



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DE-SİTTER 2-UZAYINDA BAZI ÖZEL
MANYETİK EĞRİLERİN
KARAKTERİZASYONLARI**

Mustafa AKDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2023
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DE-SİTTER 2-UZAYINDA BAZI ÖZEL
MANYETİK EĞRİLERİN
KARAKTERİZASYONLARI**

Mustafa AKDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Rıdvan Cem DEMİRKOL

Temmuz-2023
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

Mustafa AKDEMİR tarafından hazırlanan “De-Sitter 2-Uzayında Bazı Manyetik Eğrilerin Karakterizasyonları” adlı tez çalışması 16/06/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR
Muş Alparslan Üniversitesi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Rıdvan Cem DEMİRKOL
Muş Alparslan Üniversitesi

Üye

Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU
Fırat Üniversitesi

İmza

.....

.....

.....

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Mustafa AKDEMİR

Tarih:....../....../2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ DE-SİTTER 2-UZAYINDA BAZI ÖZEL MANYETİK EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Mustafa AKDEMİR

**Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Rıdvan Cem DEMİRKOL

İlk bölümde, eğrilerin, manyetik eğrilerin ve De-Sitter 2-zaman uzay yapısının diferansiyel geometrisi ile ilgili temel teoremler ve tanımlar sunulmaktadır. İkinci bölüm, yapılan tez çalışmasının önemine vurgu yaparak önceki çalışmaları içeren bir literatür taraması içerir. Üçüncü bölüm, De-Sitter 2-zaman uzayında tanımlanan timelike teğet manyetik eğrileri ve ilişkili manyetik vektör alanlarını, timelike normal manyetik eğrileri ve ilişkili manyetik vektör alanlarını ve timelike amanyetik eğrileri ve ilişkili manyetik vektör alanlarını karakterize eder. Dördüncü bölüm, verilen bir parçacık üzerinde sürtünme kuvvetinin, normal kuvvetin ve yerçekimi kuvvetinin etkilerine vurgu yaparak Newton'un temel yasasını tanıtır. Böylece, De-Sitter 2-uzayında sırasıyla timelike sürtünmeli manyetik eğriler, timelike normal kuvvetli manyetik eğriler ve timelike yerçekimli manyetik eğriler olarak adlandırılan üç yeni tür timelike manyetik eğri ve ilişkili manyetik vektör alanları tanımlanır. Bu eğrilerin geometrik karakterizasyonu ve fiziksel modellenmesi, Lorentz kuvveti formülü ile Newton'un formülünün birleştirilmesiyle elde edilir. Beşinci bölümde, önceki bölümde tanımlanan her manyetik eğriye karşılık gelen yüklü parçacığın gyro yarıçapı, açısal ve mekanik momentumu, potansiyel enerjisi ve torku hesaplanır. Son bölüm, bulgularımızın pratik uygulanabilirliğini göstermesinin yanı sıra manyetik eğriler ve diferansiyel geometri kullanarak fiziksel modellenme alanındaki gelecekteki araştırmaların potansiyelini vurgulamaktadır.

2023, 34 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Manyetik Eğriler, Lorentz Kuvveti, De-Sitter 2-uzayı.

ABSTRACT

MS THESIS

ON THE CHARACTERIZATION OF THE PARTICULAR MAGNETIC CURVES IN DE-SITTER 2-SPACE

Mustafa AKDEMİR

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Matematic

Advisor: Assist. Prof. Dr. Rıdvan Cem DEMİRKOL

In the first section, fundamental theorems and definitions related to the differential geometry of curves, magnetic curves, and the De-Sitter 2-spacetime structure are presented. The second section provides an introduction that emphasizes the manuscript's importance and includes a literature review based on previous works. The third section characterizes timelike tangent magnetic curves and their associated magnetic vector fields, timelike normal magnetic curves and their associated magnetic vector fields, and timelike α magnetic curves and their associated magnetic vector fields, defined in De-Sitter 2-spacetime. The fourth section introduces a fundamental law of Newton that highlights the effects of frictional force, normal force, and gravitational force on a given particle. It describes three novel types of timelike magnetic curves, respectively called timelike frictional magnetic curves, timelike normal force magnetic curves, and timelike gravitational magnetic curves together with their associated magnetic vector fields in De-Sitter 2-space. The geometric characterization and physical modeling of these curves are obtained by considering the well-known formula of the Lorentz force combined with Newton's formula. In the fifth section, the gyroradius, angular and mechanical momentum, potential energy, and torque of the charged particle corresponding to each magnetic curve defined in the previous section are calculated. The final section demonstrates the practical applicability of our findings and highlights the potential for future research in the field of physical modeling using magnetic curves and differential geometry.

2023, 34 Pages

Keywords: Magnetic Curves, Lorentz Force, De-Sitter 2-space.

TEŞEKKÜR

Bu tez alıŐmamn hazırlanması sűrecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, alıŐmamn baŐından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayıran saygıdeğer Hocam Dr. ŐĐr. Őyesi Rıdvan Cem DEMİRKOL'a teŐekkűr etmeyi bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Mustafa AKDEMİR



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER	5
3. DE-SİTTER 2-UZAYINDA TIMELIKE MANYETİK EĞRİLER	10
3.1 De-Siter 2-Uzayında Timelike α -Manyetik Eğriler	10
3.2 De-Siter 2-Uzayında Timelike T-Manyetik Eğriler.....	12
3.3 De-Siter 2-Uzayında Timelike N-Manyetik Eğriler	13
4. DE-SİTTER 2-UZAYINDA ÖZEL MANYETİK EĞRİLER.....	16
4.1 De-Siter 2-Uzayında Timelike Sürtünmeli Manyetik Eğriler.....	18
4.2 De-Siter 2-Uzayında Timelike Normal Kuvvetli Manyetik Eğriler	19
4.3 De-Siter 2-Uzayında Timelike Yerçekim Kuvvetli Manyetik Eğriler.....	21
5. DE-SİTTER 2-UZAYINDA ÖZEL MANYETİK EĞRİLERE AİT BAZI FİZİKSEL ÇIKARIMLAR	23
5.1 De-Siter 2-Uzayında Timelike Sürtünmeli Manyetik Eğriler ve Hareketleri.....	25
5.2 De-Siter 2-Uzayında Timelike Normal Kuvvetli Manyetik Eğriler ve Hareketleri	26
5.3 De-Siter 2-Uzayında Timelike Yerçekimli Manyetik Eğriler ve Hareketleri.....	28
6. SONUÇLAR.....	31
KAYNAKLAR	33

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

ϕ	:Lorentz Kuvveti
B	:Manyetik Alan
X	:Vektör Alan
α	:Eğri
α'	:Teğet Vektörü
$\{T(s), N(s), B(s)\}$:Frenet Çatı
$\{\alpha(s), T(s), N(s)\}$:De-Sitter Çatı
$\kappa(s)$:Eğrilik
$\tau(s)$:Burulma(Torsion)
S_1^2	:De-Sitter 2-Uzayı
R_1^3	:Minkowski Uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Parçacık Yörüngesi ile Kuvveti.....18



1. GİRİŞ

Manyetik alanlar hareketli yüklerin birbirlerine yaptıkları etki sonucunda açığa çıkan kuvvetin etkisiyle oluşurlar. En temel manada manyetik alan oluşumundan sorumlu olan kaynak olarak belirli bir pozitif yüke sahip olan hareketli parçacıklar gösterilebilirler. Burada ön koşul olarak manyetik alanların homojen olması yani yüklerin hareketi sırasında içinde hareket ettikleri hacmin yoğunluğunun bu alanların herhangi bir yerinde birikmiyor yada azalmıyor olması esastır. Böylece akım kararlı bir hale gelir ve oluşan manyetik alanın büyüklüğü akım şiddetinin büyüklüğüne, manyetik alanın hesaplanacağı noktanın bu akıma olan uzaklığına ve içinde manyetik alan oluşan uzayın boş olup olmamasına bağlı olarak değişir.

Bir yüklü parçacık bir manyetik alana girdiğinde manyetik alana bağlı kuvvetlerin tesiri altında kalır. Bu parçacığın hareketi Lorentz kuvveti olarak bilinen bir kuvvet tarafından yönetilir. Verilen bir \mathbf{X} vektör alanı için anti-simetrik tensör alanı olarak tanımlanan ϕ Lorentz kuvveti bir \mathbf{B} manyetik alanında aşağıdaki denklem ile ifade edilebilir (Barros vd., 2007).

$$\phi(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \times \mathbf{X}.$$

Bu kuvvetin etkisiyle yüklü parçacık manyetik eğri olarak adlandırılan yeni bir yörünge izlemeye başlar. Dolayısıyla Lorentz kuvveti manyetik kuvvetlerin bileşkesi halini alır. Üç boyutlu uzaya ait bazı özel durumlardan dolayı ise bu kuvvet aşağıdaki formda olduğu gibi verilebilir (Barros vd., 2007).

$$\phi(\alpha') = \mathbf{B} \times \alpha' = \nabla_{\alpha'} \alpha'.$$

Burada α parçacığın yörüngesine karşılık geldiği varsayılan düzgün bir eğriye aittir ve α' ise onun hız (teğet) vektör alanıdır. Lorentz kuvvetinin doğası gereği yüklü parçacık manyetik alana paralel girerse, manyetik kuvvet sıfır olur. Yine bu parçacık manyetik alana α ve \mathbf{B} arasındaki açı dik olacak şekilde girerse Lorentz kuvveti maksimum değerini alır. Böylece manyetik kuvvet parçacığın yönünü değiştirerek manyetik alan içerisinde dairesel hareketler yapmasına neden olur. Çoğu gezegenin manyetik alanı veya elektromıknatısların oluşturduğu manyetik alan yukarıda bahsi geçen mekanizma ile oluşur. Ayrıca pusulaların, elektrik motorlarının ve jeneratörlerin çalışma prensipleri de bu teorik yapının uygulamalarının görüldüğü bazı örneklerdir. Geometriksel olarak yüklü parçacığın hareketine karşılık gelen manyetik eğri ile bağlantılı olan manyetik alanın bulunması özellikle son yıllarda üzerinde durulan

konulardan bir tanesidir. Bu çalışmalarda farklı uzay-zaman yapılarında birçok değişik manyetik eğri karakterizasyonu belirlenmiştir. Bu uzay-zaman yapılarının başlıcaları Öklid uzay-zaman, Minkowski uzay-zaman, De-Sitter uzay zaman, anti De-Sitter uzay zaman, vb. olarak verilebilir. Bu konuyla ilgili yapılan çalışmalara verilebilecek bazı örnekler şunlardır. Üç boyutlu yarı-Riemann manifoldları üzerindeki Killing manyetik alanıyla ilişkili manyetik eğriler boyunca hareket eden parçacığın yörüngesine ait detaylı birçok sonuç bulunmuştur (Özdemir vd., 2015). Yine manyetik eğriler ve Bishop denklemleri yardımıyla üç boyutlu Riemannian manifoldunda bir optik fiber boyunca doğrusal olarak polarize edilmiş ışık dalgasının elektromanyetik eğrilerine ait bazı karakterizasyonlar da bulunmuştur (Körpınar, Demirkol, 2020). Üç boyutlu Minkowski uzayında pseudo null eğriler için T-manyetik, N-manyetik, B-manyetik eğrilerine karşılık gelen manyetik vektör alanları bulunmuş ve bazı örnekler verilmiştir (Kazan, Karadağ, 2017). Son olarak da, Minkowski uzayında tanımlanan Sabban vektör alanıyla ilişkili yeni bir tip manyetik eğri ve bu eğrilere karşılık gelen hareketli yüklü parçacığın bazı geometrik ve fiziksel özellikleri de tanımlanmıştır (Baş, 2018).

Newton'un hareket yasaları olarak da bilinen ikinci hareket yasası, bir nesnenin harici bir kuvvete maruz kaldığında hareketinin nasıl değiştiğini tanımlayan fizikte temel bir prensiptir. Yasaya göre, bir nesne üzerinde etki eden kuvvet, nesnenin kütlesinin ivmesiyle çarpımına eşittir. Başka bir deyişle, bir nesneye bir kuvvet uygulandığında, nesnenin hareketi, kuvvet ve nesnenin kütlesi oranında değişecektir. Örneğin, bir kutuyu 10 Newtonluk bir kuvvetle iterseniz, kutu kuvvetin yönünde ivmelenecektir. Kutunun ivmesi kütlesine bağlı olduğundan, kutu çok ağır ise daha yavaş ivmelenecektir. Öte yandan, aynı kuvvetle hafif bir kutuyu iterseniz, daha hızlı ivmelenecektir çünkü az kütlesi vardır. Bir nesne üzerinde etki edebilecek çeşitli türde kuvvetler vardır, bunlar arasında yer çekimi kuvveti, sürtünme kuvveti ve normal kuvvet yer alır. Yer çekimi kuvveti, kütlesi olan iki nesne arasındaki çekim kuvvetidir. Sürtünme kuvveti, bir nesnenin yüzeyle temas halindeyken hareketine karşı olan kuvettir. Normal kuvvet ise iki nesnenin temas halindeyken birbirlerinden geçmesini önleyen kuvettir. Bu kuvvetlerin her biri, ikinci hareket yasasını kullanarak tanımlanabilir. Örneğin, Dünya yüzeyine yakın bir nesne üzerinde etki eden yerçekimi kuvveti, g 'nin yerçekimi ivmesi olduğu yerde mg 'ye eşittir. Sürtünme kuvveti, bir nesne üzerinde etki eden normal kuvvete orantılıdır ve bir yayın kuvveti, denge pozisyonundan olan uzaklığına orantılıdır. İkinci hareket yasası, hareket halindeki

nesnelerin davranışını anlamak ve öngörmek için güçlü bir araçtır. Mekanikten elektromanyetizmaya kadar birçok farklı fizik alanında kullanılır ve fiziksel dünyayı tanımlamak için kullandığımız denklemlerin ve prensiplerin temelini oluşturur. Öte yandan, Lorentz kuvveti, yüklü bir parçacığın elektrik alan ve manyetik alan varlığında maruz kaldığı kuvveti açıklar. Kuvvet, $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ formülü ile verilir ve burada F kuvvettir. Ayrıca q parçacığın yükünü, \mathbf{E} elektrik alanını, \mathbf{v} parçacığın hızını ve \mathbf{B} manyetik alanını temsil eder. Lorentz kuvveti, Newton'un ikinci kanunu özel bir durumu olarak görülebilir. Yüklü bir parçacık elektrik ve manyetik bir alana maruz kaldığında, ivme kazanarak kuvvet etkisi ile karşılaşır. Bu ivme Lorentz kuvveti tarafından verilen kuvvetle Newton'un ikinci kanunu ile tanımlanabilir. Bu nedenle, Lorentz kuvveti, yüklü parçacıkların elektrik ve manyetik alan varlığında hareketini tanımlamak için Newton'un ikinci kanununu nasıl kullandığımızın özel bir örneğidir (Cornille, 1995). Sürtünme kuvvetini ve yerçekim kuvvetini göz önünde bulundurarak bu kuvvetlerin tesiri altında hareket eden yüklü parçacığın yörüngesine ait bazı geometrik ve fiziksel çıkarımlar sürtünmeli manyetik ve yerçekimli manyetik eğriler başlığı altında incelenmiştir (Körpınar, Demirkol, 2018; Körpınar, Demirkol, 2018). Dinamik ve elektrodinamik kuvvetlere ait temel kavramlar göz önünde bulundurularak bu kuvvetlere maruz kalan parçacığın enerjisinin hesaplandığı çalışmalar ise geometrik yaklaşımın fiziksel problemleri çözme konusundaki önemini bir daha vurgulamıştır (Körpınar, Demirkol, 2017).

Diferansiyel geometrik araçlar manyetik eğrinin geometrisini incelemek ve yüklü parçacığın hareketini tanımlayan hareket denklemlerini türetmek için kullanılır. Lorentz kuvvet yasasını diferansiyel geometrik araçlarla birleştirerek, manyetik alan varlığındaki yüklü parçacıkların hareketinin tam bir resmini elde edebilir ve tork, çevresel yarıçap, açısız ve mekanik momentum, potansiyel enerji gibi önemli nicelikleri hesaplayabiliriz. Bu çalışmalara örnek teşkil eden bazı araştırmalar şu şekilde verilebilir. Yüklü bir parçacığın birim 2-küre üzerindeki sürtünme kuvveti alanının etkisi altındaki geometrik karakterizasyonunun elde edilmesiyle parçacığın manyetik hareketi, torku, potansiyel enerji fonksiyonu ve Poynting vektörü gibi bazı fiziksel ve kinematik özellikleri incelenebilmiştir (Körpınar, Demirkol, 2019). Yine birim küre üzerindeki küresel elektromanyetik eğrilerin temel tanımını kullanarak hareket halindeki yüklü parçacığın fiziksel dinamiklerini anlamak için optiksel manyetik tork, optiksel doğrusal ve açısız momentum, enerji değişim oranı, Poynting vektörü,

elektromanyetik kuvvet kavramlarına dair bazı hesaplamalar yapılabilmektedir (Körpınar, Demirkol, 2022). Frenet-Serret eğrilerinin etkisi altında hareket eden bir elektromanyetik alanla ilişkilendirilmiş bir parçacığın hareket denklemlerinin elde edilmesiyle Newton'un ikinci yasası ile Lorentz kuvvetinin birbirlerinin eşdeğeri olduğu sonucuna varılmıştır (Garcia, Morales, 2013).



2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 2.1 \mathbf{R} reel sayılar cismini göstermek üzere, $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}\}$ vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2.1)$$

eşitliği ile tanımlanan

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

fonksiyonu \mathbf{R}^n uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma \mathbf{R}^n uzayının doğal iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir.

$x \in \mathbf{R}^n$ için

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (2.2)$$

olmak üzere

$$\|\cdot\| : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

fonksiyonu \mathbf{R}^n uzayında bir normdur. Buna göre $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$ uzayına normlu vektör uzay denir.

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanan $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu \mathbf{R}^n uzayında bir metriktir. Bu metrik ile (\mathbf{R}^n, d) bir metrik uzay olur. Bu uzaya Öklid uzay denir ve kimi zaman \mathbf{E}^n ile de gösterilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.2 I , \mathbf{R} nin bir açık aralığı olmak üzere

$$\alpha : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

biçiminde diferensiyellenebilir bir α dönüşümüne \mathbf{R}^n uzayı içinde bir eğri denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.3 $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t) \right) \quad (2.4)$$

vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.4 $\alpha: I \rightarrow \mathbf{R}^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise α eğrisine regüler bir eğri denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.5 Bir

$$\alpha: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n \quad s \rightarrow \alpha(s)$$

eğrisi için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ($\forall s \in I$) ise α eğrisine birim hızlı eğri denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001; Izumiya ve Takeuchi, 2004).

Tanım 2.6 \mathbf{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ eğrisi için

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) \quad (2.5)$$

eşitliğindeki $\mathbf{T}(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir.

$\mathbf{T}(s)$ vektör alanına α eğrisinin teğet vektör alanı adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.7 \mathbf{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ eğrisi için $\kappa: I \rightarrow \mathbf{R}$ olmak üzere,

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}(s)\| \quad (2.6)$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.8 \mathbf{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ eğrisi için

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{T}(s) \quad (2.7)$$

eşitliğindeki $\mathbf{N}(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normal) denir. $\mathbf{N}(s)$ vektör alanına α eğrisinin birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı) adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.9 \mathbf{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ eğrisi için

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) \quad (2.8)$$

eşitliğindeki $\mathbf{B}(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormal) denir. $\mathbf{B}(s)$ vektör alanına α eğrisinin ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı) adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.10 $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$ vektörlerine $\alpha: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Serret-Frenet vektörleri denir. $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ kümesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$ vektör alanlarına α eğrisi üzerinde Frenet vektör alanları adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.11 \mathbf{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$ ve $\tau: I \rightarrow \mathbf{R}$ olmak üzere

$$\tau(s) = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \quad (2.9)$$

fonksiyonuna α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki torsiyonu (burulması) denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Teorem 2.12 \mathbf{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$ ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla κ ve τ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{N}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s), \\ \mathbf{B}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{N}(s), \end{aligned} \quad (2.10)$$

olur (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.13 \mathbf{R}^n üzerinde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bilineer, non-dejenere metrik tensörüne \mathbf{R}^n üzerinde Lorentz metriği denir (Gray, 1999).

Tanım 2.14 \mathbf{R}^3 üzerinde Lorentz metriği ile oluşturulan $(\mathbf{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ ikilisine 3-boyutlu Lorentz uzayı denir ve \mathbf{R}_1^3 gösterilir (Gray, 1999).

Tanım 2.15 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}_1^3$ olsun. Eğer,

- i. $\langle x, x \rangle_L < 0$ ise x 'e timelike vektör,
- ii. $\langle x, x \rangle_L > 0$ ise x 'e spacelike vektör,
- iii. $\langle x, x \rangle_L = 0$ ise x 'e null vektör,

adı verilir (Gray, 1999).

Tanım 2.16 $\alpha \subset \mathbf{R}_1^3$, Lorentz uzayında bir eğri olsun. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü $\alpha'(s)$ olmak üzere

i. $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L < 0$ ise $\alpha'(s)$ timelike eğri,

ii. $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L > 0$ ise $\alpha'(s)$ spacelike eğri,

iii. $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L = 0$ ise $\alpha'(s)$ null eğri,

olarak adlandırılır (Gray, 1999).

Tanım 2.17 Riemann geometrisindeki 2-kürenin Lorentz karşılığına De-Sitter 2-uzayı denir (Gray, 1999).

Tanım 2.18 \mathbf{R}_1^3 uzayında sıfırdan farklı bir p vektörü için

$$\mathbf{S}_1^2 = \{p \in \mathbf{R}_1^3 : \langle p, p \rangle_L = 1\} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanan uzaya De-Sitter 2-uzay denir (Gray, 1999).

Teorem 2.19 Bir timelike p vektörü için norm fonksiyonu

$$\|p\| = \sqrt{-\langle p, p \rangle_L} \quad (2.13)$$

olarak tanımlanabilir. Eğer $\alpha \in \mathbf{R}_1^3$ ve α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü $\alpha'(s)$ iken

$$\|\alpha'(s)\| = \sqrt{-\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_L} \quad (2.14)$$

sağlanıyorsa α De-Sitter 2-uzayda bir timelike eğri olarak adlandırılır (Gray, 1999).

Teorem 2.20 Her bir birim hızlı timelike $\alpha : I \rightarrow \mathbf{S}_1^2$ eğrisi $\{\alpha(s), \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$

pseudo-ortonormal çatısıyla elde edilebilir. Burada $\mathbf{T}(s)$ timelike teğet vektörü ve

$\mathbf{N}(s)$ spacelike asli normal vektörüdür. Bu durumda $\{\alpha(s), \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$ vektörleri

için Frenet-Serret tipindeki denklemler aşağıdaki gibidir (Gray, 1999).

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(s) &= \alpha(s) + \rho(s)\mathbf{N}(s), \\ \mathbf{N}'(s) &= \rho(s)\mathbf{T}(s), \\ \alpha'(s) &= \mathbf{T}(s). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Bir timelike eğri üzerinde tanımlanan vektörler için iç çarpım ve vektörel çarpım aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle_L &= -1, \quad \langle \alpha, \alpha \rangle_L = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle_L = 1, \\ \mathbf{T} &= \alpha \times_L \mathbf{N}, \quad \alpha = \mathbf{T} \times_L \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \alpha \times_L \mathbf{T}. \end{aligned} \tag{2.16}$$



3. DE-SİTTER 2-UZAYINDA TIMELIKE MANYETİK EĞRİLER

Bu bölümde De-Sitter 2-uzayında α –manyetik eğriler, \mathbf{T} –manyetik eğriler, \mathbf{N} –manyetik eğriler verilen bir timelike eğri boyunca tanımlanacaktır. Ayrıca bulunan manyetik eğrilere karşılık gelen manyetik vektöralanları da hesaplanacaktır.

Tanım 3.1 (R, u) n-boyutlu semi-Riemann manifoldu olsun. R üzerinde F kapalı 2-formu bir manyetik alandır. (R, u) manifoldu üzerindeki F manyetik alanının Lorentz kuvveti ϕ herhangi $x, y \in X(R)$ vektör alanları için

$$g(\phi(x), y) = F(x, y) \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir (Barros vd., 2007).

Tanım 3.2 Bir (R, u) Riemann manifoldu üzerindeki manyetik eğriler F manyetik alanın etkisi altında R üzerinde hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Yani F nin manyetik yörüngeleri Lorentz denklemindeki R nin eğrileridir. Buradan

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = \alpha'' = \phi(\alpha') \quad (3.2)$$

olur. R nin jeodeziklerinden elde edilen genelleştirilmiş Lorentz denklemi de

$$\alpha'' = 0 \quad (3.3)$$

dır (Barros vd., 2007).

Tanım 3.3 3-boyutlu uzayda bir semi-Riemann manifoldunda Lorentz kuvveti vektör çarpımı yardımıyla aşağıdaki haliyle tanımlanabilir.

$$\phi(\alpha') = F \times_L \alpha' = \nabla_{\alpha'} \alpha' \quad (3.4)$$

yazılır (Barros vd., 2007).

3.1 De-Sitter 2-Uzayında Timelike α -Manyetik Eğriler

De-Sitter 2-uzayında verilen bir eğri $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}_1^2$ olarak tanımlansın. \mathbf{V}_{α} da \mathbf{S}_1^2 de bir manyetik alan olsun. O halde Lorentz kuvveti yardımıyla tanımlanan aşağıdaki eşitlik

$$\nabla_{\mathbf{T}} \alpha = \phi(\alpha) = \mathbf{V}_{\alpha} \times_L \alpha \quad (3.5)$$

bir timelike α -manyetik eğrisini verir denilir. Benzer bir yaklaşım küresel uzayda (Abdel-Aziz vd., 2018) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.1.1 α , De-Sitter 2-uzayında birim hızlı timelike manyetik bir eğri olsun. O halde De-Sitter 2-uzayında Lorentz kuvveti

$$\begin{pmatrix} \phi(\alpha) \\ \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 \\ 0 & a_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

olarak elde edilir.

İspat: α eğrisi $\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}, \rho\}$ bileşenleri ile De-Sitter 2-uzayında bir timelike α - manyetik eğri olsun. Buna göre tanımdan

$$\phi(\alpha) = \mathbf{T} \quad (3.7)$$

olur. Diğer yandan, $\phi(\mathbf{T}) \in S_p \{ \alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N} \}$ olduğundan dolayı

$$\phi(\mathbf{T}) = a_1 \alpha + a_2 \mathbf{T} + a_3 \mathbf{N} \quad (3.8)$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$a_1 = 1, a_2 = 0$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\phi(\mathbf{T}) = \alpha + a_3 \mathbf{N} \quad (3.9)$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan,

$$\phi(\mathbf{N}) = b_1 \alpha + b_2 \mathbf{T} + b_3 \mathbf{N} \quad (3.10)$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$b_1 = 0, b_2 = a_3, b_3 = 0 \quad (3.11)$$

bulunur. Benzer şekilde bulunan bu değerler (3.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\phi(\mathbf{N}) = a_3 \mathbf{T} \quad (3.12)$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.2 α , De-Sitter 2-uzayında birim hızlı bir timelike manyetik eğri olsun. O halde α eğrisinin, \mathbf{V}_α manyetik vektör alanının timelike α -manyetik eğrisinin yörüngesi olabilmesi için gerek ve yeter şart \mathbf{V}_α manyetik vektör alanının α eğrisi boyunca

$$\mathbf{V}_\alpha = a_3 \alpha - \mathbf{N} \quad (3.13)$$

olmasıdır.

İspat : α , De-Sitter 2-uzayında \mathbf{V}_α manyetik vektör alanının timelike α -manyetik eğrisinin yörüngesi olsun.

$$\mathbf{V}_\alpha = a\alpha + b\mathbf{T} + c\mathbf{N} \quad (3.14)$$

alınabilir. Tanım gereği

$$\mathbf{V}_\alpha \times_L \alpha = (a\alpha + b\mathbf{T} + c\mathbf{N}) \times_L \alpha \quad (3.15)$$

olur. Buradan $c = -1$, $b = 0$ bulunur. Diğer yandan $\phi(\mathbf{V}_\alpha) = \mathbf{V}_\alpha \times_L \mathbf{V}_\alpha = 0$ olmak üzere (3.14) eşitliğinden

$$\phi(\mathbf{V}_\alpha) = a\phi(\alpha) - \phi(\mathbf{N}) = 0$$

elde edilir. Bundan faydalanarak $a = a_3$ bulunur. Bulunan bu değerler (3.14) eşitliğinde yerlerine yazılırsa $\mathbf{V}_\alpha = a_3\alpha - \mathbf{N}$ olur.

3.2 De-Sitter 2-Uzayında Timelike T-Manyetik Eğriler

De-Sitter 2-uzayında verilen bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}_1^2$ olarak tanımlansın. \mathbf{V}_T de \mathbf{S}_1^2 de bir manyetik alan olsun. O halde Lorentz kuvveti yardımıyla tanımlanan aşağıdaki eşitlik

$$\nabla_T \mathbf{T} = \phi(\mathbf{T}) = \mathbf{V}_T \times_L \mathbf{T} \quad (3.16)$$

bir timelike \mathbf{T} -manyetik eğrisini verir denilir. Benzer bir yaklaşım küresel uzayda (Abdel-Aziz vd., 2018) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.2.1 \mathbf{T}_M De-Sitter 2-uzayında birim hızlı timelike manyetik bir eğri olsun. O halde De-Sitter 2-uzayında Lorentz kuvveti

$$\begin{pmatrix} \phi(\alpha) \\ \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c_3 \\ 1 & 0 & \rho \\ -c_3 & \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

olarak elde edilir.

İspat : α eğrisi $\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}, \rho\}$ bileşenleri ile De-Sitter 2-uzayında bir timelike \mathbf{T} -manyetik eğri olsun. Buna göre tanımdan

$$\phi(\mathbf{T}) = \alpha + \rho\mathbf{N} \quad (3.18)$$

olur. Diğer yandan $\phi(\mathbf{T}) \in \mathbf{S}_P \{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ olduğundan dolayı

$$\phi(\alpha) = c_1\alpha + c_2\mathbf{T} + c_3\mathbf{N} \quad (3.19)$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$c_1 = 0, c_2 = 1$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.19) denkleminde yerine yazılırsa

$$\phi(\alpha) = \mathbf{T} + c_3 \mathbf{N} \quad (3.20)$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan

$$\phi(\mathbf{N}) = d_1 \alpha + d_2 \mathbf{T} + d_3 \mathbf{N} \quad (3.21)$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$d_1 = -c_3, d_2 = \rho, d_3 = 0 \quad (3.22)$$

bulunur. Benzer şekilde bulunan bu değerler (3.21) denkleminde yerine yazılırsa

$$\phi(\mathbf{N}) = \rho \mathbf{T} - c_3 \alpha \quad (3.23)$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.2 \mathbf{T}_M , De-Sitter 2-uzayında birim hızlı bir timelike manyetik eğri olsun. O halde \mathbf{T}_M eğrisinin, \mathbf{V}_T manyetik vektör alanının \mathbf{T} -timelike manyetik eğrisinin yörüngesi olabilmesi için gerek ve yeter şart \mathbf{V}_T manyetik vektör alanının α eğrisi boyunca,

$$\mathbf{V}_T = \rho \alpha - c_3 \mathbf{T} - \mathbf{N} \quad (3.24)$$

olmasıdır.

İspat : \mathbf{T}_M , De-Sitter 2-uzayında \mathbf{V}_T manyetik vektör alanının \mathbf{T} -timelike manyetik yörüngesi olsun.

$$\mathbf{V}_T = d\alpha + e\mathbf{T} + f\mathbf{N} \quad (3.25)$$

alınabilir. Tanım gereği

$$\mathbf{V}_T \times_L \mathbf{T} = (d\alpha + e\mathbf{T} + f\mathbf{N}) \times_L \mathbf{T} \quad (3.26)$$

olur. Buradan $d = \rho$, $f = -1$ bulunur. Diğer yandan $\phi(\mathbf{V}_T) = \mathbf{V}_T \times_L \mathbf{V}_T = 0$ olmak üzere

(3.25) eşitliğinden $(\mathbf{V}_T) = \rho\phi(\alpha) + e\phi(\mathbf{T}) - \phi(\mathbf{N}) = 0$ elde edilir. Bundan faydalanarak

$e = -c_3$ bulunur. Bu değerler (3.25) eşitliğinde yerlerine yazılırsa $\mathbf{V}_T = \rho\alpha - c_3 \mathbf{T} - \mathbf{N}$

olur.

3.3 De-Sitter 2-Uzayında Timelike N-Manyetik Eğriler

De-Sitter 2-uzayında verilen bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}_1^2$ olarak tanımlansın. \mathbf{V}_N de \mathbf{S}_1^2 de bir manyetik alan olsun. O halde Lorentz kuvveti yardımıyla tanımlanan aşağıdaki eşitlik

$$\nabla_T \mathbf{N} = \phi(\mathbf{N}) = \mathbf{V}_N \times_L \mathbf{N} \quad (3.27)$$

bir timelike \mathbf{N} -manyetik eğrisini verir denilir. Benzer bir yaklaşım küresel uzayda (Abdel-Aziz vd., 2018) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.3.1 \mathbf{N}_M De-Sitter 2-uzayında birim hızlı timelike manyetik bir eğri olsun. O halde De-Sitter uzayında Lorentz kuvveti

$$\begin{pmatrix} \phi(\alpha) \\ \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g_3 & 0 \\ g_3 & 0 & \rho \\ 0 & \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

olarak elde edilir.

İspat : α eğrisi $\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}, \rho\}$ bileşenleri ile De-Sitter 2-uzayında bir timelike \mathbf{N} -manyetik eğri olsun. Buna göre tanımdan

$$\phi(\mathbf{N}) = \rho \mathbf{T} \quad (3.29)$$

olur. Diğer yandan, $\phi(\mathbf{N}) \in S_p \{ \alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N} \}$ olduğundan dolayı

$$\phi(\mathbf{T}) = g_1 \mathbf{T} + g_2 \mathbf{N} + g_3 \alpha \quad (3.30)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$g_1 = 0, \quad g_2 = \rho$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.30) denkleminde yerine yazılırsa

$$\phi(\mathbf{T}) = \rho \mathbf{N} + g_3 \alpha \quad (3.31)$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan

$$\phi(\alpha) = h_1 \mathbf{T} + h_2 \mathbf{N} + h_3 \alpha \quad (3.32)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$h_1 = g_3, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = 0 \quad (3.33)$$

bulunur. Benzer şekilde bulunan bu değerler (3.32) denkleminde yerine yazılırsa

$$\phi(\alpha) = g_3 \mathbf{T} \quad (3.34)$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.2 \mathbf{N}_M , De-Sitter 2-uzayında birim hızlı bir timelike manyetik eğri olsun. O halde \mathbf{N}_M eğrisinin, \mathbf{V}_N manyetik vektör alanının \mathbf{N} -timelike manyetik eğrisinin yörüngesi olabilmesi için gerek ve yeter şart \mathbf{V}_N manyetik vektör alanının α eğrisi boyunca

$$\mathbf{V}_N = -g_3 \mathbf{N} + \rho \alpha \quad (3.35)$$

olmasıdır.

İspat : \mathbf{N}_M , De-Sitter 2-uzayında \mathbf{V}_N manyetik vektör alanının \mathbf{N} –timelike manyetik yörüngesi olsun.

$$\mathbf{V}_N = g\mathbf{T} + h\mathbf{N} + j\alpha \quad (3.36)$$

alınabilir. Tanım gereği

$$\mathbf{V}_N \times_L \mathbf{N} = (g\mathbf{T} + h\mathbf{N} + j\alpha) \times_L \mathbf{N} \quad (3.37)$$

olur. Buradan $g=0, j=\rho$ bulunur. Diğer yandan $\phi(\mathbf{V}_N) = \mathbf{V}_N \times_L \mathbf{V}_N = 0$ olmak üzere

(3.36) eşitliğinden $\phi(\mathbf{V}_N) = h\phi(\mathbf{N}) + \rho\phi(\alpha) = 0$ elde edilir. Bundan faydalanarak

$h = -g_3$ bulunur.

Bulunan bu değerler (3.36) eşitliğinde yerlerine yazılırsa $\mathbf{V}_N = -g_3\mathbf{N} + \rho\alpha$ olur.



4. DE-SİTTER 2-UZAYINDA ÖZEL MANYETİK EĞRİLER

Yüklü bir parçacık eğrisel bir yol boyunca hareket ederken, yerçekimi kuvveti, sürtünme kuvveti ve normal kuvvet gibi dış kuvvetlerle karşılaşabilir. Parçacığın üzerindeki yerçekimi kuvveti, kütesine ve içinde bulunduğu yerçekimi alanına bağlı olacaktır. Kuvvet, yerçekimi alanı yönünde etki edecek ve parçacığın alanın merkezine doğru veya merkezden uzağa hareket etmesine neden olabilir. Parçacık üzerindeki sürtünme kuvveti, üzerinde hareket ettiği yüzeyin doğasına ve hareket ettiği hıza bağlı olacaktır. Bu kuvvet, parçacığın hareketine zıt yönde etki edecek ve parçacığın yavaşlamasına veya durmasına neden olabilir. Parçacık üzerindeki normal kuvvet, üzerinde hareket ettiği yüzeye diktir ve parçacığı eğrisel yolunda tutmaktan sorumludur. Bu kuvvet olmasaydı, parçacık eğri yoldan çıkar ve düz bir çizgide devam ederdi. Bu dış kuvvetlere ek olarak, yüklü parçacık, bir manyetik veya elektrik alan varlığında hareket ediyorsa, elektromanyetik kuvvetlere de maruz kalabilir. Bu kuvvetler, parçacığın eğri yolundan sapmasına ve farklı bir yönde hareket etmesine neden olabilir. Parçacığın tam davranışı, dış kuvvetlerin gücüne ve yönüne olduğu kadar parçacığın ilk hızına ve yönüne de bağlı olacaktır. Parçacığın hareketini ayrıntılı olarak anlamak için hareket denklemlerini uygun fiziksel yasalar ve ilkelerle birlikte kullanmak gerekir (Griffiths, 1999).

Yüklü bir parçacık eğrisel bir yol boyunca hareket ettiğinde, parçacık üzerine etki eden elektrik ve manyetik kuvvetlerin bir kombinasyonu olan Lorentz kuvveti olarak bilinen bir kuvvetle karşılaşır. Elektrik kuvveti parçacığın yüküne ve elektrik alanın gücüne bağlıdır, manyetik kuvvet ise parçacığın hızına ve manyetik alanın gücüne bağlıdır. Elektrik alanı E ve manyetik alanı B olan bir elektromanyetik alanda v hızıyla hareket eden yüklü bir parçacık q üzerindeki Lorentz kuvveti şu şekilde verilir: $F = q(E + v \times B)$ burada \times , vektörel çarpımı ifade eder. Bu kuvvet, parçacığın eğri yolundan sapmasına ve farklı bir yönde hareket etmesine neden olabilir. Örneğin yüklü parçacık, hareket düzlemine dik bir manyetik alanda hareket ediyorsa, hem hızına hem de manyetik alana dik bir kuvvetle karşılaşacak ve dairesel bir yolda hareket etmesine neden olacaktır. Bu, siklotron hareketi olarak bilinir. Yüklü parçacık bir elektrik alanında hareket ediyorsa, elektrik alan yönünde bir kuvvetle karşılaşacak ve bu yönde hızlanmasına neden olacaktır. Elektrik alan düzgün ise, parçacık düz bir çizgide hareket edecek, ancak alan düzgün değilse, parçacık eğri bir yol izleyebilir. Hem elektrik hem de manyetik alanların varlığında, yüklü parçacığın hareketi, alanların göreceli

kuvvetlerine ve yönlerine bağlı olarak oldukça karmaşık olabilir. Dış kuvvetlerin yüklü bir parçacık üzerindeki etkilerini daha ayrıntılı olarak anlamak için hareket denklemlerinin yanı sıra Maxwell denklemleri ve Lorentz kuvvet yasası gibi uygun fiziksel yasalar ve ilkelerin kullanılması gerekir (Purcell vd., 2013).

Yerçekimi kuvveti, sürtünme kuvveti, normal kuvvet gibi dış kuvvetlerle karşılaşan ve spesifik olmayan bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın hareketinin derinlemesine bir incelenmesi birçok araştırmacı tarafından yapılmıştır. 3D Riemann manifoldunda manyetik bir eğri boyunca hareket eden yüklü bir parçacığın davranışının sürtünme kuvvetinin veya yerçekimi kuvvetinin tesiri göz önünde bulundurularak araştırılması sonucunda ortaya çıkan “sürtünmeli manyetik eğriler” ve yerçekimli manyetik eğriler kavramları (Körpınar, Demirkol, 2018; Körpınar, Demirkol, 2018) tarafından tanımlanmıştır.

Bir blok veya yüzey üzerinde hareket eden parçacığa ait temel kavramlar detaylı bir şekilde bir çok çalışmada kendine yer bulmuştur. Özellikle de dairesel veya düz yüzeylerdeki bu harekete ait birçok karakterizasyonlar yapılmıştır. Konkav şeklinde bir yüzeyde aşağı yönde kayan bir parçacığa sürtünme kuvveti, normal kuvvet ve yer çekimi kuvveti tesir eder. Parçacığın hareketini belirleyen bu kuvvetler parçacığın takip ettiği yörünge boyunca tanımlanan otonormal çatı elemanlarınca ifade edilebilir. m yüküne sahip herhangi bir noktasal parçacık için yukarıda belirtilen şartlar altında parçacığa tesir eden normal kuvvet;

$$\mathbf{N} = \pm Q\mathbf{N} \quad (Q = \|\mathbf{N}\|) \quad (4.1)$$

olup yer çekim kuvveti

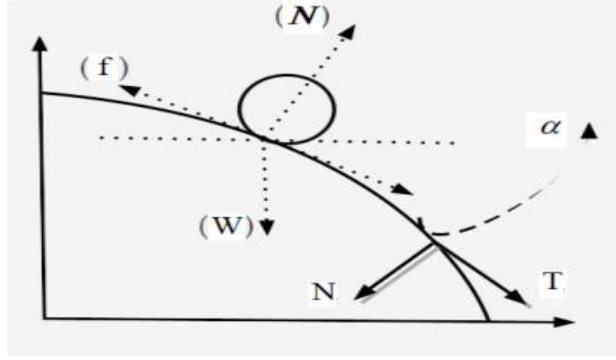
$$\mathbf{W} = m(g_0\mathbf{T} + g_1\mathbf{N}) \quad (g_0 \text{ ve } g_1 \text{ yer çekim katsayılarıdır}) \quad (4.2)$$

ve son olarak da sürtünme kuvveti de;

$$\mathbf{f} = -\eta Q\mathbf{T} \quad (\eta \text{ sürtünme katsayısı}) \quad (4.3)$$

olarak verilir (Gonzales-Cataldo vd., 2017).

Bu kuvvetler ve parçacığın yörüngesi aşağıdaki şekilde görselleştirilebilir.



Şekil 4.1. Parçacık Yörüngesi ile Kuvveti

4.1 De-Sitter 2-Uzayında Timelike Sürtünmeli Manyetik Eğriler

De-Sitter 2-uzayında verilen bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}_1^2$ olarak tanımlansın. \mathbf{V}_f de \mathbf{S}_1^2 de bir manyetik alan olsun. O halde Lorentz kuvveti yardımıyla tanımlanan aşağıdaki eşitlik

$$\nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{f} = \phi(\mathbf{f}) = \mathbf{V}_f \times_L \mathbf{f} \quad (4.4)$$

bir timelike sürtünmeli manyetik eğrisini verir denilir.

Teorem 4.1.1 α , De-Sitter 2-uzayında birim hızlı timelike sürtünmeli manyetik bir eğri olsun. O halde De-Sitter 2-uzayında Lorentz kuvveti

$$\begin{pmatrix} \phi(\alpha) \\ \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & q_1 \\ 1 & 0 & \rho \\ \rho & -q_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

olarak elde edilir.

İspat : α eğrisi $\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}, \rho\}$ bileşenleri ile De-Sitter 2-uzayında bir timelike sürtünmeli manyetik eğri olsun. Buna göre tanımdan

$$\phi(\mathbf{f}) = -(\eta Q)\alpha - (\eta Q\rho)\mathbf{N} \quad (4.6)$$

olur. Burada ηQ katsayısı sabit alınmıştır. Diğer yandan,

$\phi(\mathbf{T}) \in \mathcal{S}_p\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$, $\phi(\alpha) \in \mathcal{S}_p\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$, $\phi(\mathbf{N}) \in \mathcal{S}_p\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= \mathbf{T} + p_1\alpha + p_2\mathbf{N}, \\ \phi(\mathbf{T}) &= p_3\alpha + p_4\mathbf{N}, \\ \phi(\mathbf{N}) &= \rho\mathbf{T} + p_5\alpha + p_6\mathbf{N} \end{aligned} \quad (4.7)$$

olarak yazılabilir. Burada Lorentz kuvvetinin anti simetrik olma özelliğinden

$$\begin{aligned}
\langle \phi(\alpha), \mathbf{T} \rangle_L &= -\langle \phi(\mathbf{T}), \alpha \rangle_L, \\
\langle \phi(\alpha), \mathbf{N} \rangle_L &= -\langle \phi(\mathbf{N}), \alpha \rangle_L, \\
\langle \phi(\mathbf{N}), \mathbf{T} \rangle_L &= -\langle \phi(\mathbf{T}), \mathbf{N} \rangle_L
\end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) denlemleri karşılaştırırsa

$$p_1 = p_6 = 0, p_3 = 1, p_2 = -p_5 = q_1, p_4 = \rho \tag{4.9}$$

bulunur. Bulunan bu değerler (4.7) denkleminde yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2 α , De-Sitter 2-uzayında birim hızlı bir timelike sürtünmeli manyetik eğri olsun. O halde α eğrisinin, \mathbf{V}_f manyetik vektör alanının timelike sürtünmeli manyetik eğrisinin yörüngesi olabilmesi için gerek ve yeter şart \mathbf{V}_f manyetik vektör alanının α eğrisi boyunca

$$\mathbf{V}_f = \rho\alpha - q_1\mathbf{T} - \mathbf{N} \tag{4.10}$$

olmasıdır.

İspat : α , De-Sitter 2-uzayında \mathbf{V}_f manyetik vektör alanının timelike sürtünmeli manyetik eğrisinin yörüngesi olsun.

$$\mathbf{V}_f = q_2\alpha + q_3\mathbf{T} + q_4\mathbf{N} \tag{4.11}$$

alınabilir. Tanım gereği

$$\mathbf{V}_f \times_L \mathbf{f} = (q_2\alpha + q_3\mathbf{T} + q_4\mathbf{N}) \times_L \mathbf{f} \tag{4.12}$$

olur ve $\phi(\mathbf{f}) = -\eta Q\alpha - \eta Q\rho\mathbf{N}$ eşitliği göz nunde bulundurulursa $q_2 = \rho$, $q_4 = -1$ elde edilir. Ayrıca $\phi(\mathbf{V}_f) = \mathbf{V}_f \times_L \mathbf{V}_f = \rho\phi(\alpha) + q_3\phi(\mathbf{T}) - \phi(\mathbf{N})$ eşitliği (4.5) ifadesinde bulunan değerler yerine yazıldığında $q_3 = -q_1$ sonucunu verir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.2 De-Sitter 2-Uzayında Timelike Normal Kuvvetli Manyetik Eğriler

De-Sitter 2-uzayında verilen bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}_1^2$ olarak tanımlansın. \mathbf{V}_N de \mathbf{S}_1^2 de bir manyetik alan olsun. O halde Lorentz kuvveti yardımıyla tanımlanan aşağıdaki eşitlik

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} = \phi(\mathbf{N}) = \mathbf{V}_N \times_L \mathbf{N} \tag{4.13}$$

bir timelike normal kuvvetli manyetik eğrisini verir denilir.

Teorem 4.2.1 α , De-Sitter 2-uzayında birim hızlı timelike normal kuvvetli manyetik bir eğri olsun. O halde De-Sitter 2-uzayında Lorentz kuvveti

$$\begin{pmatrix} \phi(\alpha) \\ \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_1 & 0 \\ w_1 & 0 & \rho \\ 0 & \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

olarak elde edilir.

İspat : α eğrisi $\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}, \rho\}$ bileşenleri ile De-Sitter 2-uzayında bir timelike normal kuvvetli manyetik eğri olsun. Buna göre tanımdan

$$\phi(\mathbf{N}) = (\rho Q)\mathbf{T} \quad (4.15)$$

olur. Burada Q katsayısı sabit alınmıştır. Diğer yandan

$\phi(\mathbf{T}) \in S_p\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$, $\phi(\alpha) \in S_p\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$, $\phi(\mathbf{N}) \in S_p\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= p_7\alpha + p_8\mathbf{T}, \\ \phi(\mathbf{T}) &= p_9\alpha + p_{10}\mathbf{T} + \rho\mathbf{N} \\ \phi(\mathbf{N}) &= p_{11}\alpha + p_{12}\mathbf{T} \end{aligned} \quad (4.16)$$

olarak yazılabilir. Burada Lorentz kuvvetinin anti simetrik olma özelliğinden

$$\begin{aligned} \langle \phi(\alpha), \mathbf{T} \rangle_L &= -\langle \phi(\mathbf{T}), \alpha \rangle_L, \\ \langle \phi(\alpha), \mathbf{N} \rangle_L &= -\langle \phi(\mathbf{N}), \alpha \rangle_L, \\ \langle \phi(\mathbf{N}), \mathbf{T} \rangle_L &= -\langle \phi(\mathbf{T}), \mathbf{N} \rangle_L \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.16) ve (4.17) denlemleri karşılaştırırsa

$$p_7 = p_{10} = p_{11} = 0, p_{12} = \rho, p_8 = p_9 = w_1 \quad (4.18)$$

bulunur. Bulunan bu değerler (4.16) denkleminde yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2 α , De-Sitter 2-uzayında birim hızlı bir timelike normal kuvvetli manyetik eğri olsun. O halde α eğrisinin \mathbf{V}_N manyetik vektör alanının timelike normal kuvvetli manyetik eğrisinin yörüngesi olabilmesi için gerek ve yeter şart \mathbf{V}_N manyetik vektör alanının α eğrisi boyunca

$$\mathbf{V}_N = \rho\alpha - w_1\mathbf{N} \quad (4.19)$$

olmasıdır.

İspat α , De-Sitter 2-uzayında \mathbf{V}_N manyetik vektör alanının timelike normal kuvvetli manyetik eğrisinin yörüngesi olsun.

$$\mathbf{V}_N = w_2\alpha + w_3\mathbf{T} + w_4\mathbf{N} \quad (4.20)$$

alınabilir. Tanım gereği

$$\mathbf{V}_N \times_L \mathbf{N} = (w_2\alpha + w_3\mathbf{T} + w_4\mathbf{N}) \times_L \mathbf{N} \quad (4.21)$$

olur ve $\phi(\mathbf{N}) = \mathbf{Q}\rho\mathbf{T}$ eşitliği göz önünde bulundurulursa $w_2 = \rho$, $w_3 = 0$ elde edilir. Ayrıca $\phi(\mathbf{V}_N) = \mathbf{V}_N \times_L \mathbf{V}_N = \rho\phi(\alpha) + w_4\phi(\mathbf{N})$ eşitliği için (4.14) ifadesinde bulunan değerler yerine yazıldığında $w_4 = -w_1$ sonucunu verir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.3 De-Sitter 2-Uzayında Timelike Yerçekim Kuvvetli Manyetik Eğriler

De-Sitter 2-uzayında verilen bir eğri $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}_1^2$ olarak tanımlansın. \mathbf{V}_w da \mathbf{S}_1^2 de bir manyetik alan olsun. O halde Lorentz kuvveti yardımıyla tanımlanan aşağıdaki eşitlik

$$\nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{W} = \phi(\mathbf{W}) = \mathbf{V}_w \times_L \mathbf{W} \quad (4.22)$$

bir timelike yer çekim kuvvetli manyetik eğrisini verir denilir.

Teorem 4.3.1 α , De-Sitter 2-uzayında birim hızlı timelike yerçekim kuvvetli manyetik bir eğri olsun. O halde De-Sitter 2-uzayında Lorentz kuvveti

$$\begin{pmatrix} \phi(\alpha) \\ \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \rho \\ 0 & \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

olarak elde edilir.

İspat : α eğrisi $\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}, \rho\}$ bileşenleri ile De-Sitter 2-uzayında bir timelike yerçekim kuvvetli manyetik eğri olsun. Buna göre tanımdan

$$\phi(\mathbf{W}) = m(g_0\alpha + g_1\rho\mathbf{T} + g_0\rho\mathbf{N}) \quad (4.24)$$

olur. Burada m parçacığın kütlesi olup verilen yerçekim katsayıları ile çarpımı sabittir. Diğer yandan $\phi(\mathbf{T}) \in S_p\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$, $\phi(\alpha) \in S_p\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$, $\phi(\mathbf{N}) \in S_p\{\alpha, \mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) &= p_{13}\alpha + \mathbf{T}, \\ \phi(\mathbf{T}) &= p_{14}\alpha + \rho\mathbf{N} \\ \phi(\mathbf{N}) &= p_{15}\alpha + \rho\mathbf{T} \end{aligned} \quad (4.25)$$

olarak yazılabilir. Burada Lorentz kuvvetinin anti simetrik olma özelliğinden

$$\begin{aligned} \langle \phi(\alpha), \mathbf{T} \rangle_L &= -\langle \phi(\mathbf{T}), \alpha \rangle_L, \\ \langle \phi(\alpha), \mathbf{N} \rangle_L &= -\langle \phi(\mathbf{N}), \alpha \rangle_L, \\ \langle \phi(\mathbf{N}), \mathbf{T} \rangle_L &= -\langle \phi(\mathbf{T}), \mathbf{N} \rangle_L \end{aligned} \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.25) ve (4.26) denlemleri karşılaştırırsa

$$p_{13} = p_{15} = 0, p_{14} = 1 \quad (4.27)$$

bulunur. Bulunan bu değerler (4.25) denkleminde yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.2 α , De-Sitter 2-uzayında birim hızlı bir timelike yerçekim kuvvetli manyetik eğri olsun. O halde α eğrisinin \mathbf{V}_w manyetik vektör alanının timelike yerçekim kuvvetli manyetik eğrisinin yörüngesi olabilmesi için gerek ve yeter şart \mathbf{V}_w manyetik vektör alanının α eğrisi boyunca

$$\mathbf{V}_w = \rho\alpha - \mathbf{N} \quad (4.28)$$

olmasıdır.

İspat : α , De-Sitter 2-uzayında \mathbf{V}_w manyetik vektör alanının timelike yerçekim kuvvetli manyetik eğrisinin yörüngesi olsun.

$$\mathbf{V}_w = m_1\alpha + m_2\mathbf{T} + m_3\mathbf{N} \quad (4.29)$$

alınabilir. Tanım gereği

$$\mathbf{V}_w \times_L \mathbf{W} = (m_1\alpha + m_2\mathbf{T} + m_3\mathbf{N}) \times_L \mathbf{W} \quad (4.30)$$

olur ve $m_1 = \rho$, $m_2 = 0$, $m_3 = -1$ eşitliklerinden ispat tamamlanmış olur.

5. DE-SİTTER 2-UZAYINDA ÖZEL MANYETİK EĞRİLERE AİT BAZI FİZİKSEL ÇIKARIMLAR

Elektromanyetizma teorisinde, yüklü parçacıkların manyetik alanlarda davranışını anlamak için temel öneme sahip birkaç nicelik vardır. Bunlar arasında gyro frekansı, mekanik açısız momentum, manyetik moment ve torkönemli bir yere sahiptir.

Gyro frekansı ve gyro yarıçapı, manyetik alan içinde hareket eden yüklü parçacıkların incelenmesinde önemli parametrelerdir. Gyro frekansı, aynı zamanda siklotron frekansı olarak da bilinir ve yüklü bir parçacığın manyetik alan çizgileri etrafında döndüğü frekanstır. Gyro frekansı, manyetik alanın şiddetiyle doğru orantılı ve parçacığın kütlesiyle ters orantılıdır. Gyro yarıçapı, aynı zamanda Larmor yarıçapı olarak da bilinir ve yüklü bir parçacığın manyetik alan çizgileri etrafında döndüğü dairesel yörüngeyi yarıçapıdır. Gyro yarıçapı, hıza doğru orantılı ve manyetik alanın şiddetine ters orantılıdır. Gyro frekansı ve gyro yarıçapı birlikte, yüklü parçacıkların manyetik alandaki hareketi hakkında önemli bilgiler sağlar, örneğin bir parçacığın bir gyro yörüngesini tamamlama süresi ve yörüngeyi boyutu gibi. Bu parametreler, plazma fiziği ve parçacık hızlandırıcı tasarımı gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır (Hazeltine, 2018).

Mekanik açısız momentum, bir nesnenin dönme hareketinin ölçüsüdür. Moment çarpımı ve bir nesnenin açısız hızı olarak tanımlanır. Başka bir deyişle, lineer momentumun dönme eşdeğeri olarak bilinir. Mekanik açısız momentum, kapalı bir sistemde korunduğu için önemlidir. Bu, harici torkların olmadığı durumlarda, bir sistemin toplam mekanik açısız momentumunun sabit kalacağı anlamına gelir. Bu korunum yasası, jiroskoplar ve dönen makineler gibi dönen sistemlerin davranışı için önemli sonuçlar doğurur. Mekanik açısız momentum, fizik, mühendislik ve astronomi gibi çeşitli alanlarda kullanılır. Fizikte, atomlar ve moleküllerin hareketi gibi parçacıkların ve sistemlerin dönme hareketini tanımlamak için kullanılır. Mühendislikte, motorlar ve türbinler gibi dönen makinelerin tasarımı ve analizinde kullanılır. Astronomide, gezegenler ve yıldızlar gibi gök cisimlerinin dönme hareketini incelemek için kullanılır (Devanathan, 1999).

Manyetik momenti, hareket halindeki yüklü bir parçacığın oluşturduğu manyetik alanın şiddetini ve yönünü tanımlayan temel bir fiziksel niceliktir. Yüklü parçacığın yükü, açısız momentumu ve bir sabit olan jiroskopik oranın çarpımıyla verilir. Manyetik moment kavramı, elektromanyetizm, nükleer fizik ve katı hal fizik gibi farklı fizik

alanlarında önemlidir. Örneğin, elektromanyetizmde manyetik moment, malzemelerin manyetik özelliklerini, manyetize olabilme özelliklerini ya da manyetik alan üretebilme kabiliyetlerini tanımlamak için kullanılır. Nükleer fizikte manyetik momentler, spin ve izotop kaymaları gibi atom çekirdeklerinin davranışlarını incelemek için kullanılır. Katı hal fizikte manyetik momentler, malzemelerin manyetik düzenlenme ve spin etkileşimleri gibi manyetik özelliklerinin incelenmesinde kullanılır. Manyetik momentlerin özellikle manyetik rezonans görüntüleme (MRG) adı verilen, vücudun manyetik alanlar ve radyo dalgaları kullanılarak taranarak görüntülerinin oluşturulduğu non-invaziv bir tıbbi görüntüleme tekniklerinde kullanımı vardır. MRG'de, vücuttaki atom çekirdeklerinin manyetik momentleri manipüle edilerek ve tespit edilerek, hastalıkların veya yaralanmaların tanısı için görüntüler oluşturulur. Genel olarak, manyetik moment fizikte temel bir kavram olup, birçok alanda önemli uygulamalara sahiptir. Manyetik momentin anlaşılması ve manipüle edilmesi, birçok teknolojik ve bilimsel ilerlemeler için önemlidir (Dill, 2008).

Elektromanyetizma bağlamında tork, bir nesnenin manyetik bir alanla etkileşimi nedeniyle oluşan dönme kuvvetini tanımlayan bir vektör büyüklüğüdür. Özellikle manyetik bir alanda hareket eden yüklü bir parçacık için, tork, parçacığın hızı ve manyetik alanın oluşturduğu düzlem boyunca dik bir ekseninde dönmesine neden olan kuvvettir. Matematiksel fizik dilinde, manyetik bir alandaki yüklü bir parçacığın torku, parçacığın manyetik momenti ve manyetik alan vektörünün çarpımı kullanılarak ifade edilebilir. Yine bu bağlamda torkun yorumu, manyetik alanın yüklü bir parçacığın dönme hareketine neden olma eğilimini açıklar. Tork vektörünün yönü, sağ el kuralıyla belirlenir. Bu kurala göre, başparmak parçacığın hız yönünü, parmaklar manyetik alan yönünü ve avuç içi ise tork vektörünün yönünü gösterir. Manyetik alandaki torkun anlaşılması, motorlar ve jeneratörler gibi fizik alanlarında dönme hareketi üretmek için tork kullanılan birçok alanda önemlidir. Ayrıca plazma ve diğer elektromanyetik sistemlerde yüklü parçacık dinamiğinin çalışılmasında da önemli bir rol oynar (Brockett, 1976).

Bu nicelikler arasında aralarındaki ilişkilerin dikkate değer olduğunu belirtmek gerekir. Örneğin, manyetik moment, açısal momentum ve giromanyetik oran terimleriyle ifade edilebilir ve tork, manyetik moment ve manyetik alan terimleriyle ifade edilebilir.

5.1 De-Siter 2-Uzayında Timelike Sürtünmeli Manyetik Eğriler ve Hareketleri

Bu bölümde göreceli olmayan pozitif q yüküne sahip m kütleli parçacığın manyetik hareketini sürtünme kuvveti yardımıyla tanımladığımız timelike sürtünmeli manyetik eğrilerce vereceğiz. Bunun için Newton yasalarının ikinci denklemini ve Lorentz kuvvet denklemini göz önünde bulunduracağız. Buna göre

$$q(\mathbf{T} \times_{\mathbf{L}} \mathbf{V}_f) = \mathbf{F} = m \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{T} \quad (5.1)$$

eşitliğindeki \mathbf{V}_f timelike sürtünmeli manyetik eğriye ait manyetik alan vektörü \mathbf{T} ise parçacığın hız vektörüdür.

Manyetik kuvvetin merkezci kuvveti tetiklediği bilinmektedir. Bunun sonucunda siklotron veya gyro yarıçapı olarak bilinen ve birim hızlı timelike sürtünmeli manyetik eğrinin yörüngesinin eğrilik yarıçapını veren ifade aşağıdaki gibidir:

$$r = \frac{m \|\mathbf{v}\|}{q \|\mathbf{V}_f\|}. \quad (5.2)$$

Bu durumda yükün kütleyle oranı -1 olduğundan timelike sürtünmeli manyetik eğrinin gyro frekansı aşağıdaki şekilde verilir.

$$r = \frac{-1}{\rho^2 - q_1^2 + 1}, \kappa = -(\rho^2 - q_1^2 + 1). \quad (5.3)$$

Burada ρ eğrinin geodezik eğriliği ve q_1 de (4.5) denkleminde elde edilen bir katsayıdır. Klasik elektromanyetik teorisinde Larmor teoremi dönen yüklü bir parçacığın açısal momentumu ile orantılı bir manyetik momente sahip olacağını belirtir. Bu bağlamda verilen parçacığa ait mekanik açısal momentum şu şekilde verilir.

$$\mathbf{L} = \mathbf{f} \times_{\mathbf{L}} m \phi(\mathbf{f}) = m(\eta^2 Q^2 \rho \alpha - \eta^2 Q^2 \mathbf{N}). \quad (5.4)$$

Bu ifadeden görüleceği üzere açısal momentumun büyüklüğü aşağıdaki gibidir.

$$\|\mathbf{L}\| = m \eta^2 Q^2 (\rho^2 - 1)^{1/2} (\rho^2 - q_1^2 + 1). \quad (5.5)$$

Ayrıca açısal momentumun büyüklüğünü hesaplamak için $\|\mathbf{L}\| = m \|\mathbf{v}\| r$ eşitliğini kullanabiliriz. Bu sayede q_1 keyfi sabitini de bulabiliriz. Buna göre (5.3) ve (5.5) denklemlerinden aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\|\mathbf{L}\| = m\|\mathbf{v}\|r = \frac{-m}{\rho^2 - q_1^2 + 1} = m\eta^2 Q^2 (\rho^2 - 1)^{1/2} (\rho^2 - q_1^2 + 1). \quad (5.6)$$

Sonuç olarak da

$$q_1 = \pm \left((\rho^2 - 1) - \frac{1}{\eta^4 Q^4 (\rho^2 - 1)} \right)^{1/2} \quad (5.7)$$

elde edilir. Nihayet parçacığın manyetik momentini veren eşitlik

$$\theta = \frac{q}{2m} \mathbf{L} = \frac{-\mathbf{L}}{2} (-\eta^2 Q^2 \rho \alpha + \eta^2 Q^2 \mathbf{N}) \quad (5.8)$$

halini alır. Tüm bu sonuçlar parçacığın spin (dönme) davranışına ait kavramlardır. Bu yüzden parçacığa ait tork ifadesi

$$\tau = \theta \times_{\mathbf{L}} \mathbf{V}_f = \frac{m}{2} (\eta^2 Q^2 q_1 \alpha + \eta^2 Q^2 q_1 \rho \mathbf{N}) \quad (5.9)$$

olarak bulunur. Bu eşitlikte q_1 için (5.7) ifadesinde bulunan değer kullanılabilir. Parçacığın dönmesine sebep olan bu süreç parçacık üzerinde bir potansiyel enerji biriktirir. Bu potansiyel enerjide parçacık boyunca

$$(P) = \langle -\theta, \mathbf{V}_f \rangle_{\mathbf{L}} = \frac{m}{2} \eta^2 Q^2 (1 + \rho^2) \quad (5.10)$$

olarak ifade edilir. Açısal momentumun genelleştirilmesi manyetik kuvvet, tork ve mekanik açısal momentum tanımları yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_G &= \mathbf{f} \times_{\mathbf{L}} m\phi(\mathbf{f}) + \frac{q}{2} \mathbf{V}_f \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle_{\mathbf{L}} \\ &= m(\eta^2 Q^2 \rho \alpha - \eta^2 Q^2 \mathbf{N}) + \frac{q}{2} (-\eta^2 Q^2) (\rho \alpha - q_1 \mathbf{T} - \mathbf{N}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

olarak verilir. Eğer $\langle \mathbf{f}, \mathbf{V}_f \rangle_{\mathbf{L}} = \langle \phi(\mathbf{f}), \mathbf{V}_f \rangle_{\mathbf{L}} = 0$ alınırsa genelleştirilmiş açısal momentum daha sade bir ifadeyle $\mathbf{V}_f = \rho \alpha - \mathbf{N}$, $q_1 = 0$ için

$$\mathbf{L}_G = \eta^2 Q^2 \left(m - \frac{q}{2} \right) \mathbf{V}_f \quad (5.12)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak \mathbf{L}_G ve \mathbf{V}_f paralel olup parçacığın hareketinin dönmeye göre bir değişmez olduğu görülür.

5.2 De-Sitter 2-Uzayında Timelike Normal Kuvvetli Manyetik Eğriler ve Hareketleri

Bu bölümde göreceli olmayan pozitif q yüküne sahip m kütleli parçacığın manyetik hareketini normal kuvveti yardımıyla tanımladığımız timelike normal

manyetik eğrilerce vereceğiz. Bunun için Newton yasalarının ikinci denklemini ve Lorentz kuvvet denklemini göz önünde bulunduracağız. Buna göre

$$q(\mathbf{T} \times_{\mathbf{L}} \mathbf{V}_N) = \mathbf{F} = m \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{T} \quad (5.13)$$

eşitliğindeki \mathbf{V}_N timelike normal manyetik eğriye ait manyetik alan vektörü \mathbf{T} ise parçacığın hız vektörüdür.

Manyetik kuvvetin merkezci kuvveti tetiklediği bilinmektedir. Bunun sonucunda siklotron veya gyro yarıçapı olarak bilinen ve birim hızlı timelike normal manyetik eğrinin yörüngesinin eğrilik yarıçapını veren ifade aşağıdaki gibidir:

$$r = \frac{m \|\mathbf{v}\|}{q \|\mathbf{V}_N\|}. \quad (5.14)$$

Bu durumda yükün kütleyle oranı -1 olduğundan timelike normal manyetik eğrinin gyro frekansı aşağıdaki şekilde verilir.

$$r = \frac{-1}{(\rho^2 + 1)^{1/2}}, \kappa = -(\rho^2 + 1)^{1/2}. \quad (5.15)$$

Burada ρ eğrinin geodezik eğriliğidir. Klasik elektromanyetik teorisinde Larmor teoremi dönen yüklü bir parçacığın açısai momentumu ile orantılı bir manyetik momente sahip olacağını belirtir. Bu bağlamda verilen parçacığa ait mekanik açısai momentum şu şekilde verilir.

$$\mathbf{L} = \mathbf{N} \times_{\mathbf{L}} m \phi(\mathbf{N}) = -m Q^2 \rho \alpha. \quad (5.16)$$

Bu ifadeden görüleceği üzere açısai momentumun büyüklüğü aşağıdaki gibidir.

$$\|\mathbf{L}\| = m Q^2 \rho. \quad (5.17)$$

Ayrıca açısai momentumun büyüklüğünü hesaplamak için $\|\mathbf{L}\| = m \|\mathbf{v}\| r$ eşitliğini kullanabiliriz. Bu sayede Q keyfi sabitini de bulabiliriz. Buna göre (5.15) ve (5.17) denklemlerinden aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\|\mathbf{L}\| = m \|\mathbf{v}\| r = \frac{-m}{(\rho^2 + 1)^{1/2}} = m Q^2 \rho. \quad (5.18)$$

Sonuç olarak da

$$Q = \left(-\frac{1}{(\rho^2 + 1)^{1/2} \rho} \right)^{1/2} \quad (5.19)$$

elde edilir. Nihayet parçacığın manyetik momentini veren eşitlik

$$\theta = \frac{q}{2m} \mathbf{L} = \frac{-\mathbf{L}}{2} = \frac{m}{2} Q^2 \rho \alpha \quad (5.20)$$

halini alır. Tüm bu sonuçlar parçacığın spin (dönme) davranışına ait kavramlardır. Bu yüzden parçacığa ait tork ifadesi

$$\tau = \theta \times_{\mathbf{L}} \mathbf{V}_N = -\frac{m}{2} Q^2 \rho \mathbf{T} \quad (5.21)$$

olarak bulunur. Parçacığın dönmesine sebep olan bu süreç parçacık üzerinde bir potansiyel enerji biriktirir. Bu potansiyel enerjide parçacık boyunca

$$(P) = \langle -\theta, \mathbf{V}_N \rangle_{\mathbf{L}} = -\frac{m}{2} Q^2 \rho^2 \quad (5.22)$$

olarak ifade edilir.

5.3 De-Sitter 2-Uzayında Timelike Yerçekimli Manyetik Eğriler ve Hareketleri

Bu bölümde göreceli olmayan pozitif q yüküne sahip m kütleli parçacığın manyetik hareketini yerçekim kuvveti yardımıyla tanımladığımız timelike yerçekimli manyetik eğrilerce vereceğiz. Bunun için Newton yasalarının ikinci denklemini ve Lorentz kuvvet denklemini göz önünde bulunduracağız. Buna göre

$$q(\mathbf{T} \times_{\mathbf{L}} \mathbf{V}_w) = \mathbf{F} = m \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{T} \quad (5.23)$$

eşitliğindeki \mathbf{V}_w timelike yerçekimli manyetik eğriye ait manyetik alan vektörü \mathbf{T} ise parçacığın hız vektörüdür.

Manyetik kuvvetin merkezci kuvveti tetiklediği bilinmektedir. Bunun sonucunda siklotron veya gyro yarıçapı olarak bilinen ve birim hızlı timelike yerçekimli manyetik eğrinin yörüngesinin eğrilik yarıçapını veren ifade aşağıdaki gibidir:

$$r = \frac{m \|\mathbf{v}\|}{q \|\mathbf{V}_w\|}. \quad (5.24)$$

Bu durumda yükün kütleyle oranı -1 olduğundan timelike yerçekimli manyetik eğrinin gyro frekansı aşağıdaki şekilde verilir.

$$r = \frac{-1}{(\rho^2 + 1)^{1/2}}, \kappa = -(\rho^2 + 1)^{1/2}. \quad (5.25)$$

Burada ρ eğrinin geodezik eğriliğidir. Klasik elektromanyetik teorisinde Larmor teoremi dönen yüklü bir parçacığın açısal momentumu ile orantılı bir manyetik momente sahip olacağını belirtir. Bu bağlamda verilen parçacığa ait mekanik açısal momentum şu şekilde verilir.

$$\mathbf{L} = \mathbf{W} \times_{\mathbf{L}} m \phi(\mathbf{W}) = m^2 (\rho(g_0^2 - g_1^2) \alpha - g_0 g_1 \mathbf{T} - g_0^2 \mathbf{N}). \quad (5.26)$$

Bu ifadeden görüleceği üzere açısal momentumun büyüklüğü aşağıdaki gibidir.

$$\|\mathbf{L}\| = m^2 (\rho^2 (g_0^2 - g_1^2)^2 - g_0^2 g_1^2 + g_0^4)^{1/2}. \quad (5.27)$$

Ayrıca açısal momentumun büyüklüğünü hesaplamak için $\|\mathbf{L}\| = m \|\mathbf{v}\| r$ eşitliğini kullanabiliriz. Bu sayede m , g_0 , g_1 ve ρ katsayıları ve sabitleri arasındaki ilişkiyi bulabiliriz. Buna göre (5.25) ve (5.27) denklemlerinden aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\|\mathbf{L}\| = m \|\mathbf{v}\| r = \frac{-m}{(\rho^2 + 1)^{1/2}}. \quad (5.28)$$

Sonuç olarak da

$$(\rho^2 + 1)(\rho^2 (g_0^2 - g_1^2)^2 - g_0^2 g_1^2 + g_0^4) = \frac{1}{m^2}. \quad (5.29)$$

elde edilir. Nihayet parçacığın manyetik momentini veren eşitlik

$$\theta = \frac{q}{2m} \mathbf{L} = \frac{-\mathbf{L}}{2} = \frac{m^2}{2} (\rho(g_1^2 - g_0^2) \alpha + g_0 g_1 \mathbf{T} + g_0^2 \mathbf{N}). \quad (5.30)$$

halini alır. Tüm bu sonuçlar parçacığın spin (dönme) davranışına ait kavramlardır. Bu yüzden parçacığa ait tork ifadesi

$$\tau = \theta \times_{\mathbf{L}} \mathbf{V}_w = \frac{-m^2}{2} (g_0 g_1 \alpha + g_1^2 \rho \mathbf{T} + g_0 g_1 \rho \mathbf{N}) \quad (5.31)$$

olarak bulunur. Parçacığın dönmesine sebep olan bu süreç parçacık üzerinde bir potansiyel enerji biriktirir. Bu potansiyel enerji de parçacık boyunca

$$(P) = \langle -\theta, \mathbf{V}_w \rangle_{\mathbf{L}} = \frac{-m^2}{2} ((g_1^2 - g_0^2) \rho^2 - g_0^2) \quad (5.32)$$

olarak ifade edilir. Açısal momentumun genelleştirilmesi manyetik kuvvet, tork ve mekanik açısal momentum tanımları yardımıyla

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_G &= \mathbf{W} \times_{\mathbf{L}} m\phi(\mathbf{W}) + \frac{q}{2} \mathbf{V}_w \langle \mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle_{\mathbf{L}} \\
&= m^2 \rho (g_0^2 - g_1^2) \alpha - g_0 g_1 \mathbf{T} - g_0^2 \mathbf{N} + \frac{qm^2}{2} (-g_0^2 + g_1^2) (\rho \alpha - \mathbf{N})
\end{aligned} \tag{5.33}$$

olarak verilir. Eğer $\langle \mathbf{W}, \mathbf{V}_w \rangle_{\mathbf{L}} = \langle \phi(\mathbf{W}), \mathbf{V}_w \rangle_{\mathbf{L}} = 0$ alınırsa genelleştirilmiş açısal momentum daha sade bir ifadeyle $\mathbf{V}_w = \rho \alpha - \mathbf{N}$ için

$$\mathbf{L}_G = m^2 g_0^2 \left(1 - \frac{q}{2}\right) \mathbf{V}_w, \tag{5.34}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak \mathbf{L}_G ve \mathbf{V}_w paralel olup parçacığın hareketinin dönmeye göre bir değişmez olduğu görülür.

6. SONUÇLAR

Sonuç olarak, bu tez çalışmasında eğrilerin, manyetik eğrilerin ve De-Sitter 2-uzay zamanının diferansiyel geometrisi üzerine kapsamlı bir çalışma sunulmuştur. İlk bölümde, bu konularla ilgili bazı teoremler ve tanımlar verilmiş ve sonraki bölümler için bir temel oluşturulmuştur. İkinci bölümde, bu çalışmanın önemini vurgulanmış ve bu alandaki çalışmalara ait literatür çalışması detaylı bir şekilde verilmiştir.

Üçüncü bölümde, De-Sitter 2 uzayında çeşitli timelike manyetik eğrileri ve ilişkili manyetik vektör alanları hesaplanmıştır. Böylece, bu analizle manyetik eğrilerin klasik eğri teorisine ilginç bir uzantı sağladığının gösterilmesi amaçlanmıştır. Manyetik eğrilerin ve ilişkili manyetik vektör alanlarının incelenmesi hem diferansiyel geometri hem de fizik açısından önemlidir. Diferansiyel geometri açısından, manyetik eğriler, özyinelemeli olmayan manyetik alanlarla donatılmış eğrili uzaylara klasik düzlemsel eğrilerin doğal bir genişlemesi olarak görülür. Bu genişleme, bağlantı ve paralel taşıma teorisinin kullanılmasını gerektirir ve diferansiyel geometride temel bir rol oynar. Dahası, manyetik eğriler ve ilişkili manyetik vektör alanları, torsiyon ve jeodeziklik gibi bir uzayın eğrilik özelliklerinin incelenmesine izin verir ve bu, birçok fiziksel uygulama için önemlidir. Fiziksel açıdan manyetik eğriler ve ilişkili manyetik vektör alanlarının geniş kapsamlı fiziksel sonuçları vardır, bu alanlar arasında elektromanyetizma, plazma fiziği ve astrofizik sayılabilir. Örneğin, manyetik eğriler manyetik alanlardaki yüklü parçacık hareketinin incelenmesinde doğal olarak ortaya çıkar. Manyetik eğrinin eğrilik ve torsiyonu, yüklü parçacıkların manyetik alanlardaki hareketini tanımlayan önemli bir parametre olan gyro yarıçapını belirler. Manyetik eğriler ayrıca plazmalarda manyetik enerjinin kinetik ve termal enerjiye dönüştürüldüğü manyetik yeniden birleşme sürecinin incelenmesinde de kritik bir rol oynar. Ayrıca, manyetik vektör alanları manyetohidrodinamikte önemlidir. Manyetohidrodinamik, manyetik alanlar içinde elektriksel olarak iletken sıvıların dinamiğini inceleyen bir bilim dalıdır. Bu bağlamda, manyetik vektör alanları, bir yüzeyden geçen manyetik akıyı temsil eder ve sıvının davranışını belirler. Manyetik vektör alanları, füzyon reaktörlerinde manyetik sınırlandırma ve Dünya'nın manyetik alanının dinamiği gibi olguların incelenmesinde kullanılır.

Dördüncü bölümde, Newton'un temel yasası tanıtılmıştır. Ardından De-Sitter 2-uzayında sürtünmeli, normal kuvvetli ve yerçekimli timelike manyetik eğrileri olarak adlandırdığımız üç yeni tür manyetik eğri ve bunların ilgili manyetik vektör alanları

karakterize edilmiştir. Newton'un temel yasası ve ilgili kuvvetler manyetik eğrileri ve ilgili manyetik vektör alanlarını tanımlamada önemli bir role sahiptir. Özellikle sürtünme kuvveti, normal kuvvet ve yerçekimi kuvveti, uzaydaki nesnelerin hareketini etkileyen temel kuvvetlerdir. Bu kuvvetleri hesaba katarak yeni manyetik eğrileri oluşturabilir ve bir manyetik alanın varlığında yüklü parçacıkların hareketini tanımlayabiliriz. Çalışmamızda tanımlanan sürtünmeli manyetik eğriler, normal kuvvetli manyetik eğriler ve yerçekimli manyetik eğriler, bu kuvvetlerin etkilerini hesaba katan yeni tür manyetik eğrileri temsil etmektedir. Ayrıca, elektromanyetik bir alanın neden olduğu bir yüklü parçacık üzerindeki kuvveti tanımlayan Lorentz kuvveti de manyetik eğrileri ve ilgili manyetik vektör alanlarını tanımlamada önemlidir. Lorentz kuvvetini Newton'un yasalarıyla birleştirerek, yüklü parçacıkların manyetik alanda hareketini yöneten denklemler elde edebiliriz.

Beşinci bölümde, bu temel yasalar ve denklemler yardımıyla çalışmamızda tanımlanan her manyetik eğriye karşılık gelen yüklü parçacığın gyro yarıçapı, açıl ve mekanik momentumu, potansiyel enerjisi ve torku hesaplanarak, bulgularımızın pratik uygulanabilirliği gösterilmiştir. Ayrıca bir yüklü parçacığın hareketine karşılık geldiğini iddia ettiğimiz manyetik eğrilere ait diferansiyel geometrik tanım ve kavramlar kullanılarak birçok fiziksel hesaplama ve modelleme yapılabileceği gösterilmiştir. Genel olarak, Newton'un temel yasası ve ilgili kuvvetlerin yanı sıra Lorentz kuvvetinin de dahil edilmesi, yüklü parçacıkların manyetik alanda hareketinin daha kapsamlı ve doğru bir modelinin oluşturulmasına olanak tanınacağı vurgulanmıştır. Bu, fizik, mühendislik ve astronomi gibi çeşitli alanlar için önemli sonuçlar doğurabilecektir, çünkü bu yaklaşım farklı bağlamlarda yüklü parçacıkların davranışını daha iyi anlaşılmasına ve öngörülmesine olanak tanır.

KAYNAKLAR

- Abdel-Aziz, H.S., Khalifa, M.S., Haytham, A.A., 2018. Some properties of special magnetic curves, *International Journal of Analysis and Applications*, 16, 193-208.
- Arreaga-García, G., & Morales, J. S., 2013. Equations of motion of a relativistic charged particle with a curvature depending actions. arXiv preprint arXiv:1308.4714.
- Barros, M., Cabrerizo, L., Fernandez, M., Romeo, A., 2007. Magnetic Vortex Filament Flows, *J Math Phys*, 48, 1-27.
- Baş, S., 2018. A New Version of Spherical Magnetic Curves in the De-Sitter Space S_1^2 , *Symmetry*, 10(11), 606.
- Brockett, R.W., 1976. Nonlinear systems and differential geometry, Proceedings of the IEEE, 64, 61-72.
- Cornille, P., 1995. The Lorentz force and Newton's third principle. Canadian IEEE, 64, Journal of Physics, 73(9-10), 619-625.
- Devanathan, V., 1999, Angular momentum techniques in quantummechanics, *Springer Science & Business Media*.
- Dill, T., 2008. Contraindications to magnetic resonance imaging, *Heart*, 94, 943-948.
- Gray, A., 1999, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, *CrcPress*, USA.
- Griffiths, D.J., 1999, Introduction to Electrodynamics, *PrenticeHall*.
- Hazeltine, R.D., 2018, The frame work of plasma physics, *CRC Press*.
- Izumiya, S., Takeuchi, N., 2004. New Special Curves and Developable Surfaces, *Turk J Math*, 28, 153-163.
- Kazan, A., Karadag, H.B., 2017. Magnetic pseudo null and magnetic null curves in Minkowski 3-space, *International Mathematical Forum*, 12(3), 119-132.
- Körpınar, T., Demirkol, R.C., 2017. Energy on a timelike particle in dynamical and electrodynamical force fields in De-Sitter space, *Revista Mexicana de Física*, 63(6), 560-568.
- Korpınar, T., Demirkol, R.C., 2018. Frictional magnetic curves in 3D Riemannian Manifolds, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15(1), 1850020.

- Körpınar, T., Demirkol, R.C., 2018. Gravitational magnetic curves on 3D Riemannian manifolds, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 15(1), 1850184.
- Körpınar, T., Demirkol, R.C., 2019. Magnetic motion of spherical frictional charged particles on the unit sphere, *Revista Mexicana de Física*, 65(5), 496-502.
- Körpınar, T., Demirkol, R.C., 2022. On the geometric dynamics of the charged point-particle propagated through the spherical optical fiber, *Optik*, 251, 168287.
- Özdemir, Z., Gök, İ., Yaylı, Y., Ekmekci, F.N., 2015. Notes on magnetic curves in 3D semi-Riemannian manifolds, *Turkish Journal of Mathematics*, 39(3), 412-426.
- Purcell, E.M., David J.M., 2013, *Electricity and Magnetism*, Cambridge University Press.
- Sabuncuoğlu, A., 2001. *Diferensiyel Geometri*, Ankara.