



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU KESİRLİ MERTEBEDEN
BURGERS' DENKLEMİNİN SAYISAL
ÇÖZÜMLERİ

Erbil GÖKDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2025
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU KESİRLİ MERTEBEDEN
BURGERS' DENKLEMİNİN SAYISAL
ÇÖZÜMLERİ

Erbil GÖKDAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdal KORKMAZ

Haziran-2025
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ BOYUTLU KESİRLİ MERTEBEDEN BURGERS' DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Erbil GÖKDAĞ

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdal KORKMAZ

Bu tez çalışmasında kesirli mertebeden iki boyutlu Burgers' denkleminin sayısal çözümleri araştırıldı. Önce Burgers' denklemi uzayda MQ-RBF yöntemi kullanılarak birinci mertebeden kesirli adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürüldü, sonra elde edilen adi denklem zaman parçalama yöntemi ile denklemin sayısal çözümleri elde edildi. Elde edilen sonuçlar örneklerle desteklenerek L_2 ve L_∞ hata normları sunulmuştur.

2025, 29 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Burger Denklemi, Multiquadrik Radyal Baz Yöntemi, Time-Splitting Yöntemi.

ABSTRACT

MS/ THESIS

**APPROXIMATE NUMERICAL SOLUTIONS OF THE TWO-DIMENSIONAL
FRACTIONAL ORDER BURGER EQUATION**

Erbil GÖKDAĞ

**Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics**

Advisor: Prof. Dr. Erdal KORKMAZ

In this thesis, numerical solutions of the fractional order two-dimensional Burgers' equation were investigated. First, the Burgers' equation was converted to a first-order fractional ordinary differential equation system using the MQ-RBF method in space, then the numerical solutions of the obtained ordinary equation were obtained by the time splitting method. The obtained results are supported with examples and the error norms of L_2 and L_∞ are presented.

2025, 29 Pages

Keywords: Burger Equation, Multiquadric Radial Base Method, Time-Splitting Method.

TEŞEKKÜR

Tez çalıřmam boyunca her tűrlű gűrűř ve dűřűnceleriyle bana yol gűsteren,yardımda ve katkılarını esirgemeyen deęerli ve saygıdeęer danıřman hocam Prof.Dr. Erdal KORKMAZ'a teőekkűrlerimi sunarım.

Ayrıca,çalıřmalarım sűresinde saęladıęı maddi ve manevi destekle beni hiç yalnız bırakmayan eřim Meryem GűKDAę'a teőekkűrlerimi sunarım.

Erbil GűKDAę

MUŞ-2025

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. KAYNAK ARAŞTIRMASI	1
2. MATERİYAL ve YÖNTEM	3
2.1. Temel Kavramlar	3
2.2. Multiquadrik Radyal Baz Yöntemi	4
2.3. Zaman-Parçalama (Time-Splitting) Yöntemi	5
3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA	8
3.1. Kesirli Mertebeden Burgers' Denklemine MQ-RBF yöntemi ile Adi Denk- lem Sistemine Dönüştürme	8
3.2. İki boyutlu Kesirli Mertebeden Burgers' Denklemine MQ-RBF yöntemi ile Adi Denklem Sistemine Dönüştürme	11
3.3. Zaman-Parçalama metodu	13
3.4. Sayısal Sonuçlar	18
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	25
4.1. Sonuçlar	25
4.2. Öneriler	25
KAYNAKLAR	26
EKLER	27
ÖZGEÇMİŞ	28

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$({}^C D_0^\alpha)$	Caputo anlamda Kesirli Türev
Γ	Gamma Fonksiyonu

Kısaltmalar

MQ	Multiquadrik
RBF	Radyal Baz Fonksiyonu
MQ-RBF	Multiquadrik Radyal Baz Fonsiyonu
FPDEs	Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler
TFPDEs	Zaman Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Örnek 3.1 de $N = 10, v = 100, T = 0.5$ ve $\alpha = 0.8$ değerleri için mutlak hata.	20
Şekil 3.2. Örnek 3.1 de $N = 10, v = 100, T = 0.5, c = 0.298, \alpha = 0.5$ değerleri için yaklaşık çözüm.	20
Şekil 3.3. Örnek 3.1 de $N = 10, v = 100, T = 0.5, c = 0.302, \alpha = 0.8$ değerleri için yaklaşık çözüm.	21
Şekil 3.4. Örnek 3.1 de $N = 10, v = 100, T = 0.5$ ve $\alpha = 0.8$ değerleri için gerçek çözüm.	21
Şekil 3.5. Örnek 3.2 de $N = 10, v = 0.1, T = 1, c = 0.999, \alpha = 0.7$ değerleri için yaklaşık çözüm.	23
Şekil 3.6. Örnek 3.2 de $N = 10, v = 0.1, T = 1, c = 0.999, \alpha = 0.8$ değerleri için yaklaşık çözüm.	23
Şekil 3.7. Örnek 3.2 de $N = 10, v = 0.1, T = 1$ değerleri için gerçek çözüm.....	24
Şekil 3.8. Örnek 3.2 de $N = 10, v = 0.1, T = 1$ ve $\alpha = 0.7$ değerleri için mutlak hata.	24

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Örnek 3.1 in $N = 10, v = 100$ ve $h = 0.005$ değerleri için tam çözüm, yaklaşık çözüm ve hatalar.	19
Çizelge 3.2. Örnek 3.2 nin $N = 10, v = 0.1$ ve $T = 0.1$ de α nın farklı değerleri için hata normları.	22



1. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Kesirli hesaplama, bilim ve mühendisliğin çeşitli alanlarındaki araştırmacıların giderek artan ilgisini çekmektedir. Kesirli türevler, matematiksel modelleri tamsayı mertebesindeki türevlerden daha gerçekçi hale getiren daha fazla serbestlik derecesine yol açar. Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin (FPDE'ler), biyoloji, fizik, viskoelastisite, ısı ve kütle transferi, gözenekli veya gözeneksiz ortamlardaki akışkan akışları, sinyal ve görüntü işleme, hava kirliliğinin modellenmesi, finansal problemler, astrofizik, dinamik ve kontrol sistemi gibi çeşitli bilim alanlarında birçok uygulaması vardır (Bagley ve Torvik, 1983; Sun ve ark., 2018). Zaman kesirli Burgers' denklemi, son yıllarda çok fazla ilgi gören önemli FPDE modellerinden biridir. Gaz tüpünde doğrusal olmayan akustik dalgaların yayılması, viskoz ortamda şok dalgalarının hareketi, elektrik iletkenliği olan bir ortamda manyeto-hidrokinamik dalgalar, sesin ve sığ su dalgalarının yayılması gibi çeşitli fenomenleri tanımlamak için türbülans çalışmasında ortaya çıkar (Burgers, 1948; Hussain ve ark., 2020). Birçok araştırmacı bu denklemi yeni sayısal yöntemlerin performansını kontrol etmek için bir test problemi olarak kullanmaktadır. Bu denklem, birinci dereceden zaman türevini aşağıdaki formda tanımlanan kesirli bir türevle değiştirilerek klasik Burgers' denkleminde formüle edilebilir (Duangpan ve ark., 2019).

$R > 0$ ve $\Omega = (a, b)$ olmak üzere $\Omega \times (0, T)$ de bir boyutlu iyi bilinen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

Burgers' denklemi verilsin. Bu denklem ilk kez onun steady çözümlerini veren Bateman (1915) tarafından tanıtıldı. Daha sonra Burgers' Burgers (1939), Burgers (1948) tarafından serbest türbülansın matematiksel modeli olarak ele alındı ve ondan sonra böyle bir denklem yaygın olarak Burgers' denklemi olarak anıldı. Bu denklemle birçok problem modellenebilir. Örneğin Navier-Stokes denklemlerinin tek boyutlu hali bir benzeridir (Ames, 1965).

Burgers' denklemi kısıtlı bir kümede keyfi başlangıç ve sınır koşulları için Hopf (1950) ve Cole (1951) tarafından analitik olarak çözülmüştür. Burgers' denkleminin tam çözümünün R nin kısıtlı değerleri için hesaplanabileceği iyi bilinmektedir. Bu nedenle Burgers' denkleminin çözümünü elde etmek için çeşitli sayısal yöntemler kullanıldı. Bu yöntemlerin çözüm metodolojileri genellikle, sonlu fark yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi

ve spektral yöntemler olarak sınıflandırılır. Bu tekniklerin bir incelemesi Hassanien ve ark. (2005) ve Kutluay ve ark. (2004) de verilmiştir.

Son zamanlarda, multiquadrik (MQ) yöntemi, PDE'leri, özellikle de zamana bağlı denklemleri çözmek için gerçekten meshless bir yöntem olarak ortaya çıkıyor. Hardy (1971) ilk olarak , iki boyutlu coğrafi yüzeyleri tahmin etmek için genel bir dağılık veri yaklaşım algoritması olarak bu MQ yöntemini geliştirdi. Sayısal sonuçlar, MQ yönteminin dağılık verilere çok doğru bir interpolasyon sunduğunu göstermektedir. Franke (1982) inceleme makalesinde MQ yöntemini, doğruluk, kararlılık, verimlilik, bellek gereksinimi ve uygulama kolaylığı testlerine dayalı olarak 29 dağılık veri interpolasyon şeması arasında en iyilerden biri olarak derecelendirdi. (1.1) denkleminin zamana göre kesirli merteben modelinin sayısal çözümleri Korkmaz ve Yildirim (2023) tarafından elde edilmiştir. Bu çalışmada (1.1) denkleminin zamana göre kesirli merteben ve iki boyutlu modelinin sayısal çözümleri ele alınmıştır.

2. MATERİYAL ve YÖNTEM

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1. R^d de bir norm $\|\cdot\|$, $r = \|x\|$ olmak üzere eğer

$$\Phi(x) = \phi(r)$$

olacak şekilde tek değişkenli $\phi : [0, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu varsa $\Phi : R^d \rightarrow R$ fonksiyonuna radial denir.

Tanım 2.2. Radial temelli fonksiyon $\Phi(x)$ R^d de öklit normuna göre bileşimle radyalleştirilmiş $r > 0$ için tanımlanan bir değişkenli sürekli bir fonksiyondur. RBF ler c ile gösterilen keyfi bir parametreye (form parametresi) sahip olabilirler.

Tanım 2.3. Gamma fonksiyonu, $\Re(z) > 0$ olan karmaşık sayılar için aşağıdaki integral ile tanımlanır:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Gamma fonksiyonu, klasik faktöriyel fonksiyonunun bir genellemesidir. Rekürsif özelliği

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z).$$

Tanım 2.4. R^n -n boyutlu reel vektörler kümesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\|\cdot\| : R^n \rightarrow R$ fonksiyonuna R^n de tanımlı vektör norm denir.

- i. Keyfi $x \in R^n$ için $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x \equiv 0$
- ii. Keyfi $\alpha \in R$ ve $x \in R^n$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- iii. Keyfi $x, y \in R^n$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Genelde kullanılan vektör normları;

L_1 normu

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

L_2 normu veya öklid normu

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

L_∞ normu veya maksimum norm

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

2.2. Multiquadrik Radyal Baz Yöntemi

Multiquadrik (MQ) Radyal Taban Fonksiyonu (RBF) interpolasyon yöntemi, 1968 yılında Iowa State Üniversitesinde Roland Hardy tarafından ortaya atılmış ve bu yöntemi 1971 yılında yayımlanan (Hardy, 1971) çalışmasında tanımlamış ve adını vermiştir (Sarra ve Kansa, 2009).

Multiquadrik radyal baz fonksiyonları, 1977 yılında Michael J. D. Powell tarafından tanımlanmıştır. Bu fonksiyonlar, dağınık veri noktalarını interpolasyon yöntemiyle doğru ve verimli bir şekilde aralamak amacıyla kullanılmaktadır. Powell, çoklu-kadrik radyal baz fonksiyonlarının az sayıda parametre ile geniş bir fonksiyon yelpazesini yaklaşık olarak temsil edebildiğini keşfetmiştir.

Powell'in multiquadrik radyal taban fonksiyonları üzerinde yaptığı çalışma, (Bromhead ve Lowe, 1988) tarafından genişletildi ve bu fonksiyonları kullanarak sinir ağlarını eğitmek için bir yöntem geliştirildi. Yöntemleri en küçük kareler prensibine dayanıyordu ve çeşitli fonksiyonları yaklaşık olarak öğrenmek için sinir ağlarını eğitmek için çok etkili olduğu kanıtlandı. Multiquadrik radyal taban fonksiyonlarının gelişimi 1990'larda devam etti ve bu fonksiyonları kullanarak sinir ağlarını eğitmek için birçok yeni yöntem önerildi. En önemli gelişmelerden biri, radyal taban fonksiyon çekirdeğinin (RBF çekirdeği) tanıtılmasıydı, bu da makine öğrenimi için güçlü bir araçtır.

Makine öğrenimi alanında, multiquadrik radyal baz fonksiyonları hızla benimsenmiştir. Bu fonksiyonlar, giriş ve çıkış verileri arasındaki doğrusal olmayan ilişkileri yaklaşık olarak hesaplayabilmeleri nedeniyle sinir ağlarının eğitimi için özellikle faydalıdır. Sınıflandırma, regresyon ve kümeleme gibi birçok makine öğrenimi uygulamasında hala yaygın olarak kullanılmaktadırlar.

2.3. Zaman-Parçalama (Time-Splitting) Yöntemi

Zaman parçalama yöntemi, bir zaman adımını birden fazla alt adıma bölerek her alt adımda sistemin farklı kısımlarını çözen sayısal bir yaklaşımdır. Bu teknik, doğrudan çözümü zor veya imkânsız olan diferansiyel denklemlerde kullanışlıdır.

Yöntemin kökenleri, 1960'larda dalga hareketlerinin modellenmesinde kullanılan "split-operator" tekniğine dayanır. Daha sonra Klemp ve Wilhelmson (1978) tarafından hidrostatik olmayan ve sıkıştırılamaz denklemlerin çözümüne uyarlanmıştır. Zaman parçalama, bir Hamiltoniyen operatörü altında dalga fonksiyonunun evrimini hesaplamakta da kullanılır ve sonlu farklar veya sonlu elemanlar gibi diğer sayısal yöntemlerle birleştirilebilir. Esnek yapısı sayesinde çeşitli fiziksel sistemlerde uygulanabilen bu yöntem, birçok alternatife kıyasla hızlı ve doğru sonuçlar üretir.

Zaman-parçalama metodunu anlayabilmek için basit bir örnek verelim:

$$\frac{du}{dt} = f(u) + g(u), \quad t \in [t_n, t_n + \tau], \quad u(t_n) = a,$$

problemini ele alalım. Zaman-parçalama yöntemi, bir diferansiyel denklemi birden fazla alt-probleme bölerek çözer. Her bir alt-problem için ayrı bir çözüm hesaplanır ve ardından bu çözümler birleştirilerek genel çözüm elde edilir. O halde

$$\frac{dv}{dt} = f(v), \quad t \in [t_n, t_n + \tau], \quad v(t_n) = a,$$

$$\frac{dw}{dt} = g(w), \quad t \in [t_n, t_n + \tau], \quad w(t_n) = v(t_n + \tau),$$

burada $v(t_n)$ olarak yazdığımız başlangıç zamanından bir sonraki zamana geçtiğimizde bu zaman $w(t_n)$ in başlangıç zamanıdır. Yani $f(v)$ fonksiyonunun bir τ zaman sonrası $g(w)$ fonksiyonu için başlangıç değeridir.

Örnek 2.1.

$$\frac{du}{dt} = u^2 + u, \quad u(0) = -\frac{1}{2}, \quad t \in [0, 1] \quad (2.1)$$

başlangıç değer problemi verilsin. Problemin tam çözümünün

$$u(t) = -\frac{e^t}{1 + e^t}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi denklemin $[0, 1]$ aralığında nümerik çözümününü elde etmek

için time splitting yöntemini uygulayalım. Bunun için öncelikle denklem iki parçaya ayrılır,

$$\frac{dv}{dt} = v, \quad t \in [0, 1], \quad v(t_0) = (u_0), \quad (2.2)$$

$$\int_{t_0}^t \frac{dv}{v} = \int_{t_0}^t dt, \quad (2.3)$$

$$\ln v(t) - \ln v(t_0) = t - (t_0), \quad (2.4)$$

$$\ln \frac{v(t)}{v(t_0)} = t - t_0, \quad (2.5)$$

$$\frac{v(t)}{v(t_0)} = e^{(t-t_0)},$$

$$v(t) = v(t_0)e^{(t-t_0)},$$

$$v(t_0 + h) = v(t_0)e^h,$$

$$\frac{dw}{dt} = w^2, \quad t \in [0, 1], \quad w(t_0) = v(t_0 + h), \quad (2.6)$$

$$\frac{dw}{w^2} = dt,$$

$$\int_{t_0}^t \frac{dw}{w^2} = \int_{t_0}^t dt, \quad (2.7)$$

$$\frac{-1}{w(t)} + \frac{1}{w(t_0)} = t - t_0, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{w(t)} = \frac{1}{w(t_0)} - (t - t_0), \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{w(t)} = \frac{1 - (t - t_0)w(t_0)}{w(t_0)}, \quad (2.10)$$

$$w(t) = \frac{w(t_0)}{1 - (t - t_0)w(t_0)}, \quad (2.11)$$

$$w(t) = \frac{1}{\frac{1}{w(t_0)} - (t - t_0)}, \quad (2.12)$$

$$w(t_0 + h) = \frac{1}{\frac{1}{w(t_0)} - (h)}. \quad (2.13)$$

Denklemleri birleştirirsek

$$w(t_0 + h) = \frac{1}{\frac{1}{v(t_0)e^h} - h}, \quad (2.14)$$

$$u(t_0 + h) \approx w(t_0 + h),$$

olur alacağımız h adımlarına göre nümerik çözüm elde edilir. Nümerik çözümü veren matlab kodu

```
t0 = 0;  
ts = 1;  
N = 1000;  
h = (ts - t0)/N;  
uex = -exp(ts)/(1 + exp(ts));  
u0 = -0.5;  
U = u0;  
t1 = 0;  
for i = 1 : N  
U = 1/((1/U) - h);  
U = exp(h) * U;  
end  
U
```

olarak verilir. Kod çalıştırıldığında $U = -0.7312$ elde edilir, gerçek çözüm $u(1) = -0.7311$

3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde iki boyutlu kesirli mertebeden Burgers' denklemini MQ-RBF yöntemi ile adi diferansiyel denkleme dönüştürmeyi daha iyi kavramak için önce bir boyutlu kesirli mertebeden Burgers' denklemini MQ-RBF yöntemi ile adi diferansiyel denkleme dönüştürürüz. Amaç bir boyutlu ve iki boyutlu kesirli mertebeden Burgers' denklemleri arasındaki ilişkiyi kavramaktır.

3.1. Kesirli Mertebeden Burgers' Denklemini MQ-RBF yöntemi ile Adi Denklem Sistemine Dönüştürme

Bir boyutlu kesirli mertebeden Burgers'

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \quad [x, t] \in [a, b] \times [0, T], \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.2)$$

$$u(a, t) = u_1(t), \quad u(b, t) = u_2(t) \quad a \leq x \leq b \quad (3.3)$$

başlangıç sınır değer problemi verilsin. Burada $0 < \alpha \leq 1$ kesirli mertebeden Caputo anlamda türevin mertebesi olup

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} := \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{u_t(x, \tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau$$

olarak tanımlanır. $\nu > 0$ sabit viscosity parametresidir. Şimdi verilen Burgers' denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için ilk önce $a \leq x \leq b$ aralığındaki düğüm noktalarında denklem MQ-RBF yöntemi kullanılarak kesirli mertebeden adi bir diferansiyel denkleme dönüştürülür. Bunun için $x \in [a, b]$ için

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

düğüm noktaları alınır. MQ-RBF fonksiyonu olarak

$$\phi_j(x) = \sqrt{(x - x_j)^2 + c^2}$$

alalım burada c pozitif shape parametre olup yaklaşık çözümlerin elde edilmesinde seçimi kritik rol oynar. Şimdi bu düğümlere MQ-RBF metodunu uygulayalım. Bu metodun arkasındaki temel düşünce yaklaşık çözümün sürekli diferansiyellenebilir radyal basis fonksiyonların lineer birleşimi olarak ifade edilmesidir. Kabul edelim ki Burgers' denkleminin yaklaşık çözümü $u(x,t) \approx u^N(x,t)$,

$$u^N(x,t) = \sum_{j=0}^N \lambda_j(t) \phi_j(x) \quad (3.4)$$

$$= \lambda_0(t) \phi_0(x) + \lambda_1(t) \phi_1(x) + \dots + \lambda_N(t) \phi_N(x) \quad (3.5)$$

$$= [\phi_0(x) \quad \phi_1(x) \quad \dots \quad \phi_N(x)] \begin{bmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_N(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$= \Phi^T(x) \lambda \quad (3.7)$$

Düğüm noktalarındaki yaklaşık çözüm;

$$u(x_i,t) \approx u_i(t) = u^N(x_i,t) = \sum_{j=0}^N \lambda_j(t) \phi_j(x_i)$$

ve MQ-RBF fonksiyon değeri

$$\phi_j(x_i) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2}$$

olduğundan (3.6) den

$$\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_N(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_N) & \phi_1(x_N) & \dots & \phi_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + c^2} & \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + c^2} & \cdots & \sqrt{(x_0 - x_N)^2 + c^2} \\ \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + c^2} & \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + c^2} & \cdots & \sqrt{(x_1 - x_N)^2 + c^2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sqrt{(x_N - x_0)^2 + c^2} & \sqrt{(x_N - x_1)^2 + c^2} & \cdots & \sqrt{(x_N - x_N)^2 + c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix}$$

$$A\lambda = w \quad (3.8)$$

elde edilir burada $w = (u_0(t), u_1(t), \dots, u_N(t))^T$.

(3.8) den $\lambda = A^{-1}w$ yazılır. Bunu (3.7) denkleminde yerine yazarsak

$$u^N(x, t) = \Phi^T(x)\lambda = \Phi^T(x)A^{-1}w = D(x)w \quad (3.9)$$

elde edilir.

$$D(x) = \Phi^T(x)A^{-1} = (D_1(x), D_2(x), \dots, D_N(x))$$

$$D_x(x_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x} D_1(x_i), \frac{\partial}{\partial x} D_2(x_i), \dots, \frac{\partial}{\partial x} D_N(x_i) \right)$$

$$D_{xx}(x_i) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} D_1(x_i), \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_2(x_i), \dots, \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_N(x_i) \right)$$

$({}^C D_0^\alpha w)(t)$ Caputo anlamda türev ve $g(t) = (g(x_0, t), g(x_1, t), \dots, g(x_N, t))^T$ olmak üzere yukarıda elde edilen değerler Burgers' denkleminde yerine yazarak

$$\left({}^C D_0^\alpha w \right) (t) + w(t) * D_x w(t) = \nu D_{xx} w(t) + g(t), \quad (3.10)$$

formundaki adi diferansiyel denklem sistemini elde ederiz. Burada D_x, D_{xx} , matrisleri $(N+1) \times (N+1)$ boyutunda matrisler ve "*" operatörü eleman elemana çarpma operatörüdür.

$$\left({}^C D_0^\alpha w \right) (t) = Aw(t) + f(t, w(t)), \quad (3.11)$$

where $A = \nu D_{xx} w(t)$, $f(t, w(t)) = g(t) - w(t) * D_x w(t)$.

3.2. İki boyutlu Kesirli Mertebeden Burgers' Denklemini MQ-RBF yöntemi ile Adi Denkleme Sistemine Dönüştürme

Bu bölümde iki boyutlu kesirli mertebeden Burgers'

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g(x, y, t), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.12)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.13)$$

$$u(a, y, t) = \mu_1(y, t) \quad u(b, y, t) = \mu_2(y, t) \quad a \leq x \leq b \quad (3.14)$$

$$u(x, c, t) = \gamma_1(x, t) \quad u(x, d, t) = \gamma_2(x, t) \quad c \leq y \leq d \quad (3.15)$$

başlangıç sınır değer problemi verilsin. Burada α kesirli mertebeden Caputo anlamda türevin mertebesi olup

$$\frac{\partial^\alpha u(x, y, t)}{\partial t^\alpha} := \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{u_t(x, y, \tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau \quad (3.16)$$

olarak tanımlanır. ν sabit viscosity parametresidir.

Yukarıda verilen iki boyutlu Burgers' denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için ilk önce $[a, b] \times [c, d]$ nin xy düzlemindeki düğüm noktalarında denklem MQ-RBF yöntemi kullanarak kesirli mertebeden adi bir diferansiyel dekleme dönüştürülür. Bunun için $x \in [a, b]$ ve $y \in [c, d]$ için

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad \text{ve} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_N = d$$

düğüm noktalarını alarak $[a, b] \times [c, d]$ bölgesinin $M = (N + 1)^2$ tane

$$(x_0, y_0), (x_0, y_1), \dots, (x_0, y_N), (x_1, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_1, y_N), \dots, (x_N, y_0), (x_N, y_1), \dots, (x_N, y_N)$$

düğümlemlerini alalım. Sadelik olsun diye elde edilen bu düğüm noktalarının birinci bileşenlerini

$$[\xi_{i1}]_{M \times 1} = [x_0, x_0, \dots, x_0, x_1, x_1, \dots, x_1, \dots, x_N, x_N, \dots, x_N]_{M \times 1}^T$$

kolon vektörü ve ikinci bileşenlerini

$$[\eta_{i1}]_{M \times 1} = [y_0, y_1, \dots, y_N, y_0, y_1, \dots, y_N, \dots, y_0, y_1, \dots, y_N]_{M \times 1}^T$$

kolon vektörü olarak yazalım. MQ-RBF fonksiyonu olarak

$$\phi_j(x, y) = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c^2}$$

alalım burada c pozitif shape parametre olup yaklaşık çözümlerin elde edilmesinde seçimi kritik rol oynar. Şimdi bu düğümlere MQ-RBF metodunu uygulayalım. Bu metodun arkasındaki temel düşünce yaklaşık çözümün sürekli diferansiyellenebilir radyal basis fonksiyonların lineer birleşimi olarak ifade edilmesidir. Kabul edelim ki Burgers' denkleminin yaklaşık çözümü $u(x, y, t) \approx u^M(x, y, t)$ olsun. O zaman

$$u^M(x, y, t) = \sum_{j=0}^M \lambda_j(t) \phi_j(x, y) \quad (3.17)$$

$$= \lambda_0(t) \phi_0(x, y) + \lambda_1(t) \phi_1(x, y) + \dots + \lambda_M(t) \phi_M(x, y) \quad (3.18)$$

$$= [\phi_0(x, y) \quad \phi_1(x, y) \quad \dots \quad \phi_M(x, y)] \begin{bmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_M(t) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$= \Phi^T(x, y) \lambda \quad (3.20)$$

yazılabilir. Düğüm noktalarındaki yaklaşık çözüm;

$$u(\xi_{i1}, \eta_{i1}, t) \approx u_i(t) = u^M(\xi_{i1}, \eta_{i1}, t) = \sum_{j=0}^M \lambda_j(t) \phi_j(\xi_{i1}, \eta_{i1})$$

ve MQ-RBF fonksiyon değeri

$$\phi_j(\xi_{i1}, \eta_{i1}) = \sqrt{(\xi_{i1} - \xi_{j1})^2 + (\eta_{i1} - \eta_{j1})^2 + c^2}$$

olduğundan (3.19) den

$$A\lambda = w \quad (3.21)$$

elde edilir burada $w = (u_0(t), u_1(t), \dots, u_M(t))^T$ ve A matrisi elemanları

$$a_{ij} = \sqrt{(\xi_{i1} - \xi_{j1})^2 + (\eta_{i1} - \eta_{j1})^2 + c^2}$$

olan bir matristir. (3.21) den $\lambda = A^{-1}w$ yazılır. Bunu (3.20) denkleminde yerine yazarsak

$$u^M(x, y, t) = \Phi^T(x, y)\lambda = \Phi^T(x, y)A^{-1}w = N(x, y)w \quad (3.22)$$

elde edilir.

$$N(x, y) = \Phi^T(x, y)A^{-1} = (N_1(x, y), N_2(x, y), \dots, N_M(x, y))$$

$$N_x(\xi_{i1}, \eta_{i1}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} N_1(\xi_{i1}, \eta_{i1}), \frac{\partial}{\partial x} N_2(\xi_{i1}, \eta_{i1}), \dots, \frac{\partial}{\partial x} N_M(\xi_{i1}, \eta_{i1}) \right)$$

$$N_y(\xi_{i1}, \eta_{i1}) = \left(\frac{\partial}{\partial y} N_1(\xi_{i1}, \eta_{i1}), \frac{\partial}{\partial y} N_2(\xi_{i1}, \eta_{i1}), \dots, \frac{\partial}{\partial y} N_M(\xi_{i1}, \eta_{i1}) \right)$$

$$N_{xx}(\xi_{i1}, \eta_{i1}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} N_1(\xi_{i1}, \eta_{i1}), \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_2(\xi_{i1}, \eta_{i1}), \dots, \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_M(\xi_{i1}, \eta_{i1}) \right)$$

$$N_{yy}(\xi_{i1}, \eta_{i1}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} N_1(\xi_{i1}, \eta_{i1}), \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_2(\xi_{i1}, \eta_{i1}), \dots, \frac{\partial^2}{\partial y^2} N_M(\xi_{i1}, \eta_{i1}) \right)$$

$({}^C D_0^\alpha w)(t)$ Caputo anlamda türev ve $g(t) = (g(\xi_{01}, \eta_{01}, t), g(\xi_{11}, \eta_{11}, t), \dots, g(\xi_{M1}, \eta_{M1}, t))^T$ olmak üzere yukarıda elde edilen değerler Burgers' denkleminde yerine yazarak

$$\left({}^C D_0^\alpha w \right) (t) + w(t) * (N_x w(t) + N_y w(t)) = v (N_{xx} w(t) + N_{yy} w(t)) + g(t), \quad (3.23)$$

formundaki adi diferansiyel denklem sistemini elde ederiz. Burada N_x, N_y, N_{xx}, N_{yy} matrisleri $(M+1) \times (M+1)$ boyutunda matrisler ve "*" operatörü eleman elemana çarpma operatörüdür.

$$\left({}^C D_0^\alpha w \right) (t) = Aw(t) + f(t, w(t)), \quad (3.24)$$

where $A = v(N_{xx} + N_{yy})w(t)$, $f(t, w(t)) = g(t) - w(t) * (N_x + N_y)w(t)$.

3.3. Zaman-Parçalama metodu

Bölme yöntemleri hız, doğruluk ve kararlılık gibi avantajları nedeniyle büyük ilgi görmüştür. Bu yöntemler açık ve uygulaması kolaydır. Ayrıca bölme yöntemleri geomet-

rik sayısal şemalar halinde tasarlanmıştır. Şimdi kesirli mertebeden

$$\left({}^C D_0^\alpha w\right)(t) = \beta w(t) + \rho w(t), \quad w(0) = w_0, \quad 0 < t \leq T, \quad \beta, \rho \in \mathbb{C} \quad (3.25)$$

diferansiyel denklemi verilsin. Burada $\left({}^C D_0^\alpha w\right)(t)$, $\alpha \in (0, 1)$ Caputo anlamda türevidir. $0 \leq t \leq h$ adımı için (3.25) denkleminin klasik zaman bölme adımını uygularsak

$$\left({}^C D_0^\alpha \bar{w}\right)(t) = \beta \bar{w}(t), \quad \bar{w}(0) = w_0$$

$$\left({}^C D_0^\alpha \tilde{w}\right)(t) = \rho \tilde{w}(t), \quad \tilde{w}(0) = \bar{w}(h)$$

olarak düşünülebilir. Yani Denklem çözülebilen ve ayrı ayrı ele alınması kolay iki denkleme bölünmüştür. Bu iki denklem sırasıyla çözülür. Bu durumda (3.25) kesirli denklemin yaklaşık çözümü \tilde{w} olur. Ayrıca (3.25) denkleminin yaklaşık çözümünün ve klasik bölme yöntemlerinin hatası

$$\begin{aligned} w(h) - \tilde{w}(h) &= w_0 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta+\rho)^k h^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta h^\alpha)^k}{\Gamma(1+k\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho h^\alpha)^k}{\Gamma(1+k\alpha)} \right] \\ &= \left[\frac{2\beta\rho}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\beta\rho}{(\Gamma(1+\alpha))^2} \right] h^{2\alpha} + O(h^{3\alpha}), \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Klasik bölme yönteminin yakınsama mertebesi $O(h^{2\alpha})$ 'dır. Dolayısıyla α sıfıra yaklaştıkça bir adım için elde edilen zaman bölme şemasının yakınsama mertebesinin azaldığı söylenebilir. Bu sorunu çözmek amacıyla Cao ve ark. (2015), adi diferansiyel denklemlerin kesirli lineer olmayan sistemleri için bir bölme yöntemi geliştirdi. Bu yeni bölme metodunun yakınsama mertebesi $O(h^{1+\alpha})$ dir. (3.11) ve (3.24) denklemlerininin nümerik olarak çözümlerini elde etmek için Cao ve ark. (2015) nin yöntemini kullanırız. Burada $\alpha \in (0, 1)$, A , $M \times M$ tipinde reel matrisler, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ bir sürekli fonksiyondur. Ayrıca f nin uygun bir G : bölgesinde ikinci değişkene göre

$$|f(t, w_1) - f(t, w_2)| \leq K|w_1 - w_2|, \quad \forall w_1, w_2 \in G. \quad (3.26)$$

Lipchitz şartını sağladığı kabul edilir(Cao ve ark., 2015).

Caputo anlamda türevin

$$\left({}^C D_a^\alpha g\right)(t) = \left(I_a^{1-\alpha} g'\right)(t), \quad \left(I_a^\alpha g\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > a$$

olarak tanımlandığını biliyoruz. Kolaylık olsun diye Cao ve ark. (2015) nin kullandığı

$$\left({}^C D_{[s]}^\alpha g\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{g'(\tau)}{(s-\tau)^\alpha} d\tau,$$

$$\left({}_{[s]} I_a^\alpha g\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{g(\tau)}{(s-\tau)^{1-\alpha}} d\tau,$$

$$\left({}_{[s]} I_a^\alpha f\right)(t, w(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau, w(\tau))}{(s-\tau)^{1-\alpha}} d\tau.$$

notasyonları kullanırız(Cao ve ark., 2015). Bölme şemasını elde etmek için (3.11) ve (3.24) kesirli mertebeden denklem sistemlerini

$$w(t) = w(0) + A(I_0^\alpha w)(t) + (I_0^\alpha f)(t, w(t)), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.27)$$

olarak integral formunda yazabiliriz. $t_n = nh, 0 \leq n \leq N, [0, T]$ aralığında $h = \frac{T}{N}$ ile düzgün (eşit aralıklı) dağılmış noktalar olarak tanımlanırsa, o zaman (3.27) denklemi $(t_{n-1}, t_n]$ aralığı üzerinde ($n \geq 1$) için

$$w(t) = w(t_0) + I_{t_{n-1}}^\alpha A w(t) + ({}_{[t]} I_{t_0}^\alpha A w)(t_{n-1}) + (I_{t_0}^\alpha f)(t, w(t)), \quad (3.28)$$

olarak yeniden yazılır(Cao ve ark., 2015). Bölme şemasını elde etmek için $0 \leq t \leq t_{n-1}$ için $[0, t_{n-1}]$ aralığında çözümün $\tilde{w}(t)$ olduğu kabul edilir ve

$$\bar{w}(t) = \tilde{w}(t_{n-1}) + ({}_{[t]} I_{t_0}^\alpha A \tilde{w})(t_{n-1}) + (I_{t_{n-1}}^\alpha A \bar{w})(t), \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad (3.29)$$

olarak yazılır(Cao ve ark., 2015). t_{n-1} de \bar{w} nin başlangıç değeri

$$\tilde{w}^c(t_{n-1}) = \tilde{w}(t_{n-1}) + ({}_{[t]} I_{t_0}^\alpha A \tilde{w})(t_{n-1}). \quad (3.30)$$

olarak tanımlanır(Cao ve ark., 2015).

O zaman (3.29) denklemi

$$\bar{w}(t) = \tilde{w}^c(t_{n-1}) + (I_{t_{n-1}}^\alpha A \bar{w})(t), \quad t_{n-1} < t \leq t_n. \quad (3.31)$$

olarak yazılır.

(3.28) ve (3.29), den

$$\tilde{w}(t) = \bar{w}^c(t_n) + (I_{t_0}^\alpha f)(t, \tilde{w}(t)), \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad (3.32)$$

elde edilir(Cao ve ark., 2015). Burada

$$\bar{w}^c(t_n) = \bar{w}(t) - \tilde{w}(t_{n-1}) + w(t_0) - (I_{t_{n-1}}^\alpha A(\bar{w} - \tilde{w}))(t). \quad (3.33)$$

$t \in (t_n, t_{n+1}]$ için $\tilde{w}(t)$ nin çözümü yukarıdaki sürecin tekrarı ile hesaplanır. (3.30)-(3.33) denklemlerinden (3.28) denklemine ulaşıldığı görülebilir. (3.27) denklem bir tek çözüme sahip olduğu sürece (3.30)-(3.33) sürecinin de bir tek çözüme sahip olduğu söylenebilir. (3.28) nin (3.30)-(3.33) sürecine denk gelmesinden dolayı yukarıdaki sürecin bölme hatası yoktur(Cao ve ark., 2015). $t = t_n$ alarak (3.30)-(3.33) den

$$\bar{w}(t_n) = \tilde{w}^c(t_{n-1}) + (I_{t_{n-1}}^\alpha A \bar{w})(t_n), \quad (3.34)$$

$$\tilde{w}^c(t_{n-1}) = \tilde{w}(t_{n-1}) + (I_{[t_n]}^\alpha A \tilde{w})(t_{n-1}), \quad \tilde{w}_0 = w_0, \quad (3.35)$$

$$\tilde{w}(t_n) = \bar{w}^c(t_n) + (I_{t_0}^\alpha f)(t_n, \tilde{w}(t_n)), \quad (3.36)$$

$$\bar{w}^c(t_n) = \bar{w}(t_n) - \tilde{w}(t_{n-1}) + w(t_0) - (I_{t_{n-1}}^\alpha A(\bar{w} - \tilde{w}))(t_n). \quad (3.37)$$

yazılır(Cao ve ark., 2015).

Şimdi (3.34)-(3.37) daha da ayrıklaştırılması ile ayrık zaman bölme şeması elde edilir(Cao ve ark., 2015). (3.34) ve (3.37) denklemlerindeki kesirli integrale ağırlıklı sağ dikdörtgen kuralı uygulanırsa (3.37) denklemi

$$\begin{aligned}\bar{w}^c(t_n) &\approx \bar{w}(t_n) - \tilde{w}(t_{n-1}) + w(t_0) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{A(\bar{w}(t_n) - \tilde{w}(t_n))}{(t_n - \tau)^{1-\alpha}} d\tau \\ &= \bar{w}(t_n) - \tilde{w}(t_{n-1}) + w(t_0) - \frac{Ah^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} (\bar{w}(t_n) - \tilde{w}(t_n)).\end{aligned}\quad (3.38)$$

olarak yazılır(Cao ve ark., 2015). $\bar{w}(t_n)=\bar{w}_n$, $\tilde{w}(t_n)=\tilde{w}_n$ ve $C_h^\alpha = I - A\frac{h^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere (3.36) ile birlikte (3.38) denklemini kullanarak

$$C_h^\alpha \tilde{w}_n = C_h^\alpha \bar{w}_n + w_0 - \tilde{w}_{n-1} + (I_{t_0}^\alpha f)(t_n, \tilde{w}(t_n)).\quad (3.39)$$

bulunur(Cao ve ark., 2015). Ayrıca (3.39)'deki bilinen tüm bilgiler gösterilir ve

$$C_h^\alpha \tilde{w}_n = \bar{w}_n^c + (I_{t_{n-1}}^\alpha f)(t_n, \tilde{w}(t_n)),\quad (3.40)$$

$$\bar{w}_n^c = C_h^\alpha \bar{w}_n + w_0 - \tilde{w}_{n-1} + (I_{t_0}^\alpha f)(t_{n-1}, \tilde{w}(t_{n-1})).\quad (3.41)$$

alınır(Cao ve ark., 2015).

Öte yandan (3.35) ve (3.41)'deki integraller sırasıyla ağırlıklı yamuk kuralı ve $\tilde{w}(t_{j-\frac{1}{2}}) \approx \frac{1}{2}(\tilde{w}(t_{j-1}) - \tilde{w}(t_j))$ ile ağırlıklı orta nokta kuralı uygulanarak hesaplanır. Ancak (3.34) ve (3.40)'deki integraller sırasıyla ağırlıklı sağ dikdörtgen kuralı ve ağırlıklı sol dikdörtgen kuralı kullanılarak hesaplanır. Daha sonra aşağıdaki zaman bölme

$$\bar{w}_n = \tilde{w}_{n-1}^c + \frac{Ah^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \bar{w}_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N,\quad (3.42)$$

$$\tilde{w}_{n-1}^c = \tilde{w}_{n-1} + \frac{Ah^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{j=1}^{n-1} z_{n,j}^\alpha (\tilde{w}_{j-1} + \tilde{w}_j), \quad \tilde{w}_0 = w_0,\quad (3.43)$$

$$C_h^\alpha \tilde{w}_n = \bar{w}_n^c + \frac{h^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} f(t_{n-1}, \tilde{w}_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N,\quad (3.44)$$

$$\bar{w}_n^c = C_h^\alpha \bar{w}_n + w_0 - \tilde{w}_{n-1} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{j=1}^{n-1} z_{n,j}^\alpha f(t_{j-\frac{1}{2}}, \frac{\tilde{w}_{j-1} + \tilde{w}_j}{2}),\quad (3.45)$$

şeması elde edilir (Cao ve ark., 2015). Burada

$$z_{n,j}^{\alpha} = \frac{\alpha}{h^{\alpha}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{(t_n - \tau)^{1-\alpha}} d\tau = (n-j+1)^{\alpha} - (n-j)^{\alpha}.$$

(3.43)'i elde etmek için aşağıdaki yaklaşım gerçekleştirilir(Cao ve ark., 2015).

$$\begin{aligned} ([t_n]I_{t_0}^{\alpha} A\tilde{w})(t_{n-1}) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t_{n-1}} \frac{A\tilde{w}(\tau)}{(t_n - \tau)^{1-\alpha}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{A\tilde{w}(\tau)}{(t_n - \tau)^{1-\alpha}} d\tau \\ &\approx \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{(\tilde{w}_j + \tilde{w}_{j+1})}{2(t_n - \tau)^{1-\alpha}} d\tau \\ &= \frac{Ah^{\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)} \sum_{j=1}^{n-1} z_{n,j}^{\alpha} (\tilde{w}_{j-1} + \tilde{w}_j) \end{aligned}$$

Şimdi Ali ve ark. (2022) nin Lucas polinomları ve Sonlu farklar yöntemini kullanarak, Cao ve ark. (2015) nun konum değişkenleri için süreksiz Galerkin metodu ve zaman değişkeni için sonlu fark yöntemini kullanarak, iki boyutlu zaman kesirli Burgers' denkleminin sayısal çözümüne verdikleri aşağıdaki örnekdeki sonuçlar ile bizim sonuçlar karşılaştırılır.

3.4. Sayısal Sonuçlar

Şimdi, elde edilen algoritmanın etkinliğini kontrol etmek için örnek problemler verilir. Elde edilen sonuçlar, doğruluğunu ölçmek için,

$$L_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^M (\tilde{w}(\xi_{i1}, \eta_{i1}, t) - u(\xi_{i1}, \eta_{i1}, t))^2 \right)^{1/2}$$

ve

$$L_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq M} |\tilde{w}(\xi_{i1}, \eta_{i1}, t) - u(\xi_{i1}, \eta_{i1}, t)|$$

olarak tanımlanan L_2 ve L_{∞} hata normları kullanılır.

Örnek 3.1. İki boyutlu zamana göre kesirli mertebeden

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g(x, y, t), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.46)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.47)$$

$$u(0, y, t) = \mu_1(y, t) \quad u(1, y, t) = \mu_2(y, t) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.48)$$

$$u(x, 0, t) = \gamma_1(x, t) \quad u(x, 1, t) = \gamma_2(x, t) \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3.49)$$

Burgers' denkleminin

$$g(x, y, t) = (x^2 - x)(y^2 - y) \left[\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + t^2(x+y-1)(2xy-x-y) \right] - 2vt(x^2 + y^2 - x - y)$$

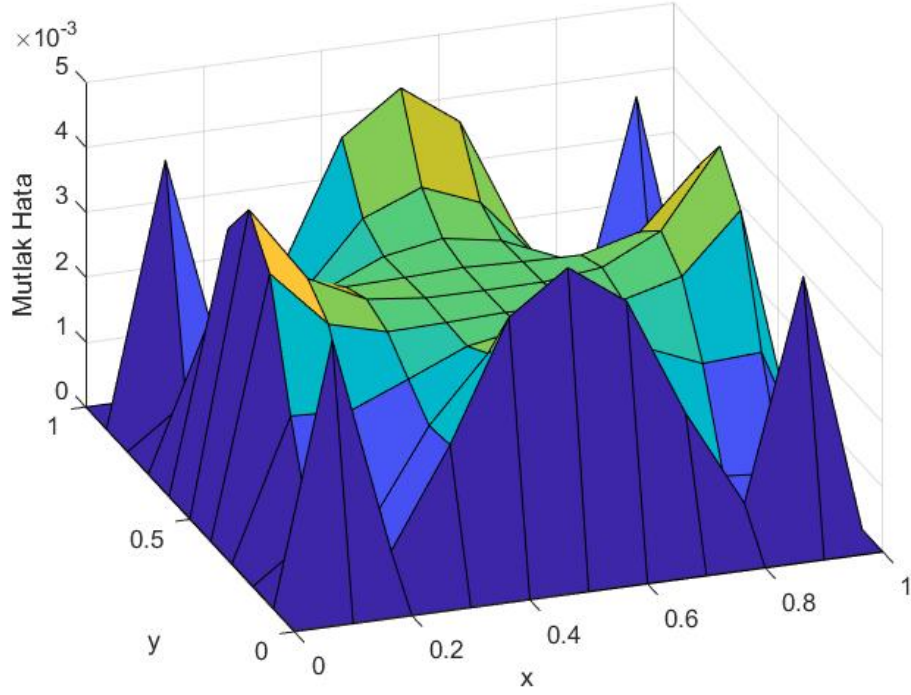
için analitik çözümü $x, y \in [0, 1]$ olmak üzere

$$u(x, y, t) = t(x^2 - x)(y^2 - y)$$

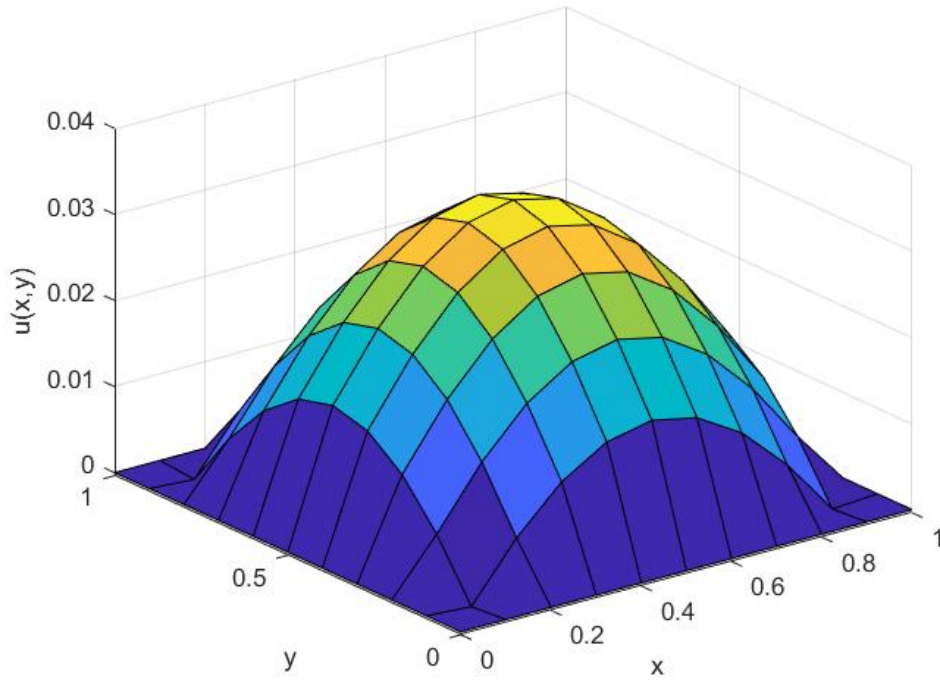
dir.

Çizelge 3.1. Örnek 3.1 in $N = 10, v = 100$ ve $h = 0.005$ değerleri için tam çözüm, yaklaşık çözüm ve hatalar.

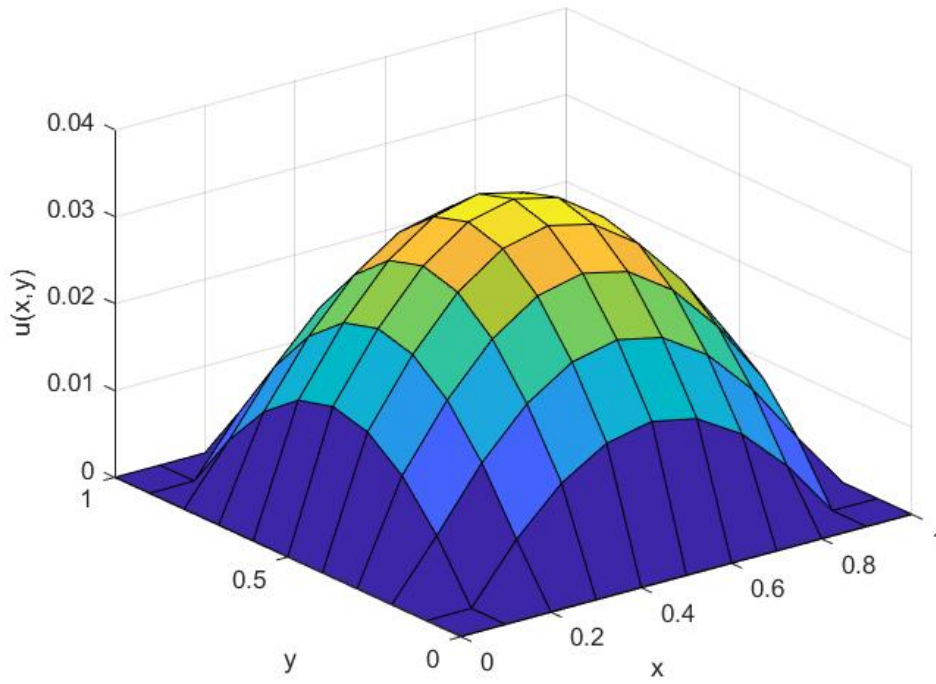
(x, y)	$\alpha = 0.5$			$\alpha = 0.8$		
	$u(x, y, 0.5)$	$w(x, y, 0.5)$	L_1	$u(x, y, 0.5)$	$w(x, y, 0.5)$	L_1
(0.2, 0.2)	0.01280	0.01320	3.9613e-04	0.01280	0.01352	7.2358e-04
(0.4, 0.4)	0.02880	0.03138	2.5752e-03	0.02880	0.03168	2.8836e-03
(0.6, 0.6)	0.02880	0.03137	2.5748e-03	0.02880	0.03168	2.8833e-03
(0.8, 0.8)	0.01280	0.01319	3.9489e-04	0.01280	0.01352	7.2235e-04
(0.8, 0.9)	0.00720	0.00621	9.9190e-04	0.00720	0.00655	6.4973e-04
(0.9, 0.8)	0.00720	0.00621	9.9190e-04	0.00720	0.00655	6.4973e-04
(0.9, 0.9)	0.00405	-0.00035	4.4037e-03	0.00405	0.00003	4.0241e-03
$L_2 = 7.7e - 03, \quad L_\infty = 4.4e - 03$			$L_2 = 8.3e - 03, \quad L_\infty = 4.6e - 03$			



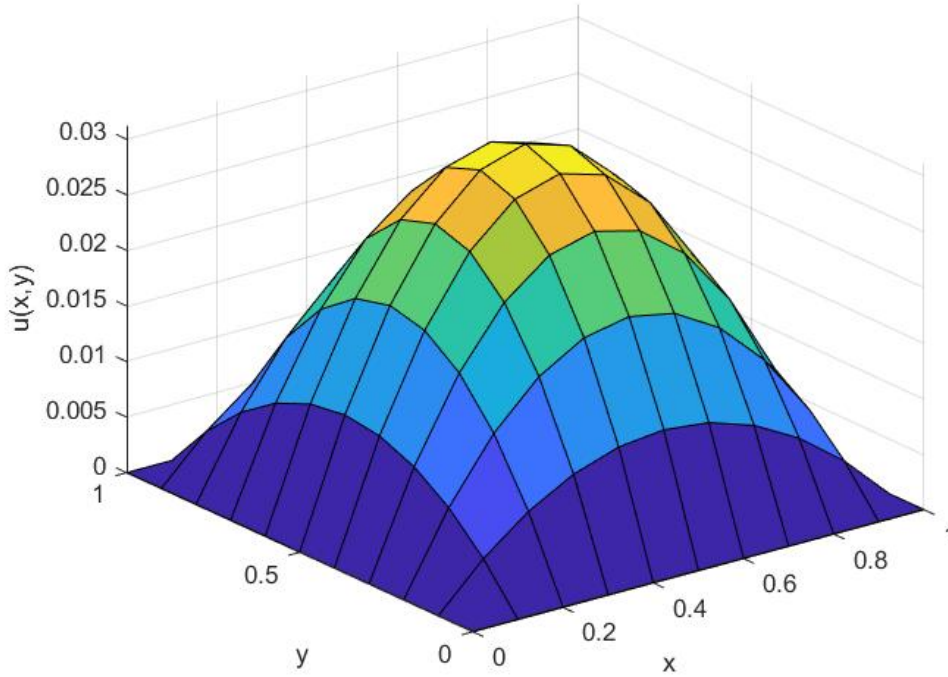
Şekil 3.1. Örnek 3.1 de $N = 10$, $\nu = 100$, $T = 0.5$ ve $\alpha = 0.8$ değerleri için mutlak hata.



Şekil 3.2. Örnek 3.1 de $N = 10$, $\nu = 100$, $T = 0.5$, $c = 0.298$, $\alpha = 0.5$ değerleri için yaklaşık çözüm.



Şekil 3.3. Örnek 3.1 de $N = 10, \nu = 100, T = 0.5, c = 0.302, \alpha = 0.8$ değerleri için yaklaşık çözüm.



Şekil 3.4. Örnek 3.1 de $N = 10, \nu = 100, T = 0.5$ ve $\alpha = 0.8$ değerleri için gerçek çözüm.

Örnek 3.2. İki boyutlu zamana göre kesirli mertebeden

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g(x, y, t), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.50)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.51)$$

$$u(0, y, t) = \mu_1(y, t) \quad u(1, y, t) = \mu_2(y, t) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.52)$$

$$u(x, 0, t) = \gamma_1(x, t) \quad u(x, 1, t) = \gamma_2(x, t) \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3.53)$$

Burgers' denkleminin

$$g(x, y, t) = \frac{6t^{3-\alpha}(1-x^2)^2(1-y^2)^2}{\Gamma(4-\alpha)} + 4t^6(1-x^2)^3(1-y^2)^3(x^2y+xy^2-x-y) - 4vt^3[(y^2-1)^2(3x^2-1) + (x^2-1)^2(3y^2-1)]$$

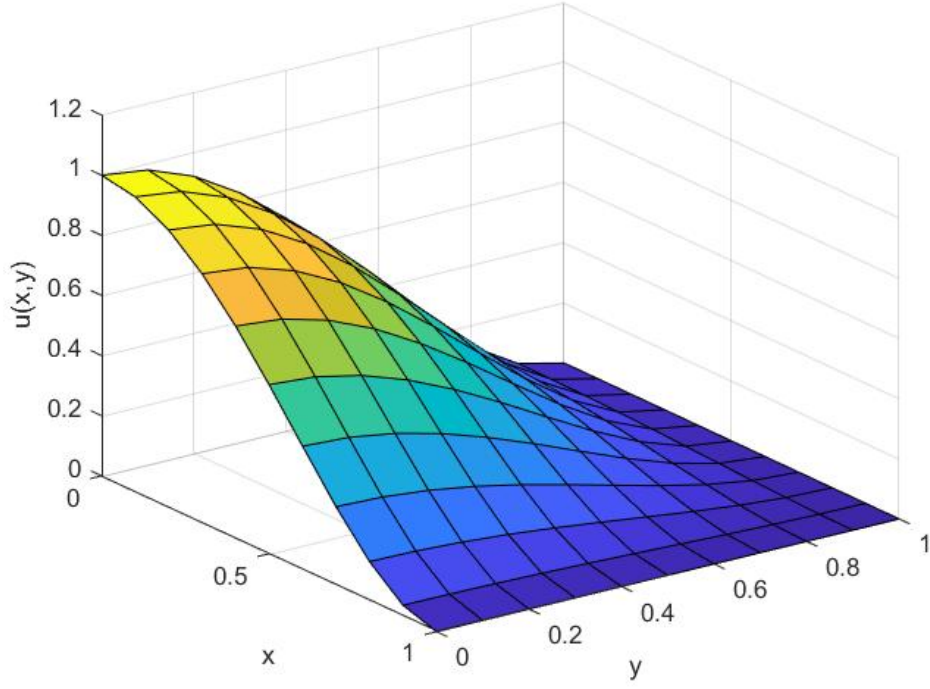
için analitik çözümü $x, y \in [0, 1]$ olmak üzere

$$u(x, y, t) = t^3(1-x^2)^2(1-y^2)^2$$

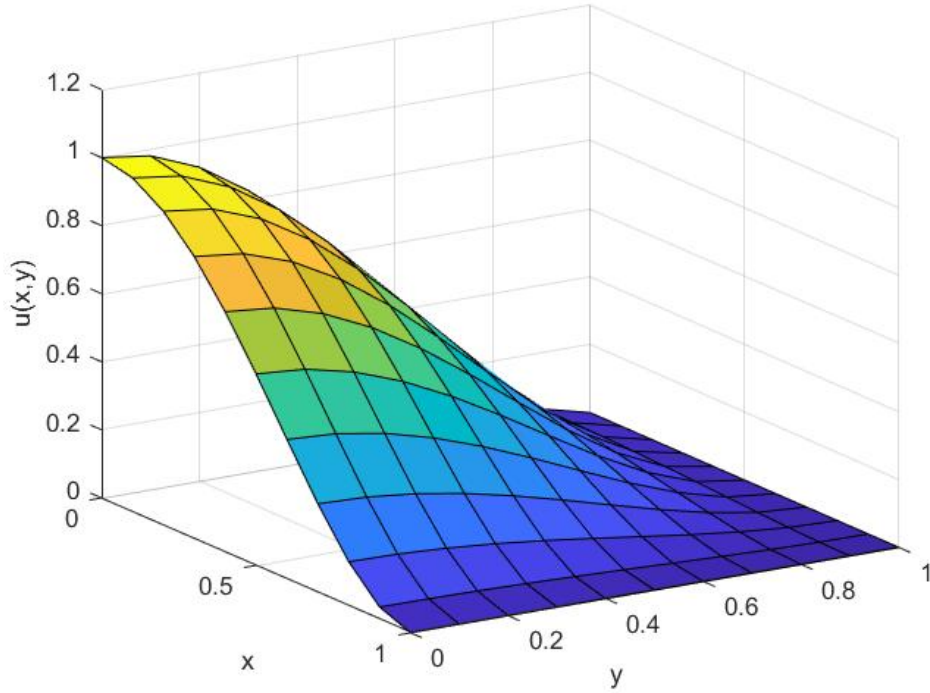
dir.

Çizelge 3.2. Örnek 3.2 nin $N = 10, v = 0.1$ ve $T = 0.1$ de α nın farklı değerleri için hata normları.

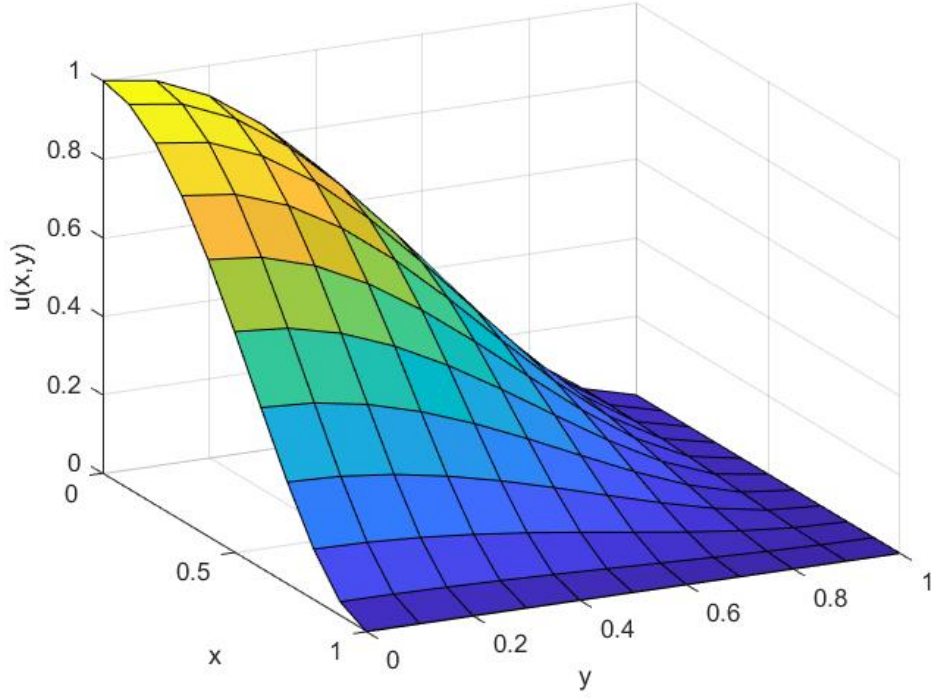
α	h	Önerilen metod		Ali ve ark. (2022)		Cao ve ark. (2017)
		L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_∞
0.7	0.0001	4.5540e-08	3.7623e-08	1.222e-05	2.891e-05	1.460e-04
	0.00005	4.0986e-08	4.1786e-08	1.005e-05	2.377e-05	7.830e-05
	0.000025	4.1958e-08	4.4249e-08	8.215e-06	1.944e-05	4.280e-05
0.8	0.0001	3.8090e-08	3.6682e-08	1.511e-05	3.684e-05	1.460e-04
	0.00005	3.6175e-08	3.8141e-08	1.326e-05	3.233e-05	7.760e-05
	0.000025	3.6363e-08	3.8941e-08	1.158e-05	2.825e-05	4.230e-05
0.9	0.0001	3.0320e-08	3.0952e-08	1.346e-05	3.342e-05	1.480e-04
	0.00005	2.9427e-08	3.1448e-08	1.265e-05	3.147e-05	7.790e-05
	0.000025	2.9414e-08	3.1697e-08	1.190e-05	2.951e-05	3.970e-05



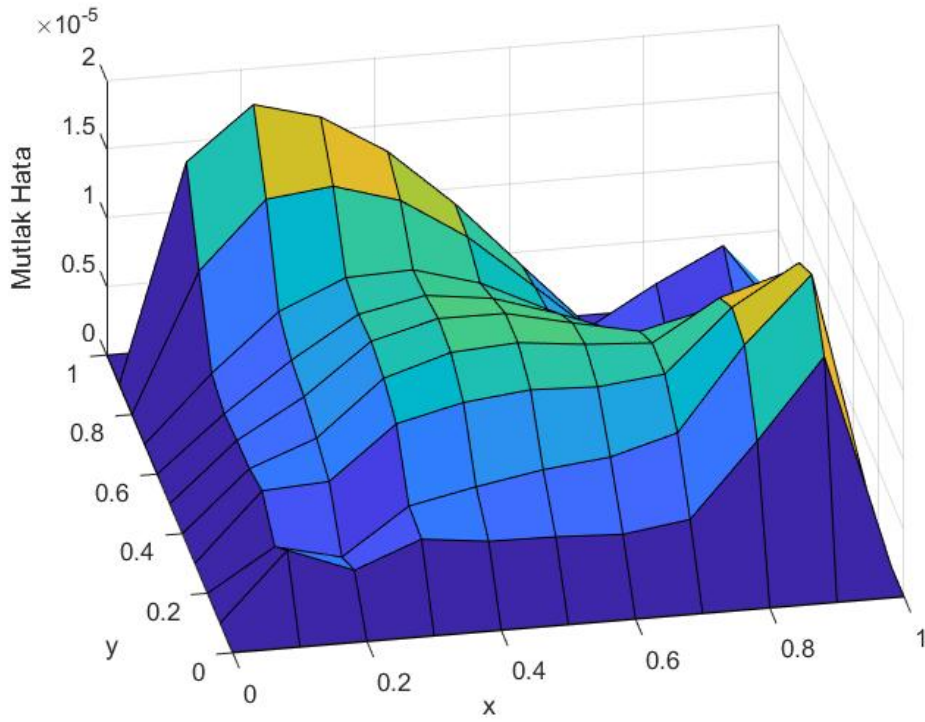
Şekil 3.5. Örnek 3.2 de $N = 10, \nu = 0.1, T = 1, c = 0.999, \alpha = 0.7$ değerleri için yaklaşık çözüm.



Şekil 3.6. Örnek 3.2 de $N = 10, \nu = 0.1, T = 1, c = 0.999, \alpha = 0.8$ değerleri için yaklaşık çözüm.



Şekil 3.7. Örnek 3.2 de $N = 10, \nu = 0.1, T = 1$ değerleri için gerçek çözüm.



Şekil 3.8. Örnek 3.2 de $N = 10, \nu = 0.1, T = 1$ ve $\alpha = 0.7$ değerleri için mutlak hata.

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

4.1. Sonuçlar

İki boyutlu kesirli mertebeden Burgers' denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için öncelikle Burgers' denklemi uzayda MQ-RBF yöntemi kullanılarak birinci mertebeden kesirli adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürüldü. Sonra elde edilen adi denklem zaman parçalama yöntemi ile denklemin sayısal çözümlerini veren bölme şeması oluşturuldu. Elde edilen bu şema iki adet örnek problem üzerine uygulanarak matlab programında sayısal sonuçlar elde edildi. Elde edilen sayısal sonuçların, MQ-RBF yöntemi ile zaman bölme metodunun birleştirilmesi ile elde edilen şemayı desteklediği görülmüştür. Özellikle Örnek3.2 de elde edilen sonuçları Ali ve ark. (2022) ve Cao ve ark. (2017) nin sonuçları ile karşılaştırıldığında önerilen şemanın daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

4.2. Öneriler

Yapılan literatür taramasında iki boyutlu kesirli mertebeden Burgers' denkleminin sayısal çözümleri üzerine araştırmacılar tarafından çok az çalışma yapıldığı görülmüş ve elde edilen sonuçların istenilen seviyede tatmin edici olmadığı görülmüştür. Bu da konunun araştırmaya açık olduğunu ve daha iyi sayısal sonuçlar için farklı metodların denenmesi gerektiğini gösterir.

KAYNAKLAR

- Ali, I., Haq, S., Aldosary, S.F., Nisar, K.S., Ahmad, F. 2022. Numerical solution of one- and two-dimensional time-fractional Burgers equation via Lucas polynomials coupled with Finite difference method, *Alexandria Engineering Journal*, 61 (8), 6077–6087.
- Ames, W.F., 1965, Nonlinear partial differential equations in engineering, *Academic press*.
- Bagley, R.L., Torvik, P.J. 1983. Fractional calculus-a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, *AIAA journal*, 21 (5), 741–748.
- Bateman, H. 1915. Some recent researches on the motion of fluids, *Monthly Weather Review*, 43 (4), 163–170.
- Broomhead, D. S. and Lowe, D., 1988., Radial basis functions, multi-variable functional interpolation and adaptive networks,
- Burgers, J.M. 1939. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion. in: *Trans. R. Neth. Acad. Sci. Amsterdam 17*, pp. 1–53.
- Burgers, J.M. 1948. A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in applied mechanics, Elsevier*, 1, 171–199.
- Cao, W., Xu, Q., Zheng, Z. 2017. Solution of two-dimensional time-fractional Burgers equation with high and low Reynolds numbers, *Advances in Difference Equations*, 2017, 1–14.
- Cao, W., Zhang, Z., Karniadakis, G.E. 2015. Time-splitting schemes for fractional differential equations I: smooth solutions, *Siam Journal on Scientific Computing, SIAM*, 37 (4), A1752–A1776.
- Cole, J.D. 1951. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quarterly of applied mathematics*, 9 (3), 225–236.
- Duangpan, A., Boonklurb, R., Treeyaprasert, T. 2019. finite integration method with shifted Chebyshev polynomials for solving time-fractional Burgers' equations, *Mathematics*, 7 (12), 1201.
- Franke, R. 1982. Scattered data interpolation: tests of some methods, *Mathematics of computation*, 38 (157), 181–200.
- Hardy, R.L. 1971. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, *Journal of geophysical research*, 76 (8), 1905–1915.
- Hassanien, I., Salama, A., Hosham, H.A. 2005. Fourth-order finite difference method for solving Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation, Elsevier*, 170 (2), 781–800.
- Hopf, E. 1950. The partial differential equation $[u. sub. t]+[uu. sub. x]=[mu]. sub. xx$, *Communications on Pure and Applied mathematics*, 3 (3), 201–230.
- Hussain, M., Haq, S., Ghafoor, A., Ali, I. 2020. Numerical solutions of time-fractional coupled viscous Burgers' equations using meshfree spectral method, *Computational and Applied Mathematics*, 39 (1), 6.
- Korkmaz, E., Yildirim, K. 2023. A Meshfree Time-Splitting Approach for the Time-Fractional Burgers' Equation, *Journal of Mathematics*, 2023.
- Kutluay, S., Esen, A., Dag, I. 2004. Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method, *Journal of computational and Applied Mathematics, Elsevier*, 167 (1), 21–33.
- Sarra, S.A., Kansa, E.J. 2009. Multiquadric radial basis function approximation methods for the numerical solution of partial differential equations, *Advances in Computa-*

tional Mechanics, Tech Science Press Henderson, NV, USA, 2 (2), 220.
Sun, H., Zhang, Y., Baleanu, D., Chen, W., Chen, Y. 2018. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 64, 213–231.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Erbil GÖKDAĞ
Uyruğu :
Doğum Yeri ve Tarihi :
Telefon :
Faks : -
e-mail :

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Akçadağ Anadolu Öğretmen Lisesi, Akçadağ, Malatya	2006
Üniversite	: Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği, Merkez, Balıkesir	2011
	: Bitlis Eren Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği, Merkez, Bitlis	2020
Yüksek Lisans	: -	
Doktora	: -	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2012-2017	Bulanık Kız Yatılı Bölge Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2017-2023	Muş Türk Telekom Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2023-	Muş Ölçme Değerlendirme Merkezi	Matematik Öğretmeni

UZMANLIK ALANI

-

YABANCI DİLLER

-

BELİRTMEK İSTEDİĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

-

YAYINLAR

-

