T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RİESZ CEBİRLERİ ÜZERİNDE SÜREKLİ OPERATÖRLER

Burcu ARPACI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2022
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RİESZ CEBİRLERİ ÜZERİNDE SÜREKLİ OPERATÖRLER

Burcu ARPACI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Abdullah AYDIN

Haziran-2022
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Burcu ARPACI tarafından hazırlanan “Riesz Cebirleri Üzerinde Sürekli Operatörler” adlı tez çalışması 10/06/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Doç. Dr. Muhammed Çınar	…………………..
Muş Alparslan Üniversitesi, Matematik Eğitimi ABD	
Danışman	
Doç. Dr. Abdullah AYDIN	…………………..
Muş Alparslan Üniversitesi, Matematik Bölümü	
Üye	
Dr. Öğr. Üyesi Sabahattin ILBIRA	…………………..
Amasya Üniversitesi, Matematik Bölümü	

Enstitü Yönetim Kurulu …../……/……. Tarih ve ………/……….. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Burcu ARPACI
Tarih: 10/06/2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RİESZ CEBİRLERİ ÜZERİNDE SÜREKLİ OPERATÖRLER

Burcu ARPACI

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Abdullah AYDIN

Bir E kafes uzayındaki $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ağı için başka bir $(y_\beta)_{\beta\in B}\downarrow 0$ ağı var ve her $\beta\in B$ indisi için en az bir $\alpha_0\in A$ indisi bulunabilir ki $|x_\alpha - x|\leq y_\beta$ şartı tüm $\alpha\geq\alpha_0$ indisleri için sağlanırsa $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ağı $x\in E$ elemanına sıra yakınsaktır. Eğer bir E kafes uzayı için, E üzerinde çarpma işlemi birleşmeli bir cebir ve aynı zamanda E'deki herhangi x ve y pozitif elemanları için $x\cdot y\in E_+$ sağlarsa E'ye Riesz Cebiri denir. Bir E Riesz cebiri üzerinde alınan herhangi bir $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ağı için $|x_\alpha - x|\cdot u$ sıfıra sıra yakınsaması tüm $u\in E_+$ pozitif elemanları için sağlanırsa $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ağı $x\in E$ elemanına çarpımsal sıra yakınsaktır denir. Bu çalışmamızda, çarpımsal sıra yakınsak kullanılarak, Riesz cebirlerinde çarpımsal sıra sürekli ve çarpımsal sıra sınırlı operatörleri kavramları verilerek, bu operatörler ile sıra sürekli operatörler arasındaki bazı ilişkilerincelenmiştir.

2022, 21 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Çarpımsal sıra sürekli operatör, çarpımsal sıra yakınsama, sıra sürekli operatör, Riesz cebiri, Riesz uzayı

ABSTRACT

MS THESIS

CONTINUOUS OPERATORS ON RİESZ ALGEBRAS

Burcu ARPACI

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Abdullah AYDIN

A net $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in a Riesz space E is called order convergent to $x \in E$ if there is another net $(y_\beta)_{\beta\in B} \downarrow 0$ such that for every $\beta \in B$ there can be at least one $\alpha_\beta \in A$ index so that $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ holds for all $\alpha \geq \alpha_\beta$. If a Riesz space E is an associative algebra and also $x \cdot y \in E_+$ for any positive elements x and y in E then E is called Riesz algebra. For any net $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in a Riesz algebra E satisfying $|x_\alpha - x| \cdot u$ order convergent to zero for all $u \in E_+$ is called multiplicative order convergent to x. In this study, by using multiplicative order convergence, the concepts of multiplicative order continuous and multiplicative order bounded operators in Riesz algebras are given, and some relations between these operators and order continuous operators are investigated.

2022, 21 Pages

Keywords: Multiplicative order continuous operatör, multiplicative order convergence, order continuous operator, Riesz algebra, Riesz space

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sürecinde kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici olan, beraber çalışmaktan ve öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Abdullah AYDIN'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca bugünlere gelmemi sağlayan, sadece tez çalışmam sürecinde değil hayatımın her aşamasında beni destekleyen, bana güvenen ve bana karşı sevgilerini hiçbir zaman esirgemeyen canım annem Hatice ARPACI ve canım babam Mehmet Can ARPACI'ya sonsuz teşekkür ederim.

Burcu ARPACI
MUŞ-2022

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

E_+	:E'nin pozitif kısmı
E_-	:E'nin negatif kısmı
$x \vee y$	:x ve y'nin supremumu
$x \wedge y$	:x ve y'nin infumumu
x_+	:x ve 0'ın (vektör uzayının sıfırı) supremumu
x_-	:$-x$ ve 0'ın supremumu
$\lvert x \rvert$	:x ve $-x$'nin supremumu
θ	:E'nin null elemanı
e	:E'nin birimi
A^d	:A'nın dik tümleyeni
$L(E, F)$	:E'den F'ye tüm operatörlerin uzayı
$L_b(E, F)$	:Sıra sınırlı operatörlerin uzayı
$(x_\alpha) \downarrow x$	:$\{x_\alpha\}$ aşağı yönlendirilmiş olup infumumu x dir
$(x_\alpha) \uparrow x$	:$\{x_\alpha\}$ yukarı yönlendirilmiş olup supremumu x dir.
B_A	:A'nın ürettiği band
I_A	: A'nın ürettiği ideal

1. GİRİŞ

Riesz uzaylarının ve Riesz cebirlerinin tarihsel gelişimini 1928 yılında Bologna'da yapılan uluslararası matematik kongresine dayandırabiliriz. Riesz uzayları üzerine yapılan ilk çalışma Frigyes Riesz'in (Riesz, 1928) lineer fonksiyonların ayrışımı konusunda yazdığı makalesi kabul edilir. Daha sonraki yıllarda ise Riesz uzayının üzerine birleşimli vektörel çarpım cebiri eklenmiş ve bu kavram Riesz cebiri olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmamızda ilk olarak Riesz uzayının temel tanım ve özellikleri hatırlatılmıştır. Daha sonra, Riesz uzayı üzerine inşa edilen Riesz cebirlerinin özellikleri verilmiştir. Riesz cebirlerindeki sıra yakınsaklık, düzgün yakınsaklık, sınırsız sıra yakınsaklık ve çeşitli çarpımsal sıra yakınsaklıkların genel olarak topolojik olmadığı iyi bilinir. Fakat topolojik yapı olmasa bile sıra yakınsaklıktan yararlanılarak sıra süreklilik gibi tanımlamalar yapılmıştır, okuyucular detaylı bilgi için (Abramovich ve Aliprantis, 2002; Aliprantis ve Burkinshaw, 2003 ve 2006; Kusraev, 2000; Kusraev ve Kutateladze, 1999; Luxemburg ve Zaanen, 1971; Meyer-Nieberg, 1991; Vulikh, 1967; Zaanen, 1983) eserlerini inceleyebilirler. Bu çalışmada Riesz cebirleri arasında sürekli operatörleri Riesz cebirleri üzerindeki çarpımsal yakınsaklık kavramlarını kullanarak irdeleyeceğiz (Bu kavram (Aydın, 2020a) çalışmasında tanıtılmıştır.). Bu çalışmamız için (Pagter, 1981; Huijsmans, 1991; Aydın, 2020a, Aydın, 2021; Aydın ve ark., 2021, Aydın ve ark., 2022, Aydın ve Gorokhova, 2022) çalışmalar temel teşkil etmektedir. Bunlara ek olarak Riesz cebirleri kümesinde elde edilen sonuçlar kafes normlu cebirler üzerindeki operatörlere de ışık tutacaktır.

Bir E kümesi üzerinde tanımlanan " $\leq$ " bağıntısı yansıyan, ters simetrik ve geçişken özelliğini sağlarsa E kümesine sıralı küme denir. Bir E vektör uzayı üzerinde bir " $\leq$ " sıralama bağıntısı tanımlanmış olsun. Her $x, y \in E$ için;

(i) $x \leq y$ iken her $z \in E$ için $x + z \leq y + z$,

(ii) $x \leq y$ iken $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \leq \alpha y$,

şartları sağlanırsa E uzayına sıralı vektör uzayı denir. Eğer, her $x, y \in E$ için $sup\ \{x, y\}$ ve $\inf\{x, y\}$ E'de mevcut ise E sıralı vektör uzayına bu kısmi sıralama bağıntısına göre bir Riesz uzayı veya kafes uzayı denir. E bir Riesz uzayı olsun. Eğer "·" işlemi E üzerinde birleşmeli bir cebir ve her $a, b \in E_+$ için $a \cdot b \in E_+$ ise E'ye bir Riesz cebiri (kafes cebir veya ℓ-cebiri) denir.

E ve F iki sıralı vektör uzayı olmak üzere bir $T : E \to F$ doğrusal dönüşümü kısaca E'den F'ye bir operatör olarak adlandırılır. Ayrıca her bir $x \in E_+$ için $0 \leq T(x)$ oluyorsa T operatörüne pozitif operatör denir ve $0 \leq T$ şeklinde gösterilir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006; Luxemburg ve Zaanen, 1971; Vulikh, 1967; Zaanen, 1983).

X bir Riesz uzayı ve $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq X$ bir net olsun. Eğer her $\beta \in B$ için en az bir $\alpha_\beta \in A$ var öyle ki her $\alpha \geq \alpha_\beta$ oldukça $|x_\alpha - x| \leq y_\beta \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\beta)_{\beta \in B}$ neti bulunabiliyorsa $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ neti $x \in X$'e sıra (order) yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir. Bir E f-cebiri üzerinde alınan herhangi bir $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ neti için $|x_\alpha - x| \cdot u \xrightarrow{o} 0$ yakınsaması tüm $u \in E_+$ pozitif elemanları için sağlanırsa $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ neti $x \in E$ elemanına çarpımsal sıra (multiplicative order) yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{mo} x$ ile gösterilir (Aydın, 2020a).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Riesz uzayı, (Riesz, 1928) de tanımlandıktan sonra, Kantorovich ve Heudental'in 1930'lu yıllarda yapmış oldukları ayrı çalışmalar ile Riesz uzayının belirli özellikleri ortaya konmuştur. Riesz uzayları analiz ve cebir alanında çalışan araştırmacılar tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. 1951'de kafes uzaylarının önemli sınıflarından birisi olan f-cebirleri tanımlanmıştır. σ-Dedekind tam sıralı vektör uzayı 1950'de Nakano tarafından (Nakano, 1950) çalışılmış, 1953'te Amemiya (Amemiya, 1953) ve 1956'da Birkhoff ve Pierce'in (Birkhoff ve Pierce, 1956) çalışmaları ortaya konmuştur. 1950'li yıllardan sonra Riesz uzayları üzerinde tanımlanan f-cebirlerinin tekrar gündeme gelmesi, 1981 yılında Pagter'in (Pagter, 1981) doktora tez çalışması ve Luxemburg tarafından detaylı bir şekilde çalışılan Alkansas ders notları ile olmuştur. f-cebirleri alanındaki bir diğer çalışma, Riesz uzaylarında Seçme Aksiyomlarına yer vermeksizin, Riesz uzayları teorisinde çok sayıda temel sonucun ispatını yapmak amacıyla bir program geliştirilmesi gerektiğini düşünen Zaanen (1983) tarafından başlatılmıştır. Daha sonra Huijsmans bu çalışmaları güncellemiştir (Huijsmans, 1991). Huijsmans'ın çalışmasından sonra yapılan birçok çalışma sonucunda, Huijsmans'ın makalesinde yer alan bazı problemler çözülmüştür. Bununla birlikte Huijsmans'ın 1991'deki çalışmasında ideal teori, Riesz homomorfizması ve cebir homomorfizması arasındaki ilişkilerde ve f-cebirlerinin gösteriminde bazı eksikliklere rastlanmıştır. Bu nedenle Buskes ve ark., (2003) Huijsmans'ın Riesz cebirleri ve f-cebirleri üzerine yapmış olduğu çalışmayı (Huijsmans, 1991) geliştirerek ortak bir çalışma yayınlamışlardır. Ayrıca Huijsmans ve Bernau (1990) yaptıkları çalışma ile hemen hemen f-cebirleri ve d-cebirlerinin bilinen özelliklerinin yanı sıra bazı yeni özelliklerini tespit edip bunların f-cebirleriyle olan bağlantılarını ortaya koymuşlardır.

Abramovich ve Aliprantis (2002) yapmış oldukları çalışma ile pozitif operatörlerin değişmez alt uzaylarını ilk kez monograf formda sunmuşlardır. Aliprantis ve Burkinshaw (2006) ise Riesz uzayı ve Banach kafesleri üzerine oldukça kapsamlı bir çalışma ortaya koymuşlardır.

Aydın ve ark., (2018) ele aldıkları çalışmalarında kafes-normlu vektör kafesler arasında sürekli operatörleri incelemişlerdir. Aydın (2018) çalışmasında ob-sınırlılığın cebirsel özelliklerini denk-süreklilik ve düzgün yakınsamasındaki topolojilere göre incelemiştir.

Aydın (2020a) çalışmasında f-cebirlerinde çarpımsal sıra yakınsaklık tanımını yapmıştır. Aydın (2020b) çalışması sonucunda f-altcebirlerini kullanarak klasik Hahn-Banach teoreminden daha farklı bir genişlemeye sahip bir genişleme elde etmiştir. Ayrıca Aydın (2021) çalışmasında çarpımsal sıra yakınsaklık kavramını kafes normlu uzaylar üzerinde tanımlayarak diğer yakınsaklıklar arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Aydın (2021) çalışmasında normlu Riesz cebirlerinde çarpımsal norm yakınsamasını incelemiştir. Sonrasında Aydın ve ark., (2021) çalışmalarında, tam kafesin genel özelliklerini inceleyip Riesz uzaylarında tam kafes yakınsamasının dört farklı durumunu araştırmışlardır.

Aydın, ve ark., (2022) çalışmasında Riesz cebirleri üzerindeki çarpımsal sıra sürekli operatörleri tanımlayarak diğer yakınsaklıklar arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Biz de bu çalışmamızda bu son yapılan çalışmanın üzerine bazı sonuçlar ekleyerek Riesz cebirleri üzerindeki çarpımsal sıra sürekli operatörleri inceleyeceğiz.

3. RİESZ CEBİRLERİNE GİRİŞ

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve kavramlar ile birlikte bazı teorem ve önermelere yer verilmiştir. Bunun yanında ifade edeceğimiz çeşitli tanım, teorem, sembol ve notasyonlar, kafes uzaylarının temel argümanlarıdır ve bu argümanlar (Abramovich ve Aliprantis, 2002; Aliprantis ve Burkinshaw, 2003 ve 2006; Aydın ve ark., 2021; Bukhvalov, 1996; Huijsmann, 1991; Kusraev, 2000; Kusraev ve Kutateladze, 1999; Luxemburg ve Zaanen, 1971; Meyer-Nieberg, 1991; Pagter, 1981; Vulikh, 1967; Zaanen, 1983) çalışmalarından alınmıştır.

3.1 Riesz Uzayları

Tanım 3.1 E boştan farklı bir küme ve "$\leq$", E'de bir bağıntı olsun. Eğer bu bağıntı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa E'ye bir *kısmi sıralı küme* veya *kısmi sıralanmış küme* denir ve $(E, \leq)$ ile gösterilir:

1) Her $x \in E$ için $x \leq x$;
2) Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ iken $x = y$;
3) Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ iken $x \leq z$.

Eğer kısmi sıralanmış bir kümenin her eleman çifti, üzerinde tanımlanan bağıntıya göre karşılaştırılabiliyorsa bu kümeye *tam sıralı* küme denir.

Tanım 3.2 E gerçel vektör uzayı ve "$\leq$", E'de bir sıralama bağıntısı olsun. Eğer

1) Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ iken $x + z \leq y + z$,
2) Her $x, y \in E$, $0 \leq \lambda \in R$ için $x \leq y$ iken $\lambda x \leq \lambda y$

şartları sağlanıyorsa $(E, \leq)$ *sıralı vektör uzayı* olarak adlandırılır.

Tanım 3.3 E bir sıralı vektör uzayı, A da bu uzayın herhangi bir alt uzayı olsun. Eğer

1) Her $x \in A$ için $x \leq z$,
2) Her $x \in A$ için $x \leq y$ olacak şekildeki her $y \in E$ için $z \leq y$ koşullarını sağlayacak şekilde bir $z \in E$ var,

şartları sağlanırsa z elemanına A kümesinin *supremumu* denir ve $sup(A) = z$ biçiminde gösterilir. Özel olarak $A = \{x, y\} \subseteq E$ ise $z = sup\{x, y\} = x \vee y$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde eğer

1) Her $x \in A$ için $z \leq x$,
2) Her $x \in A$ için $y \leq x$ olacak şekildeki her $y \in E$ için $y \leq z$ koşullarını sağlayacak şekilde bir $z \in E$ var,

şartları sağlanırsa z elemanına A kümesinin *infumumu* denir ve $inf(A) = z$ biçiminde gösterilir. Özel olarak $A = \{x, y\} \subseteq E$ ise $z = inf\ \{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.4 E sıralı vektör uzayı ve θ, E'nin sıfır vektörü olsun. $\theta \leq x$ şartını sağlayan E'nin x elemanına *pozitif eleman* denir. E'nin tüm pozitif elemanlarının kümesi E_+ ile gösterilir ve

$$E_+ = \{\, x \in\ E : \theta \leq\ x \,\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.5 E sıralı vektör uzayı ve $V \subseteq E$ alt vektör uzayı olmak üzere E'den gelen sıralama ile V bir sıralı vektör uzayıdır. Bu durumda V'ye *sıralı alt vektör uzayı* denir.

Tanım 3.6 E sıralı bir küme olsun. Eğer E üzerindeki sıralamaya göre her x, y elemanın supremumu ve infumumu var ve E'ye ait ise E uzayına bir *kafes uzayı* (*örgü*) denir. Ek olarak E vektör uzayı ise E'ye *vektör örgüsü* veya *Riesz uzayı* veya vektör kafesi adı verilir.

Tanım 3.7 E Riesz uzayı ve G, E'nin bir alt vektör uzayı olsun. Her $x, y \in G$ için $x \vee y \in$ G veya $x \wedge y \in$ G ise G'ye E'nin *Riesz alt uzayı* denir.

Örnek 3.1 (Ω, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, $C(\Omega) = \{\mathrm{f}: \Omega \to \mathbb{R}: \mathrm{f}$ sürekli fonksiyon$\}$ kümesi için alınan her $f, g \in C(\Omega)$ için $f \leq g$ ancak ve ancak $f(x) \leq g(x)$ tüm $x \in \Omega$ elemanları için sağlanır. Bu şekilde tanımlı C(Ω) noktasal sıralama ile bir Riesz uzayıdır.

Tanım 3.8 $(E, \leq)$ bir Riesz uzayı olsun. Eğer E'nin en küçük elemanı varsa buna sıfır *(null) eleman* denir ve θ ile gösterilir. Eğer E'nin en büyük elemanı varsa buna *birim (unit) eleman* denir ve e ile gösterilir.

Tanım 3.9 $(E, \leq)$ Riesz uzayı olsun. Eğer her $x, y, z \in E$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ sağlanıyorsa E'ye *dağılmalı kafes* denir.

Teorem 3.1 E bir Riesz uzayı ise her $x, y, z \in E$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $x \vee (\, y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ve $x \wedge (\, y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
2. $x \vee y = y \vee x$ ve $x \wedge y = y \wedge x$
3. $x \wedge (x \vee y\,) = x$ ve $x \vee (x \wedge y) = x$
4. $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (\, y \vee z\,)$ ve $x \vee (y \vee z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Tanım 3.10 E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun.

1. $x \vee 0$ elemanına x'in *pozitifi* denir ve x^+ ile gösterilir.
2. $(-x) \vee 0$ elemanına x'in *negatifi* denir ve x^- ile gösterilir.
3. $(-x) \vee x$ elamanına x'in *modülü* (mutlak değeri) denir ve $|x|$ ile gösterilir.

4. Her $x, y \in E$ için $x \wedge y = 0$ ise x ile y elemanları birbirine *diktir* denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

Tanım 3.11 A, E'nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere, $\{x \in E : her\ y \in A\ için\ x \perp y\}$ kümesine A kümesinin *diklik tümleyeni* denir ve A^d ile gösterilir. $A, B \subseteq E$ olmak üzere her $x \in E$ ve her $y \in E$ için $x \perp y$ oluyorsa A ile B kümelerine birbirine diktir denir ve $A \perp B$ şeklinde gösterilir.

Sonuç:

1. A^d alt vektör uzayıdır.
2. $A^{dd} = \{ z \in E :$ her y $\in A^d, y \perp$ z olmak üzere $A^d \perp A^{dd} = 0 \}$ dır.

Tanım 3.12 E Riesz uzayı ve $A, B \subseteq E$ boştan farklı iki küme olsun. Aşağıdaki tanımlamaları yazabiliriz:

1. $A^+ = \{ a^+ : a \in A\}$
2. $A^- = \{a^- : a \in A\}$
3. $|A| = \{ |a| : a \in A\}$
4. $x \in E, x \vee A = \{ x \vee a : a \in A\}$
5. $x \in E, x \wedge A = \{ x \wedge a : a \in A \}$
6. $A \vee B = \{ a \vee b : a \in A, b \in B \}$
7. $A \wedge \mathrm{B} = \{ \mathrm{a} \wedge \mathrm{b} : \mathrm{a} \in A, b \in B\}$
8. $A + B = \{ a + b : a \in A, b \in B \}$

Teorem 3.2 E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ boştan farklı bir küme olsun. Eğer $supA$ varsa her $x \in E$ için $sup(x \wedge A)$ vardır ve $sup\ (x \wedge A) = x \wedge supA$'dır. Benzer şekilde eğer $infA$ varsa her $x \in E$ için $inf(x \vee y)$ vardır ve $inf(x \vee y) = x \vee infA$'dır.

Aşağıda vereceğimiz sonuçlar Aliprantis ve Burkinshaw (2006) çalışmasındaki Teorem 1.3., Teorem 1.5. ve Teorem 1.7.'den alınmıştır.

Teorem 3.3 E bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olsun. O zaman aşağıdaki önermeler doğrudur:

i. $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$;
ii. $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$;
iii. $x + y = x \vee y + x \wedge y$;
iv. $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$;
v. $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$;
vi. $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot (x \vee y) = a \cdot x \vee a \cdot y$ ve $a \cdot (x \wedge y) = a \cdot x \wedge a \cdot y$;
vii. $x = x^+ - x^-$;

viii. $|x| = x^+ + x^-$;

ix. $x^+ \wedge x^- = 0$;

x. $x = (x-y)^+ + x \wedge y$;

xi. $|x-y| = \vee\ y - x \wedge y$;

xii. $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x-y|)$;

xiii. $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x-y|)$;

xiv. $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x+y| + |x-y|)$;

xv. $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x+y| - |x-y|)$;

xvi. $|x-y| \vee |x-y| = |x| + |y|$;

xvii. $|x-y| \wedge |x-y| = \big||x| - |y|\big|$.

Sonuç: E sıralı vektör uzayı için aşağıdakiler birbirine denktir:

1. E bir Riesz uzayıdır.
2. Her $x \in E$ için $x^+ \in$ E'dir.
3. Her $x \in E$ için $x^- \in$ E'dir.
4. Her $x \in E$ için $|x| \in$ E'dir.

Teorem 3.4 E Riesz uzayı ve her $x, y, z \in E$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

i. $|x \vee z - y \vee z| \leq |x-y|$ ve $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x-y|$,

ii. Eğer $x, y, z \geq 0$ ise $x \wedge (y+z) \leq x \wedge y + x \wedge z$.

Teorem 3.5 E Riesz uzayındaki her x ve y elemanları için $x - (x \wedge y) \wedge y - (x \wedge y) = 0$ sağlanır.

Tanım 3.13 E sıralı vektör uzayı ve $A \subseteq E$ olsun.

1) Eğer her $x, y \in A$ için $x \leq z$ ve $y \leq z$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa A'ya *yukarı yönlendirilmiş küme* denir ve $A \uparrow$ biçiminde gösterilir. A yukarı yönlendirilmiş küme ve E içinde $sup(A) = a$ varsa $A \uparrow a$ biçiminde gösterilir.

2) Eğer her $x, y \in A$ için $z \leq x$ ve $z \leq y$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa A'ya *aşağı yönlendirilmiş küme* denir ve $A \downarrow$ biçiminde gösterilir. A aşağı yönlendirilmiş küme ve E içinde $inf(A) = a$ varsa $A \downarrow a$ biçiminde gösterilir.

3) Yönlendirilmiş bir A kümesinden herhangi bir E kümesine tanımlanmış bir fonksiyona *ağ (net)* denir. A yerine herhangi bir (x_α) ağı alındığında benzer şekilde $x_\alpha \uparrow$, $x_\alpha \uparrow a$, $x_\alpha \downarrow$ ve $x_\alpha \downarrow b$ tanımları verilebilir.

Tanım 3.14 E Riesz uzayında her $x \in E_+$ için $n \in \mathbb{N}_+$ olmak üzere $n^{-1} \cdot x \downarrow 0$ şartı sağlanırsa E'ye *Archimedean Riesz uzayı* denir.

Bu çalışmada aksi söylenmedikçe, tüm kafes uzaylarının gerçel değerli Archimedean özelliğine sahip olduğu kabul edilecektir. Tüm kafes uzayları Archimedean özelliğini sağlamayabilir. Bunu aşağıdaki örnekte görebiliriz:

Örnek 3.2 $\mathbb{R}^2$ üzerinde, $(x_1, x_2),\ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$$

sıralamasına göre Archimedean Riesz uzayıdır.

Örnek 3.3 $\mathbb{R}^2$ üzerinde, $(x_1, x_2),\ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ ancak ve ancak $x_1 \leq y_1$ ya da $x_1 = x_2$ iken $y_1 \leq y_2$ sıralama bağıntısını tanımlarsak $(\mathbb{R}^2, \leq)$ bir kafes uzayı olur. Ancak Archimedean değildir. Bunu görebilmek için $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ elemanını ele alalım. Tanımladığımız sıralamaya göre $\frac{1}{n}(1,1) \downarrow$ fakat $\frac{1}{n}(1,1) \downarrow 0$ değildir. Dolayısıyla bu sıralama bağıntısıyla $\mathbb{R}^2$ Archimedean özelliğine sahip değildir.

Tanım 3.15 E bir kafes uzayı olsun. Herhangi $a, b \in E$ iki elaman ve $a \leq b$ olmak üzere $\{x \in E : a \leq x \leq b\}$ kümesine E'de bir *sıralı aralık* denir ve $[a, b]$ ile gösterilir. Bir $A \subseteq E$ alt kümesi için $A \subseteq [a, b]$ olacak şekilde $a, b \in E$ varsa A'ya E'de *sıra sınırlı küme* denir.

E bir Riesz uzayı olsun. E'nin boştan farklı ve üstten sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir alt kümesinin) supremumu ya da alttan sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir alt kümesinin) infumumu varsa E Riesz uzayına *Dedekind tam* (*σ-Dedekind tam*) Riesz uzayı denir. Her dizi aynı zamanda bir ağ olduğundan dolayı E uzayı Dedekind tam ise σ-Dedekind tamdır. E Riesz uzayının Dedekind tam olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve üsten sınırlı olacak şekilde her ağın E içinde supremumunun var olmasıdır.

Tanım 3.16 E, gerçel vektör uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. $0 \leq \lambda \leq 1$ koşulunu sağlayan her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her $x, y \in A$ için $\lambda . x + (1 - \lambda)\, y \in A$ oluyorsa A kümesine *konveks* (dış bükey) küme denir.

Tanım 3.17 E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun.

1) Her $y \in E$ ve $x \in A$ için $y \leq x$ iken $y \in A$ oluyor ise A'ya *solid küme* denir. Aynı zamanda solid alt uzaya *ideal* denir.
2) A, E'nin solid alt uzayı ise A'ya E içinde ideal denir. $A \subseteq$ E boştan farklı kümesi için A'yı kapsayan en küçük ideale A'nın *ürettiği ideal* denir ve I_A ile gösterilir. Her ideal bir Riesz alt uzaydır.
3) A, E de bir ideal olmak üzere A'nın E de supremumu olan her alt kümesinin A'da supremumu varsa A'ya *band* denir ve B_A ile gösterilir. Diğer bir ifade ile A'nın band olması için yeterli ve gerekli şart keyfi her $(x_\alpha) \subseteq A$ ağı için

$0 \leq x_\alpha \uparrow |x|$ şartı sağlanırken $x \in A$ olmasıdır.

Tanım 3.18 Eğer bir E kafes uzayındaki $(x_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ ağı için başka bir $(y_\beta)_{(\beta \in B)} \downarrow 0$ ağı var ve her $\beta \in B$ indisi için en az bir $\alpha_0 \in I$ var öyle ki $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ her $\alpha \geq \alpha_0$ için sağlanırsa $(x_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ ağı $x \in E$'ye *sıra* (*order*) *yakınsaktır* denir ve $x_\alpha \overset{0}{\to} x$ ile gösterilir.

Tanım 3.19 Eğer bir E kafes uzayındaki $(x_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ ağında, tüm pozitif $u \in E_+$ elemanı için $|x_\alpha - x| \wedge u \overset{0}{\to} x$ yakınsaması sağlanırsa $(x_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ ağı $x \in E$ elemanına *sınırsız sıra* (*unbounded ordered*) *yakınsaktır* denir.

Sınırsız sıra yakınsaklığın detayları için (Nakano, 1948; Troitsky, 2004; Gao, 2014; Deng ve ark., 2017; Aydın ve ark., 2019) çalışmalarına bakılabilir.

Teorem 3.6 E Riesz uzayı olmak üzere A ve B, E'de ideal ise $A \cap B$ ve $A + B$, E'de idealdir.

Teorem 3.7 E Archimedian Riesz uzayı, $A \subseteq E$ boştan farklı bir küme olsun. $B_A = A^{dd}$ dir. Eğer A band ise $A = A^{dd}$ dir.

Tanım 3.20 E bir Riesz uzayı ve $0 < e \in E$ olsun.

1) $I_e = E$ ise e'ye *güçlü birim* (*strong unit*) denir.
2) $B_e = E$ ise ise e'ye *zayıf birim* (*weak unit*) denir.

Tanım 3.21 E Riesz uzayı olsun. G, E'nin Riesz alt uzayı olmak üzere her $0 < x \in E$ için $0 < y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G kümesine E'de *sıra yoğun* (*order dense*) denir.

Teorem 3.8 E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ ideal olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur:

i. A, E'de sıra yoğundur ancak ve ancak $A^d = 0$'dır.
ii. $A \oplus A^d$ ideali E içinde sıra yoğundur.
iii. A ideali A^{dd} içinde sıra yoğundur.

Tanım 3.22 E Riesz uzayı ve $e \in E_+$ olsun. Eğer $p \in E_+$ iken $p \perp e - p$ ise p'ye e'nin *bileşeni* denir.

Teorem 3.9 E Riesz uzayı ve $e \in E_+$olsun. $p \in E_+$ için p, e'nin bileşeni ise $p \leq e$ dir.

3.2 Riesz Cebirleri

Tanım 3.23 E bir Riesz uzayı olsun. Eğer E birleşmeli bir cebir ve her $a, b \in E_+$ için $a \cdot b \in E_+$ ise E'ye bir *Riesz cebiri* (*kafes cebir* veya *ℓ-cebiri*) denir.

Teorem 3.10 Riesz cebirleri üzerinde aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. Her $a, b \in E$ için $(a \cdot b)^+ \leq a^+ \cdot b^+ + a^- \cdot b^-$.

2. Her $a, b \in E$ için $(a \cdot b)^- \leq a^+ \cdot b^- + a^- \cdot b^+$.
3. Her $a, b \in E$ için $|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$.
4. Her $a, b \in E$ ve $u \in E_+$ için $a \cdot u \vee b \cdot u \leq (a \vee b) \cdot u, u \cdot a \vee u \cdot b \leq u \cdot (a \vee b)$.
5. Her $a, b \in E$ ve $u \in E_+$ için $a \cdot u \wedge b \cdot u \geq (a \wedge b) \cdot u,\ u \cdot a \wedge u \cdot b \geq u \cdot (a \wedge b)$.
6. Her $a, b \in E$ ve $u \in E_+$ için $a \leq b$ ise $u \cdot a \leq u \cdot b$.
7. Her $a, b \in E$ ve $u \in E_+$ için $0 \leq u \leq v$ ve $0 \leq a \leq b$ ise $a \cdot u \leq b \cdot v$.

Tanım 3.24 $N(E) = \{a \in E: a^k = 0, k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin elemanlarına E Riesz cebirinin *nilpotent elemanları* denir.

Tanım 3.25 E bir ℓ-cebiri (Riesz cebiri) olsun.

a. Her $a, b \in E$ ve $u \in E_+$ için $(a \vee b) \cdot u = a \cdot u \vee b \cdot u$ ve $u \cdot (a \vee b) = u \cdot a \vee u \cdot b$ sağlanıyorsa E'ye *d-cebiri* denir.
b. Her $a, b \in E$ için $a \wedge b = 0$ ise $a \cdot b = 0$ sağlanıyorsa E'ye bir *hemen hemen f-cebiri* denir.
c. Her $a, b \in E$ ve $u \in E_+$ için $a \wedge b = 0$ ise $a \cdot u \wedge b = u \cdot a \wedge b = 0$ sağlanıyorsa E'ye bir *f-cebiri* denir.
d. E'deki tek nilpotent eleman sıfır elemanı oluyorsa E *semiprimedir*.
e. E'in çarpımsal birimi varsa E *birimlidir* denir.

Aşağıdaki örnek (Aydın ve ark., 2021) çalışmasından alınmıştır.

Örnek 3.4 U, $\mathbb{N}$ üzerinde serbest ultrafiltre olsun. (x_n) dizisinin bir ultrafiltreye göre yakınsaklığı $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in N: |X_k - X_0| \leq \varepsilon\} \in U$ şeklinde ifade edilir. Aynı zamanda her ℓ_∞'da bir $*$ işlemi

$x * y := (lim_u x_n) \cdot (lim_u y_n) \cdot 1$ şeklinde tanımlansın. Burada 1, 1'e eşit bir gerçek dizidir. Bunu kontrol etmek basittir.

a. $x * y := (lim_u x_n \cdot y_n) \cdot 1$
b. $*$ işlemi ℓ_∞ 'da çarpımsal değişmeli cebirdir.
c. $(\ell_\infty, *)$ bir Archimedean hemen hemen f- cebiridir.
d. $(\ell_\infty, *)$ bir d-cebiridir.
e. $(\ell_\infty, *)$ ne semiprime ne de birimlidir.
f. $(\ell_\infty, *)$ bir f-cebiri değildir.
g. ℓ_∞ Banach latisinde $*$ çarpımsal cebiri sürekli normdur.

Teorem 3.11 Herhangi bir E f-cebiri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. Her $f, g \in E$ için $f \cdot g = (f \wedge g) \cdot (f \vee g)$ ile tanımlanır.
2. Pozitif bir elemanla çarpma, bir Riesz homomorfizmidir yani $u \in E_+$ ve her $f, g \in E$ için $u \cdot (f \wedge g) = (u \cdot f) \wedge (u \cdot g)$ ve $(f \wedge g) \cdot u = (f \cdot u) \wedge (g \cdot u)$ sağlanır. Özel olarak $u \cdot f^+ = (u \cdot f)^+$ ve $f^+ \cdot u = (f \cdot u)^+$ dir.
3. Her $f, g \in E$ için $|f \cdot g| = |f| \cdot |g|$ sağlanır. Ayrıca $(f \cdot g)^+ = f^+ \cdot g^+ + f^- \cdot g^-$ ve $(f \cdot g)^- = f^+ \cdot g^- + f^- \cdot g^+$.
4. $f, g, h \in E$ ve $f \perp g$ ise $h \cdot f \perp g$ ve $f \cdot h \perp g$ dir.
5. Her $f \in E$ için $f \perp g$ ise $f \cdot g = 0$ özellikle $f^+ \cdot f^- = f^- \cdot f^+ = 0$ sağlanır.
6. Her $f \in E$ için $f^2 \geq 0$ ve $f \cdot f^+ = f^+ \cdot f = (f^+)^2 \geq 0$.
7. Her $u, v \in E_+$ için $u^2 \wedge v^2 \leq (u \cdot v) \wedge (v \cdot u)$ ve $u^2 \vee v^2 \geq (u \cdot v) \vee (v \cdot u)$.
8. Her $u, v \in E_+$ için $u^2 \wedge v^2 = (u \wedge \mathrm{v})^2$ ve $u^2 \vee v^2 = (u \vee \mathrm{v})^2$.

E Riesz uzayı her $x, y \in E$ için $x * y = 0$ basit cebirsel çarpımına göre değişmeli bir f-cebiri olur ve $Dim(E) = 0$ olmadıkça $(E,*)$ ne birimli ne de semiprimedir.

Örnek 3.5 Bir D kümesindeki tüm $\mathbb{R}$- değerli fonksiyonların Riesz uzayı $\mathbb{R}^D$'de herhangi bir f-cebiri çarpımı $\varsigma(\mathrm{d}) := [\mathbb{I}_{\{d\}} * \mathbb{I}_{\{d\}}](\mathrm{d})$ fonksiyonu tarafından benzersiz bir şekilde belirlenir. Burada $\mathbb{I}_A \in \mathbb{R}^D$, $A \subseteq D$ kümesinin karakteristik fonksiyonudur. Ayrıca $(\mathbb{R}^D,*)$ birimlidir ancak ve ancak semiprimedir ancak ve ancak ς, $\mathbb{R}^D$ içinde zayıf bir sıra birimidir (Aydın ve ark., 2021).

4. ÇARPIMSAL SIRA SÜREKLİ OPERATÖTLER

Bildiğimiz kadarıyla Riesz cebirleri üzerinde operatör teorisinin ilk kapsamlı çalışması Aydın ve ark. tarafından (Aydın ve ark., 2022; Aydın ve Gorokhova, 2022) çalışmaları ile yapılmıştır. Bu bölümde Riesz cebirleri üzerinde sürekli operatörleri inceleyeceğiz. Buradaki temel tanım ve notasyonlar (Aydın ve ark., 2022; Aydın ve Gorokhova, 2022, Alpay ve ark., 2022) çalışmalarından alınmıştır. Burada ele aldığımız Riesz cebirleri Archimedean özelliğine sahip reel vektör uzaylar ve operatörler ise doğrusal olarak kabul edilmektedir.

X bir Riesz uzayı ve $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subseteq X$ bir net olsun. Eğer her $\beta \in B$ için en az bir $\alpha_\beta \in A$ var öyle ki her $\alpha \geq \alpha_\beta$ oldukça $|x_\alpha - x| \leq y_\beta \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\beta)_{\beta\in B}$ neti bulunabiliyorsa $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ neti $x \in X$'e *sıra yakınsaktır* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde eğer bir pozitif $u \in E_+$ elemanı için aldığımız herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ elamanına karşılık bir α_n indeksi vardır ki $|x_\alpha - x| \leq \frac{1}{n}u$ tüm $\alpha \geq \alpha_n$ indisleri için sağlanırsa $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ neti x noktasına *düzgün sıra* (*relatively uniform*) yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{r} x$ ile gösterilir. Riesz uzayları arasında tanımlı bir T operatörü;

- sıra sınırlı kümeleri sıra sınırlı kümelere götürüyorsa *sıra sınırlı*;
- $T_1, T_2 \geq 0$ olmak üzere $T = T_1 - T_2$ şeklinde yazılabiliyorsa *regüler*;
- $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ iken $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$ ise *sıra sürekli*;
- $x_\alpha \xrightarrow{r} x$ iken $Tx_\alpha \xrightarrow{r} Tx$ ise *düzgün yakınsak* olarak adlandırılır.

Sıra sürekli ve düzgün sıra sürekli operatörlerin sıra sınırlı olduğu bilinmektedir. X ve Y Riesz uzayları arasındaki tüm sınırlı operatörlerin kümesi bir vektör uzayıdır ve $L_b(X,Y)$ ile gösterilir. Riesz uzayları arasındaki tüm regüler operatörlerin oluşturduğu küme $L_r(X,Y)$, $L_b(X,Y)$'nin bir alt uzayıdır. Y, Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Bu durumda $L_b(X,Y)$ bir Dedekind tam Riesz uzayıdır.

Tanım 4.1 Bir E Riesz cebiri içindeki cebirsel çarpımı için "$x_\alpha \xrightarrow{o} x$ iken $x_\alpha \cdot y \xrightarrow{o} x \cdot y$" önermesi her $y \in E$ için sağlanıyorsa E Riesz cebirine *çarpımsal sıra süreklidir* denir.

E bir Riesz uzayı, $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ de E'de bir net ve $x \in E$ olsun. Eğer her $u \in E_+$ için,

$$|x_\alpha - x| \cdot u \xrightarrow{o} 0$$

sağlanıyorsa $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ neti x noktasına *çarpımsal sıra yakınsaktır* denir ve kısaca $x_\alpha \xrightarrow{mo} x$ şeklinde yazılır.

Teorem 4.1 X bir Dedekind tam Riesz uzayı olsun. $E = L_r(X)$, X üzerinde tanımlı regüler operatörlerin kümesi, içindeki cebirsel çarpım çarpımsal sıra süreklidir.

Kanıt: E içinde $T_\alpha \xrightarrow{mo} T$ ve $R \in E$ olsun. Her $S \in E_+$ için,

$$|T_\alpha \circ R - T \circ R| \circ S \leq |T_\alpha \circ T| \circ |R| \circ S = |T_\alpha \circ T| \circ (|R| \circ S)$$

eşitsizliğinden dolayı her $S \in E_+$ için $|T_\alpha \circ R - T \circ R| \circ S \xrightarrow{o} 0$ ve dolayısıyla $T_\alpha \circ R \xrightarrow{mo} T \circ R$ sağlanır. $R \in E$ keyfi olduğundan, E'deki cebirsel çarpım çarpımsal sıra sürekli olur.

Teorem 4.2 X bir Dedekind tam Riesz uzayı olsun. $E = L_n(X)$, X üzerinde tanımlı sıra sürekli operatörlerin kümesi, içindeki cebirsel çarpım çarpımsal sıra süreklidir.

Kanıt: E içinde $T_\alpha \xrightarrow{mo} T$ ve $R \in E$ olsun. Her $S \in E_+$ için, $S \circ |T_\alpha - T| \xrightarrow{o} 0$ olduğundan

$$S \circ |T_\alpha \circ R - T \circ R| \leq S \circ |T_\alpha - T| \circ |R| = (S \circ |T_\alpha - T|) \circ |R|$$

her $S \in E_+$ için sağlanır ve $S \circ |T_\alpha \circ R - T \circ R| \xrightarrow{o} 0$'dır, çünkü E içindeki çarpma sıra süreklidir. $S \in E$ keyfi olduğundan $T_\alpha \circ R \xrightarrow{mo} T \circ R$ ve F'deki çarpmanın çarpımsal sıra sürekli olduğu sonucuna varılır. Böylece $T_\alpha \circ R \xrightarrow{mo} T \circ R$ ve dolayısıyla $T_\alpha \circ R \xrightarrow{mo} T \circ R$'dir. $R \in E$ keyfi olduğundan E'deki cebir çarpımı çarpımsal sıra süreklidir.

Örnek 4.1 $\mathbb{N}$ doğal sayılar üzerinde serbest ultrafiltre $\mathcal{U}$ alalım. Böylece her $\varepsilon > 0$ için herhangi bir sınırlı reel değerli (x_k) dizisi için $\{k \in R: |x_k - x_\mathcal{U}| \leq \varepsilon\} \in \mathcal{U}$ sağlandığında $\mathcal{U}$ boyunca $x_\mathcal{U} = lim_\mathcal{U}\, x_k$ yakınsadığını hatırlayın. L, $T_n \in \mathcal{L}_r(\ell_\infty)$ operatörünü $L_x := x_\mathcal{U} \cdot 1_\mathbb{N}$ ve $T_n x := x_\mathcal{U} \cdot 1_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}}$ şeklinde tanımlayalım. $T_n \downarrow 0$ olduğu kolaylıkla görülür ve dolayısıyla $\mathcal{L}_r(\ell_\infty)$ içinde $T_n \xrightarrow{mo} 0$'dır. Fakat,

$$L \circ T_n(x) = L(x_\mathcal{U} \cdot 1_{\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}}) = x_\mathcal{U} \cdot 1_\mathbb{N}$$

olup $L \circ T_n \circ I = L \circ T_n \equiv L \neq 0$'dır. Böylece $L \circ T_n$ dizisi sıfıra mo-yakınsamaz ve bu nedenle Riesz cebiri $\mathcal{L}_r(\ell_\infty)$'daki cebirsel çarpım çarpımsal sıra sürekli değildir.

Tanım 4.2 E ve F birer Riesz cebiri ve $T: E \to F$ bir operatör olsun.

1) Eğer $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ iken $T(x_\alpha) \xrightarrow{mo} T(x)$ sağlanır ise T operatörüne omo-sürekli operatör denir.
2) Eğer $x_\alpha \xrightarrow{mo} x$ iken $T(x_\alpha) \xrightarrow{mo} T(x)$ sağlanır ise T operatörüne mo-sürekli operatör denir.

Sonuç 4.1 E ve F Riesz cebiri olsun.

a) E'den F'ye tanımlı tüm mo- ve omo-sürekli operatörlerin $\mathcal{L}_{omo}(E,F)$ ve $\mathcal{L}_{mo}(E,F)$ koleksiyonları vektör uzaylarıdır.

b) E birimli ise $\mathcal{L}_{omo}(E,F) \subseteq \mathcal{L}_{mo}(E,F)$.

c) F birimli ise $\mathcal{L}_{omo}(E,F) \subseteq \mathcal{L}_{n}(E,F)$.

d) E sıra sürekli cebir çarpımına sahipse $\mathcal{L}_{mo}(E,F) \subseteq \mathcal{L}_{omo}(E,F)$.

e) F bir Archimedean f-cebiri ise F'deki cebir çarpımı değişmeli ve çarpımsal sıra süreklidir. Dolayısıyla $\mathcal{L}_{n}(E,F) \subseteq \mathcal{L}_{omo}(E,F)$'dir.

Örnek 4.2 X bir Archimedean Riesz uzayı olsun. X üzerinde tüm orthomorfizmaların kümesi $Orth(X)$, çarpımsal sıra sürekli cebir çarpımı ile bir Archimedean, değişmeli ve birimli cebirdir. mo-yakınsama $Orth(X)$ içindeki sıra yakınsama ile denk olduğundan $Orth(X)$'ten keyfi bir Riesz cebirine herhangi bir operatör mo-sürekli olması için gerek ve yeteri şart omo-sürekli olmasıdır.

Önerme 4.1 E bir Riesz cebiri olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) E, çarpımsal sıra sürekli bir d-cebiridir.

(ii) Her $u \in E_+$ ve $A \subseteq E$ olmak üzere, eğer $inf_E A$ varsa $inf_E(A \cdot u) = inf_E A \cdot u$ eşitliği sağlanır.

(iii) Her $u \in E_+$ ve $A \subseteq E$ olmak üzere, eğer $sup_E A$ varsa $sup_E(A \cdot u) = sup_E A \cdot e$ eşitliği sağlanır.

Teorem 4.3 E Riesz cebirinden F Riesz cebirine tanımlı mo-sürekli bir operatör verilsin. Eğer $A \subseteq E$ için $inf_E A$ var ve her $u \in E_+$ için

$$inf_E(u \cdot A) = u \cdot inf_E A$$

sağlanır ise verilen operatör omo-sürekli olur.

Kanıt: E içindeki sıra yakınsamanın mo-yakınsamayı gerektirdiğini göstermek yeterli olacaktır. Bunun için E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ netini alalım. O halde başka bir $(y_\beta) \downarrow 0$ neti vardır ki; her β için α_β var öyle ki her $\alpha \geq \alpha_\beta$ için $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ eşitsizliği sağlanır. Keyfi bir $u \in E_+$ alalım. O halde her $\alpha \geq \alpha_\beta$ için $|x_\alpha - x| \cdot u \leq y_\beta \cdot u$ olur. Önerme 4.8'den dolayı $\inf_{\beta \in B}(y_\beta \cdot u) = (\inf_{\beta \in B} y_\beta) \cdot u = 0$'dır. Böylece $y_\beta \downarrow 0$ ve dolayısıyla $|x_\alpha - x| \cdot u \xrightarrow{o} 0$ olur. Seçilen $u \in E_+$ keyfi olduğu için $x_\alpha \xrightarrow{mo} x$ elde edilir.

Her Archimedean f-cebiri E, değişmeli bir d-cebiridir. Böylece Önerme 4.8'den dolayı yukarıdaki teoremin koşullarını karşılar. Aşağıdaki örnek E'deki cebir çarpımının sıra sürekliliğinin Teorem 4.9'da gerekli olduğunu göstermektedir.

Tanım 4.3 E bir Riesz cebiri ve $A \subseteq E$ olmak üzere $A \cdot u$ kümesi her $u \in E_+$ elemanı için sıra sınırlı bir küme ise A'ya mo-sınırlıdır denir.

E'nin her sıra sınırlı alt kümesi mo-sınırlı olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tanım 4.4 X Riesz cebirinden F Riesz cebirine tanımlanan T operatörü, X'in sıra sınırlı kümelerini F'nin mo- sınırlı alt kümelerine götürüyorsa mo- sınırlı operatör olarak adlandırılır.

E'deki cebir çarpımı basit ise E üzerindeki her operatör mo- sınırlıdır.

Sonuç 4.2 X bir Riesz uzayı ve F bir Riesz cebiri olsun. O halde;

- X'ten F'ye tanımlı her sıra sınırlı operatör mo-sınırlıdır.
- F birimli bir Riesz cebiri ise X'ten F'ye her mo-sınırlı operatör sıra sınırlıdır.

Teorem 4.4 $T: E \longrightarrow F$ iki Archimedean Riesz cebiri arasında tanımlı bir operatör olsun. Eğer T operatörü mo- ve omo-sürekli ise mo-sınırlıdır.

Kanıt: $T: E \longrightarrow F$ iki Riesz cebiri arasında tanımlı bir mo-sürekli operatör olsun. Keyfi bir sıralı $[0, b] \subseteq E$ aralığı ve $I = \mathbb{N} \times [0, b]$ yönlendirilmiş kümesini sözlük sıralaması ile düşünün. I tarafından indekslenmiş bir net $x_{(n,y)} := \frac{1}{n} y$ alalım. $0 \leq x_{(n,y)} \leq \frac{1}{n} b \downarrow 0$ olduğundan $x_{(n,y)} \xrightarrow{r} 0$'dır. O halde $x_{(n,y)} \xrightarrow{o} 0$, $x_{(n,y)} \xrightarrow{mr} 0$ ve $x_{(n,y)} \xrightarrow{mo} 0$ olur. Eğer Toperatörü mo-sürekli ise $Tx_{(n,y)} \xrightarrow{mo} 0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\left|w \cdot T(x_{(n,y)})\right| \vee \left|T(x_{(n,y)}) \cdot w\right| \xrightarrow{o} 0$$

her $w \in F_+$ için sağlanır. Keyfi $w \in F_+$ alalım. O halde F içinde $z_\beta \downarrow 0$ neti vardır öyle ki her β için keyfi $(n_\beta, y_\beta) \in I$ var ve her $(m, y) \geq (n_\beta, y_\beta)$ için

$$\left|w \cdot T(x_{(n,y)})\right| \vee \left|T(x_{(n,y)}) \cdot w\right| \leq z_\beta$$

eşitsizliği sağlanır. Herhangi bir z_β alalım. O halde özellikle her $u \in [0, b]$ için,

$$\frac{1}{n_\beta + 1}\left(|w \cdot Tu| \vee |Tu \cdot w|\right) = \left|w \cdot T(x_{(n_\beta+1,u)})\right| \vee \left|T(x_{(n_\beta+1,u)}) \cdot w\right| \leq z_\beta. \quad (2)$$

(2)'den dolayı

$$w \cdot T[0, b] \cup \left(T[0, b]\right) \cdot w \subseteq \left[-(n_\beta + 1)z_\beta, (n_\beta + 1)z_\beta\right]$$

ve $w \in F_+$ keyfi olduğundan T operatörünün mo-sınırlı olduğu sonucuna varırız.

Tanım 4.5

a) X Riesz uzayı ve F Riesz cebiri olmak üzere $T: X \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer X içindeki her (x_α) neti için $Tx_\alpha \xrightarrow{mo} 0$ iken $x_\alpha \downarrow 0$ ise T operatörü mo-Lebesgue'dir.

b) $X = (X, \tau)$ yerel solid bir Riesz uzayı, F Riesz cebiri olmak üzere $T: X \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer X_+ içindeki her τ-sınırlı artan (x_α) neti için $x \in X$ var iken $Tx_\alpha \xrightarrow{mo} Tx$ ise T operatörü mo-KB-operatörüdür.

c) $X = (X, \tau)$ Locally solid bir Riesz uzayı, F Riesz cebiri olmak üzere $T: X \to F$ bir operatör olsun. X_+ içindeki her τ-sınırlı artan (x_α) neti için Tx_α bir mo-Cauchy neti ise T operatörü quasi mo-KB-operatörüdür.

d) E ve F Riesz cebirleri ve $T: X \to F$ bir operatör olsun. E_+ içindeki her mo-sınırlı artan (x_α) neti için $x \in X$ var iken $Tx_\alpha \xrightarrow{mo} Tx$ ise T operatörü mo-Levi operatörüdür.

e) E ve F Riesz cebirleri ve $T: X \to F$ bir operatör olsun. E_+ içindeki her mo-sınırlı artan (x_α) neti için Tx_α neti F içinde bir mo-Cauchy ise T operatörü quasi mo-Levi operatörüdür.

Teorem 4.5 (X, τ) Locally solid Riesz uzayından F Riesz cebirine tanımlı T operatörü sıra sınırlı dikliği koruyan mo-KB-operatör olsun. Eğer $S \leq |T|$ ise S bir mo-KB-operatördür.

Kanıt. X_+ içinde τ- sınırlı artan (x_α) netini alalım. O halde bazı $x \in X$ için $T(x_\alpha - x) \xrightarrow{mo} 0$'dır. Yani, her $u \in F_+$ için

$$u \cdot |T(x_\alpha - x)| \xrightarrow{mo} 0 \text{ ve } |T(x_\alpha - x)| \cdot u \xrightarrow{mo} 0$$

sağlanır. Böylece

$$u \cdot |S(x_\alpha - x)| \leq u \cdot |S||x_\alpha - x| \leq u \cdot |T||x_\alpha - x| = u \cdot |Tx_\alpha - Tx| \xrightarrow{o} 0$$

elde edilir. Buradan da

$$|S(x_\alpha - x)| \cdot u \ \leq |S||x_\alpha - x| \cdot u \ \leq |T||x_\alpha - x| \cdot u \ = |Tx_\alpha - Tx| \cdot u \xrightarrow{o} 0.$$

olur. Böylece her $u \in F_+$ $(u \cdot |S(x_\alpha - x)|) \vee (|S(x_\alpha - x)| \cdot u) \xrightarrow{o} 0$'dır. Öyleyse $Sx_\alpha \xrightarrow{mo} Sx$ ve S bir mo-KB- operatördür.

T bir Riesz homomorfizmi olmak üzere $0 \leq S \leq T$ eşitsizliği S'nin de Riesz homomorfizmi olduğu anlamına geldiğinden sonraki sonuç Teorem 4.22'den elde edilir.

Sonuç 4.3 T, Locally solid Riesz uzayından bir Riesz cebirine tanımlı mo-KB Riesz homomorfizmi olsun. O halde $0 \leq S \leq T$'yi sağlayan her S operatörü aynı zamanda bir mo-KB Riesz homomorfizmdir.

Teorem 4.6 (X, τ) Locally solid Riesz uzayı, F Riesz cebiri ve $T: E \to F$ pozitif quasi mo-KB operatörü olsun. O halde $0 \leq S \leq T$'yi sağlayan her S operatörü aynı zamanda quasi mo-KB operatörüdür. Benzer sonuç quasi mo-KB operatörleri içinde geçerlidir.

Kanıt: X_+ içinde artan topolojik olarak sınırlı (x_α) netini alalım ve $0 \leq S \leq T$ olsun. O zaman $Tx_\alpha \uparrow$ ve dolayısıyla T quasi mo-KB olduğundan Tx_α neti mo-Cauchy'dir. Bir u

$\in F_+$ sabiti seçelim. O halde F içinde bir $z_\beta \downarrow$ neti vardır öyle ki her β için α_β var ve $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_\beta$ için, $u \cdot \left|Tx_{\alpha_1} - Tx_{\alpha_2}\right| \leq z_\beta$ sağlanır. Sabit bir α_β için $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_\beta$ seçelim.

$$u \cdot \left|Sx_{\alpha_1} - Sx_{\alpha_2}\right| \leq u \cdot \left|S(x_{\alpha_1} - x_{\alpha_\beta})\right| \leq u \cdot \left|T(x_{\alpha_1} - x_{\alpha_\beta})\right| \leq z_\beta. \quad (3)$$

(3)'ten dolayı $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_\beta$ için $u \cdot \left|Sx_{\alpha_1} - Sx_{\alpha_2}\right| \leq z_\beta$ olur. Böylece Sx_α neti mo-Cauchy'dir. Dolayısıyla S operatörü quasi mo-KB'dir. Benzer şekilde S operatörü quasi mo-KB argümanı gösterir. Bu nedenle S quasi mo-KB oparatörüdür.

Teorem 4.7 E ve F Riesz cebiri olmak üzere $T: E \longrightarrow F$ pozitif quasi mo-Levi operatör olsun. O halde $0 \leq S \leq T$ eşitsizliğini sağlayan her $S: E \longrightarrow F$ operatörü de quasi mo-Levi'dir.

Kanıt: E_+ içindeki x_α neti mo-sınırlı artan bir net olsun. O halde Tx_α, F'de mo-Cauchy'dir. Bir $u \in F_+$ sabiti seçelim. F içinde bir $z_\beta \downarrow 0$ neti vardır öyle ki her β için α_β var ve $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_\beta$ için $u \cdot \left|Tx_{\alpha_1} - Tx_{\alpha_2}\right| \leq z_\beta$'dır. Sabit bir α_β için $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_\beta$ seçelim. O halde,

$$u \cdot \left|Sx_{\alpha_1} - Sx_{\alpha_2}\right| \leq u \cdot \left|S(x_{\alpha_1} - x_{\alpha_\beta})\right| \leq u \cdot \left|T(x_{\alpha_1} - x_{\alpha_\beta})\right| \leq z_\beta. \quad (4)$$

(4) ile her $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_\beta$ için $u \cdot \left|Sx_{\alpha_1} - Sx_{\alpha_2}\right| \leq z_\beta$'dır. $u \in F_+$ keyfi olduğu için Sx_α neti mo-Cauchy'dir.

KAYNAKLAR

Abramovich, Y.A., Aliprantis, C. D., 2002. An invitation to operator theory, *American Mathematical Society,* Rhoda Island, 50.

Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 2003. Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics, second Edition, *Mathematical Surveys and Monographs Centrum*, Indianapolish, 105.

Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 2006. Positive operators, *Springer,* Dordrecht, 119.

Alpay S., Emelyanow E., Gorokhova S., 2022, The or-continuous, Lebesgue, KB, and Levi operators between vector lattices and topological vector spaces, arxiv.org/abs/2105.01810v2.

Amemiya, I., 1953. A generalization of Riesz-Fischer's theorem, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 5(3-4), 353-354.

Aydın, A., 2020a. Multiplicative order convergence in f-algebras, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 49(3), 998-1005.

Aydın, A., 2020b. Hahn-Banach theorem for operators on the lattice normed f-algebras, *MSU journal of science*, 8(1), 737-741.

Aydın, A., 2021. The multiplicative norm convergence in normed Riesz algebras, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 50(1), 24-32.

Aydın, A., Çınar, M., 2019. Multiplicative norm compact operators on Banach lattice f-algebras, *International Journal on Mathematics, Engineering&Natural Science*, 9 (3), 8-13.

Aydın, A., Emelyanov, E., Özcan, N.E., Marabeh, M.A.A., 2019. Unbounded p-convergence in lattice-normed vector lattices, *Siberian Advances in Mathematics*, 29 (3), 164-182.

Aydın, A., Emelyanov, E., Gorokhova, S., 2021. Full lattice convergence on Riesz space, *Indagationes Mathematicae*, 32(3), 658-690.

Aydın, A., Emelyanov, E., Gorokhova, S., 2022. Multiplicative order continuous operators on Riesz algebras, *arxiv:2201.12095v1*.

Aydın, A., Et, M., 2021. Statistically multiplicative convergence on locally solid Riesz algebras. *Turkish Journal of Mathematics*, 45(4), 1506–1516.

Aydın, A., Gul, H., Gorokhova, S., 2018. Nonstandard hulls of lattice-normed ordered vector spaces, *Turkish Journal of Mathematics,* 42(1), 155-163.

Buskes, G., Boulabiar, K. and Triki, A. 2003. Some recent trends and advance in certain lattice ordered algebras, *Contemporary Mathematics*, 328, 99-133.

Bernau, S.J., Huijsmans, C.B., 1990. Almost f-algebras and d-algebras, *Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society*, 107(2), 287-308.

Birkhoff G., Pierce R.S., 1956. Lattice ordered rings, *Annals of the Brazilian Academy of Sciences*, 28, 41-69.

Bukhvalov, A.V., Gutman, A.E., Korotkov, V.B., Kusraev, A.G., Kutateladze, S.S., Makarov, B.M., 1996. Vector lattices and integral operators, Mathematics and its Applications, *Kluwer Academic Plublishers*, Dordrecht, 358.

Buskes, G., Van Rooij, A., 2000. Almost f-algebras: structure and the Dedekind completion, *Positivity*, 4(3), 233-243.

Deng, Y., O'Brien, M., Troitsky, V.G. 2017. Unbounded norm convergence in Banach lattices, *Positivity*, 21(1), 963-974.

Gao, N. 2014. Unbounded order convergence in dual spaces, *Journal of Mathhematical. Analysis and Applications*, 419 (1), 347-354.

Huijsmans, C.B., 1991. “Lattice-ordered algebras and f-algebras: a survey, Positive operators, Riesz spaces, and economics (Pasadena, CA, 1990)”, *Springer*, Berlin, 151-169.

Kusraev, A.G., Kutateladze, S.S., 1999. Boolean valued analysis, *Mathematics and its Applications*, Dordrecht, 344.

Kusraev, A.G., 2000. Dominated operators, *Mathematics and its Applications*, Dordrecht, 141-186.

Luxemburg, W.A.J., Zaanen, A. C., 1971. Riesz Spaces I, *The Netherlands*: *North-Holland Publishing Company*, Amsterdam, 514.

Meyer-Nieberg, P., 1991. Banach lattices, *Springer-Verlag*, Berlin, 395.

Nakano, H., 1948. Ergodic theorems in semi-ordered linear spaces, *Annalysis of Mathematics*, 49 (3), 538-556.

Nakano, H., 1950. Hilbert Algebras, *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 2(1), 4-23.

Pagter, B., 1981. “f-Algebras and Orthomorphisms”, Doctor of philosopy Dissertation, *Mathematics*, Leiden University, Leiden.

Riesz, F., 1928. Sur la decomposition des operations fonctionelles lineaires. *Internazionale dei Matematici*, 3, 143-148.

Troitsky, V.G., 2004. Measures of non-compactness of operators on Banach lattices, *Positivity*, 8 (1), 165-178.

Vulikh, B.Z., 1967. Introduction to the theory of partially ordered spaces, *Wolters-Noordhoff Scientific Publications*, Groningen.

Zaanen, A.C., 1983. Riesz spaces II, *The Netherlands: North-Holland Publishing*, Amsterdam, 30.