e^{5x})x^{3+2\alpha}(-1 + \alpha) + 108(1 \\
&- 7e^x - 8e^{2x} + 4e^{3x} + 5e^{4x} + e^{5x})x^{1+4\alpha}(-1 + \alpha) + 5(1 + e^x)^2(-1 \\
&+ 18e^x - 33e^{2x} + 8e^{3x})x^4(13 - 30\alpha + 17\alpha^2) + 18(1 + e^x)^3(-1 \\
&+ 2e^x + e^{2x})x^{1+2\alpha}(-1 + 6\alpha - 11\alpha^2 + 6\alpha^3) + 15(1 + e^x)^3(1 - 7e^x \\
&+ 4e^{2x})x^3(-6 + 25\alpha - 34\alpha^2 + 15\alpha^3) + (1 + e^x)^4(-1 + 2e^x)x^2(31 \\
&- 225\alpha + 595\alpha^2 - 675\alpha^3 + 274\alpha^4) + (1 + e^x)^5 x(-1 + 15\alpha - 85\alpha^2 \\
&+ 225\alpha^3 - 274\alpha^4 + 120\alpha^5) + 6(1 + e^x)^2 x^{2+2\alpha}(21 - 54\alpha + 33\alpha^2)
\end{aligned}$$

$$+9e^{2x}(7 - 18\alpha + 11\alpha^2) + 6e^{3x}(7 - 18\alpha + 11\alpha^2) - 8e^x(16 - 41\alpha + 25\alpha^2))$$

Bu şekilde, yineleme devam ettirilerek adım sayısı genişletilebilir. Bu nedenle denklem (2.16) için yaklaşık çözüm ilk dört terim kullanılarak

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

$$u_{ADM}(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) \quad (4.12)$$

olarak elde edilir (Odibat ve Momani, 2008).

## 5. GRAFİKSEL İFADELER ve FİZİKSEL YORUMLAR

Bu bölümde ADM ve VIM yöntemlerini karşılaştırmak amacıyla elde edilen çözümlerin sayısal değerleri için grafikler çizilmiş ve tablolar oluşturulmuştur. Sayısal çözümler elde edilirken, conformable kesirli türev operatörü kullanılmıştır. Gerçek çözümün sayısal değerleri de bu tablo ve grafiklerde karşılaştırılmıştır. Elde edilen çözümlerin yüzey grafikleri için Matlab programı kullanılmıştır.

**Çizelge 5.1** 2.16 denkleminin Adomian Ayrıştırma metodu ve Varyasyonel İterasyon metodu kullanılarak Conformable kesirli türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümlerinin sayısal değerleri

		$\alpha=0.2$		$\alpha=0.6$	
		$u_{ADM}$	$u_{VIM}$	$u_{ADM}$	$u_{VIM}$
t=0.01	x				
	0.01	2.75291	0.280675	-1.0961	0.268478
	0.02	3.15834	0.277783	0.097778	0.268642
	0.03	3.5558	0.274943	0.256558	0.266881
	0.04	3.94342	0.272139	0.301852	0.264746
	0.05	4.32147	0.269362	0.319284	0.262473
t=0.03	x				
	0.01	1.09124	0.347722	-9.78948	0.271015
	0.02	1.91855	0.344012	-1.28842	0.305193
	0.03	2.72264	0.340439	-0.16668	0.309235
	0.04	3.50363	0.336947	0.156994	0.309198
	0.05	4.26358	0.333515	0.287677	0.307938
t=0.05	x				
	0.01	-0.62992	0.415658	-25.0189	0.176488
	0.02	0.515591	0.411145	-3.78918	0.322378
	0.03	1.6255	0.406857	-0.99906	0.34314
	0.04	2.70194	0.402699	-0.19587	0.348566
	0.05	3.74846	0.398632	0.128704	0.349782

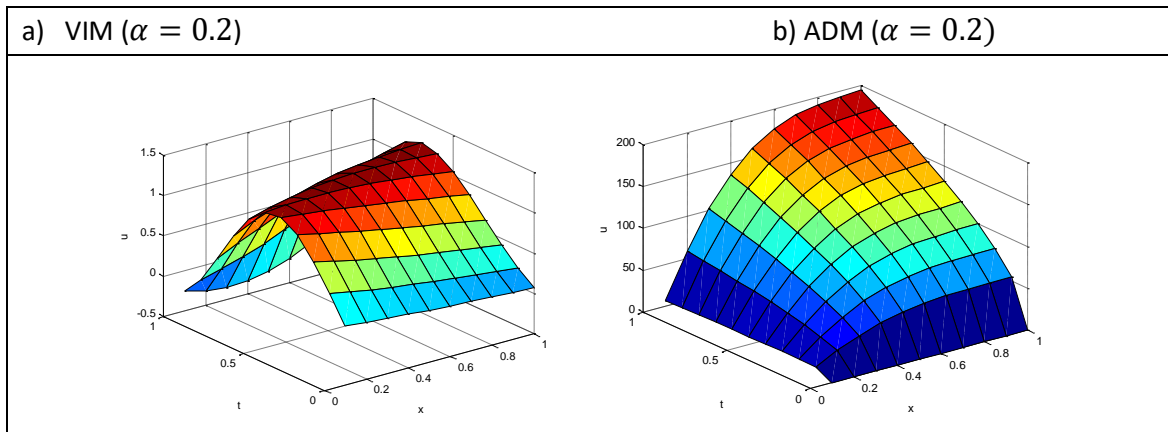
**Çizelge 5.2** 2.16 denkleminin Adomian Ayrıştırma Metodu kullanılarak Conformable kesirli türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümlerinin ve gerçek çözümünün sayısal değerleri ve bu değerlerden elde edilen mutlak hata değerleri.

		$\alpha=1$		
$t=0.01$	$x$	$u_{ADM}$	$u_G$	$u_{MUTLAK}$
	0.01	0.260099	0.260099	$6.5095 \times 10^{-8}$
	0.02	0.257556	0.257556	$6.5732 \times 10^{-8}$
	0.03	0.255025	0.255025	$6.63412 \times 10^{-8}$
	0.04	0.252506	0.252506	$6.69222 \times 10^{-8}$
	0.05	0.25	0.25	$6.74747 \times 10^{-8}$
$t=0.03$	$x$			
	0.01	0.286169	0.286164	$5.15701 \times 10^{-6}$
	0.02	0.283513	0.283508	$5.213 \times 10^{-6}$
	0.03	0.280867	0.280862	$5.26678 \times 10^{-6}$
	0.04	0.278232	0.278227	$5.31832 \times 10^{-6}$
	0.05	0.275609	0.275603	$5.36761 \times 10^{-6}$
$t=0.05$	$x$			
	0.01	0.313318	0.313279	0.0000387918
	0.02	0.310564	0.310525	0.0000395261
	0.03	0.30782	0.30778	0.0000397038
	0.04	0.305084	0.305044	0.0000401347
	0.05	0.302358	0.302317	0.0000405486

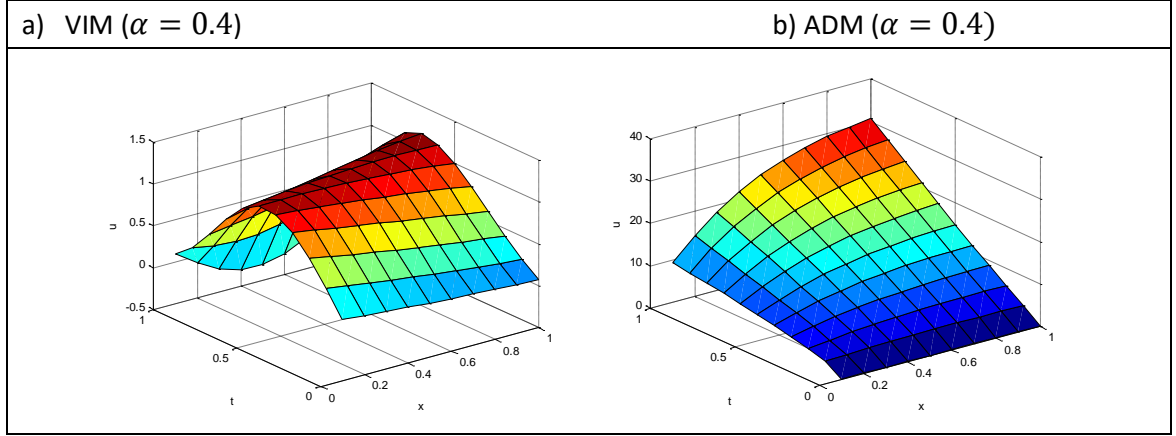
Çizelge 5.1’de, ADM ve VIM kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümlerin sayısal değerleri  $x$  ve  $t$  değıştikçe  $\alpha$ ’nın 0.2, 0.6 değeri kullanılarak hesaplanmıştır. Çizelge 5.2’de ve Çizelge 5.3’de  $\alpha = 1$  için mutlak hata hesaplanmıştır  $\alpha = 1$  için bulunan değere bakarak VIM ile elde edilen çözümün ADM ile elde edilen çözüm ile kıyaslandığında gerçek çözüme daha yakın sonuçlar verdiği görülebilir. Bu sonuçlar farklı şekilde seçilen  $\alpha$ ,  $x$  ve  $t$  değeriyle ilgili olarak farklılık gösterilebilir.

**Çizelge 5. 3** 2.16 denkleminin Varyasyonel İterasyon Metodu kullanılarak Conformable kesirli türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümlerinin ve gerçek çözümünün sayısal değerleri ve bu değerlerden elde edilen mutlak hata değerleri.

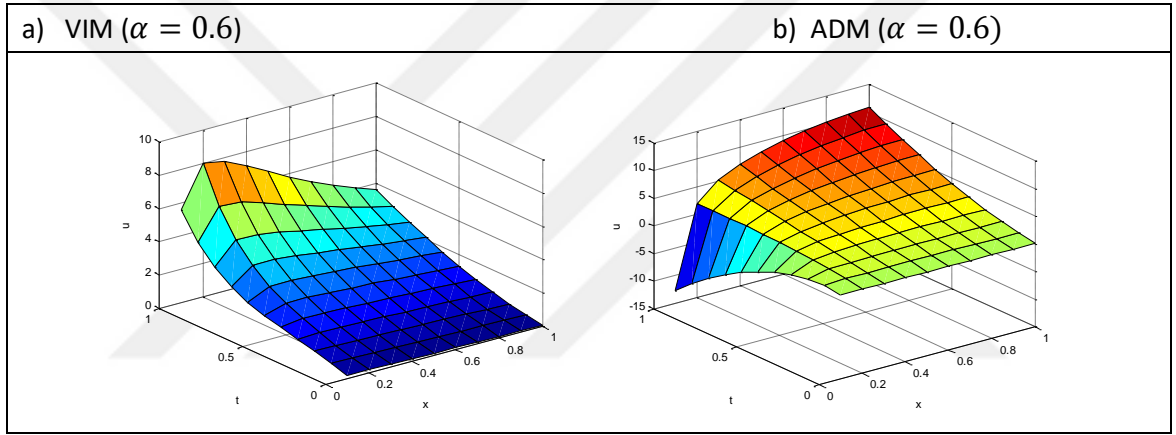
		$\alpha=1$		
		$u_{VIM}$	$u_G$	$u_{MUTLAK}$
t=0.01	x			
	0.01	0.260099	0.260099	$1.29481 \times 10^{-8}$
	0.02	0.257556	0.257556	$1.28553 \times 10^{-8}$
	0.03	0.255025	0.255025	$1.27623 \times 10^{-8}$
	0.04	0.252506	0.252506	$1.26693 \times 10^{-8}$
0.05	0.25	0.25	$1.25764 \times 10^{-8}$	
t=0.03	x			
	0.01	0.286163	0.286164	$1.05713 \times 10^{-6}$
	0.02	0.283507	0.283508	$1.04844 \times 10^{-6}$
	0.03	0.280861	0.280862	$1.03967 \times 10^{-6}$
	0.04	0.278226	0.278227	$1.03084 \times 10^{-6}$
0.05	0.275602	0.275603	$1.02197 \times 10^{-6}$	
t=0.05	x			
	0.01	0.313271	0.313279	$8.28349 \times 10^{-6}$
	0.02	0.310517	0.310525	$8.20884 \times 10^{-6}$
	0.03	0.307772	0.30778	$8.13308 \times 10^{-6}$
	0.04	0.305036	0.305044	$8.05638 \times 10^{-6}$
0.05	0.302309	0.302317	$7.97886 \times 10^{-6}$	



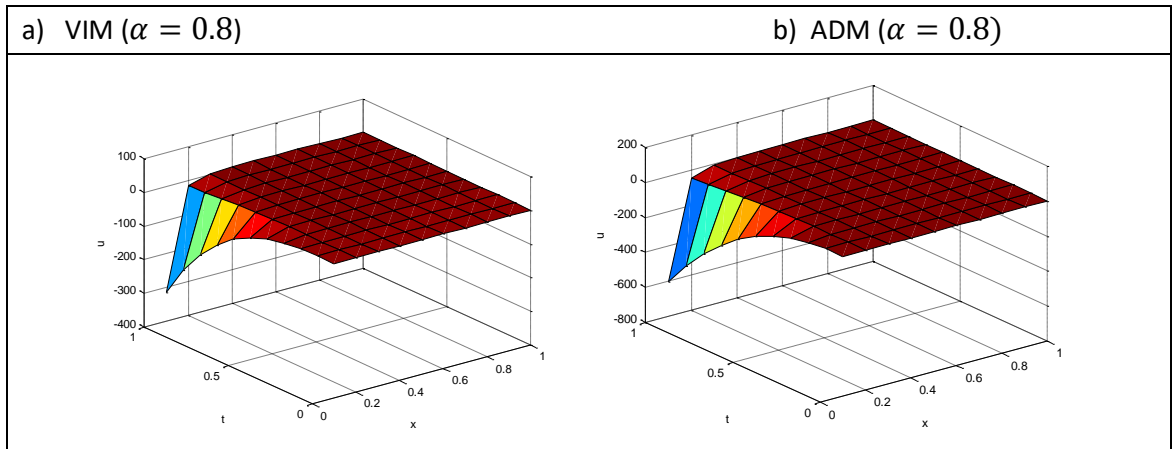
**Şekil 5. 1** 2.16 denkleminin a) Varyasyonel İterasyon Metodu b) Adomian Ayrıştırma Metodu kullanılarak Conformable türev operatörü ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri ( $\alpha = 0.2$ )



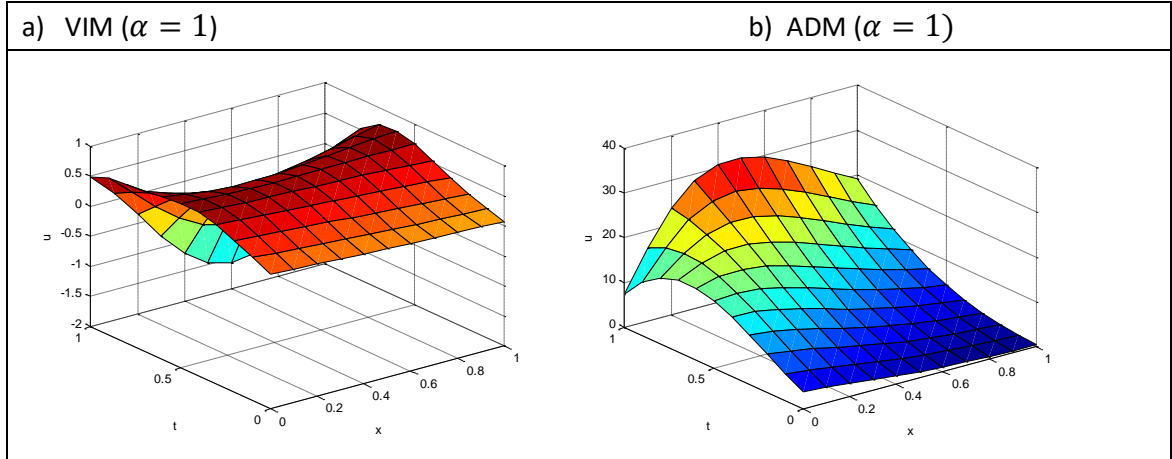
**Şekil 5. 2** 2.16 denkleminin a) Varyasyonel İterasyon Metodu b) Adomian Ayrıştırma Metodu kullanılarak Conformable türev operatörü ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri ( $\alpha = 0.4$ )



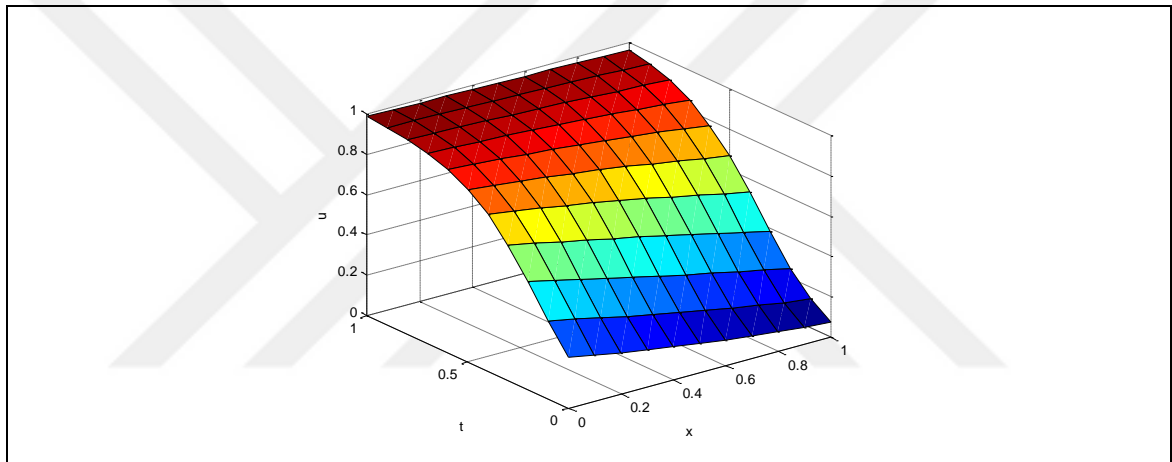
**Şekil 5. 3** 2.16 denkleminin a) Varyasyonel İterasyon Metodu b) Adomian Ayrıştırma Metodu kullanılarak Conformable türev operatörü ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri ( $\alpha = 0.6$ )



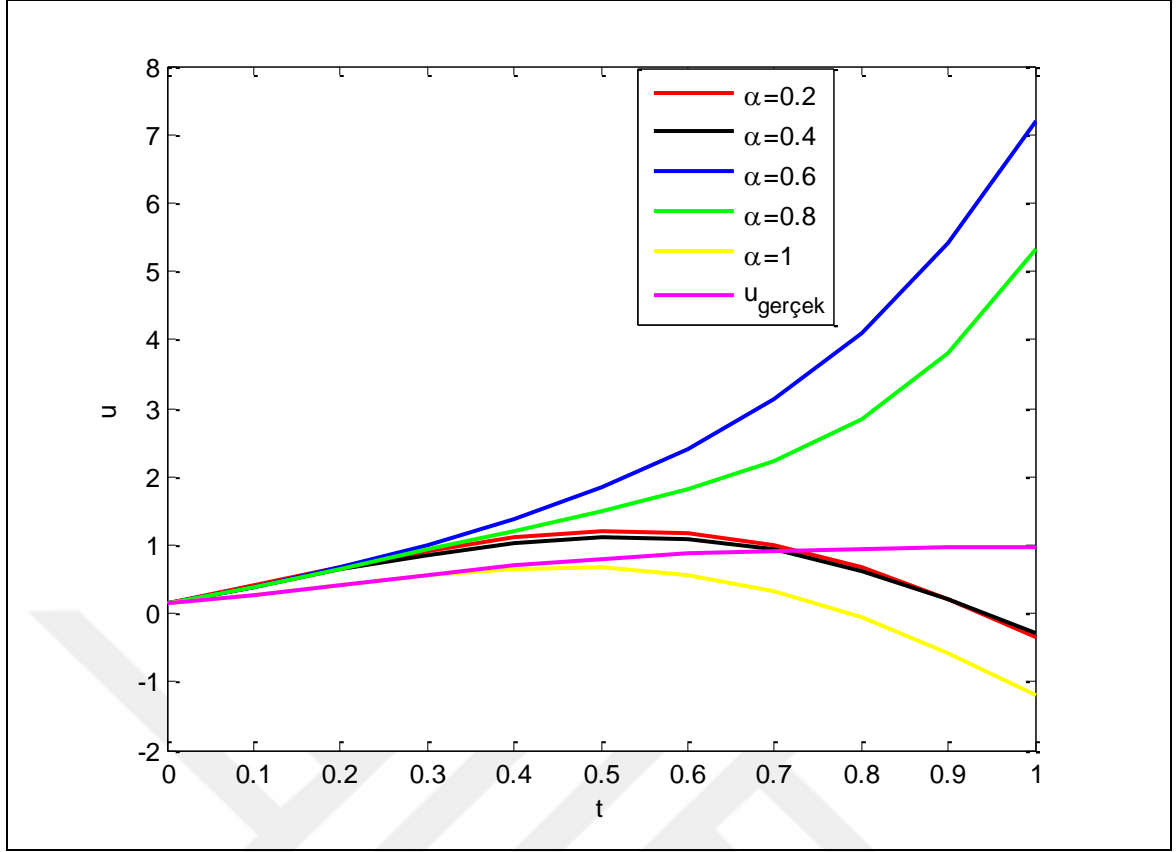
**Şekil 5. 4** 2.16 denkleminin a) Varyasyonel İterasyon Metodu b) Adomian Ayrıştırma Metodu kullanılarak Conformable türev operatörü ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri ( $\alpha = 0.8$ )



**Şekil 5. 5** 2.16 denkleminin a) Varyasyonel İterasyon Metodu b) Adomian Ayrıştırma Metodu kullanılarak Conformable türev operatörü ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin yüzey grafikleri ( $\alpha = 1$ )

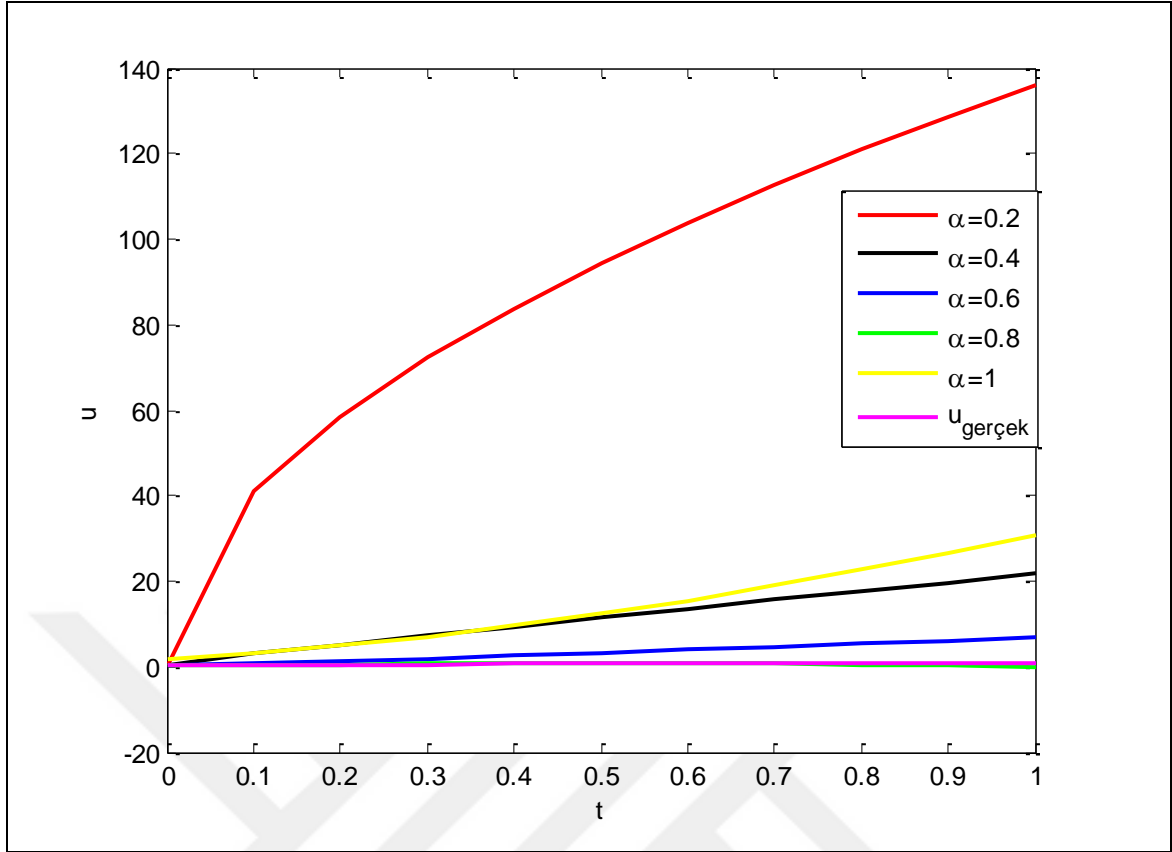


**Şekil 5. 6** 2.16 denkleminin gerçek çözümünün yüzey grafiği ( $\alpha = 1$ ) (Odibat ve Momani, 2008),



**Şekil 5. 7** 2.16 denkleminin Varyasyonel İterasyon Metodu kullanılarak Conformable türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümlerinin ve gerçek çözümünün 2-boyutlu grafikleri ( $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, x = 0.4$ )

Şekilde 5.7 de VIM kullanılarak conformable türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümün  $\alpha$  ve  $t$ 'ye ait farklı değerler için hazırlanmış iki boyutlu grafiğini incelediğimizde  $t, 0$ 'a yaklaştıkça gerçek çözüme daha yakın sonuçlar elde ettiğimizi görebiliriz. Grafiğe bakıldığında belirli noktalarda yaklaşık çözümün gerçek çözüm ile çakıştığı görülebilir.



**Şekil 5. 8** 2.16 denkleminin Adomian Ayrıştırma Metodu kullanılarak Conformable türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümlerinin ve gerçek çözümünün 2-boyutlu grafikleri ( $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, x = 0.4$ )

Şekil 5.8 de ADM kullanılarak conformable türev operatörü yardımıyla elde edilen çözümün  $\alpha$  ve  $t$ 'ye ait farklı değerler için hazırlanmış iki boyutlu grafiğini incelendiğimizde  $t, 0$ 'a yaklaştıkça gerçek çözüme daha yakın sonuçlar elde ettiğimizi görebiliriz.  $\alpha = 0.8$  değeri için gerçek çözüme en yakın sonuçların elde edildiği söylenebilir.  $\alpha$  değerleri küçüldükçe gerçek çözümden de uzaklaşmaktadır.

## 6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

### 6.1 Sonuçlar

Bu çalışmada Conformable türev operatörü yardımıyla kesirli mertebeden doğrusal olmayan uzay-zaman Fisher denkleminin yaklaşık çözümleri hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar yapılırken Adomian ayrıştırma metodu ve Varyasyonel iterasyon metodu kullanılmıştır. Çalışmanın amacı başlangıç şartından hareketle uzay-zaman Fisher denkleminin elde edilen seri çözümlerinin gerçek sonuca ne kadar yaklaştığının incelenmesidir. Bu metotlarla çözüm elde edilirken işlem kolaylığı açısından iterasyon üç adım ilerletilmiştir. Adım sayısı arttıkça gerçek çözüme daha yakın sonuçlar elde edilebilir. Bulduğumuz yaklaşık çözümlerin sonuçları ve gerçek çözüme yakınlığı grafik ve tablolar üzerinden gösterilmiştir.  $\alpha$  kesirli mertebesinin 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 ve 1 değerleri için 2 boyutlu ve 3 boyutlu grafikler çizilmiştir.  $\alpha$  kesirli mertebesinin 0.2, 0.6, 1 değerleri için de tablo değerleri hesaplanmıştır. Bu değerler keyfi olarak seçilmiştir. Bu grafikler incelendiğinde kesirli mertebe değıştikçe çözümdeki değışiklikler gözlemlenebilmektedir. Grafikler incelendiğinde  $\alpha$  kesirli mertebesinin 1'e yakın değerler aldıkça elde edilen seri çözümünün mevcut gerçek sonuca yakınsadığı bazı değerler için grafiklerin çakıştığı görülmektedir. Bu çalışmamızda Adomian ayrıştırma metodu ve Varyasyonel iterasyon metodundan hangisinin çözüme daha yakın sonuçlar elde ettiğini karşılaştırarak görmeye çalıştık. Yaklaşık çözümler elde edilirken kullanılan metot, kesirli türev operatörü, seri açılımındaki adım sayısı faktörleri etkili olmuştur. Bu sonuçlardan hareketle söyleyebiliriz ki yaklaşık çözümler elde edilirken, gerçek çözüme yakın sonuçlar elde edebilmek için birçok parametre etkilidir. Ele aldığımız denklem, denklemin başlangıç şartı, keyfi verdiğimiz değerler de bunlardan birkaçıdır.

## KAYNAKLAR

- Arshad, M., Lu, D., Wang, J. 2017. Fractional sub-equation method for a generalized space-time fractional Fisher equation with variable coefficients, *Nonlinear Sci. Lett. A*, 8, 162-170.
- Cerit, C., 1997, Bilgisayar Uygulamalı Diferensiyel Denklemler, *Beta Basım Y.*, 527.
- Cui, M. 2009. Compact finite difference method for the fractional diffusion equation, *Journal of Computational Physics*, 228 (20), 7792-7804.
- Dennemeyer, Rene., 1968, *Introduction to partial differential equations and boundary value problems* (McGraw-Hill).
- Duchateau, Paul, and David W Zachmann., 1986, *Theory and problems of partial differential equations* (McGraw-Hill New York).
- El-Sayed, A. M. A., Behiry, S. H., & Raslan, W. E. 2010. Adomian's decomposition method for solving an intermediate fractional advection–dispersion equation, *Computers & Mathematics with Applications*, 59 (5), 1759-1765.
- Franklin, P., 1964, *Functions of Complex Analysis*, Sir Isaac Pitman-Sons Ltd.
- Ganji, D. D., Sadighi, A. 2006. Application of He's homotopy-perturbation method to nonlinear coupled systems of reaction-diffusion equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7 (4), 411-418.
- Gustafson, Karl E., 2012, *Introduction to partial differential equations and Hilbert space methods* (Courier Corporation).
- Huang, Q., Huang, G. ve Zhan, H. 2008. Kesirli adveksiyon-dağılım denklemi için bir sonlu eleman çözümü. *Su kaynaklarındaki gelişmeler*, 31 (12), 1578-1589.
- Inokuti, M., Sekine, H., Mura, T. 1978. General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics, *Variational method in the mechanics of solids*, 33 (5), 156-162.
- Kannappan, Palaniappan., 2009, *Functional equations and inequalities with applications* (Springer Science & Business Media).
- Khalil, Roshdi, Mohammed Al Horani, Abdelrahman Yousef, and Mohammad Sababheh. 2014. A new definition of fractional derivative, *Journal of computational and applied mathematics*, 264, 65-70.
- Levitan, Boris Moiseevich, Ishkhan Saribekovich Sargsian, and İŝchan S Sargsjan., 1975, *Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators, Selfadjoint Ordinary Differential Operators* (American Mathematical Soc.).
- Odibat, Z., Momani, S. 2008. Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order, *Applied Mathematical Modelling*, 32 (1), 28-39.
- Özer, M. N. ve Eser, D., 2002, Diferensiyel Denklemler (Teori ve Uygulamaları).
- Podlubny, Igor, Aleksei Chechkin, Tomas Skovranek, YangQuan Chen, and Blas M Vinagre Jara. 2009. Matrix approach to discrete fractional calculus II: partial fractional differential equations, *Journal of Computational Physics*, 228, 3137-53.
- Podlubny, Igor. 2000. Matrix approach to discrete fractional calculus, *Fractional calculus and applied analysis*, 3, 359-86.

- Sökmen, Y. (2012), “Genelleştirilmiş caputo kesirli türevi ve uygulamaları”, Yüksek Lisans Tezi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ahi Evran Üniversitesi, Kırşehir, 64.
- Ulu Akdaş, F. (2019), “Uyumlu kesirli türev ve integral uygulamaları”, Yüksek Lisans Tezi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Uşak Üniversitesi, Uşak, 51.
- Ünal, E., Gökdoğan, A. ve Çelik, E. 2016. General solution to sequential linear conformable fractional differential equations with constant coefficients, *arXiv preprint arXiv*, 1602.01452.
- Wu, G. C., Lee, E. W. M. 2010. Fractional variational iteration method and its application, *Physics Letters A*, 374 (25), 2506-2509.

