**T.C.**

**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# MANYETİK EĞRİLERDE FERMİ-WALKER TÜREVİ

**Özal BİNGÖL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalını**

**Haziran-2019**
**MUŞ**

**T.C.**
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# MANYETİK EĞRİLERDE FERMİ-WALKER TÜREVİ

**Özal BİNGÖL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalını**

**Danışman**
**Doç Dr. Talat KÖRPINAR**

**Haziran-2019**
**MUŞ**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Özal BİNGÖL tarafından hazırlanan "Manyetik Eğrilerde Fermi-Walker Türevi " adlı tez çalışması 17/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'ndaYÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

| **Jüri Üyeleri** | **İmza** |
|---|---|
| **Başkan**<br>Doç. Dr. Talat KÖRPINAR<br>MŞÜ, Fen Edebiyat Fak., Matematik | ........................... |
| **Danışman**<br>Doç. Dr. Talat KÖRPINAR<br>MŞÜ, Fen Edebiyat Fak., Matematik | ........................... |
| **Üye**<br>Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK<br>Bitlis Eren Üni., Fen Edebiyat Fak, Matematik | ........................... |
| **Üye**<br>Dr. Öğr. Üyesi Selçuk BAŞ<br>MŞÜ., Malazgirt MYO, Matematik | ........................... |

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 21/06/2019 Tarih ve 17/V nolu kararı ile onaylanmıştır.

**Doç. Dr. Sedat BOZARI**
**FBE Müdürü**

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Özal BİNGÖL

08/07/2019

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

## MANYETİK EĞRİLERDE FERMİ-WALKER TÜREVİ

**Özal BİNGÖL**

**Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Talat KÖRPINAR**

**2019, 33 Sayfa**

**Jüri**
**Danışman: Doç. Dr. Talat KÖRPINAR**
**Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Ali ÇAKMAK**
**Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Selçuk BAŞ**

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm çalışmanın ana temasının anlatıldığı giriş bölümüdür. İkinci bölüm konu ile ilgili temel tanım ve teoremlerin verildiği materyal ve metot bölümüdür. Üçüncü bölüm Frenet çatısına göre manyetik eğrilerin tanımlandığı ve Fermi-Walker türevlerinin bulunduğu manyetik eğriler bölümüdür. Dördüncü bölüm Quasi çatısına göre manyetik eğrilerin tanımlandığı ve Fermi-Walker türevlerinin bulunduğu araştırma ve bulgular bölümüdür. Beşinci bölüm konu ile ilgili sonuçların verildiği tartışma ve sonuç bölümüdür.

**Anahtar Kelimeler:** Fermi-Walker Türevi, Frenet Çatısı, Manyetik Alan, Manyetik Eğriler

# ABSTRACT

**MS THESIS**

**FERMI-WALKER DERIVATIVE IN MAGNETIC CURVES**

**Özal BİNGÖL**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ ALPARSLAN UNIVERSITY**
**THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE**
**IN MATHEMATİCS SCIENCE**

**Advisor: Assoc. Prof. Dr Talat KÖRPINAR**

**2019, 33 Pages**

**Jury**
**Advisor: Assoc. Prof. Dr. Talat KÖRPINAR**
**Jury Member: Asst. Prof. Dr. Ali ÇAKMAK**
**Jury Member: Asst. Prof. Dr. Selçuk BAŞ**

This study consists of five sections. The first section is the introductory which explains the main idea of the study. The second section is the material and method which includes basic definitions and theorems. The third section is the magnetic curves which contains the definitions of magnetic curves with respect to the Frenet frame and their Fermi-Walker derivatives. The fourth section is the research and findings which contains the definitions of magnetic curves with respect to the Quasi frame and their Fermi-Walker derivatives. The fifth section is the discussion and conclusion which includes the main results of the study.

**Keywords:** Fermi-Walker Derivative, Frenet Frame, Magnetic Curves, Magnetic Field

# ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımda bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Talat KÖRPINAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca kıymetli zamanını benim hazırladığım bitirme projesine ayırıp değerlendiren Arş. Gör. Rıdvan Cem DEMİRKOL'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Özal BİNGÖL
MUŞ-2019

**İÇİNDEKİLER**

# SİMGELER VE KISALTMALAR

## Simgeler

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{\alpha}$ | : $E^n$ Uzayında birim hızlı eğri |
| $\boldsymbol{T}(\mathbf{s})$ | : Teğet vektör alanı |
| $\boldsymbol{B}(\mathbf{s})$ | : Binormal vektör alanı |
| $\boldsymbol{N}(\mathbf{s})$ | : Asli normal vektör alanı |
| $\nabla$ | : Levi-Civita konneksiyon |
| $\tilde{\nabla}_T \boldsymbol{X}$ | : Fermi-Walker türevi |

# 1. GİRİŞ

Manyetik eğriler fizik ve diferensiyel geometride bir çok uygulama alanına sahip olup bu alanlarda önemli rol oynar. Manyetik alan en genel şekilde, hareket eden elektrik yüküne etki eden Lorentz kuvveti ile tanımlanır. Lorentz kuvveti, fizikte özellikle elektromanyetizmada; elektromanyetik alanların oluşturduğu noktasal yük üzerindeki elektrik ve manyetik kuvvetlerin bileşkesidir. $\boldsymbol{B}$ manyetik alan ve $\boldsymbol{E}$ elekrtiksel alanda, $\boldsymbol{v}$ hızıyla hareket eden $\boldsymbol{q}$ yüklü parçacığa etki eden Lorentz kuvveti şöyledir:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Görüldüğü üzere Lorentz kuvveti, manyetik alan vektörüne ve parçacığın hız vektörüne diktir. **V** ve $\boldsymbol{B}$ arasındaki vektörel (çapraz) çarpımdan dolayı, parçacık manyetik alana paralel hareket ederse, etkiyen manyetik kuvvet sıfır olur. İki vektör birbirine dik olduğu zaman Lorentz kuvveti en büyük değerini alır. Manyetik kuvvet parçacığın hızına daima dik olduğundan manyetik kuvvetin hızı; parçacığın büyüklüğünü değiştirmez, sadece yönünü değiştirir. O yüzden yüklü bir parçacık manyetik alanda dairesel hareketler yapar (Synge, 1960).

Bir yüklü parçacık $\boldsymbol{B}$ manyetik alanına girdiği zaman bu parçacığın Serret-Frenet vektörleri bu alandan etkilenirler ve bu etkiyle Lorentz kuvveti denilen bir kuvvet açığa çıkar. Parçacık bu alan içerisinde bir yörünge izlemeye başlar. Bu yörüngeye manyetik eğri adı verilir. Manyetik alan birçok yerde karşımıza çıkar. Örneğin, dünya kendi manyetik alanını üretir ve bu manyetik alan pusulanın temel çalışma prensibini oluşturur. Bunun yanısıra dönen manyetik alan, elektrik motorlarında ve jeneratörlerde kullanılır. Buna benzer daha birçok kullanım alanı mevcuttur. Ayrıca manyetik eğrilerle ilgili pekçok çalışma vardır (Bozkurt, 2014; Özdemir, 2015).

Diğer taraftan Fermi-Walker türevi fizikte ve matematikte pekçok uygulama yapılmıştır (Balakrishnan, 2005; Barros, 1997; Dandolof, 1989; Fermi, 1922; Gluck, 1966; Pripoae, 1999; Pripoae, 2000; Weinberg, 1972; Williams ve ark., 1964; Yılmaz ve ark., 2010).

# 2. MATERYAL VE METOT

## 2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar açıklanmıştır. Diğer bölümlerde kullanılan kavramlarla ilgili bazı teorem ve önermeler verilmiştir.

**Tanım 2.1.** *M* diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M,R)$$

dönüşümü verilsin.

i) $g$ simetrik yani her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X,Y) = g(Y,X)$$

ii) $g$ bilineer yani her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve her $f, h \in C^{\infty}(M,R)$için

$$g(fX + hY, Z) = fg(X,Z) + hg(Y,Z)$$

iii) $g$ dönüşümü pozitif tanımlı yani her $X \in \chi(M)$ için

$$g(X,X) \geq 0$$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme *M* üzerinde Rieman metriği veya metrik tensör ve üzerinde Rieman metriği tanımlanmış manifolda Riemann manifoldu denir (Hacısalihoğlu 1980).

**Tanım 2.2.** *M* bir Riemann manifoldu ve $\nabla$, *M* üzerinde bir Riemann konneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve her $f, h \in C^{\infty}(M,R)$ için

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X,Y) \to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

ile tanımlı dönüşümü

i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ii) $\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

iii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

iv) $\nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$

özelliklerini sağlıyorsa $\nabla$ ya $M$ üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon veya kovaryant türev denir (Hacısalihoğlu 2000b).

**Tanım 2.3.** $A$ boş olmayan bir cümle ve $K$ bir cisim üzerindeki vektör uzayı $\boldsymbol{V}$ olsun. Aşağıda verilen önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \to \boldsymbol{V}$$

fonksiyonu varsa, $A$ ya $\boldsymbol{V}$ ile birleşen afin uzay denir.

(i) $\forall P, Q, R \in A$ için

$$f(P,Q) + f(Q,R) = F(P,R)$$

(ii) $\forall P, Q, R \in A$ ve $\alpha \in \boldsymbol{V}$ için

$$f(P,Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihlioğlu, 2000a).

**Tanım 2.4.** Bir reel afin uzay $A$ ve $A$ ile birleşen bir vektör uzayı da $\boldsymbol{V}$ olsun. $\boldsymbol{V}$ vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, $A$ afin uzayına Öklid uzayı denir. (Hacısalihlioğlu, 2000a).

**Tanım 2.5.** n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ ve $I$, $\mathbb{R}$ nin irtibatlı açık alt cümlesi olmak üzere,

$$\alpha: I \subset R \to \mathbb{E}^n$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine $\mathbb{E}^n$ de bir eğri ve $t \in I$ değişkenine de eğrinin parametresi denir (Hacısalihlioğlu, 2000a).

**Tanım 2.6.** $M$ eğrisi $(I, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Bu durumda $\Psi = \{\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^r\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$ olmak üzere $\Psi$ den elde edilen $\{V_1, \ldots, V_r\}$ ortonormal sistemine, $M$ eğrisinin Frenet r-ayaklısı alanı ve $m \in M$ için $\{\boldsymbol{V}_1(m), \ldots, \boldsymbol{V}_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı denir. Her bir $\boldsymbol{V}_i, 1 \leq i \leq r$ ye Frenet vektörü denir (Hacısalihoğlu, 2000b).

**Tanım 2.7.** $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisi, $t \in I$ için eğrinin teğet vektör alanı

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\alpha'(t),$$

eğrinin asli normal vektör alanı

$$\boldsymbol{N}(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|},$$

eğrinin binormal vektör alanı

$$\boldsymbol{B}(t) = \frac{\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\wedge\alpha''(t)\|}$$

olmak üzere bu vektörlerden oluşan $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$ sistemine Frenet 3-ayaklısı denir.$\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$ Frenet 3-ayaklısı ortonormal bir çatıdır (Hacısalihoğlu, 2000b).

**Tanım 2.8.** $M$ eğrisi $(I,\alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{\mathbf{V}_1(s),\ldots,\mathbf{V}_r(s)\}$ olsun. Buna

$$k_i : I \to \mathbb{R}, 1 \leq i \leq r$$

$$s \to k_i(s) = \langle \mathbf{V}_i'(s), \mathbf{V}_{i+1}(s)\rangle$$

şeklinde tanımlı $k_i$ fonksiyonuna $M$ eğrisinin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında $M$ nin i-yinci eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 2000b).

**Tanım 2.9.**

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$$

$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)$$

$s$ yay parametresi ile verilen bir eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$ olsun.

$$\boldsymbol{T}'(s) = k_1(s)\boldsymbol{N}(s)$$

$$\boldsymbol{N}'(s) = -k_1(s)\boldsymbol{T}(s) + k_2(s)\boldsymbol{B}(s)$$

$$\boldsymbol{B}'(s) = -k_2(s)\boldsymbol{N}(s)$$

denklemlerine Frenet formülleri denir. Burada $k_1 = \kappa$ , $k_2 = \tau$ alınabilir (Hacısalihoğlu, 2000b).

**Tanım 2.10.** $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisi için

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{k_1}(\boldsymbol{s}) = \| \boldsymbol{\alpha}''(\boldsymbol{s}) \|$$

değerine $\alpha(s)$ eğrisinin $s$-noktasındaki eğriliği denir (Carmo ve Monfedo, 1976).

**Tanım 2.11.** $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. $\alpha''(s) \neq 0$ olmak üzere

$$\boldsymbol{B}'(s) = \tau(s).\boldsymbol{N}(s)$$

eşitliği ile tanımlı $\tau(s)$ sayısına $\alpha(s)$ eğrisinin $s$-noktasındaki burulması denir (Hacısalihlioğlu, 2000b).

**Tanım 2.12.** $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir $\alpha(s)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı $\boldsymbol{T} = \alpha'(s)$ olsun. $\mathbf{T}$ vektör alanı belirli bir $u$ vektörü ile sabit açı yapıyorsa $\alpha(s)$ eğrisine genel helis denir (Hacısalihlioğlu, 2000b).

**Tanım 2.13.** $X$, $s$ yay parametreli $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}} X = \nabla_{\mathbf{T}} X - \langle \boldsymbol{T}, X \rangle A + \langle A, X \rangle \boldsymbol{T}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}} X$ türevine $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca $X$ vektör alanının Fermi Walker türevi denir (Benn ve Tucker , 1989). Burada $\boldsymbol{T} = \frac{d\alpha}{ds}$ , $A = \frac{d\mathbf{T}}{ds}$ dir.

**Tanım 2.14.** $X$, $s$ yay parametreli $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere eğri boyunca vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}} X = 0$$

ise $X$ vektör alanına $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir denir (Benn ve Tucker, 1989).

**Tanım 2.15.** s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{T}} \boldsymbol{T} = w^* \wedge \boldsymbol{T}$$

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{T}} \boldsymbol{N} = w^* \wedge \boldsymbol{N}$$

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{T}} \boldsymbol{B} = w^* \wedge \boldsymbol{B}$$

olacağından

$$w^* = \tau \boldsymbol{T}$$

vektörüne $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$ Frenet çatısına göre Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü denir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

**Tanım 2.16.** $\gamma: I \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet elemanları $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B},\ \kappa,\ \tau\}$ olsun. $\varpi = \tau\boldsymbol{T} + \kappa\boldsymbol{B}$ vektör alanına $\gamma$ eğrisinin Darboux vektör alanı denir.

$$\mathbf{W}(s) = \frac{\varpi(s)}{\|\varpi(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}}(\tau(s)\boldsymbol{T}(s) + \kappa(s)\boldsymbol{B}(s))$$

vektörüne is $\gamma$ eğrisinin Darboux göstergesi denir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

**Tanım 2.17.** $M$, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir hiperyüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \Rightarrow M$ regüler bir eğri olsun.Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ noktasında $M$ hiperyüzeyinin bir eğrilik vektörü var ise $\alpha$ eğrisine $M$ hiperyüzeyinin bir eğrilik vektörü ise $\alpha$ eğrisine $M$ hiperyüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi denir (Sabuncuoğlu, 2006).

**Tanım 2.18.** $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında yay parametresi ile verilen $\alpha'(s)$ eğrisinin $s$ −noktasındaki burulması $\tau(s) = 0$ ise $\alpha$ eğrisine düzlemsel eğri denir (Hacısalihoğlu, 2000b).

**Tanım 2.19.** $\mathbb{M}$, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir hiperyüzey ve $\alpha$:$I$⊂$\mathbb{R}$ ⟶$M$ regüler bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ noktasında $M$ hiperyüzeyinin bir eğrilik vektörü var ise $\alpha$ eğrisine $M$ hiperyüzeyinin bir eğrilik vektörü ise $\alpha$ eğrisine $M$ hiperyüzeyi üzerinde bir asimptotik eğri denir (Sabuncuoğlu, 2006).

**Tanım 2.20.** $\mathbb{E}^{n+1}$ de $M$ hiperyüzeyi üzerindeki prametre eğri $\alpha$:$I$⊂$\mathbb{R}$ ⟶$M$ olsun. $\alpha$:$I$⊂$\mathbb{R}$ ⟶$M$ eğrisinin her noktasındaki ivme vektörü $M$ hiperyüzeyine ortogonal ise $\alpha$ eğrisine $M$ hiperyüzeyinde geodezik eğri denir (Hacısalihoğlu, 2000b).

**Tanım 2.21.** $U = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ ve $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sıfırdan farklı vektörler olsunlar. $\overleftarrow{U} \cdot \overleftarrow{V} = \langle \overleftarrow{U}, \overleftarrow{V} \rangle = u_1 \mathrm{v}_1 + \ldots . u_n v_n$ ifadesine $\overleftarrow{U}$ ve $\overleftarrow{V}$ iççarpımı denir. Eğer $\overleftarrow{U} \cdot \overleftarrow{V} = 0$ ise o zaman bu vektörler diktir (ortogonaldir) denir (Carmo ve Monfedo, 1976).

**Tanım 2.22.** $\mathbb{E}^n$ de bir $\mathbf{P}$ noktası ve $\mathbb{R}^n$ de bir $\overleftarrow{V}$ vektöründen oluşan $(\mathbf{P}, \overleftarrow{V})$ ikilisine bir tanjant vektör denir. Burada $\mathbf{P}$ tanjant vektörün başlangıç noktası ve $V$ de vektör kısmıdır. Bir tanjant vektör kısaca $\overleftarrow{U}_p = (\mathbf{P}, \overleftarrow{V})$ ile gösterilir, (Carmo and Monfedo, 1976).

**Tanım 2.23.** $U = (u_1, u_2, \dots u_n) \in \mathbb{R}^n$ vektörü verilmiş olsun. $\overleftarrow{U} \cdot \overleftarrow{U}$ vektörünün kareköküne $\overleftarrow{U}$ vektörünün normu denir. $\| \overleftarrow{U} \| = \sqrt{\overleftarrow{U} \cdot \overleftarrow{U}} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$ şeklinde gösterilir (Carmo ve Monfedo, 1976).

**Tanım 2.24.** Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$ olmak üzere

$$\tau: I \to \mathbb{R}^3, \tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle$$

fonksiyonuna, $\alpha$ eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir (Carmo ve Monfedo, 1976).

**Tanım 2.25.** $\mathbb{E}^3$ uzayında $\varphi$ eğrisinin Frenet-Serret çatısı $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$ tarafından tanımlanır. Keyfi bir $\varphi$ eğrisi için $\mathbb{E}^3$ uzayında 1. ve 2. eğrilik sırasıyla $\kappa$ ve $\tau$ dur ve Frenet Serret formülü aşagıdaki gibi gösterilir (Bishop, 1975).

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}' \\ \boldsymbol{N}' \\ \boldsymbol{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}.$$

**Tanım 2.26.** $\alpha$ birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\alpha: I \to \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanı $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$olduğuna göre;

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha'(s),$$

$$\boldsymbol{N}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|},$$

$$\boldsymbol{B}(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

dir (Hacısalihoğlu, 2000a).

Burada

$$\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle = \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N} \rangle = \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \rangle = 1,$$

$$\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N} \rangle = \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{B} \rangle = \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N} \rangle = \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B} \rangle = 0.$$

Burada eğrilik fonksiyonları $\kappa = \kappa(s) = \| \boldsymbol{T}'(s) \|$ ve $\tau(s) = -\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}' \rangle$ olarak tanımlanır.

**Tanım 2.27.** $\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}(s),\ \boldsymbol{B}(s)$ vektörlerine $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir.

$$\{\boldsymbol{T}(s),\ \boldsymbol{N}(s),\ \boldsymbol{B}(s)\}$$

kümesine, $\alpha$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. $\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}$ vektör alanlarına $\alpha$ eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir (Carmo ve Monfedo, 1976).

**Tanım 2.28.** $M,\ \mathbb{E}^n$ nin $(n-1)-$boyutlu altmanifoldu olsun ve $\alpha$ eğrisi $s\epsilon I$ yay parametresi ile verilsin. $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet $(n-1)-$ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \ldots V_{n-1}(s)\}$ olsun. Bu Frenet vektör alanları paralel öteleme ile küre merkezine taşındığında küre üzerinde oluşan eğrilere küresel gösterge eğrileri denir (Hacısalihlioğlu, 2000b).

**Tanım 2.29.** $\gamma$ nın tanjant doğruları, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa $\gamma$ ya silindirik helis (genel helis) denir. $\gamma(s)$ nin bir silindir helis olması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)$ nin sabit olmasıdır. Eğer $\tau$ ve $\kappa$ sıfırdan farklı sabitler ise helise dairesel helis denir (Yılmaz ve Turgut, 2010).

**Tanım 2.30.** $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ birim hızlı bir eğri olsun. $\alpha$ eğrisinin normali olan bir sabit $L$ doğrusu ile $\gamma$ sabit bir açı yapıyorsa $\alpha$ eğrisine bir slant helis adı verilir (Yılmaz ve Turgut, 2010).

**Tanım 2.31.** Yarıçapı $r > 0$ ve merkezi orjin olan küre $\mathbb{E}^3$ uzayında aşağıdaki gibi tanımlanır (Bishop, 1975).

$$S^2 = \{p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{E}^3 : \langle p, p \rangle = r^2\}.$$

**Tanım 2.32.** $U = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ ve $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sıfırdan farklı vektörler olsunlar. $\overleftarrow{U} \cdot \overleftarrow{V} = \langle \overleftarrow{U}, \overleftarrow{V} \rangle = u_1 v_1 + \ldots . u_n v_n$ ifadesine $\overleftarrow{U}$ ve $\overleftarrow{V}$ iç çarpımı denir. Eğer $\overleftarrow{U} \cdot \overleftarrow{V} = 0$ ise o zaman bu vektörler diktir (ortogonaldir) denir (Carmo ve Monfedo, 1976).

**Tanım 2.33.** $\mathbb{E}^n$ de bir **P** noktası ve $\mathbb{R}^n$ de bir $\overleftarrow{V}$ vektöründen oluşan $(\mathbf{P}, \overleftarrow{V})$ ikilisine bir tanjant vektör denir. Burada **P** tanjant vektörün başlangıç noktası ve $V$ de vektör kısmıdır. Bir tanjant vektör kısaca $\overleftarrow{U}_p = (\mathbf{P}, \overleftarrow{V})$ ile gösterilir (Carmo ve Monfedo, 1976).

**Tanım 2.34.** Frenet Eğrisi: $C^n$ sınıfının birim hızlı eğrisi $\beta: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir Frenet eğrisi ise $\beta'(s), \beta''(s), \ldots, \beta^{(n-1)}(s)$ vektörleri eğri boyunca her noktada lineer bağımsızdır. $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$ Frenet çatısı ile $\gamma: I \subset R \rightarrow \mathbb{E}^3$ Frenet eğrisi için $V(s) = u(s)\mathbf{T}(s) + v(s)\mathbf{N}(s) + w(s)\mathbf{B}(s)$ ile verilen V vektör alanını düşünelim. Burada $u, v, w$

$$u^2(s)+v^2(s)+w^2(s)=1$$

$I$ eğrisine cevap veren fonksiyondur. O zaman $V$ nin $\overline{\gamma}(s)$ integral eğrisi $\mathbb{E}^3$ de $I$ üzerinde bir birim hızlı eğridir (Hacısalihlioğlu, 2000b).

### 2.2. Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde bir vektör alanının Fermi-Walker türevinin tanımı Frenet çatısı yardımıyla verilmiştir. Ayrıca bu vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerekli şartlar incelenmiştir.

**Tanım 2.35.** $\alpha$, $s$ parametresine bağlı bir eğri ve $\boldsymbol{X}$ de bu eğri boyunca tanımlanan bir vektör alanı olsun. $\boldsymbol{X}$ vektör alanının $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$ Frenet çatısı yardımıyla tanımlanan Fermi-Walker türevi $s$ yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi ve eğri boyunca herhangi bir vektör alanı $X$ olmak üzere, Frenet çatısındaki eğri boyunca $\boldsymbol{X}$ vektör alanının Fermi Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\nabla_{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}-\kappa(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{X})$$

şeklinde ifade edilir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

**Teorem 2.36.** $\boldsymbol{X}$ vektör alanının Frenet çatısındaki eğri boyunca Fermi-Walker türevi ile bilinen türevinin çakışması için gerek ve yeter şart

$$X=\lambda\boldsymbol{B}$$

olmasıdır. Burada $\lambda$ sabittir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

**Teorem 2.37.** $\{\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B}\}$ Frenet çatısı ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sabitler olmak üzere $s$ yay parametreli bütün $\alpha(s)$ uzay eğrileri boyunca $X=\lambda_1\boldsymbol{T}+\lambda_2\boldsymbol{N}+\lambda_3\boldsymbol{B}$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir ancak ve ancak

$$\lambda_1(s)=sabit,$$

$$\lambda_2(s)=c_1\cos\left(\int_1^s\tau(s)ds\right)+c_2\sin\left(\int_1^s\tau(s)ds\right),$$

$$\lambda_3(s)=c_2\cos\left(\int_1^s\tau(s)ds\right)-c_1\sin\left(\int_1^s\tau(s)ds\right)$$

dır (Karakuş ve Yaylı, 2012).

**Teorem 2.38.** $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sabitler olmak üzere $s$ yay parametreli düzlemsel $\alpha(s)$ uzay eğrileri boyunca $X = \lambda_1 \boldsymbol{T} + \lambda_2 \boldsymbol{N} + \lambda_3 \boldsymbol{B}$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

**Sonuç 2.39.** Bütün Frenet vektörleri $s$ yay parametreli düzlemsel eğri boyunca Fermi-Walker anlamında paraleldir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

**Sonuç 2.40.** Düzlemsel eğriler boyunca $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$ Frenet çatısı non-rotating çatıdır (Karakuş ve Yaylı, 2012).

# 3. MANYETİK EĞRİLER

## 3.1. Öklid 3-Uzayında Frenet Çatısına Göre Manyetik Eğriler

Bu bölümde, Öklid-3 Uzayında Frenet çatısına göre ***T, N, B*** manyetik eğrileri incelendi.

### 3.1.1. Öklid 3-Uzayında Frenet Çatısına Göre T-Manyetik Eğrilerin Lorentz Kuvvetlerinin Fermi-Walker Türevi

3 boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı ile verilen eğri $\alpha: I \subset R \longrightarrow R^3$ ve ***V*** de manyetik bir alan olsun. Eğer Frenet çatısına göre ***T*** teğet vektör alanı Lorentz kuvveti denklemi olan;

$$\nabla_{\alpha'} \boldsymbol{T} = \phi(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{T}$$

eşitliğini sağlarsa $\boldsymbol{\alpha}$ eğrisine Frenet çatısına göre ***T***-manyetik eğri denir.

### 3.1.2. Öklid 3-Uzayında Frenet Çatısına Göre *N*-Manyetik Eğrilerin Lorentz Kuvvetlerinin Fermi-Walker Türevi

3 boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı ile verilen eğri $\alpha: I \subset R \longrightarrow R^3$ ve ***V*** de manyetik alan olsun. Eğer Frenet çatısına göre ***N*** normal vektör alanı Lorentz kuvveti denklemi olan;

$$\nabla_{\alpha'} \boldsymbol{N} = \phi(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{N}$$

eşitliğini sağlarsa $\boldsymbol{\alpha}$ eğrisine Frenet çatısına göre ***N***-manyetik eğri denir.

**Teorem 3.1.** $\alpha$ , 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı ***N***-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre Lorentz kuvveti aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} \phi(\boldsymbol{T}) \\ \phi(\boldsymbol{N}) \\ \phi(\boldsymbol{B}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & \Omega_1 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ \Omega_1 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $\Omega_1$ belirli bir fonksiyondur (Özdemir ve ark., 2015).

**Teorem 3.2.** Diyelimki $\alpha$, $\boldsymbol{N}$-manyetik bir eğri olsun.O zaman Frenet vektörlerinin Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevleri aşağıdaki gibidir.

i) $\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = (\kappa' - \mu\tau)\boldsymbol{N} + (\kappa\tau + \mu')\boldsymbol{B}$,

ii) $\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}) = -\kappa'\boldsymbol{T} - \tau^2\boldsymbol{N} + \tau'\boldsymbol{B}$,

iii) $\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{B}) = -\mu'\boldsymbol{T} + \tau\kappa\boldsymbol{N} - \tau^2\boldsymbol{B}$.

**İspat:** $\alpha$, $\boldsymbol{N}$-manyetik bir eğri olsun. Fermi-Walker formülü yardımıyla hesaplayalım.

i) İlk olarak $\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) - \kappa(\boldsymbol{B}\Lambda\phi(\boldsymbol{T}))$ yazılır. Burada

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T(\kappa\boldsymbol{N} + \mu\boldsymbol{B}) = \kappa'\boldsymbol{N} + \kappa\nabla_T\boldsymbol{N} + \mu'\boldsymbol{B} + \mu\nabla_T\boldsymbol{B}$$

$$= \kappa'\boldsymbol{N} + \kappa(-\kappa\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{B}) + \mu'\boldsymbol{B} - \mu\tau\boldsymbol{N}$$

$$= \kappa'\boldsymbol{N} - \kappa^2\boldsymbol{T} + \kappa\tau\boldsymbol{B} + \mu'\boldsymbol{B} - \mu\tau\boldsymbol{N}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) = -\kappa^2\boldsymbol{T} + (\kappa' - \mu\tau)\boldsymbol{N} + (\kappa\tau + \mu')\boldsymbol{B} \tag{3.1}$$

olur. Ayrıca

$$-\kappa\big(\boldsymbol{B}\Lambda\phi(\boldsymbol{T})\big) = -\kappa(\boldsymbol{B}\Lambda(\kappa\boldsymbol{N} + \mu\boldsymbol{B})) = -(\kappa^2(\boldsymbol{B}\Lambda\boldsymbol{N}) + \kappa\mu(\boldsymbol{B}\Lambda\boldsymbol{B})) = \kappa^2\boldsymbol{T} \tag{3.2}$$

elde edililir. (3.1) ve (3.2) denklemleri kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = -\kappa^2\boldsymbol{T} + (\kappa' - \mu\tau)\boldsymbol{N} + (\kappa\tau + \mu')\boldsymbol{B} + \kappa^2\boldsymbol{T}$$

ve

$$\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = (\kappa' - \mu\tau)\boldsymbol{N} + (\kappa\tau + \mu')\boldsymbol{B}$$

bulunur. Paralel olma durumunda ise aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = 0,$$

$$(\kappa' - \mu\tau)\boldsymbol{N} + (\kappa\tau + \mu')\boldsymbol{B} = 0,$$

$$\kappa' = \mu\tau,$$

$$\mu' = -\kappa\tau.$$

ii) Benzer şekilde $\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{N}) - \kappa(\boldsymbol{B}\Lambda\phi(\boldsymbol{N}))$ yazılır. Burada ilk olarak $\nabla_T\phi(\boldsymbol{N})$ yi hesaplayalım.

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}) = \nabla_T(-\kappa\boldsymbol{T} - \tau\boldsymbol{B}) = -\kappa'\boldsymbol{T} - \kappa\nabla_T\boldsymbol{T} + \tau'\boldsymbol{B} + \tau\nabla_T\boldsymbol{B}$$

$$= -\kappa'\boldsymbol{T} - \kappa^2\boldsymbol{N} + \tau'\boldsymbol{B} - \tau^2\boldsymbol{N}$$

$$= -\kappa' \boldsymbol{T} + (-\kappa^2 - \tau^2)\boldsymbol{N} + \tau' \boldsymbol{B}. \tag{3.3}$$

Daha sonra $-\kappa(\boldsymbol{B}\Lambda\phi(\boldsymbol{N}))$ yi hesaplayalım. Buradan

$$-\kappa\big(\boldsymbol{B}\Lambda\phi(\boldsymbol{N})\big) = -\kappa(\boldsymbol{B}\Lambda(-\kappa\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{B}))$$

$$= -(\kappa^2(\boldsymbol{B}\Lambda\boldsymbol{T}) - \kappa\tau(\boldsymbol{B}\Lambda\boldsymbol{B})) = \kappa^2\boldsymbol{N} \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.3) ve (3.4) denklemleri yardımıyla

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}) = -\kappa'\boldsymbol{T} + (-\kappa^2 - \tau^2)\boldsymbol{N} + \tau'\boldsymbol{B} + \kappa^2\boldsymbol{N}$$

$$= -\kappa'\boldsymbol{T} - \tau^2\boldsymbol{N} + \tau'\boldsymbol{B}$$

bulunur. Paralel olma durumunda $\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}) = 0$ ifadesi kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$-\kappa'\boldsymbol{T} - \tau^2\boldsymbol{N} + \tau'\boldsymbol{B} = 0,$$

$\kappa' = 0$ ve $\kappa = sabit$,

$\tau^2 = 0$ ve $\tau = 0$,

$\tau' = 0$ ve $\tau = sabit$.

iii) Yukarıdaki öncüller gibi $\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{B}) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{B}) - \kappa(\boldsymbol{B}\Lambda\phi(\boldsymbol{B}))$ yazılır. Burada sağ tarafın $\nabla_T\phi(\boldsymbol{B})$ sini hesaplayalım.

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{B}) = \nabla_T(-\mu\boldsymbol{T} - \tau\boldsymbol{N}) = -\mu'\boldsymbol{T} - \mu\nabla_T\boldsymbol{T} - \tau'\boldsymbol{B} - \tau\nabla_T\boldsymbol{N}$$

$$= -\mu'\boldsymbol{T} - \mu(\kappa\boldsymbol{N}) - \tau'\boldsymbol{N} - \tau(-\kappa\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{B})$$

$$= -\mu'\boldsymbol{T} - \mu\kappa\boldsymbol{N} - \tau'\boldsymbol{N} + \tau\kappa\boldsymbol{T} - \tau^2\boldsymbol{B}$$

$$= (-\mu' + \tau\kappa)\boldsymbol{T} + (-\mu\kappa + \tau\kappa)\boldsymbol{N} - \tau^2\boldsymbol{B} \tag{3.5}$$

bulunur. Şimdi $-\kappa(\boldsymbol{B}\Lambda\phi(\boldsymbol{B}))$ yi hesaplayalım.

$$-\kappa\big(\boldsymbol{B}\Lambda\phi(\boldsymbol{B})\big) = -\kappa(\boldsymbol{B}\Lambda(-\mu\boldsymbol{T} - \tau\boldsymbol{N}))$$

$$= \big(\kappa\mu(\boldsymbol{B}\Lambda\boldsymbol{T}) + \kappa\tau(\boldsymbol{B}\Lambda\boldsymbol{N})\big) = +\kappa\mu\boldsymbol{N} - \kappa\tau\boldsymbol{T}. \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) den

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{B}) = (-\mu' + \tau\kappa)\boldsymbol{T} + (-\mu\kappa + \tau\kappa)\boldsymbol{N} - \tau^2\boldsymbol{B} + \kappa\mu\boldsymbol{N} - \kappa\tau\boldsymbol{T}$$

$$= -\mu'\boldsymbol{T} + \tau\kappa\boldsymbol{N} - \tau^2\boldsymbol{B}$$

bulunur. Paralellik durumu incelenirse aşağıdaki eşitlikler bulunur

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{B}) = 0$$

$$-\mu' \boldsymbol{T} + \tau\kappa \boldsymbol{N} - \tau^2 \boldsymbol{B} = 0$$

$$\mu' = 0,$$

$$\tau\kappa = 0,$$

$$\tau^2 = 0.$$

Buradan

$$\mu = sabit,$$

$$\tau = 0$$

elde elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 3.3.** $\alpha$, $\boldsymbol{N}$-manyetik bir eğri ise manyetik alan vektörü $\boldsymbol{V}$ nin Fermi Walker türevi aşağıdaki gibidir.

**İspat:** İlk olarak $\widetilde{\nabla}_T \boldsymbol{V} = \nabla_T \boldsymbol{V} - \kappa(\boldsymbol{B} \Lambda \boldsymbol{V})$ olsun. Sırasıyla hesaplayacak olursak,

$$\begin{aligned}
\nabla_T \boldsymbol{V} &= \nabla_T(\tau \boldsymbol{T} - \mu \boldsymbol{N} + \alpha \boldsymbol{B}) \\
&= \tau' \boldsymbol{T} + \tau \nabla_T \boldsymbol{T} - \mu' \boldsymbol{N} - \mu \nabla_T \boldsymbol{N} + \alpha' \boldsymbol{B} + \alpha \nabla_T \boldsymbol{B} \\
&= \tau' \boldsymbol{T} + \tau(\kappa \boldsymbol{N}) - \mu' \boldsymbol{N} - \mu(-\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}) + \alpha' \boldsymbol{B} + \alpha(-\tau \boldsymbol{N}) \\
&= (\tau' + \mu\kappa)\boldsymbol{T} + (\tau\kappa - \mu' - \alpha\tau)\boldsymbol{N} + (-\mu\tau + \alpha')\boldsymbol{B} \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

buunur. Daha sonra

$$\begin{aligned}
-\kappa(\boldsymbol{B} \Lambda \boldsymbol{V}) &= -\kappa(\boldsymbol{B} \Lambda (\tau \boldsymbol{T} - \mu \boldsymbol{N} + \alpha \boldsymbol{B})) \\
&= -\kappa\tau \boldsymbol{N} - \kappa\mu \boldsymbol{T} \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.7) ve (3.8) den

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_T \boldsymbol{V} &= (\tau' + \mu\kappa)\boldsymbol{T} + (\tau\kappa - \mu' - \alpha\tau)\boldsymbol{N} + (-\mu\tau + \alpha')\boldsymbol{B} - \kappa\tau \boldsymbol{N} - \kappa\mu \boldsymbol{T} \\
&= \tau' \boldsymbol{T} + (-\mu' - \alpha\tau)\boldsymbol{N} + (-\mu\tau + \alpha')\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi paralellik durumu için

$$\widetilde{\nabla}_T \boldsymbol{V} = 0$$

$$\tau' \boldsymbol{T} + (-\mu' - \alpha\tau)\boldsymbol{N} + (-\mu\tau + \alpha')\boldsymbol{B} = 0$$

göz önüne alınırsa

$$\tau' = 0 \quad \text{ve} \quad \tau = sabit,$$

$$\mu' = -\alpha\tau,$$

$$\alpha' = \mu\tau$$

bulunur.

### 3.1.3. Öklid 3-Uzayında Frenet Çatısına göre *B*-Manyetik eğrilerin Lorentz Kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi

3 boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı ile verilen eğri $\alpha: I \subset R \longrightarrow R^3$ ve $\boldsymbol{V}$ de manyetik bir alan olsun. Eğer Frenet çatısına göre $\boldsymbol{B}$ binormal vektör alanı Lorentz kuvveti denklemi olan;

$$\nabla_{\alpha'}\boldsymbol{B} = \phi(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}$$

eşitliğini sağlarsa $\alpha$ eğrisine Frenet çatısına göre $\boldsymbol{B}$-manyetik eğri denir.

**Teorem 3.4.** $\alpha$, 3-boyutlu Rieman uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı ***B*-**manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre Lorentz kuvveti aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} \phi(\boldsymbol{T}) \\ \phi(\boldsymbol{N}) \\ \phi(\boldsymbol{B}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_2 & 0 \\ -\Omega_2 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $\Omega_2$ belirli bir fonksiyondur (Özdemir ve ark., 2015).

**Teorem 3.5.** Diyelimki $\alpha$, $\boldsymbol{B}$-manyetik bir eğri olsun.O zaman Frenet vektörlerinin Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevleri aşağıdaki gibidir.

**i)** $\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{T}) = \rho'\boldsymbol{N} + \rho\tau\boldsymbol{B},$

**ii)** $\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{N}) = -\rho'\boldsymbol{T} - \tau^2\boldsymbol{N} + \tau'\boldsymbol{B},$

**iii)** $\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{B}) = -\tau'\boldsymbol{N} - \tau^2\boldsymbol{B}.$

**İspat:**

**i)** İlk olarak $\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{T}) - \kappa(\boldsymbol{B}\Lambda\phi(\boldsymbol{T}))$ olsun. Sırasıyla gerekli türevler alınırsa,

$$\nabla_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_{\boldsymbol{T}}(\rho\boldsymbol{N}) = \rho'\boldsymbol{N} + \rho\nabla_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{N}$$

$$= \rho' \boldsymbol{N} + \rho(-\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B})$$

$$= \rho' \boldsymbol{N} - \rho\kappa \boldsymbol{T} + \rho\tau \boldsymbol{B} \quad (3.9)$$

ve aşağıdaki eşitlikler incelenirse

$$-\kappa\big(\boldsymbol{B} \Lambda \phi(\boldsymbol{T})\big) = -\kappa(\boldsymbol{B}\Lambda(\rho \boldsymbol{N}))$$

$$= -(-\kappa\rho \boldsymbol{T}) = +\kappa\rho \boldsymbol{T} \quad (3.10)$$

elde edilir. (3.9) ve (3.10) dan

$$\widetilde{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{T}) = \rho' \boldsymbol{N} - \rho\kappa \boldsymbol{T} + \rho\tau \boldsymbol{B} + \kappa\rho \boldsymbol{T}$$

$$= \rho' \boldsymbol{N} + \rho\tau \boldsymbol{B}$$

bulunur. Paralellik durumu incelenirse aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\widetilde{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{T}) = 0$$

$$\rho' \boldsymbol{N} + \rho\tau \boldsymbol{B} = 0$$

$$\rho' = 0 \quad \text{ve} \quad \rho = sabit,$$

$$\rho\tau = 0.$$

**ii)** İlk önce $\widetilde{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{N}) = \nabla_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{N}) - \kappa(\boldsymbol{B}\Lambda\phi(\boldsymbol{N}))$ olsun. Burada $\nabla_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{N}) = \nabla_{\boldsymbol{T}}(-\rho \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}) = -\rho' \boldsymbol{T} - \rho\nabla_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{T} + \tau' \boldsymbol{B} + \tau\nabla_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{B}$

$$= -\rho' \boldsymbol{T} - \rho\kappa \boldsymbol{N} + \tau' \boldsymbol{B} - \tau^2 \boldsymbol{N}$$

$$= -\rho' \boldsymbol{T} + (-\rho\kappa - \tau^2)\boldsymbol{N} + \tau' \boldsymbol{B} \quad (3.11)$$

olup

$$-\kappa\big(\boldsymbol{B}\Lambda\phi(\boldsymbol{N})\big) = -\kappa(\boldsymbol{B}\Lambda(-\rho \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}))$$

$$= \kappa\rho \boldsymbol{N} \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.11) ve (3.12) yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik

$$\widetilde{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{N}) = -\rho' \boldsymbol{T} + (-\rho\kappa - \tau^2)\boldsymbol{N} + \tau' \boldsymbol{B} + \kappa\rho \boldsymbol{N}$$

$$= -\rho' \boldsymbol{T} - \tau^2 \boldsymbol{N} + \tau' \boldsymbol{B}$$

bulunur. Paralellik durumu incelenirse aşağıdaki eşitlikler bulunur

$$\widetilde{\nabla}_{\boldsymbol{T}}\phi(\boldsymbol{N}) = 0$$

$$-\kappa' \boldsymbol{T} - \tau^2 \boldsymbol{N} + \tau' \boldsymbol{B} = 0$$

$$\kappa' = 0 \quad \text{ve} \quad \kappa = sabit,$$

$$\tau^2 = 0 \quad \text{ve} \quad \tau = 0,$$

$$\tau' = 0 \quad \text{ve} \quad \tau = sabit.$$

**iii)** Benzer şekilde $\tilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{B}) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{B}) - \kappa(\boldsymbol{B} \Lambda \phi(\boldsymbol{B}))$ olsun. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_T \phi(\boldsymbol{B}) &= \nabla_T(-\tau \boldsymbol{N}) = -\tau' \boldsymbol{B} - \tau \nabla_T \boldsymbol{N} \\ &= -\tau' \boldsymbol{N} - \tau(-\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}) \\ &= -\tau' \boldsymbol{N} + \tau\kappa \boldsymbol{T} - \tau^2 \boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{3.13}$$

ve

$$-\kappa\big(\boldsymbol{B} \Lambda \phi(\boldsymbol{B})\big) = -\kappa\big(\boldsymbol{B} \Lambda(-\tau \boldsymbol{N})\big) = -\kappa\tau \boldsymbol{T} \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.13) ve (3.14) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{B}) &= -\tau' \boldsymbol{N} + \tau\kappa \boldsymbol{T} - \tau^2 \boldsymbol{B} - \kappa\tau \boldsymbol{T} \\ &= -\tau' \boldsymbol{N} - \tau^2 \boldsymbol{B} \end{aligned}$$

bulunur. Paralellik durumu incelenirse aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\tilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{B}) = 0$$

$$-\tau' \boldsymbol{N} - \tau^2 \boldsymbol{B} = 0$$

$$\tau' = 0 \text{ ve } \tau = sabit,$$

$$\tau^2 = 0 \text{ ve } \tau = 0.$$

**Teorem 3.6.** $\alpha$, $\boldsymbol{B}$-manyetik bir eğri ise manyetik alan vektörü $\boldsymbol{V}$ nin Fermi-Walker türevi aşağıdaki gibidir.

**İspat:** İlk olarak $\tilde{\nabla}_T \boldsymbol{V} = \nabla_T \boldsymbol{V} - \kappa(\boldsymbol{B} \Lambda \boldsymbol{V})$ olsun. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_T \boldsymbol{V} &= \nabla_T(\tau \boldsymbol{T} + \rho \boldsymbol{B}) \\ &= \tau' \boldsymbol{T} + \tau \nabla_T \boldsymbol{T} + \rho' \boldsymbol{B} + \rho \nabla_T \boldsymbol{B} \\ &= \tau' \boldsymbol{T} + \tau\kappa \boldsymbol{N} + \rho' \boldsymbol{B} - \rho\tau \boldsymbol{N}) \end{aligned}$$

$$\nabla_T \boldsymbol{V} = \tau' \boldsymbol{T} + (\tau\kappa - \rho\tau) \boldsymbol{N} + \rho' \boldsymbol{B} \tag{3.15}$$

bulunur ve diğer yandan

$$-\kappa(\boldsymbol{B} \Lambda \boldsymbol{V}) = -\kappa(\boldsymbol{B} \Lambda(\tau \boldsymbol{T} + \rho \boldsymbol{B}))$$
$$= -\kappa\tau\boldsymbol{T} \tag{3.16}$$

olur. (3.15) ve (3.16) eşitliklerinden

$$\widetilde{\nabla}_T \boldsymbol{V} = \tau' \boldsymbol{T} + (\tau\kappa - \rho\tau)\boldsymbol{N} + \rho' \boldsymbol{B} - \kappa\tau\boldsymbol{T}$$
$$= (\tau' - \kappa\tau)\boldsymbol{T} + (\tau\kappa - \rho\tau)\boldsymbol{N} + \rho' \boldsymbol{B}$$

elde edilir. Paralellik durumu incelenirse aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\widetilde{\nabla}_T \boldsymbol{V} = 0$$

$$\tau' \boldsymbol{T} + (-\mu' - \alpha\tau)\boldsymbol{N} + (-\mu\tau + \alpha')\boldsymbol{B} = 0$$

$$\tau' = \kappa\tau,$$

$$\rho = \kappa,$$

$\rho' = 0$ ve $\rho = sabit$.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, Öklid-3 Uzayında Quasi çatısına göre $\boldsymbol{t_q}$, $\boldsymbol{n_q}$, $\boldsymbol{b_q}$manyetik eğrileri incelendi.

$\boldsymbol{q}$ çatı diğer çatılarla (Frenet, Bishop) karşılaştırıldığında pek çok avantajı mevcuttur. Örneğin bir doğru boyunca bile (κ=0 için) $\boldsymbol{q}$ çatı tanımlanabilir. Dahası $\boldsymbol{q}$ çatı kolayca hesaplanabilir.

Diyelimki $\alpha(s)$ yay uzunluğu parametresi *s* olan bir eğri olsun, eğri boyunca $\{\boldsymbol{t_q}, \boldsymbol{n_q}, \boldsymbol{b_q}, \boldsymbol{k}\}$ $\boldsymbol{q}$ çatı aşağıdaki gibidir

$$\boldsymbol{t_q} = \alpha',\ \boldsymbol{n_q} = \frac{t_q \Lambda k}{\|t_q \Lambda k\|},\ \boldsymbol{b_q} = \boldsymbol{t_q} \Lambda \boldsymbol{n_q}$$

Burada $\boldsymbol{t_q}$ birim teğet vektör, $\boldsymbol{n_q}$ quasi normal vektör, $\boldsymbol{b_q}$ quasi binormal vektör ve $\boldsymbol{k}$ projeksiyon vektörüdür. Basitlik için bu çalışmada projeksiyon vektörünü $\boldsymbol{k}$=(0,0,1) seçtik. Ancak $\boldsymbol{q}$ çatıda $\boldsymbol{t_q}$ ve $\boldsymbol{k}$ nın paralel olduğu tüm durumlarda tekildir. Böylece $\boldsymbol{t_q}$ ve $\boldsymbol{k}$ nın paralel olduğu durumlarda, $\boldsymbol{k}$ projeksiyon vektörü $\boldsymbol{k}$=(0,1,0) veya $\boldsymbol{k}$=(0,0,1) olarak seçilebilir. $\boldsymbol{q}$ çatısının eşitliklerinin varyasyonları

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_q' \\ \boldsymbol{n}_q' \\ \boldsymbol{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_3 \\ -\kappa_2 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_q \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix}$$

olarak verilir (Dede ve ark., 2015). Burada q eğrilerinin aşağıdaki gibi ifade edildiği yerlerde

$$k_1 = \kappa \cos\theta = \langle \boldsymbol{t}_q', \boldsymbol{n}_q \rangle$$

$$k_2 = -\kappa \sin\theta = \langle \boldsymbol{t}_q', \boldsymbol{b}_q \rangle$$

$$k_3 = d\theta + \tau = -\langle \boldsymbol{n}_q, \boldsymbol{b}_q' \rangle$$

ve θ asli normal vektör $\boldsymbol{n}$ ile quasi normal vektör $\boldsymbol{n_q}$ arasındaki Öklid açısıdır.

**Teorem 4.1.** $\alpha$ , 3-boyutlu Öklid uzayında Quasi çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{t_q}$ -manyetik eğri olsun. O halde verilen Quasi çatısına göre Lorentz kuvveti

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_q' \\ \boldsymbol{n}_q' \\ \boldsymbol{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_3 \\ -\kappa_2 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_q \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

olmak üzere aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix}\phi(\boldsymbol{t}_q)\\ \phi(\boldsymbol{n}_q)\\ \phi(\boldsymbol{b}_q)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \kappa_1 & \kappa_2\\ -\kappa_1 & 0 & \Omega\\ -\kappa_2 & -\Omega & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_q\\ \boldsymbol{n}_q\\ \boldsymbol{b}_q\end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $\Omega$ belirli bir fonksiyondur.

**İspat:** $\alpha$ eğrisi, $\{\boldsymbol{t}_q, \boldsymbol{n}_q, \boldsymbol{b}_q, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$ Quasi bileşenleri ile verilen 3-boyutlu Öklid uzayında Quasi çatısına göre $\boldsymbol{t}_q$-manyetik bir eğri olsun. Quasi çatısına göre $\boldsymbol{t}_q$-manyetik eğrinin

$$\phi(\boldsymbol{t}_q)=\kappa_1\boldsymbol{n}_q+\kappa_2\boldsymbol{b}_q \tag{4.2}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer yandan, $\phi(\boldsymbol{t}_q)\in S_P\{\boldsymbol{t}_q, \boldsymbol{n}_q, \boldsymbol{b}_q\}$ olduğundan dolayı;

$$\phi(\boldsymbol{n}_q)=a_1\boldsymbol{t}_q+a_2\boldsymbol{n}_q+a_3\boldsymbol{b}_q \tag{4.3}$$

olarak yazılabilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
a_1&=g(\phi(\boldsymbol{n}_q),\boldsymbol{t}_q)=-g\left(\boldsymbol{n}_q,\phi(\boldsymbol{t}_q)\right)=-g\left(\boldsymbol{n}_q,\kappa_1\boldsymbol{n}_q+\kappa_2\boldsymbol{b}_q\right)=-\kappa_1,\\
a_2&=g(\phi(\boldsymbol{n}_q),\boldsymbol{n}_q)=0,\\
a_3&=g(\phi(\boldsymbol{n}_q),\boldsymbol{b}_q)=-g\left(\boldsymbol{n}_q,\phi(\boldsymbol{b}_q)\right)=\Omega
\end{aligned} \tag{4.4}$$

bulunur. Bulunan bu değerler (4.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\phi(\boldsymbol{n}_q)=-\kappa_1\boldsymbol{t}_q+\Omega\boldsymbol{b}_q \tag{4.5}$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan,

$$\phi(\boldsymbol{b}_q)=b_1\boldsymbol{t}_q+b_2\boldsymbol{n}_q+b_3\boldsymbol{b}_q \tag{4.6}$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
b_1&=g(\phi(\boldsymbol{b}_q),\boldsymbol{t}_q)=-g(\boldsymbol{b}_q,\phi(\boldsymbol{t}_q))=-g\left(\boldsymbol{b}_q,\kappa_1\boldsymbol{n}_q+\kappa_2\boldsymbol{b}_q\right)=-\kappa_2,\\
b_2&=g(\phi(\boldsymbol{b}_q),\boldsymbol{n}_q)=-g\left(\boldsymbol{b}_q,\phi(\boldsymbol{n}_q)\right)=-\Omega,\\
b_3&=g(\phi(\boldsymbol{b}_q),\boldsymbol{b}_q)=0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

bulunur. Benzer şekilde bulunan bu değerler (4.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\phi(\boldsymbol{b}_q)=-\kappa_2\boldsymbol{t}_q-\Omega\boldsymbol{n}_q \tag{4.8}$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 4.2.** $\alpha$ , 3-boyutlu Öklid uzayında Quasi çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{n}_q$ -manyetik eğri olsun. O halde verilen Quasi çatısına göre Lorentz kuvveti

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_q' \\ \boldsymbol{n}_q' \\ \boldsymbol{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_3 \\ -\kappa_2 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_q \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

olmak üzere aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} \phi(\boldsymbol{t}_q) \\ \phi(\boldsymbol{n}_q) \\ \phi(\boldsymbol{b}_q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \Omega \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_3 \\ -\Omega & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_q \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $\Omega$ belirli bir fonksiyondur.

**İspat:** $\alpha$ eğrisi, $\{\boldsymbol{t}_q, \boldsymbol{n}_q, \boldsymbol{b}_q, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$ Quasi bileşenleri ile verilen 3-boyutlu Öklid uzayında Quasi çatısına göre $\boldsymbol{n}_q$-manyetik bir eğri olsun. Quasi çatısına göre $\boldsymbol{n}_q$-manyetik eğrinin

$$\phi(\boldsymbol{n}_q) = -\kappa_1 \boldsymbol{t}_q + \kappa_3 \boldsymbol{b}_q \tag{4.10}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer yandan, $\phi(\boldsymbol{n}_q) \in S_P\{\boldsymbol{t}_q, \boldsymbol{n}_q, \boldsymbol{b}_q\}$ olduğundan dolayı;

$$\phi(\boldsymbol{t}_q) = a_1 \boldsymbol{t}_q + a_2 \boldsymbol{n}_q + a_3 \boldsymbol{b}_q \tag{4.11}$$

olarak yazılabilir. Buradan;

$$\begin{aligned} a_1 &= g(\phi(\boldsymbol{t}_q), \boldsymbol{t}_q) = 0, \\ a_2 &= g(\phi(\boldsymbol{t}_q), \boldsymbol{n}_q) = -g\left(\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q)\right) = -g(\boldsymbol{t}_q, -\kappa_1 \boldsymbol{t}_q + \kappa_3 \boldsymbol{b}_q) = \kappa_1, \\ a_3 &= g(\phi(\boldsymbol{t}_q), \boldsymbol{b}_q) = -g\left(\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{b}_q)\right) = \Omega \end{aligned} \tag{4.12}$$

bulunur. Bulunan bu değerler (4.11) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\phi(\boldsymbol{n}_q) = \kappa_1 \boldsymbol{n}_q + \Omega \boldsymbol{b}_q \tag{4.13}$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan,

$$\phi(\boldsymbol{b}_q) = b_1 \boldsymbol{t}_q + b_2 \boldsymbol{n}_q + b_3 \boldsymbol{b}_q \tag{4.14}$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} b_1 &= g(\phi(\boldsymbol{b}_q), \boldsymbol{t}_q) = -g(\boldsymbol{b}_q, \phi(\boldsymbol{t}_q)) = -\Omega, \\ b_2 &= g(\phi(\boldsymbol{b}_q), \boldsymbol{n}_q) = -g\left(\boldsymbol{b}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q)\right) = -g(\boldsymbol{b}_q, -\kappa_1 \boldsymbol{t}_q + \kappa_3 \boldsymbol{b}_q) = -\kappa_3, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$b_3 = g(\phi(\boldsymbol{b}_q), \boldsymbol{b}_q) = 0$

bulunur. Benzer şekilde bulunan bu değerler (4.14) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\phi(\boldsymbol{b}_q) = -\Omega \boldsymbol{t}_q - \kappa_3 \boldsymbol{n}_q \tag{4.16}$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 4.3.** $\alpha$ , 3-boyutlu Öklid uzayında Quasi çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{b}_q$-manyetik eğri olsun. O halde verilen Quasi çatısına göre Lorentz kuvveti

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_q' \\ \boldsymbol{n}_q' \\ \boldsymbol{b}_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_3 \\ -\kappa_2 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_q \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

olmak üzere aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} \phi(\boldsymbol{t}_q) \\ \phi(\boldsymbol{n}_q) \\ \phi(\boldsymbol{b}_q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega & \kappa_2 \\ -\Omega & 0 & \kappa_3 \\ -\kappa_2 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_q \\ \boldsymbol{n}_q \\ \boldsymbol{b}_q \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada $\Omega$ belirli bir fonksiyondur.

**İspat:** $\alpha$ eğrisi, $\{\boldsymbol{t}_q, \boldsymbol{n}_q, \boldsymbol{b}_q, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$ Quasi bileşenleri ile verilen 3-boyutlu Rieman uzayında Quasi çatısına göre $b_q$-manyetik bir eğri olsun. Quasi çatısına göre $\boldsymbol{b}_q$-manyetik eğrinin

$$\phi(\boldsymbol{b}_q) = -\kappa_2 \boldsymbol{t}_q - \kappa_3 \boldsymbol{n}_q \tag{4.18}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer yandan, $\phi(\boldsymbol{n}_q) \in S_p\{\boldsymbol{t}_q, \boldsymbol{n}_q, \boldsymbol{b}_q\}$ olduğundan dolayı;

$$\phi(\boldsymbol{t}_q) = a_1 \boldsymbol{t}_q + a_2 \boldsymbol{n}_q + a_3 \boldsymbol{b}_q \tag{4.19}$$

olarak yazılabilir. Buradan;

$$a_1 = g(\phi(\boldsymbol{t}_q), \boldsymbol{t}_q) = 0$$

$$a_2 = g(\phi(\boldsymbol{t}_q), \boldsymbol{n}_q) = -g\left(\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q)\right) = \Omega \tag{4.20}$$

$$a_3 = g(\phi(\boldsymbol{t}_q), \boldsymbol{b}_q) = -g\left(\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{b}_q)\right) = -g(\boldsymbol{t}_q, -\kappa_2 \boldsymbol{t}_q - \kappa_3 \boldsymbol{n}_q) = +\kappa_2$$

bulunur. Bulunan bu değerler (4.19) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\phi(\boldsymbol{t}_q) = \Omega \boldsymbol{n}_q + \kappa_2 \boldsymbol{b}_q \tag{4.21}$$

şeklinde bulunur. Diğer yandan,

$$\phi(\boldsymbol{n}_q) = b_1\boldsymbol{t}_q + b_2\boldsymbol{n}_q + b_3\boldsymbol{b}_q \tag{4.22}$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} b_1 &= g(\phi(\boldsymbol{n}_q), \boldsymbol{t}_q) = -g(\boldsymbol{n}_q, \phi(\boldsymbol{t}_q)) = -\Omega, \\ b_2 &= g(\phi(\boldsymbol{n}_q), \boldsymbol{n}_q) = 0, \\ b_3 &= g(\phi(\boldsymbol{n}_q), \boldsymbol{b}_q) = -g\left(\boldsymbol{n}_q, \phi(\boldsymbol{b}_q)\right) = -g(\boldsymbol{n}_q, -\kappa_2\boldsymbol{t}_q - \kappa_3\boldsymbol{n}_q) = +\kappa_3 \end{aligned} \tag{4.23}$$

bulunur. Benzer şekilde bulunan bu değerler (4.22) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\phi(\boldsymbol{b}_q) = -\Omega\boldsymbol{t}_q + \kappa_3\boldsymbol{b}_q \tag{4.24}$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 4.4.** Diyelimki $\alpha$, $\boldsymbol{t}_q$-manyetik bir eğri olsun. O zaman Quasi vektörlerinin Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevleri aşağıdaki gibidir.

**i)** $\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = (\kappa_1{}' - \kappa_2\kappa_3)\boldsymbol{n}_q + (\kappa_2\kappa_3 + \kappa_2{}')\boldsymbol{b}_q$ ,
**ii)** $\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) = -\kappa_1{}'\boldsymbol{t}_q - \Omega\kappa_3\boldsymbol{n}_q + \Omega'\mathbf{b_q}$,
**iii)** $\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{b}_q) = -\kappa_2{}'\boldsymbol{t}_q - \Omega'\mathbf{n_q} - \Omega\kappa_3\boldsymbol{b}_q$.

**İspat:** $\alpha$, $\boldsymbol{t}_q$-manyetik bir eğri olsun. Fermi-Walker formülü yardımıyla hesaplayalım.

**i)** İlk olarak $\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = \nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) - < \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{t}_q) > \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q + < \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{t}_q) > \boldsymbol{t}_q$
yazılır. Burada

$$\begin{aligned} \nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) &= \nabla_{t_q}(\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q) = \kappa_1{}'\boldsymbol{n}_q + \kappa_1\boldsymbol{n}_q{}' + \kappa_2{}'\boldsymbol{b}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q{}' \\ &= \kappa_1{}'\boldsymbol{n}_q - \kappa_1{}^2\boldsymbol{t}_q + \kappa_1\kappa_3\boldsymbol{b}_q + \kappa_2{}'\boldsymbol{b}_q - \kappa_2{}^2\boldsymbol{t}_q - \kappa_2\kappa_3\boldsymbol{n}_q \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = (-\kappa_1{}^2 - \kappa_2{}^2)\boldsymbol{t}_q + (\kappa_1{}' - \kappa_2\kappa_3)\boldsymbol{n}_q + (\kappa_1\kappa_3 + \kappa_2{}')\,\boldsymbol{b}_q \tag{4.25}$$

olur. Ayrıca

$$-< \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{t}_q) > \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q = -< \boldsymbol{t}_q, \kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q > (\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q) = 0 \tag{4.26}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} < \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{t}_q) > \boldsymbol{t}_q &= < \kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q, \kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q > \boldsymbol{t}_q \\ &= (\kappa_1{}^2 + \kappa_2{}^2)\boldsymbol{t}_q \end{aligned} \tag{4.27}$$

bulunur. (4.25), (4.26) ve (4.27) den

$$\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = (\kappa_1{}' - \kappa_2\kappa_3)\boldsymbol{n}_q + (\kappa_2\kappa_3 + \kappa_2{}')\boldsymbol{b}_q$$

bulunur.

**ii)** İlk olarak $\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) = \nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) - < \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q) > \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q + < \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q) > \boldsymbol{t}_q$ yazılır. Burada

$$\nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) = \nabla_{t_q}(-\kappa_1\boldsymbol{t}_q + \Omega\boldsymbol{b}_q) = -\kappa_1{}'\boldsymbol{t}_q - \kappa_1\boldsymbol{t}_q{}' + \Omega'\boldsymbol{b}_q + \Omega\boldsymbol{b}_q{}'$$
$$= \kappa_1{}'\boldsymbol{t}_q - \kappa_1(\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q) + \Omega'\boldsymbol{b}_q + \Omega(-\kappa_2\boldsymbol{t}_q - \kappa_3\boldsymbol{n}_q)$$
$$= \kappa_1{}'\boldsymbol{t}_q - \kappa_1{}^2\boldsymbol{n}_q - \kappa_1\kappa_2\boldsymbol{b}_q + \Omega'\boldsymbol{b}_q - \Omega\kappa_2\boldsymbol{t}_q - \Omega\kappa_3\boldsymbol{n}_q$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = (\kappa_1{}' - \Omega\kappa_2)\boldsymbol{t}_q + (-\kappa_1{}^2 - \Omega\kappa_3)\boldsymbol{n}_q + (-\kappa_1\kappa_2 + \Omega')\boldsymbol{b}_q \qquad (4.28)$$

olur. Ayrıca

$$-< \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q) > \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q = -< \boldsymbol{t}_q, -\kappa_1\boldsymbol{t}_q + \Omega\boldsymbol{b}_q > (\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q)$$
$$= \kappa_1{}^2\boldsymbol{n}_q + \kappa_1\kappa_2\boldsymbol{b}_q \qquad (4.29)$$

bulunur. Ayrıca

$$< \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q) > \boldsymbol{t}_q = < \kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q, -\kappa_1\boldsymbol{t}_q + \Omega\boldsymbol{b}_q > \boldsymbol{t}_q$$
$$= \Omega\kappa_2\boldsymbol{t}_q \qquad (4.30)$$

bulunur. (4.28), (4.29) ve (4.30) dan

$$\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) = -\kappa_1{}'\boldsymbol{t}_q - \Omega\kappa_3\boldsymbol{n}_q + \Omega'\boldsymbol{b}_q$$

bulunur.

**iii)** İlk olarak $\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{b}_q) = \nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{b}_q) - < \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{b}_q) > \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q + < \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{b}_q) > \boldsymbol{t}_q$ yazılır. Burada

$$\nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{b}_q) = \nabla_{t_q}(-\kappa_2\boldsymbol{t}_q - \Omega\boldsymbol{n}_q) = -\kappa_2{}'\boldsymbol{t}_q - \kappa_2\boldsymbol{t}_q{}' - \Omega'\boldsymbol{n}_q - \Omega\boldsymbol{n}_q{}'$$
$$= -\kappa_2{}'\boldsymbol{t}_q - \kappa_2\kappa_1\boldsymbol{n}_q - \kappa_2{}^2\boldsymbol{b}_q - \Omega'\boldsymbol{n}_q + \Omega\kappa_1\boldsymbol{t}_q - \Omega\kappa_3\boldsymbol{b}_q$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = (-\kappa_2{}' + \Omega\kappa_1)\boldsymbol{t}_q + (-\kappa_2\kappa_1 - \Omega')\boldsymbol{n}_q + (-\kappa_2{}^2 - \Omega\kappa_3)\,\boldsymbol{b}_q \qquad (4.31)$$

olur. Ayrıca

$$-< \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{b}_q) > \nabla_{\boldsymbol{t}_q}\boldsymbol{t}_q = -< \boldsymbol{t}_q, -\kappa_2\boldsymbol{t}_q - \Omega\boldsymbol{n}_q > (\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q)$$

$$= \kappa_2\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2{}^2\boldsymbol{b}_q \tag{4.32}$$

bulunur. Ayrıca

$$< \nabla_{\boldsymbol{t}_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{b}_q) > \boldsymbol{t}_q =< \kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q, -\kappa_2\boldsymbol{t}_q - \Omega\boldsymbol{n}_q > \boldsymbol{t}_q$$

$$= -\kappa_1\Omega\boldsymbol{t}_q \tag{4.33}$$

bulunur. (4.31), (4.32) ve (4.33) ten

$$\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{t}_q}\phi(\boldsymbol{b}_q) = -\kappa_2{}'\boldsymbol{t}_q - \Omega'\boldsymbol{n}_q - \Omega\kappa_3\boldsymbol{b}_q$$

bulunur.

**Teorem 4.5.** Diyelimki $\alpha$, $\boldsymbol{n}_q$-manyetik bir eğri olsun.O zaman Quasi vektörlerinin Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevleri aşağıdaki gibidir.

**i)** $\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{t}_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = (\kappa_1{}' - \alpha\kappa_3)\boldsymbol{n}_q + (\kappa_1\kappa_3 + \alpha')\boldsymbol{b}_q$,
**ii)** $\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{t}_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) = -\kappa_1{}'\boldsymbol{t}_q - \Omega\kappa_3\boldsymbol{n}_q + \Omega'\boldsymbol{b}_q$,
**iii)** $\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{t}_q}\phi(\boldsymbol{b}_q) = -\kappa_2{}'\boldsymbol{t}_q - \Omega'\boldsymbol{n}_q - \Omega\kappa_3\boldsymbol{b}_q$.

**İspat:** $\alpha$, $\boldsymbol{n}_q$-manyetik bir eğri olsun. Fermi-Walker formülü yardımıyla hesaplayalım.

**i)** İlk olarak $\tilde{\nabla}_{\boldsymbol{t}_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = \nabla_{\boldsymbol{t}_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) - < \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{t}_q) > \nabla_{\boldsymbol{t}_q}\boldsymbol{t}_q + < \nabla_{\boldsymbol{t}_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{t}_q) > \boldsymbol{t}_q$ yazılır. Burada

$$\nabla_{\boldsymbol{t}_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = \nabla_{\boldsymbol{t}_q}(\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \alpha\boldsymbol{b}_q) = \kappa_1{}'\boldsymbol{n}_q + \kappa_1\boldsymbol{n}_q{}' + \alpha'\boldsymbol{b}_q + \alpha\boldsymbol{b}_q{}'$$

$$= \kappa_1{}'\boldsymbol{n}_q - \kappa_1{}^2\boldsymbol{t}_q + \kappa_1\kappa_3\boldsymbol{b}_q + \alpha'\boldsymbol{b}_q - \alpha\kappa_2\boldsymbol{t}_q - \alpha\kappa_3\boldsymbol{n}_q$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{\boldsymbol{t}_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = (-\kappa_1{}^2 - \alpha)\boldsymbol{t}_q + (\kappa_1{}' - \alpha\kappa_3)\boldsymbol{n}_q + (\kappa_1\kappa_3 + \alpha')\,\boldsymbol{b}_q \tag{4.34}$$

olur. Ayrıca

$$-< \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{t}_q) > \nabla_{\boldsymbol{t}_q}\boldsymbol{t}_q = -< \boldsymbol{t}_q, \kappa_1\boldsymbol{n}_q + \alpha\boldsymbol{b}_q > (\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q) = 0 \tag{4.35}$$

bulunur. Ayrıca

$$< \nabla_{\boldsymbol{t}_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{t}_q) > \boldsymbol{t}_q =< \kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q, \kappa_1\boldsymbol{n}_q + \alpha\boldsymbol{b}_q > \boldsymbol{t}_q$$

$$= (\kappa_1{}^2 + \alpha\kappa_2)\boldsymbol{t}_q \tag{4.36}$$

bulunur. (4.34), (4.35) ve (4.36) dan

$$\widetilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = (\kappa_1{}' - \alpha\kappa_3)\boldsymbol{n}_q + (\kappa_1\kappa_3 + \alpha')\boldsymbol{b}_q$$

bulunur.

**ii)** İlk olarak $\widetilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) = \nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) - < \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q) > \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q + < \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q) > \boldsymbol{t}_q$ yazılır. Burada

$$\nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) = \nabla_{t_q}(-\kappa_1\boldsymbol{t}_q + \kappa_3\boldsymbol{b}_q) = -\kappa_1{}'\boldsymbol{t}_q - \kappa_1\boldsymbol{t}_q{}' + \kappa_3{}'\boldsymbol{b}_q + \kappa_3\boldsymbol{b}_q{}'$$

$$= \kappa_1{}'\boldsymbol{t}_q - \kappa_1(\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q) + \kappa_3{}'\boldsymbol{b}_q + \kappa_3(-\kappa_2\boldsymbol{t}_q - \kappa_3\boldsymbol{n}_q)$$

$$= \kappa_1{}'\boldsymbol{t}_q - \kappa_1{}^2\boldsymbol{n}_q - \kappa_1\kappa_2\boldsymbol{b}_q + \kappa_3{}'\boldsymbol{b}_q - \kappa_2\kappa_3\boldsymbol{t}_q - \kappa_3{}^2\boldsymbol{n}_q$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = (\kappa_1{}' - \kappa_2\kappa_3)\boldsymbol{t}_q + (-\kappa_1{}^2 - \kappa_3{}^2)\boldsymbol{n}_q + (-\kappa_1\kappa_2 + \kappa_3{}')\boldsymbol{b}_q \tag{4.37}$$

olur. Ayrıca

$$-< \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q) > \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q = -< \boldsymbol{t}_q, -\kappa_1\boldsymbol{t}_q + \kappa_3\boldsymbol{b}_q > (\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q)$$

$$= \kappa_1{}^2\boldsymbol{n}_q + \kappa_1\kappa_2\boldsymbol{b}_q \tag{4.38}$$

bulunur. Ayrıca

$$< \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q) > \boldsymbol{t}_q = < \kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q, -\kappa_1\boldsymbol{t}_q + \kappa_3\boldsymbol{b}_q > \boldsymbol{t}_q$$

$$= \kappa_2\kappa_3\boldsymbol{t}_q \tag{4.39}$$

bulunur. (4.37), (4.38) ve (4.39) dan

$$\widetilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) = -\kappa_1{}'\boldsymbol{t}_q - \kappa_3{}^2\boldsymbol{n}_q + \kappa_3{}'\boldsymbol{b}_q$$

bulunur.

**iii)** İlk olarak $\widetilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{b}_q) = \nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{b}_q) - < \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{b}_q) > \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q + < \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{b}_q) > \boldsymbol{t}_q$ yazılır. Burada

$$\nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{b}_q) = \nabla_{t_q}(-\alpha\boldsymbol{t}_q - \kappa_3\boldsymbol{n}_q) = -\alpha'\boldsymbol{t}_q - \alpha\boldsymbol{t}_q{}' - \kappa_3{}'\boldsymbol{n}_q - \kappa_3\boldsymbol{n}_q{}'$$

$$= -\alpha'\boldsymbol{t}_q - \alpha\kappa_1\boldsymbol{n}_q - \alpha\kappa_2\boldsymbol{b}_q - \kappa_3{}'\boldsymbol{n}_q + \kappa_1\kappa_3\boldsymbol{t}_q - \kappa_3{}^2\boldsymbol{b}_q$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{t_q}\phi(t_q) = (-\alpha' - \kappa_1\kappa_3)t_q + (-\alpha\kappa_1 - \kappa_3{}')n_q + (-\alpha\kappa_2 - \kappa_3{}^2)\, b_q \qquad (4.40)$$

olur. Ayrıca

$$-< t_q, \phi(b_q) > \nabla_{t_q} t_q = -< t_q, -\alpha t_q - \kappa_3 n_q > (\kappa_1 n_q + \kappa_2 b_q)$$

$$= \alpha\kappa_1 n_q + \alpha\kappa_2 b_q \qquad (4.41)$$

bulunur. Ayrıca

$$< \nabla_{t_q} t_q, \phi(b_q) > t_q =< \kappa_1 n_q + \kappa_2 b_q, -\alpha t_q - \kappa_3 n_q > t_q$$

$$= -\kappa_1\kappa_3 t_q \qquad (4.42)$$

bulunur. (4.40), (4.41) ve (4.42) den

$$\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(b_q) = -\alpha' t_q - \kappa_3{}' n_q - \kappa_3{}^2 b_q$$

bulunur.

**Teorem 4.6.** Diyelimki $\alpha$, $b_q$-manyetik bir eğri olsun.O zaman Quasi vektörlerinin Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevleri aşağıdaki gibidir.

**i)** $\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(t_q) = (\sigma' - \kappa_2\kappa_3)n_q + (\sigma\kappa_3 + \kappa_2{}')b_q$ ,
**ii)** $\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(n_q) = -\sigma' t_q - \kappa_3{}^2 n_q - \kappa_3{}' b_q$,
**iii)** $\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(b_q) = -\kappa_1{}' t_q - \kappa_3{}' n_q - \kappa_3{}^2 b_q$.

**İspat:** $\alpha$, $b_q$-manyetik bir eğri olsun. Fermi-Walker formülü yardımıyla hesaplayalım.

**i)** İlk olarak $\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(t_q) = \nabla_{t_q}\phi(t_q) - < t_q, \phi(t_q) > \nabla_{t_q} t_q + < \nabla_{t_q} t_q, \phi(t_q) > t_q$ yazılır. Burada

$$\nabla_{t_q}\phi(t_q) = \nabla_{t_q}(\sigma n_q + \kappa_2 b_q) = \sigma' n_q + \sigma n_q{}' + \kappa_2{}' b_q + \kappa_2 b_q{}'$$

$$= \sigma' n_q - \sigma\kappa_1 t_q + \sigma\kappa_3 b_q + \kappa_2{}' b_q - \kappa_2{}^2 t_q - \kappa_2\kappa_3 n_q$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{t_q}\phi(t_q) = (-\sigma\kappa_1 - \kappa_2{}^2)t_q + (\sigma' - \kappa_2\kappa_3)n_q + (\sigma\kappa_3 + \kappa_2{}')\, b_q \qquad (4.43)$$

olur. Ayrıca

$$-< t_q, \phi(t_q) > \nabla_{t_q} t_q = -< t_q, \sigma n_q + \kappa_2 b_q > (\kappa_1 n_q + \kappa_2 b_q) = 0 \qquad (4.44)$$

bulunur. Ayrıca

$$< \nabla_{t_q} t_q, \phi(t_q) > t_q =< \kappa_1 n_q + \kappa_2 b_q, \sigma n_q + \kappa_2 b_q > t_q$$

$$= (\kappa_1\sigma + \kappa_2{}^2)\boldsymbol{t}_q \tag{4.45}$$

bulunur. (4.43), (4.44) ve (4.45) ten

$$\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = (\sigma' - \kappa_2\kappa_3)\boldsymbol{n}_q + (\sigma\kappa_3 + \kappa_2{}')\boldsymbol{b}_q$$

bulunur.

**ii)** İlk olarak $\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) = \nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) - < \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q) > \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q + < \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q) > \boldsymbol{t}_q$ yazılır. Burada

$$\nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) = \nabla_{t_q}(-\sigma\boldsymbol{t}_q + \kappa_3\boldsymbol{b}_q) = -\sigma'\boldsymbol{t}_q - \sigma\boldsymbol{t}_q{}' + \kappa_3{}'\boldsymbol{b}_q + \kappa_3\boldsymbol{b}_q{}'$$

$$= -\sigma'\boldsymbol{t}_q - \sigma(\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q) + \kappa_3{}'\boldsymbol{b}_q + \kappa_3(-\kappa_2\boldsymbol{t}_q - \kappa_3\boldsymbol{n}_q)$$

$$= -\sigma'\boldsymbol{t}_q - \sigma\kappa_1\boldsymbol{n}_q - \sigma\kappa_2\boldsymbol{b}_q + \kappa_3{}'\boldsymbol{b}_q - \kappa_2\kappa_3\boldsymbol{t}_q - \kappa_3{}^2\boldsymbol{n}_q$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{t}_q) = (-\sigma' - \kappa_2\kappa_3)\boldsymbol{t}_q + (-\sigma\kappa_1 - \kappa_3{}^2)\boldsymbol{n}_q + (-\sigma\kappa_2 + \kappa_3{}')\boldsymbol{b}_q \tag{4.46}$$

olur. Ayrıca

$$-< \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q) > \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q = -< \boldsymbol{t}_q, -\sigma\boldsymbol{t}_q + \kappa_3\boldsymbol{b}_q > (\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q)$$

$$= \sigma\kappa_1\boldsymbol{n}_q + \sigma\kappa_2\boldsymbol{b}_q \tag{4.47}$$

bulunur. Ayrıca

$$< \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{n}_q) > \boldsymbol{t}_q = < \kappa_1\boldsymbol{n}_q + \kappa_2\boldsymbol{b}_q, -\sigma\boldsymbol{t}_q + \kappa_3\boldsymbol{b}_q > \boldsymbol{t}_q$$

$$= \kappa_2\kappa_3\boldsymbol{t}_q \tag{4.48}$$

bulunur. (4.46), (4.47) ve (4.48) den

$$\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{n}_q) = -\sigma'\boldsymbol{t}_q - \kappa_3{}^2\boldsymbol{n}_q - \kappa_3{}'\boldsymbol{b}_q$$

bulunur.

**iii)** İlk olarak $\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(\boldsymbol{b}_q) = \nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{b}_q) - < \boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{b}_q) > \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q + < \nabla_{t_q}\boldsymbol{t}_q, \phi(\boldsymbol{b}_q) > \boldsymbol{t}_q$ yazılır. Burada

$$\nabla_{t_q}\phi(\boldsymbol{b}_q) = \nabla_{t_q}(-\kappa_2\boldsymbol{t}_q - \kappa_3\boldsymbol{n}_q) = -\kappa_2{}'\boldsymbol{t}_q - \kappa_2\boldsymbol{t}_q{}' - \kappa_3{}'\boldsymbol{n}_q - \kappa_3\boldsymbol{n}_q{}'$$

$$= -\kappa_2{}'\boldsymbol{t}_q - \kappa_2\kappa_1\boldsymbol{n}_q - \kappa_2{}^2\boldsymbol{b}_q - \kappa_3{}'\boldsymbol{n}_q + \kappa_1\kappa_3\boldsymbol{t}_q - \kappa_3{}^2\boldsymbol{b}_q$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\nabla_{t_q}\phi(t_q) = (-\kappa_2{}' - \kappa_1\kappa_3)t_q + (-\kappa_2\kappa_1 - \kappa_3{}')n_q + (-\kappa_2{}^2 - \kappa_3{}^2)\, b_q \tag{4.49}$$

olur. Ayrıca

$$-< t_q, \phi(b_q) > \nabla_{t_q} t_q = -< t_q, -\kappa_2 t_q - \kappa_3 n_q > (\kappa_1 n_q + \kappa_2 b_q)$$

$$= \kappa_2\kappa_1 n_q + \kappa_2{}^2 b_q \tag{4.50}$$

bulunur. Ayrıca

$$< \nabla_{t_q} t_q, \phi(b_q) > t_q =< \kappa_1 n_q + \kappa_2 b_q, -\kappa_2 t_q - \kappa_3 n_q > t_q$$

$$= -\kappa_1\kappa_3 t_q \tag{4.51}$$

bulunur. (4.49), (4.50) ve (4.51) den

$$\tilde{\nabla}_{t_q}\phi(b_q) = -\kappa_1{}' t_q - \kappa_3{}' n_q - \kappa_3{}^2 b_q$$

bulunur.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Quasi çatısına göre elde edilen ***T***, ***N*** ve ***B*** manyetik eğrilerinin Fermi-Walker türevleri hesaplandı ve bazı önemli sonuçlar verildi. Bu çalışmanın temel amacı bilinen adi türev yardımıyla elde edilen birçok kavram Fermi-Walker türevi ile tanımladığında farklı anlamlarını ve uygulama alanlarını ortaya çıkarmaktır. Fermi-Walker türevinin geometride ve özellikle paralel vektör alanlarının hareketlerinde önemli bir uygulaması mevcuttur.

Fermi-Walker türevi, Fermi-Walker paralelliği elde edilen dönmeyen çatılar değişik uzay zamanlarında farklı eğriler için elde edilmiştir. Uzayda dikkate değer eğri ailelerinin bir sınıfı da manyetik eğrilerdir. Üçüncü bölümde Öklid 3-uzayında Frenet çatısına göre ***T***, ***N*** ve ***B*** manyetik eğriler tanıtılmıştır. Manyetik eğriler için Fermi-Walker türevinin hesaplanması ile önemli ilşkiler ortaya çıkarılmıştır.

Dördüncü bölümde Öklid 3-uzayında Quasi çatısına göre elde edilen manyetik eğrilerinin Fermi-Walker türevleri hesaplanmış ve bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

**KAYNAKLAR**


Balakrishnan, R. 2005. Space curves, anholonomy and nonlinearity. *Pramana Journal of Physics*, 64 (4), 607-615.

Barros, M. 1997. General helices and a theorem of lancret, *Proceeding of the American Mathematical Society*, 125(5), 1503-1509.

Benn, I. M., Tucker, R. W. 1989. Wave mechanics and inertial guidance, *The American Physical Society*, 39(6), 1594-1601.

Bishop, R.L. 1975. There is more than one way to frame a curve, *The American Mathematical Monthly*, 82 (3), 246-251.

Bozkurt, Z., Gök İ., Yaylı Y., Ekmekci F.N. 2014. A new approach for magnetic curves in 3D Riemannian manifolds, *Journal of Mathematical Physics*, 55 (5). 053501.

Do Carmo, M.P. 1976. Differential geometry of curves and surfaces, *Prentice-Hall*, New Jersey.

Dandolof, R. 1989. Berry's Phase and Fermi-Walker parallel transport, *Elsevier science publishers Physics Letters A*, 139 (1-2), 19-20.

Dede, M., Ekici, C., Tozak H. 2015. Directional Tubular Surfaces, *International Journal of Algebra*, 9(12), 527-535.

Fermi, E. 1922. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei*, 31, 184-306.

Gluck, H. 1966. Higher curvatures of curves in Euclidean space, *The American Mathematical Monthly*, 73.7: 699-704.

Hacısalihoğlu, H.H. 1980. Yüksek diferansiyel geometriye giriş, *Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları*, Elazığ.

Hacısalihoğlu, H.H. 2000a. Diferensiyel Geometri, Cilt I. Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, *Hacısalihoğlu Yayıncılık*, Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H. 2000b. Diferensiyel Geometri, Cilt II. Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, *Hacısalihoğlu Yayıncılık*, Ankara.

Hacısalihoğlu, H.H. 2009. Diferensiyel Geometri, Cilt I. Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, *Hacısalihoğlu Yayıncılık*, Ankara.

Karakuş, F., Yaylı, Y. 2012. On the Fermi-Walker derivative and non-rotating frame. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 9(8), 1250066-1-11.

Kazan, A., Karadağ, H.B. 2017. Magnetic pseudo null and magnetic null curves in Minkowski 3-space. *International Mathematical Forum*, no.3, 119-132.

Özdemir, Z., Gök, I., Yaylı, Y., Ekmekci, F.N. 2015. Notes on magnetic curves in 3D semi-Rieamannian manifolds, *Turkish Journal of Mathematics*, 412-426.

Pripoae, G. T. 1999. Generalized Fermi-Walker transport, *Libertas Mathematica*, XIX. pp. 65-69.

Pripoae, G. T. 2000. Generalized Fermi-Walker parallelism induced by gener-alized schouthen connections, Balkan Society of Geometers, *Differential Geometry and Lie Algebras*, pp. 117-125.

Sabuncuoğlu, A. 2006. Diferensiyel Geometri, *Nobel Yayınları*, s. 264-277, Ankara.

Synge, J. L. 1960 Relativity: the general theory, *Interscience Publishers*, New York,

Weinberg, S. 1972. Gravitation and Cosmology, *John Wiley & Sons Incorporation*, New York.

Williams, M.Z., Stein F.M. 1964. A triple product of vectors in four-space, *Mathematics Magazine*, 37: 230-235.

Yılmaz, S., Turgut, M., 2010. A new version of Bishop frame and an aplication to spherical images, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371, 764-776.

Yılmaz, S., Özyılmaz, E., Turgut, M. 2010. New spherical indicatrices and their characterizations, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 18: 337-354.

## EKLER

**Ek-9**

| **Kontrol Edilecek Hususlar** | **Evet** | **Hayır** |
|---|---|---|
| Sayfa yapısı uygun mu? | √ | |
| Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu? | √ | |
| Denklem yazımları uygun mu? | √ | |
| İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı? | √ | |
| Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır? | √ | |
| Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi? | √ | |
| Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu? | √ | |
| Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı? | √ | |
| Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir) | √ | |
| Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı? | √ | |
| +Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu? | √ | |

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

| | Unvanı Adı SOYADI | İmza |
|---|---|---|
| **Öğrenci** : | Özal BİNGÖL | |
| **Danışman** : | Doç. Dr. Talat Körpınar | |

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum /vermiyorum**.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı
Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

| Onaylayan Adı SOYADI | Tarih | İmza |
|---|---|---|
| Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖNLÜ | 08.07.2019 | |

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER


| | | |
|---|---|---|
| **Adı Soyadı** | **:** | Özal BİNGÖL |
| **Uyruğu** | **:** | T.C |
| **Doğum Yeri ve Tarihi** | **:** | MUŞ/1994 |
| **Telefon** | **:** | |
| **Faks** | **:** | |
| **e-mail** | **:** | urfa.mardin@hotmail.com |


## EĞİTİM

| **Derece** | | **Adı, İlçe, İl** | **Bitirme Yılı** |
|---|---|---|---|
| Lise | : | MUŞ LİSESİ, MERKEZ, MUŞ | 2011 |
| Üniversite | : | MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ, MERKEZ, MUŞ | 2015 |
| Yüksek Lisans | : | MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ, MERKEZ, MUŞ | |
| Doktora | : | | |

## İŞ DENEYİMLERİ

| **Yıl** | **Kurum** | **Görevi** |
|---|---|---|
| 2017- | Özel Dünyam Matematik Özel Öğretim Kursu | Öğretmen |