



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE α . DERECE DEN İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIK**

Sultanselim Han ÖNEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

OCAK-2022
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE α . DERECEDE İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIK**

Sultanselim Han ÖNEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

OCAK-2022
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Sultanselim Han ÖNEM tarafından hazırlanan “**Zaman Skalası Üzerinde α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık**” adlı tez çalışması .../.../2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Mikail ET
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

.....

Danışman

Doç. Dr. Muhammed ÇINAR
Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi
Fen ve Matematik Eğitimi Bölümü

.....

Üye

Doç. Dr. Abdullah AYDIN
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

.....

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu/...../..... Tarih ve/..... nolu kararı
ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Sultanselim Han ÖNEM

Tarih: .../.../2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE α . DERECEDEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Sultanselim Han ÖNEM

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

İstatistiksel yakınsaklık, toplanabilme teorisi ve fonksiyonel analizde önemli bir yere sahiptir. Yakın zamanlarda birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve bu çalışmalar zaman skalası üzerine taşınmıştır. Bu çalışmada öncelikle istatistiksel yakınsaklık ve zaman skalası ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm kaynak araştırmasına ayrılmıştır. Üçüncü bölümde temel tanım ve teoremler, istatistiksel yakınsaklık, zaman skalası, zaman skalasında λ – istatistiksel yakınsaklık, zaman skalasında α . dereceden istatistiksel yakınsaklık, zaman skalasında lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımları verilmiştir. Dördüncü bölümde zaman skalasında α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramına değinilmiştir. Son olarak beşinci bölümde zaman skalasında α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık ile ilgili elde edilen sonuçlara değinilmiştir.

2022, 31 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Cesáro toplanabilme, İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary istatistiksel yakınsaklık, Lebesgue ölçüsü, Zaman skalaları.

ABSTRACT

MS THESIS

STATISTICAL CONVERGENCE OF ORDER α ON TIME SCALE

Sultanselim Han ÖNEM

**Muş Alparslan University
Institute of Sciences
Department of Mathematics**

Advisor: Assoc. Prof. Muhammed ÇINAR

Statistical convergence has an important place in summability theory and functional analysis. In recent years, statistical convergence has been studied by many mathematicians and these studies have been moved on the time scale. In this study, first of all, basic definitions and theorems about statistical convergence and time scale are given.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is introduction. The second chapter is devoted to the literature review. In the third chapter, basic definitions and theorems, statistical convergence, time scale, λ – statistical convergence on time scale, statistical convergence of order α on time scale, lacunary statistical convergence on time scale are given. In the fourth chapter, concept of lacunary statistical convergence of order α on time scale is mentioned. Finally, in the fifth chapter the results about lacunary statistical convergence of order α on time scale are mentioned.

2022, 31 Pages

Keywords: Cesàro summability, Statistical convergence, Lacunary statistical convergence, Lebesgue measure, Time scales.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalıőmamın hazırlanması sürecinde bilgisiyle aydınlandığım ve tüm çalıőmalarımnda sabırla sorularımı yanıtlayan her konuda destek olan kendime rehber edindiğim saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Muhammed ÇINAR' a sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca desteklerini bir an bile benden esirgemeyen eőim Meral ÖNEM'e, annem Azize ERĐİN'e ve insan olma faziletine ulaşma yolunda yetiőtiren aileme canıgönülden teşekkür ederim.

Sultanselim Han ÖNEM
MUŞ-2022

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM	3
3.1 Temel Tanım ve Teoremler	3
3.2 Lebesgue Dış Ölçüsü	6
3.3 Zaman Skalasını Analizinde Temel Tanım ve Teoremler	7
3.4 Zaman Skalasının Üzerinde Lebesgue- Δ Ölçüsü.....	9
3.5 İstatistiksel Yakınsaklık İlgili Temel Tanım ve Teoremler	11
3.6 Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık, α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık	13
3.7 Zaman Skalasının Üzerinde İstatistiksel Yakınsaklık.....	14
3.8 Zaman Skalasının Üzerinde λ -İstatistiksel Yakınsaklık	17
3.9 Zaman Skalasının Üzerinde Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve Lacunary Cesaro Toplanabilirlik	18
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA	21
4.1 Zaman Skalasının Üzerinde γ . Dereceden Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	21
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	29
5.1 Sonuçlar	29
5.2 Öneriler	29
KAYNAKLAR	30

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathbb{Z}	: Tamsayılar kümesi
\mathbb{Q}	: Rasyonel sayılar kümesi
\mathbb{C}	: Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{T}	: Keyfi zaman skalası
σ	: İleri sıçrama operatörü
ρ	: Geri sıçrama operatörü
μ	: Sıçrama (Graininess) fonksiyonu
\mathfrak{I}	: $[a, b)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t < b\}$ şeklindeki tüm aralıkların ailesi
μ_{Δ}	: \mathfrak{I}_1 ailesi üzerinde tanımlanan m_1 küme fonksiyonunun Caratheodary genişlemesi
ℓ_{∞}	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
$\ell_{\infty}(\mathbb{T})$: \mathbb{T} zaman skalasında sınırlı diziler uzayı
st	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\delta(A)$: A kümesinin doğal yoğunluğu
$st_{\mathbb{T}}$: \mathbb{T} zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$S_{\mathbb{T}}$: Zaman skalasında istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi
$S_{\theta-\mathbb{T}}$: Zaman skalasında lacunary istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi
$N_{\theta-\mathbb{T}}$: Zaman skalasında kuvvetli Cesaro toplanabilir fonksiyonların kümesi
$st_{\mathbb{T}}^{\lambda}$: \mathbb{T} zaman skalası üzerinde λ – istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$S_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}$: \mathbb{T} zaman skalası üzerinde α . dereceden λ –istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$S_{\theta-\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}$: \mathbb{T} zaman skalası üzerinde α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı

1. GİRİŞ

Analiz ve fonksiyonel analizde önemli yere sahip doğal yoğunluk temelli olan istatistiksel yakınsaklık fikrini Zygmund ilk olarak ortaya çıkardı (Zygmund, 1979). Daha sonra Steinhaus ve Fast tarafından tanımlanmıştır (Steinhaus, 1951; Fast, 1951). Daha sonra Schoenberg kendine özgü olarak bir daha tanımlanmıştır (Schoenberg, 1959). Ortaya çıktığı tarihten bu yana birçok araştırmacı tarafından çalışılmış ve farklı alt dallarına uygulanmıştır. İstatistiksel yakınsaklık Fourier Analiz teorisinde, ergodic teoride, sayılar teorisinde, ölçüm teorisinde, trigonometrik serilerde ve Banach uzaylarında kullanılmıştır.

Bu çalışmanın amacı zaman skalası üzerinde α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklığı, α . dereceden lacunary toplanabilirlik tanımlarını vererek bunlar arasındaki ilişkileri incelemek ve zaman skalası üzerindeki lacunary istatistiksel yakınsaklığı genişletmektir. Özgün olarak bu tezde “zaman skalası üzerinde α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımı verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde kaynak araştırması yapılmıştır. Üçüncü bölümde ise temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Tezin orijinal kısmı olan bulgular kısmında ise zaman skalası üzerinde α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık, α . dereceden lacunary toplanabilirlik tanımları verilerek bunlar arasındaki kapsama ilişkileri incelenmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

İstatistiksel yakınsaklık fikrini Zygmund ilk olarak ortaya çıkardı (Zygmund, 1979). Daha sonra Steinhaus ve Fast tarafından tanımlanmıştır (Steinhaus, 1951; Fast, 1951). Daha sonra Schoenberg kendine özgü olarak bir daha tanımlanmıştır (Schoenberg, 1959). İstatistiksel yakınsaklık daha sonraları Fridy, Connor, Savaş, Mursaleen (2000), Fridy ve Orhan, Moricz, Rath ve Tripathy, Şalát, Bhardwaj ve daha birçok kişi tarafından çalışıldı (Fridy, 1985; Connor, 1988; Savaş, 2000; Mursaleen, 2000; Fridy ve Orhan, 1993; Moricz, 2003; Rath ve Tripathy, 1994; Şalát, 1980; Bhardwaj, 2007). Daha sonra derece eklemiş ve istatistiksel yakınsaklığı Gadjeiev ve Orhan incelemiştir (Gadjeiev ve Orhan, 2002). α . dereceden istatistiksel yakınsaklığı Çolak tarafından tanımlanmıştır (Çolak, 2010).

Lacunary dizisi öncelikle 1978 yılında Freedman vd. literatüre kazandırmıştır (Freedman vd, 1978). Sonrasında ise istatistiksel yakınsaklıkla aralarındaki ilişkiyi inceleyerek Lacunary istatistiksel yakınsaklık ve Lacunary istatistiksel toplanabilmeyi Fridy ve Orhan tanımlanmıştır (Fridy ve Orhan, 1993).1995-1996 yıllarında Çakallı topolojik gruplarda tanım yaparak incelemelerde bulunmuştur (Çakallı, 1995). Ayrıca α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık Şengül ve Et tarafından çalışılmıştır (Şengül ve Et, 2014).

Kesikli ve sürekli analizi bir bütün olarak ele almasıyla popülerite kazanan zaman skalası analizi öncelikle 1987-1988 yıllarında Stephan Hilger tarafından öne sürülmüştür (Hilger, 1988). Zaman skalaları üzerinde istatistiksel yakınsaklık tanımı ilk defa Seyyit Seyyidoglu ve Özkan Tan tarafından verilmiştir (Seyyidoglu ve Tan, 2012). Daha sonra Ceylan Turan ve Oktay Duman zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsaklık kavramını incelemiştir (Turan ve Duman, 2013).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1 $X \neq \emptyset$ bir küme ve F de bir cisim olsun

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad \text{ve} \quad \cdot : F \times X \rightarrow X$$

$$(x, y) \rightarrow x + y \quad (\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x$$

fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlarsa X kümesine F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

$\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in F$ için

- 1) $x + y = y + x$ (+ işleminin değişme özelliği)
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (+ işleminin birleşme özelliği)
- 3) $\exists \theta \in X$ öyle ki $x + \theta = x$ (+ işlemine göre etkisiz elemanın varlığı)
- 4) $\exists -x \in X$ öyle ki $x + (-x) = \theta$ (+ işlemine göre ters elemanın varlığı)
- 5) $1 \cdot x = x$ (Birimle çarpım Özelliği)
- 6) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- 7) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (skalerle çarpmanın dağılma özelliği)
- 8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) \cdot x$ (skalerle çarpmanın birleşme özelliği)

Lineer uzaylar üzerinde tanımlandıkları cisme göre isim alırlar. Örneğin \mathbb{C} kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı ise “kompleks lineer uzay”, \mathbb{R} reel sayılar cismi üzerinde tanımlı ise “reel lineer uzay” denir (Kızmaz, 1993).

Tanım 3.2 X bir lineer uzay (vektör uzayı) ve $E \subset X$ de bir lineer uzay ise E ye bir lineer alt uzay (alt vektör uzayı) denir (Kızmaz, 1993).

Tanım 3.3 X boş olmayan bir küme, d de $X \times X$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa d ye bir metrik fonksiyonu veya kısaca metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir. $\forall x, y, z \in X$ için,

$$\mathbf{M1)} \quad d(x, x) = 0$$

$$\mathbf{M2)} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\mathbf{M3)} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\mathbf{M4)} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

Bu koşullar “metrik aksiyomları” olarak bilinir. Açıkça

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

olduğundan, metrik negatif olmayan bir fonksiyondur. (X, d) bir metrik uzay ise $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ sayısına x ile y arasındaki uzaklık denir (Kızmaz, 1993).

Tanım 3.4 X bir lineer uzay ve $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa, buna bir “norm fonksiyonu” (veya kısaca norm), $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu lineer uzay denir.

$$1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$2) \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$3) \quad \forall x, y \in X, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(2) özelliğine, normun mutlak homojeniteliği, (3) özelliğine ise üçgen eşitsizliği adı verilir. (3) de $-x = y$ seçilerek (2) yardımıyla, her $x \in X$ $\|x\| \geq 0$ olduğu görülür. Buna göre, norm negatif olmayan bir fonksiyondur.

X bir lineer uzay, $p > 0$ ve $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$i) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$ii) \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda|^p \|x\|$$

$$iii) \quad \forall x, y \in X, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

koşullarını sağlarsa x uzayına bir “ p -normlu lineer uzay” denir (Kızmaz, 1993).

Tanım 3.5 $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.

$(x_n), x \in X$ 'e yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, Öyle ki

$$\forall n \geq N, \quad x_n \in B(x, \varepsilon)$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, Öyle ki

$$\forall n \geq N, \quad \|x_n - x\| < \varepsilon \text{ dir.}$$

Bu durumda $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) veya $\lim_n x_n = x$ gösterimleri kullanılır. Açık olarak $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) ise $(\|x_n - x\|)$ normlar dizisi \mathbb{R} de bir sıfır dizisidir. Yani $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) dir.

Bu yakınsaklığa “norm yakınsaklığı” veya “kuvvetli yakınsaklık” denir (Kızmaz, 1993).

Normlu uzayda Cauchy dizisi aşağıda gösterilen şekilde tanımlanabilir.

Tanım 3.6 $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.

$(x_n), X$ de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, Öyle ki

$$\forall n, m \geq N, \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

dir (Kızmaz, 1993).

Tanım 3.7 $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya “tam normlu uzay” veya “Banach uzayı” adı verilir (Kızmaz, 1993).

Tanım 3.8 ℓ_∞ sembolü tüm $x = (x_n)$ sınırlı dizilerinin uzayını gösterdiği kabul edilir. Yani

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_n) : \sup_n |x_n| < \infty \right\}$$

dir. Bu ℓ_∞ uzayındaki metrik $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$ şeklinde elde edilir (Maddox, 1970).

Teorem 3.1 Tüm $x = (x_n)$ yakınsak dizilerinin uzayı c ile gösterilir. Yani

$$c = \{x = (x_n) : \exists \ell \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \ell| = 0\}$$

dir. c dizi uzayı $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$ metriği ile beraber bir metrik uzay ifade eder (Maddox, 1970).

Tanım 3.9 Tüm $x = (x_n)$ sifıra yakınsak dizilerin uzayı c_0 ile gösterilir. Yani

$$c_0 = \{x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$$

dir. Bu c_0 uzayındaki metrik $d(x, y) = \max |x_n - y_n|$ şeklinde bulunabilir. Her sıfır dizisinin bir maksimum elemanı olduğundan dolayı bu sonuca varılır (Maddox, 1970).

Tanım 3.10 ℓ_∞, c ve c_0 uzayları; $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$ normu ile ve ℓ_p uzayı $p \geq 1$ için

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzayıdır (Kreyszig, 1978).

3.2 Lebesgue Dış Ölçüsü

Tanım 3.11 (X, \mathcal{A}) bir ölçülebilir uzay olsun. \mathcal{A} kümesi üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

$$i) \mu(\emptyset) = 0$$

$$ii) \forall A \in \mathcal{A} \text{ için } \mu(A) \geq 0$$

$$iii) \forall \text{ ayrık } (A_n) \text{ dizisi için } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir ölçü fonksiyonu veya kısaca ölçü denir. Eğer her $\forall A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye bir sonlu ölçü adı verilir. X kümesi her biri sonlu ölçüye sahip sayılabilir adetteki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü σ – sonludur denir (Balcı, 2009).

Tanım 3.12 X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değeli bir μ^* fonksiyonu

$$i) \mu^*(\emptyset) = 0$$

$$ii) \forall E \in P(X) \text{ için } \mu^*(E) \geq 0$$

$$iii) A \subset B \subset X \text{ için } \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

$$iv) \text{ Her bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } A_n \in P(X) \text{ ise } \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir (Balcı, 2009).

Tanım 3.13 (I_k) , \mathbb{R} nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve

$$\tilde{I}_A = \{(I_k) : A \subset \bigcup I_k\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tilde{I}_A \right\}$$

biçiminde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü adı verilir (Balcı, 2009).

Teorem 3.2 Lebesgue dış ölçüsü \mathbb{R} nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir, yani $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ise

$$\lambda^*(I) = l(I)$$

dır (Balcı, 2009).

Teorem 3.3 \mathbb{R}^n üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü her bir aralığına onun hacmini karşılık getirir (Balcı, 2009).

3.3 Zaman Skalası Analizinde Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.14 Reel sayıların boş olmayan, kapalı ve keyfi alt kümeleri zaman skalası olarak adlandırılır. Dolayısıyla \mathbb{R} reel sayılar kümesi, \mathbb{Z} tamsayılar kümesi, \mathbb{N} doğal sayılar kümesi, $[0,1]$ kapalı aralığı zaman skalasına örnek olarak gösterilebilir.

Ancak \mathbb{Q} rasyonel sayılar kümesi, \mathbb{R}/\mathbb{Q} irrasyonel sayılar kümesi, \mathbb{C} kompleks sayılar kümesi, $(0,1)$ açık aralığının zaman skalası olmadığı aşikardır. \mathbb{T} sembolü ile zaman skalasını göstereceğiz (Hilger, 1988).

Tanım 3.15 \mathbb{T} bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyon ileri sıçrama operatörü olarak adlandırılır (Hilger, 1988).

$$\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \quad \sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\}$$

Tanım 3.16 \mathbb{T} bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyon geri sıçrama operatörü olarak adlandırılır.

$$\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, \quad \rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\}.$$

Yukarda verilen tanımlardan $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ ve $\inf \mathbb{T} = \sup \emptyset$ olduğu kabul edilir (Hilger, 1988).

Teorem 3.4 \mathbb{T} bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyon graininess fonksiyonu veya sıçrama fonksiyonu olarak adlandırılır (Hilger, 1988).

$$\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty), \quad \mu(t) = \sigma(t) - t$$

Tanım 3.17 \mathbb{T} bir zaman skalası olsun. $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü, $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörüdür.

$t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) > t$ oluyorsa bu nokta sağa saçılmış nokta, $\rho(t) < t$ oluyorsa bu nokta sola saçılmış nokta, $\rho(t) < t < \sigma(t)$ oluyorsa bu nokta ayırık nokta, $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ oluyorsa bu nokta sağdan yoğun nokta, $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ oluyorsa bu nokta soldan yoğun nokta, $\rho(t) = t = \sigma(t)$ oluyorsa bu nokta yoğun nokta olarak isimlendirilir (Hilger, 1988).

Zaman skalasındaki bu noktaları aşağıdaki gibi sınıflandırabiliriz.

$\sigma(t) > t$	Sağa saçılmış nokta
$\rho(t) < t$	Sola saçılmış nokta
$\rho(t) < t < \sigma(t)$	Ayrık nokta

$t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ Sağdan yoğun nokta

$t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ Soldan yoğun nokta

$\rho(t) = t = \sigma(t)$ Yoğun nokta

3.4 Zaman Skalası Üzerinde Lebesgue- Δ Ölçüsü

Tanım 3.18 \mathbb{T} keyfi bir zaman skalası, σ ileri sıçrama operatörü, ρ geri sıçrama operatörü olduğunu kabul edelim.

$$[a, b)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t < b\}$$

şeklinde tanımlanan tüm aralıkların ailesi \mathfrak{I}_1 ile gösterilsin. Bu durumda $[a, a)_{\mathbb{T}}$ aralığı boş kümedir.

$$m_1: \mathfrak{I}_1 \rightarrow [0, +\infty)$$

$$[a, b)_{\mathbb{T}} \rightarrow m_1([a, b)_{\mathbb{T}}) = b - a$$

şeklinde tanımlanan m_1 küme fonksiyonu \mathfrak{I}_1 ailesi üzerinde sayılabilir toplamsal bir ölçüdür. m_1 küme fonksiyonunun Caratheodary genişlemesi m_{Δ} ile gösterilir, \mathbb{T} üzerinde Lebesgue – Δ ölçüsü diye isimlendirilir (Guseinov, 2003).

Teorem 3.5 $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ olsun. Bu durumda $\{t_0\}$ kümesi Δ – ölçülebilirdir ve

$$\mu_{\Delta}(\{t_0\}) = \sigma(t_0) - t_0 = \mu(t_0)$$

dır (Guseinov, 2003).

Lebesgue teorisindeki tek nokta kümelerinin Lebesgue ölçüsü sıfırdır. Lakin zaman skalası üzerinde $\mu_{\Delta}(\{t_0\}) = \mu(t_0)$ olup, $\mu(t_0)$ sayısı her zaman sıfıra eşit olmak zorunda değildir.

Teorem 3.6 $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a \leq b$ olsun.

i) $\mu_{\Delta}([a, b)_{\mathbb{T}}) = b - a$

ii) $\mu_{\Delta}((a, b)_{\mathbb{T}}) = b - \sigma(a)$ dır.

Eğer $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ ve $a \leq b$ ise

$$iii) \quad \mu((a, b]_{\mathbb{T}}) = \sigma(b) - \sigma(a)$$

$$iv) \quad \mu_{\Delta}([a, b]_{\mathbb{T}}) = \sigma(b) - a \text{ şeklindedir (Guseinov, 2003).}$$

Tanım 3.19 $f: \mathbb{T} \rightarrow [-\infty, \infty]$ bir fonksiyon olsun. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{t \in \mathbb{T}: f(t) < \alpha\}$$

kümesi Δ - ölçülebilir ise f fonksiyonu \mathbb{T} üzerinde Δ - ölçülebilirdir denir (Guseinov, 2003).

Tanım 3.20 $S: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $j = 1, 2, \dots, n$ için α_j ler birbirinden farklı olmak üzere $A_j = \{t \in \mathbb{T}: S(t) = \alpha_j\}$ kümeleri tanımlansın. $S = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$ olacak şekilde yazılabiliyorsa S fonksiyonuna basit fonksiyon denir. Burada χ_{A_j} fonksiyonu A_j kümelerinin karakteristik fonksiyonudur ve

$$\chi_{A_j}(t) = \begin{cases} 1, & t \in A_j \\ 0, & t \notin A_j \end{cases}$$

olarak ifade edilir (Cabada ve Vivero, 2006).

Tanım 3.21 E, \mathbb{T} 'nin Δ - ölçülebilir bir alt kümesi ve $S: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir basit fonksiyon olsun. Yani S fonksiyonu bir önceki tanımda ifade edilen A_j kümeleri ve α_j sayıları ile

$$S = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$$

şeklinde yazılsın. Bu halde S fonksiyonunun E üzerinden Lebesgue Δ - integrali

$$\int_E S(t) \Delta t = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu_{\Delta}(A_j \cap E)$$

şeklinde tanımlanabilir (Cabada ve Vivero, 2006).

Tanım 3.22 E, \mathbb{T} 'nin Δ - ölçülebilir bir alt kümesi ve $f: \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty]$ Δ - ölçülebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun E kümesi üzerindeki Lebesgue Δ - integrali

$$\int_E f(s) \Delta s = \sup \left\{ \int_E S(s) \Delta s: 0 \leq S \leq f \text{ ve } S \text{ basit fonksiyon} \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Cabada ve Vivero, 2006).

3.5 İstatistiksel Yakınsaklık İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.23 \mathbb{N} doğal sayılar kümesi ve K , \mathbb{N} nin bir alt kümesi olsun. $|K|$ ile K kümesinin elaman sayısı gösterilsin, $K_n = \{k \leq n: k \in K\}$ olsun ve δ fonksiyonu $\delta: K \subset \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ biçiminde tanımlansın.

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n}$$

limiti mevcut ise bu limite K nın doğal yoğunluğu denir (Niven vd., 1991).

Tanım 3.24 K , \mathbb{N} nin bir alt kümesi ve $K_n = \{k \leq n: k \in K\}$ kümesi için K kümesinin alt yoğunluğu

$$\underline{\delta}(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{|K_n|}{n}$$

limiti ile elde edilir. K kümesinin üst yoğunluğu

$$\bar{\delta}(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{|K_n|}{n}$$

limiti ile elde edilir. Eğer $\underline{\delta}(K) = \bar{\delta}(K)$ ise $\left(\frac{|K_n|}{n}\right)$ dizisinin limiti vardır (Niven vd., 1991).

Tanım 3.25 Reel veya kompleks sayılar kümesinin $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi için, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi $L \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L$$

ile gösterilir (Fridy, 1985).

Teorem 3.7 Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır, fakat tersi doğru değildir (Fridy, 1985).

İspat. İspatın ilk kısmı tanımdan elde edilir. Tersini için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.1 $x = (x_k)$ dizisi,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots$$

biçiminde tanımlansın. O halde her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n: |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olacağından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Buradan $S - \lim x_k = 0$ olduğu açıktır. Fakat $x = (x_k)$ dizisi yakınsak değildir.

Tanım 3.26 Her $\varepsilon > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$, yani hemen hemen her k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mevcut ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy denir (Fridy, 1985).

Tanım 3.27 Tüm pozitif reel sayıların sonsuza giden, azalmayan ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 0$$

şartını sağlayan $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümelerini Λ sembolü ile göstereceğiz (Mursaleen, 2000).

Tanım 3.28 $\lambda = (\lambda_n)$, pozitif reel sayıların azalmayan, sonsuza giden ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 0$$

$$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$$

şartını sağlayan bir dizi olsun. Genelleştirilmiş De la Valle-Poussin ortalaması

$$I_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j \in I_n} x_j$$

şeklinde tanımlanır. $n \rightarrow \infty$ iken $t_n(x) \rightarrow L$ sayısına gidiyorsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına (Λ, λ) -toplabilir denir ve

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_n): \exists L \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j \in I_n} |x_j - L| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Mursaleen, 2000).

Tanım 3.29 K, \mathbb{N} 'nin bir alt kümesi olsun ve K 'nin λ – yoğunluğunu

$$\delta_\lambda(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : k \in K\}|$$

olarak tanımlanır. Burada $I_n = n$ olması durumunda K 'nin λ – yoğunluğu $\delta_\lambda(K)$, K 'nin doğal yoğunluğuna dönüşür. Her $K \subset \mathbb{N}$ için $\left(\frac{\lambda_n}{n}\right) \leq 1$ ise $\delta(K) \leq \delta_\lambda(K)$ olur (Mursaleen, 2000).

Tanım 3.30 $x = (x_k)$ bir kompleks sayıların dizisi olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa dizi L ye λ -istatistiksel yakınsaktır ya da L ye S_λ - yakınsaktır denir. Bu durumda, $S_\lambda - \lim x = L$ ya da $(x_k) \xrightarrow{S_\lambda} L$ ve $S_\lambda = \{x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{R}, S_\lambda - \lim x = L\}$ yazılır. $\lambda_m = m$ ise S_λ, S ile aynıdır (Mursaleen, 2000).

3.6 Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık, α . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.31 $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ iken $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ olacak şekilde $\theta = \{k_r\}$ artan tamsayı dizisine lacunary dizisi denir. $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve θ bir lacunary dizisi olmak şartıyla her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu takdirde $S_\theta - \lim x = L$ ya da $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ biçiminde ifade edilir. Buna göre

$$S_\theta = \{x : \text{bazı } L \text{ için}, S_\theta - \lim x = L\}$$

dır (Fridy ve Orhan, 1993).

Tanım 3.32 $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun ve her r için $k'(r) \in I_r$ olmak şartıyla $x = (x_k)$ dizisinin $\{x_{k'(r)}\}$ alt dizisi mevcut olsun. $\lim_r x_{k'(r)} = L$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - x_{k'(r)}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisine S_θ – Cauchy dizisi denir (Fridy ve Orhan, 1993).

Tanım 3.33 $\alpha \in (0,1]$ olacak şekilde keyfi bir sayı olsun. $|\{k \leq n: k \in E\}|$ ifadesi E kümesinin n ye eşit veya n den küçük eleman sayısını belirtsin, bu takdirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: k \in E\}|$$

limiti varsa, bu limite E kümesinin α –yoğunluğu denir ve $\delta_\alpha(E)$ ile gösterilir. $x = (x_k)$ dizisi, $P(k)$ özelliğini α –yoğunluklu bir küme dışında sağlıyorsa bu diziye $P(k)$ özelliğini α ya göre hemen hemen her k için sağlar denir ve *h. h. k*(α) olarak gösterilir (Çolak, 2010).

Tanım 3.34 $\alpha \in (0,1]$ ve $x = (x_k) \in w$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $L \in \mathbb{C}$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L ye α . dereceden istatistiksel yakınsaktır denir. Diğer bir deyişle her $\varepsilon > 0$ ve *h. h. k*(α) için $|x_k - L| < \varepsilon$ oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi L ye α . dereceden istatistiksel yakınsaktır denir ve $S^\alpha - \lim x_k = L$ biçiminde ifade edilir. S^α sembolü ile tüm α . dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi ifade edilir (Çolak, 2010).

3.7 Zaman Skalası Üzerinde İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.35 \mathbb{T} , $\sup \mathbb{T} = \infty$ ve $\inf \mathbb{T} = t_0 > 0$ şartlarını sağlayan rastgele bir zaman skalası ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ – ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_\Delta(\{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}}: |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0$$

ise f fonksiyonuna \mathbb{T} zaman skalası üzerinde L ye istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st(\mathbb{T}) - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L$$

biçiminde ifade edilir (Turan, 2012).

Örnek 3.2 $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ olsun, o halde $t_0 = 1$ dir.

$$\mu_\Delta([1, n]_{\mathbb{N}}) = \mu_\Delta(\{1, 2, 3, \dots, n\}) = \sigma(n) - 1 = (n + 1) - 1 = n$$

ve

$$\begin{aligned}\mu_{\Delta}(\{k \in [1, n]_{\mathbb{N}} : |f(k) - L| \geq \varepsilon\}) &= \mu_{\Delta}(\{1 \leq k \leq n : |f(k) - L| \geq \varepsilon\}) \\ &= |\{1 \leq k \leq n : |f(k) - L| \geq \varepsilon\}|\end{aligned}$$

olur. $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ için

$$st_{\mathbb{N}} - \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$$

biçimdeki ifade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{1 \leq k \leq n : |f(k) - L| \geq \varepsilon\}|}{n} = 0$$

limitine eşittir. Bu eşitlik aslen $(x_k) := (f(k))$ dizisinin L ye istatistiksel yakınsaklığını verir (Turan, 2012).

Lemma 3.1 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ –ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L$ ve f bir M sayısı ile üstten sınırlı ise,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} f(s) \Delta s = L$$

olur. Burada zaman skalaları üzerindeki Lebesgue Δ – integrali kullanılmaktadır.

İspat. Genellikle bir şey kaybetmeksizin $L = 0$ alınabilir. $\varepsilon > 0$ ve $\Omega(t) := \{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq \varepsilon\}$ diyelim. $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L$ olduğundan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta}(\Omega(t))}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0$$

sonucu bulunur. Yeterince büyük t ler için $\frac{\mu_{\Delta}(\Omega(t))}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} < \frac{\varepsilon}{M}$ olur. Bu takdirde

$$\begin{aligned}& \left| \frac{1}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} f(s) \Delta s \right| \\ & \leq \frac{1}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \left\{ \int_{\Omega(t)} |f(s)| \Delta s + \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}} \setminus \Omega(t)} |f(s)| \Delta s \right\}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \left\{ M \int_{\Omega(t)} \Delta s + \varepsilon \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} \Delta s \right\}$$

yazılabilir. \mathbb{T} nin herhangi bir Δ – ölçülebilir A alt kümesi için $\int_A \Delta s = \mu_{\Delta}(A)$ olduğu aşıkardır. Buradan

$$\left| \frac{1}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} f(s) \Delta s \right| \leq \frac{M \mu_{\Delta}(\Omega(t)) + \varepsilon \mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \leq 2\varepsilon$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır (Turan, 2012).

Tanım 3.36 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ – ölçülebilir bir fonksiyon ve $0 < p < \infty$ olsun.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L|^p \Delta s = 0$$

olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, bu durumda f fonksiyonu “ \mathbb{T} zaman skalası üzerinde kuvvetli p – Cesaro toplanabilir” denir. Bu tanım, p – Cesaro toplanabilme kavramını zaman skalasına genişletmektedir (Turan, 2012).

Lemma 3.2 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ – ölçülebilir bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ için

$$\Omega(t) := \{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\}$$

biçimde tanımlayalım. Bu takdirde

$$\mu_{\Delta}(\Omega(t)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega(t)} |f(s) - L| \Delta s \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L| \Delta s$$

dir.

İspat. Her $s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \varepsilon \chi_{\Omega(t)}(s) \leq |f(s) - L| \chi_{\Omega(t)}(s) \leq |f(s) - L|$$

yazılabilir ve buradan

$$\varepsilon \int_{\Omega(t)} \Delta s \leq \int_{\Omega(t)} |f(s) - L| \Delta s \leq \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L| \Delta s$$

sonucuna ulaşılabilir. Buradan

$$\varepsilon \mu_{\Delta}(\Omega(t)) \leq \int_{\Omega(t)} |f(s) - L| \Delta s \leq \int_{[t_0, t]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L| \Delta s$$

elde edilir, ispat tamamlanmış olur (Turan, 2012).

Teorem 3.8 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ –ölçülebilir bir fonksiyon, $L \in \mathbb{R}$ ve $0 < p < \infty$ diyelim. Bu takdirde,

(i) Eğer f fonksiyonu L sayısına kuvvetli p – cesaro toplanabilir ise, $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L$ dir.

(ii) Eğer $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L$ ve f sınırlı bir fonksiyon ise, f fonksiyonu L sayısına kuvvetli p – Cesaro toplanabilirdir (Turan, 2012).

3.8 Zaman Skalası Üzerinde λ -İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.37 Ω , \mathbb{T} nin Δ_{λ} – ölçülebilir bir altkümesi olsun ve her $t \in \mathbb{T}$ için $\Omega(t, \lambda)$ kümesi

$$\Omega(t, \lambda) = \{s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : s \in \Omega\}$$

olarak tanımlansın. \mathbb{T} zaman skalası üzerinde $\Omega(t, \lambda)$ kümesinin λ – yoğunluğu

$$\delta_{\mathbb{T}}^{\lambda}(\Omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_{\lambda}}(\Omega(t, \lambda))}{\mu_{\Delta_{\lambda}}([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})}$$

şeklinde tanımlanır (Yılmaz vd., 2016).

Tanım 3.38 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_{λ} – ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_{\lambda}}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta_{\lambda}}([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0$$

ise, f fonksiyonu \mathbb{T} zaman skalası üzerinde L reel sayısına λ –istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $s_{\mathbb{T}}^{\lambda} - \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = L$ yazılır. \mathbb{T} zaman skalası üzerindeki tüm λ –istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi $s_{\mathbb{T}}^{\lambda}$ ile gösterilir (Yılmaz vd., 2016).

Tanım 3.39 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_λ – ölçülebilir bir fonksiyon olsun ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta_\lambda}(s \in [t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta_\lambda}^\alpha([t - \lambda_t + t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı mevcut ise zaman skalası üzerinde f fonksiyonu L sayısına α . dereceden λ –istatistiksel yakınsaktır denir. \mathbb{T} zaman skalası üzerinde tüm α . dereceden λ –istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi $s_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)}$ ile gösterilir. Bu durumda

$$s_{\mathbb{T}}^{(\lambda, \alpha)} - \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = L$$

şeklinde yazılır (Er, 2018).

3.9 Zaman Skalası Üzerinde Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve Lacunary Cesaro Toplanabilirlik

Tanım 3.40 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ –ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu_\Delta(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\mu_\Delta((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonu L reel sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_\theta(\mathbb{T}) - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L$ biçimde ifade edilir (Yalçın, 2017).

Tanım 3.41 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ –ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_\Delta((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L| \Delta s = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa bu takdirde f fonksiyonu L reel sayısına kuvvetli lacunary Cesaro toplanabilirdir denir (Yalçın, 2017).

Teorem 3.9 $N_{\theta-\mathbb{T}} \subset S_{\theta-\mathbb{T}}$ kapsama bağıntısı sağlanır ve bu kapsama kesindir.

İspat. $f \in N_{\theta-\mathbb{T}}$ alalım. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L| \Delta s \geq \int_{\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\}} |f(s) - L| \Delta s$$

$$\geq \varepsilon \mu_{\Delta}(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})$$

yazabiliriz.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{\Delta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L| \Delta s = 0$$

olduğundan

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta}(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\mu_{\Delta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} = 0$$

elde ederiz. Böylece $f \in S_{\theta-\mathbb{T}}$ dir.

\mathbb{T} de verilen bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi için

$$u_r = \sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})$$

olmak üzere $[\sigma(k_{r-1}), \sigma(k_r)]_{\mathbb{T}}$ aralıklarında f fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\sigma(k_{r-1}), \sigma(k_{r-1}) + 1]_{\mathbb{T}} \\ 2, & t \in [\sigma(k_{r-1}) + 1, \sigma(k_{r-1}) + 2]_{\mathbb{T}} \\ \dots \\ \lfloor \sqrt{u_r} \rfloor, & t \in [\sigma(k_{r-1}) + \lfloor \sqrt{u_r} \rfloor - 1, \sigma(k_{r-1}) + \lfloor \sqrt{u_r} \rfloor]_{\mathbb{T}} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\Delta}(\{s \in [\sigma(k_{r-1}), \sigma(k_r)]_{\mathbb{T}} : |f(s)| \geq \varepsilon\})}{\mu_{\Delta}([\sigma(k_{r-1}), \sigma(k_r)]_{\mathbb{T}})} &\leq \frac{\mu_{\Delta}([\sigma(k_{r-1}), \sigma(k_{r-1}) + \lfloor \sqrt{u_r} \rfloor]_{\mathbb{T}})}{u_r} \\ &= \frac{\lfloor \sqrt{u_r} \rfloor}{u_r} \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada son eşitlikte $\mu_{\Delta}([a, b]_{\mathbb{T}}) = b - a$ ve $r \rightarrow \infty$ iken $u_r = \sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1}) \rightarrow \infty$ olmasından yararlanıldı. Bundan dolayı f fonksiyonun $S_{\theta-\mathbb{T}}$ de olduğu görülür. Fakat

$$\frac{1}{\mu_{\Delta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}} |f(s)| \Delta s$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{u_r} \sum_{m=1}^{\lfloor \sqrt{u_r} \rfloor} m \mu_{\Delta}([\sigma(k_{r-1}) + m - 1, \sigma(k_{r-1}) + m))_{\mathbb{T}} \\
&= \frac{1}{u_r} \sum_{m=1}^{\lfloor \sqrt{u_r} \rfloor} m \\
&= \frac{\lfloor \sqrt{u_r} \rfloor (\lfloor \sqrt{u_r} \rfloor + 1)}{2u_r} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 (r \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

olduğundan $f \notin N_{\theta-\mathbb{T}}$ olur. Böylece ispat tamamlanır (Yalçın, 2017).

Teorem 3.10 $C_b(\mathbb{T}) \cap S_{\theta-\mathbb{T}} \subset N_{\theta-\mathbb{T}}$ dir.

İspat. $f \in C_b(\mathbb{T}) \cap S_{\theta-\mathbb{T}}$ alalım. Her $t \in \mathbb{T}$ için $|f(t) - L| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Verilen $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_{\Delta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L| \Delta s \\
&= \frac{1}{\mu_{\Delta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}: |f(s) - L| \geq \varepsilon} |f(s) - L| \Delta s \\
&\quad + \frac{1}{\mu_{\Delta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}: |f(s) - L| < \varepsilon} |f(s) - L| \Delta s \\
&\leq \frac{M}{\mu_{\Delta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}: |f(s) - L| \geq \varepsilon} \Delta s \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{\mu_{\Delta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}} \Delta s \\
&= \frac{M \mu_{\Delta}(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}: |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\mu_{\Delta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} + \varepsilon
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $r \rightarrow \infty$ iken son eşitsizliğin her iki tarafında limit alırsak ve hipotezi kullanırsak amacımıza ulaşırız (Yalçın, 2017).

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

4.1 Zaman Skalası Üzerinde γ . Dereceden Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde ölçülebilir fonksiyonların zaman skalası üzerinde $\gamma \in (0,1]$ için γ . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanacak ve zaman skalası üzerinde tanımlanmış istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 4.1 f bir Δ_θ ölçülebilir fonksiyon ve \mathbb{T} , $r \rightarrow \infty$ için $\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1}) \rightarrow \infty$ şartını sağlayan artan bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisini içeren bir zaman skalası ve $\gamma \in (0,1]$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu_\Delta \{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\}}{\mu_\Delta^\gamma((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa f fonksiyonu L sayısına γ . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Zaman skalası üzerinde tüm γ . dereceden lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini $S_{\theta-\mathbb{T}}^\gamma$ ile gösterilecektir. Bu durumda

$$S_{\theta-\mathbb{T}}^\gamma - \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = L$$

yazılır.

Teorem 4.1 f ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_θ - ölçülebilir fonksiyonlar ve $\gamma \in (0,1]$ olsun

$$i) \quad S_{\theta-\mathbb{T}}^\gamma - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L_1 \quad \text{ve} \quad S_{\theta-\mathbb{T}}^\gamma - \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = L_2 \quad \text{ise}$$

$$S_{\theta-\mathbb{T}}^\gamma - \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) + g(t)) = L_1 + L_2$$

dir.

$$ii) \quad S_{\theta-\mathbb{T}}^\gamma - \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L \quad \text{ve} \quad c \in \mathbb{R} \quad \text{ise} \quad S_{\theta-\mathbb{T}}^\gamma - \lim_{t \rightarrow \infty} c(f(t)) = cL \quad \text{dir.}$$

Teorem 4.2 \mathbb{T} , $\theta = (k_r)$ lacunary dizisini içeren bir zaman skalası ve $\gamma \in (0,1]$ olsun.

Bu takdirde

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} > 1$$

ise $S_{\mathbb{T}} \subseteq S_{\theta-\mathbb{T}}^\gamma$ dir.

İspat. Farz edelim ki $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} > 1$ olsun. Yeterince büyük r ler ve en az bir $\delta > 0$ için

$$\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} \geq 1 + \delta$$

yazabiliriz ve

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})}{\sigma(k_r)} &\geq \frac{\delta}{1 + \delta} \Rightarrow \left(\frac{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})}{\sigma(k_r)} \right)^\gamma \geq \left(\frac{\delta}{1 + \delta} \right)^\gamma \Rightarrow \frac{1}{(\sigma(k_r))^\gamma} \\ &\geq \frac{\delta^\gamma}{(1 + \delta)^\gamma} \cdot \frac{1}{(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1}))^\gamma} \end{aligned}$$

elde ederiz. $f \in S_{\mathbb{T}}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_{\Delta}(\{s \in [t_0, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\mu_{\Delta}^{\gamma}([t_0, k_r]_{\mathbb{T}})} \\ &\geq \frac{\mu_{\Delta}(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{(\sigma(k_r) - t_0)^\gamma} \\ &\geq \frac{(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1}))^\gamma}{\sigma(k_r)^\gamma} \cdot \frac{\mu_{\Delta}(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1}))^\gamma} \\ &\geq \frac{\delta^\gamma}{(1 + \delta)^\gamma} \cdot \frac{\mu_{\Delta}(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1}))^\gamma} \end{aligned}$$

$\lim_{r \rightarrow \infty} f(t) = L$ olduğundan eşitsizliğin her iki yanının $r \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta}(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\mu_{\Delta}^{\gamma}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3 $\mathbb{T}, \theta = (k_r)$ lacunary dizisini içeren bir zaman skalası ve her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) \leq K \cdot t$ olacak şekilde $K > 0$ ve $\gamma \in (0, 1]$ olsun. Bu takdirde

$$\limsup \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} < \infty$$

ise $S_{\theta-\mathbb{T}}^{\gamma} \subseteq S_{\mathbb{T}}$ dir.

İspat. Farz edelim ki $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} < \infty$ olsun. Buradan

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma(k_r) - t_0}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} < \infty$$

elde ederiz. Buradan herhangi $K > 0$ ve her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{\sigma(k_r) - t_0}{a(k_{r-1}) - t_0} \leq H$$

yazabiliriz.

Şimdi $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $S_{\theta-\mathbb{T}}^\gamma$ 'ye ait Δ_θ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$A_r = A_r(\varepsilon) = \mu_\Delta(\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})$$

olmak üzere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A_r}{\mu_\Delta^\gamma((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} = 0$$

elde ederiz. Her $\varepsilon > 0$ ve $0 < \gamma \leq 1$ için $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Öyle ki her $r > r_0$ için

$$\frac{A_r}{(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1}))^\gamma} < \varepsilon$$

yazabiliriz. Diğer taraftan $(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1}))^\gamma \leq \sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})$ olduğundan

$t \in (k_{r-1}, k_r)_{\mathbb{T}}$ olsun. Yeterince büyük r ler için $C = \max\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{r_0}\}$ olsun.

$$\frac{A_r}{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})} \leq \frac{A_r}{(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1}))^\gamma}$$

olup

$$\frac{A_r}{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})} < \varepsilon$$

dur. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_\Delta(\{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\mu_\Delta([t_0, t]_{\mathbb{T}})} \\ & \leq \frac{\mu_\Delta(\{s \in [t_0, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\mu_\Delta([t_0, k_{r-1}]_{\mathbb{T}})} \\ & \leq \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{r_0} + A_{r_0+1} + \dots + A_r}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \\ & \leq \frac{r_0 \cdot c}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \\ & + \frac{1}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \left\{ \frac{(\sigma(k_{r_0+1}) - \sigma(k_{r_0})) A_{r_0+1}}{\sigma(k_{r_0+1}) - \sigma(k_{r_0})} + \dots \right. \\ & \left. + \frac{(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})) A_r}{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{r_0 \cdot C}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} + \varepsilon \cdot \frac{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r_0})}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \\
&\leq \frac{r_0 \cdot C}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} + \varepsilon \cdot \frac{\sigma(k_r) - t_0}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \\
&\leq \frac{r_0 \cdot C}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} + \varepsilon \cdot H
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $r \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta}(\{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\})}{\mu_{\Delta}([t_0, t]_{\mathbb{T}})} = 0$$

elde ederiz.

Tanım 4.2 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_{θ} ölçülebilir bir fonksiyon, $\gamma \in (0,1]$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{\Delta}^{\gamma}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L|^p \Delta s = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa f fonksiyonu \mathbb{T} zaman skalası üzerinde γ . dereceden kuvvetli p – lacunary toplanabilir denir ve bu uzay $[N_{\theta}, p]_{\mathbb{T}}$ ile gösterilir.

Lemma 4.1 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_{θ} ölçülebilir bir fonksiyon $\varepsilon > 0$ için

$$B(t, \theta) = \{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\mu_{\Delta}(B(t, \theta)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{B(t, \theta)} |f(s) - L| \Delta s \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{(k_{r-1}, k_r]} |f(s) - L| \Delta s \quad (4.1)$$

dir.

İspat. (Er,2018) in izlediği yol takip edilerek ispat kolayca elde edilir.

Teorem 4.4 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, Δ_{θ} ölçülebilir bir fonksiyon $L \in \mathbb{R}$, $0 < \gamma \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. \mathbb{T} zaman skalası üzerinde f fonksiyonu L sayısına γ . dereceden kuvvetli $[N_{\theta}, p]_{\mathbb{T}}$ toplanabilir ise

$$S_{\theta-\mathbb{T}}^{\gamma} - \lim f(t) = L$$

dir.

İspat. f fonksiyonu L ye γ . dereceden kuvvetli $[N_\theta, p]_{\mathbb{T}}$ toplanabilir olsun. Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ için (4.1) eşitsizliğini kullanarak

$$\frac{\mu_\Delta(B(t, \theta))}{\mu_\Delta^\gamma((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \cdot \frac{1}{\mu_\Delta((k_{r-1}, k_r])} \int_{(k_{r-1}, k_r]} |f(s) - L|^p \Delta s$$

yazabiliriz. Her iki tarafın $r \rightarrow \infty$ için limitini alırsak $S_{\theta-\mathbb{T}}^\gamma - \lim f(t) = L$ elde ederiz.

Teorem 4.5 θ ve θ' iki lacunary dizisi olsun. Her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu_{\Delta\theta(t)} \leq \mu_{\Delta\theta'(t)}$ ve

$0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun. Bu takdirde

$$i) \lim_{t \rightarrow \infty} \inf \frac{\mu_{\Delta\theta}^\beta((k_{r-1}, k_r])}{\mu_{\Delta\theta'}^\gamma((k'_{r-1}, k'_r])} > 0 \quad (4.2)$$

ise $S_{\theta'-\mathbb{T}}^\gamma \subset S_{\theta-\mathbb{T}}^\beta$ dir.

$$ii) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta\theta'}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta\theta'}^\gamma((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta\theta}(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}}{\mu_{\Delta\theta}^\gamma((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \quad (4.3)$$

ise $S_{\theta'-\mathbb{T}}^\gamma = S_{\theta-\mathbb{T}}^\beta$ olur.

İspat. $i)$ Her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu_{\Delta\theta(t)} \leq \mu_{\Delta\theta'(t)}$ olsun ve (4.2) şartı sağlansın. Bu durumda $I_r \subset I_{r'}$ olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\mu_{\Delta\theta}\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\} \leq \mu_{\Delta\theta'}\{s \in (k'_{r-1}, k'_r] : |f(s) - L| \geq \varepsilon\}$$

yazılabilir. Buradan her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\frac{\mu_{\Delta\theta'}\{s \in (k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\}}{\mu_{\Delta\theta'}^\gamma((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \geq$$

$$\frac{\mu_{\Delta\theta}^\beta((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta\theta'}^\gamma((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \cdot \frac{1}{\mu_{\Delta\theta}^\beta((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})}$$

$$\mu_{\Delta\theta}\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |f(s) - L| \geq \varepsilon\}$$

elde ederiz. Burada her iki tarafın $t \rightarrow \infty$ için limiti alınır ve (4.2) şartı kullanılırsa $S_{\theta'-\mathbb{T}}^\gamma \subset S_{\theta-\mathbb{T}}^\beta$ kapsaması elde edilir.

$ii)$ $S_{\theta-\mathbb{T}}^\beta - \lim(f) = L$ ve (4.3) şartı sağlansın. $\theta \subset \theta'$ ve her $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu_{\Delta\theta'}(s \in (k'_{r-1}, k'_r]: |f(s) - L| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} = \\
& \frac{\mu_{\Delta\theta'}(k'_{r-1} < s \leq k'_r: |f(s) - L| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \\
& + \frac{\mu_{\Delta\theta}(k_{r-1} < s < k_r: |f(s) - L| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \\
& - \frac{\mu_{\Delta\theta}(k_{r-1} < s < k_r: |f(s) - L| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \\
& \leq \frac{\mu_{\Delta\theta'}(s \in (k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}}) - \mu_{\Delta\theta}(s \in (k_{r-1}, k_r])}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \\
& + \frac{\mu_{\Delta\theta}(k_{r-1} < s < k_r: |f(s) - L| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \\
& \leq \left(\frac{\mu_{\Delta\theta'}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} - \frac{\mu_{\Delta\theta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \right) \\
& + \frac{\mu_{\Delta\theta}(s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}: |f(s) - L| \geq \varepsilon)}{\mu_{\Delta\theta}^{\beta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})}
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.3) şartından

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta\theta'}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta\theta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})}$$

ve $S_{\theta-\mathbb{T}}^{\beta} - \lim f(s) = L$ olduğundan $t \rightarrow \infty$ için eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa $S_{\theta'-\mathbb{T}}^{\gamma} - \lim f(s) = L$ elde ederiz. Buradan da $S_{\theta'-\mathbb{T}}^{\gamma} = S_{\theta-\mathbb{T}}^{\beta}$ elde ederiz.

Sonuç. $\mu_{\Delta\theta} \leq \mu_{\Delta\theta'}$ olacak şekilde iki dizi ve $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun. (4.1) şartı sağlanıyorsa $S_{\theta-\mathbb{T}}^{\beta} = S_{\theta'-\mathbb{T}}^{\gamma}$ dir.

Teorem 4.6 θ ve θ' iki lacunary dizisi, $\mu_{\Delta\theta} \leq \mu_{\Delta\theta'}$ ve $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun.

i) (4.2) şartı sağlanırsa $[N_{\theta'}, p]_{\mathbb{T}}^{\gamma} \subseteq [N_{\theta}, p]_{\mathbb{T}}^{\beta}$

ii) $\ell_\infty(\mathbb{T}) = \{f|f: T \rightarrow R, \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)| < \infty\}$ olmak üzere (4.3) şartını sağlınırsa

$$\ell_\infty(\mathbb{T}) \cap [N_\theta, p]_{\mathbb{T}}^\beta \subset [N_{\theta'}, p]_{\mathbb{T}}^\gamma \text{ dir.}$$

İspat. i) $I_r \subset I_{r'}$ ve her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu_{\Delta\theta} \leq \mu_{\Delta\theta'}$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_{\Delta\theta'}^\gamma((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L|^p \Delta s \geq \\ & \frac{1}{\mu_{\Delta\theta'}^\gamma((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L|^p \Delta s \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_{\Delta\theta'}^\gamma((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L|^p \Delta s \\ & \geq \frac{\mu_{\Delta\theta}^\beta((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta\theta'}^\gamma((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \cdot \frac{1}{\mu_{\Delta\theta}^\beta((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L|^p \Delta s \end{aligned}$$

elde ederiz. (4.2) şartı sağlandığından her iki tarafından $t \rightarrow \infty$ için limitini alırsak $[N_{\theta'}, P]_{\mathbb{T}}^\gamma \subseteq [N_\theta, P]_{\mathbb{T}}^\beta$ elde ederiz.

ii) $f \in \ell_\infty(\mathbb{T}) \cap [N_\theta, P]_{\mathbb{T}}^\beta$ olsun ve (4.3) şartı sağlansın. f sınırlı olduğundan her $s \in \mathbb{T}$ için $|f(s) - L| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ vardır. $\mu_{\Delta\theta} \leq \mu_{\Delta\theta'}$ olduğundan

$\frac{1}{\mu_{\Delta\theta}} \geq \frac{1}{\mu_{\Delta\theta'}}$ yazılabilir. $I_r \subset I_{r'}$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_{\Delta\theta'}^\gamma((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L|^p \Delta s \\ & = \frac{1}{\mu_{\Delta\theta'}^\gamma((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \int_{I_{r'} - I_r} |f(s) - L|^p \Delta s + \\ & \quad \frac{1}{\mu_{\Delta\theta'}^\gamma((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \int_{I_r} |f(s) - L|^p \Delta s \\ & \leq \left(\frac{\mu_{\Delta\theta'}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}}) - \mu_{\Delta\theta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta\theta'}^\gamma((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \right) K^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \int_{(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}} |f(s) - L|^p \Delta s \\
& \leq \left(\frac{\mu_{\Delta\theta'}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} - \frac{\mu_{\Delta\theta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} \right) K^p \\
& \quad + \frac{1}{\mu_{\Delta\theta}^{\beta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})} \int |f(s) - L|^p \Delta s
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Eşitsizliğin her iki yanının $t \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta\theta'}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\Delta\theta}((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}})}{\mu_{\Delta\theta'}^{\gamma}((k'_{r-1}, k'_r]_{\mathbb{T}})}$$

olduğundan

$$\ell_{\infty}(\mathbb{T}) \cap [N_{\theta}, P]_{\mathbb{T}}^{\beta} \subset [N_{\theta'}, P]_{\mathbb{T}}^{\gamma}$$

elde ederiz.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tezde ölçülebilir fonksiyonların zaman skalası üzerinde $\gamma \in (0,1]$ için γ . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlandı. Seyyidoğlu ve Tan tarafından tanımlanan zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki ilişki incelendi (Seyyidoğlu ve Tan, 2012). Öncelikle γ . dereceden lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesinin lineer uzay olduğu gösterildi.

Zaman skalası üzerinde $\gamma \in (0,1]$ kabul edildiğinde zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesinin γ . dereceden lacunary istatistiksel yakınsak olduğu, γ . dereceden lacunary istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesinin istatistiksel yakınsak olduğu sonucu elde edildi.

Zaman skalası üzerinde γ . dereceden kuvvetli p – lacunary toplanabilirlik tanımı verildi. Zaman skalası üzerinde Δ_θ ölçülebilir f fonksiyonu L sayısına γ . dereceden kuvvetli p – lacunary toplanabilir ise $S_{\theta-\mathbb{T}}^\gamma - \lim f(t) = L$ olduğu sonucuna ulaşıldı ve ispatı verildi.

θ ve θ' iki lacunary dizisi, her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu_{\theta(t)} \leq \mu_{\theta'(t)}$ ve $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun. Zaman skalası üzerinde γ . dereceden θ' lacunary istatistiksel yakınsak ise zaman skalası üzerinde β . dereceden θ lacunary istatistiksel yakınsak olduğu sonucu elde edildi.

θ ve θ' iki lacunary dizisi, $\mu_{\theta(t)} \leq \mu_{\theta'(t)}$ ve $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$ olsun. (4.2) şartı sağlandığında γ . dereceden θ' lacunary kuvvetli p – toplanabilir küme ise β . dereceden θ lacunary kuvvetli p – toplanabilir olduğu sonucu elde edildi. $\ell_\infty(\mathbb{T}) = \{f|f:T \rightarrow R, \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)| < \infty\}$ olmak üzere (4.3) şartı sağlanırsa zaman skalası üzerinde β . dereceden θ lacunary kuvvetli p – toplanabilir ve sınırlı fonksiyonların kümesi ise γ . dereceden θ' lacunary kuvvetli p – toplanabilir olduğu sonucu elde edildi.

5.2 Öneriler

Bu çalışma baz alınarak çeşitli yakınsaklık metotları zaman skalası üzerinde çalışılıp değerlendirilebilir.

KAYNAKLAR

- Balcı, M., 2009. Reel analiz, *Balcı yayınları*, Ankara
- Bhardwaj, V. K., Bala, I. 2007. On Weak Statistically Convergence, *Int. J. Math. and Math. Sci. Vol. Article ID 38530*.
- Cabada, A., Vivero, D. R. 2006. Expression of the Lebesgue Δ -integral on time scales as a usual Lebesgue integral: application to the calculus of Δ - antiderivatives, *Math. Comput. Modelling.*, 43 (1-2), 194-207.
- Connor, J. 1988. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, *Analysis*, 8 (1-2), 47-64.
- Çakallı, H. 1995. "Lacunary statistical convergence in topological groups", *Indian J. Pure Appl. Math.*, 26 (2), 113-119.
- Çolak, R. 2010. Statistical Convergence of Order, *Modern Methods in Analysis and its Applications*, Anamaya Publ. New Delhi, India, 121-129.
- Er, B. N. (2018). "Zaman skalaları üzerinde λ -istatistiksel yakınsaklık", Yüksek Lisans Tezi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Fırat Üniversitesi, Elâzığ.
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique, *In Colloquium Mathematicae*, Vol. 2, No. 3-4, 241-244.
- Freedman, A. R., Sember, J. J. and Raphael, M. 1978. Some Cesaro- type summability spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 37 (3), 508-520.
- Fridy, J. A. 1985. On statistical convergence, *Analysis*, 5 (4), 301-314.
- Fridy, J. A. and Orhan, C. 1993. Lacunary Statistical Convergence, *Pacific J. Math.* 160 (1) 43-51.
- Fridy, J. A. and Orhan, C. 1993. Lacunary Statistical Summability, *J. Math. Anal. Appl.* 173(2) 497-504.
- Gadjiev, A. D. and Orhan, C. 2002. Some Approximation Theorems Via Statistical Convergence, *Rocky Mountain J. Math.*, 32(1), 129-138.
- Guseinov, G. S. 2003. Integration on time scales, *J. Math. Anal. Appl.*, 285, 107-127.
- Hilger, S. (1988). Ein Masskettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, Ph.D. Thesis, Universtät Würzburg, Würzburg.
- Kızmaz, H., 1993. Fonksiyonel Analize Giriş, *Karadeniz Teknik üniversitesi*, Trabzon.
- Kreyszig, E. 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, *John Willey*. New York-London-Sydney.

- Maddox, I. 1970. Elements of Functional Analysis, *Cambridge Univ. Press*, London.
- Moricz, F. 2003. Statistical Convergence of Multiple Sequences, *Arch. Math.*, 81, 82-89.
- Mursaleen, M. 2000. λ -statistical convergence, *Mathematica Slovaca*, 50 (1), 111-115.
- Niven, I., Zuckermann, H. S. and Montgomery, H. L. 1991. An Introduction to the Theory of Numbers, *John Wiley and Sons Incorporated Company*, New York.
- Rath, D. And Tripathy, B. C. 1994. On Statistically Convergent and Statistically Cauchy Sequences, *Indian J. Pure. Appl. Math.*, 25(4), 381-386.
- Savaş, E. 2000. Strong almost convergence and almost λ -statistical convergence, *Hokkaido Mathematical Journal*, 29 (3), 531-536.
- Seyyidoglu, M. S., Tan, N. Ö. 2012. A note on statistical convergence on time scale, *J. Inequal. Appl.*, 2012: 219, 8 pp.
- Schoenberg, I. J. 1959. The integrability of certain functions and related summability methods II, *The American Mathematical Monthly*, 66 (7), 562-563.
- Šalát, T. 1980. On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers, *Math. Slovaca*, 30, 139-150.
- Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *In Colloq. Math*, No. 1, 73-74.
- Şengül, H., Et, M. 2014. On lacunary statistical convergence of order α . *Acta Mathematica Scientia*, 34(2), 473-482. doi:10.1016/S0252-9602(14)60021-7
- Turan, C., Duman, O. 2013. Statistical convergence on timescales and its characterizations, *Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory*, *Springer Proceedings in Math. And Stat.*, 41, 57-71.
- Turan, C. (2012). “Zaman skalaları üzerinde istatistiksel yakınsaklık ve karakterizasyonları”, Yüksek Lisans Tezi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Ankara.
- Yılmaz, E., Altın, Y., Koyunbakan, H. 2016. λ -Statistically Convergence on Time Scales, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, 23(1), 69-78.
- Yalçın, C. (2017). “Zaman skalaları üzerinde yakınsaklık metotları”, Doktora Tezi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Ankara.
- Zygmund A., 1979. Trigonometric Series, *Cambridge Univ. Press*, Cambridge.