T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PASCAL DİZİ UZAYLARININ AĞIRLIKLI ORTALAMALARI

Kemal BAYRAM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2025
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PASCAL DİZİ UZAYLARININ AĞIRLIKLI ORTALAMALARI

Kemal BAYRAM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Harun POLAT

Jüri Üyesi: Prof. Dr. Muhammet ÇINAR
Jüri Üyesi: Doç. Dr. Abdullah AYDIN
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Ziyattin TAŞ
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Reha YAPALI

Haziran-2025
MUŞ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PASCAL DİZİ UZAYLARININ AĞIRLIKLI ORTALAMALARI

Kemal BAYRAM

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Harun POLAT

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bu çalışmada geçen temel tanım ve teoremler verildi. İkinci bölümde Pascal dizi uzaylarının ağırlıklı ortalamaları tanımlandı. Pascal dizi uzaylarının ağırlıklı ortalamalarının l_∞, c ve c_0 dizi uzaylarına izomorf oldukları gösterildi. Üçüncü bölümde Pascal dizi uzaylarının ağırlıklı ortalamalarının $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$ dualleri hesaplandı. Dördüncü bölümde ise Pascal dizi uzaylarının ağırlıklı ortalamalarından bilinen bazı uzaylara matris dönüşümü karakterize edildi.

2025, 27 Sayfa

Anahtar Kelimeler: *Dizi uzayları, Matris dönüşümleri,* $\alpha-, \beta-ve\, \gamma$ *dualleri, Pascal dizi uzayları, ağırlıklı ortalamaları*

ABSTRACT

MS THESİS

PASCAL SEQUENCE SPACES AND WEIGHTED AVERAGES

Kemal BAYRAM

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Harun POLAT

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, basic definitions and theorems about Pascal sequence spaces are given. In the second part, it was shown that the Pascal sequence l_∞, c and c_0 sequence spaces are isomorphic to the p_∞, p_c and p_0 sequence spaces, respectively, under the p-transformation. In the third part, $\alpha-, \beta-$ and $\gamma-$ duals of Pascal sequence spaces were calculated. In the fourth chapter, the matrix transformation from Pascal sequence spaces to some known spaces was characterized. The weighted averages of the Pascal sequence space were also defined.

2025, 27 Pages

Keywords: *$\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ duals, Matrix mappings, Pascal sequence spaces, Sequence spaces*

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana yardımcı olan danışman hocam Prof. Dr. Harun POLAT'a ve tüm eğitim hayatımda yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Kemal BAYRAM
MUŞ- 2025

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Pascal'ın 1654'teki çalışmalarıyla ilişkili Pascal Üçgeni üzerinden Pascal matrisini oluşturacağız. Pascal matrisi, daha sonra modern matematikte, özellikle lineer cebir ve matris teorisi içinde, Pascal üçgenindeki katsayıların kare bir matris olarak yazılmasıyla tanımlandı.

H. W. Gould, binom serileri ve Pascal dizileri üzerinde birçok çalışmaya imza atmış ve Pascal matrisinin özellikleriyle ilgili çalışmalar yapmıştır. Gould'un çalışmaları, binom katsayılarına dayalı yapıların ters matrisleri gibi konularla ilgilidir ve Pascal matrisinin tersinin binom katsayılarının işaretli bir dizilimiyle ifade edilebileceğini göstermiştir. Bu, Pascal matrisinin yapısını kavramsal olarak derinleştirmiştir.

Polat (Polat, 2018) de p_0 ile sıfıra yakınsak Pascal dizi uzayını p_c ile yakınsak Pascal dizi uzayını ve p_∞ ile sınırlı Pascal dizi uzayını oluşturdu. Bizde bu Pascal dizi uzaylarının ağırlıklı ortalamalarını hesaplayacağız.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde çalışmada geçen bazı tanım ve teoremler hakkında bilgi verildi.

Tanım 1.1: $X \neq \emptyset$ ve $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi olsun. Eğer $+: XxX \to X$ ve

$\cdot: \mathbb{C}xX \to X$ fonksiyonları her $x, y, z \epsilon X$ ve $\lambda, \mu \epsilon \mathbb{C}$ skaleri için;

L1. $x + y = y + x$
L2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
L3. $x + e = x$ olacak şekilde bir $e \in X$ vardır
L4. $x + (-x) = e$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır
L5. $x.1 = x$
L6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
L7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
L8. $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$

şartlarını sağlıyorsa X kümesine $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzay denir (Maddox, 1988).

Tanım 1.2: Boş olmayan bir X kümesi ve $d: X\,x\,X \to \mathbb{R}$ $(x, y) \to d(x, y)$ dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü her $x, y, z \epsilon X$ için;

$\boldsymbol{M1}.\ d(x,y)=0\ \Leftrightarrow x=y$

$\boldsymbol{M2}.\ d(x,y)=d(y,x)$

$\boldsymbol{M3}.\ d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa $(X.d)$ ikilisine bir metrik uzay denir (Maddox, 1988).

Tanım 1.3: X, K cismi ($K=R$ veya $K=\mathbb{C}$) üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|.\|:\rightarrow \mathbb{R}^{+}\ x\rightarrow\|x\|$ dönüşümü her $x,y\epsilon X$ ve her $a\epsilon K$ için;

$\boldsymbol{N1}.\|x\|=0\ \Leftrightarrow\ x=\theta$

$\boldsymbol{N2}.\|ax\|=|a|\|x\|$

$\boldsymbol{N3}.\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa $\|\ \|$ ye X üzerinde norm ve $(X,\|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzayı denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 1.4: Reel sayıların bir $x=(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dizisi için $M>0$ reel sayısı vardır öyle ki her $n\epsilon\mathbb{N}$ için $|x_n|<M$ ise $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dizisine sınırlı dizi denir (Móricz ve Rhoades, 1988).

Tanım 1.5: Her n doğal sayısı için $S_n\leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (S_n) dizisine üstten sınırlıdır denir, M sayısına da bu dizinin üst sınırı denir. Her n doğal sayısı için $S_n\geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa (S_n) dizisine alttan sınırlıdır denir, m sayısına da bu dizinin üst sınırı denir. Hem alttan hem de üstten sınırlı dizilere sınırlı dizi denir (Balcı, 1997).

Tanım 1.6: $A\subset R,\ f:A\rightarrow R$ bir fonksiyon ve $a\in A$ olsun. f fonksiyonu a noktasında süreklidir ⇔ her $\varepsilon>0$ için en az bir $\delta>0$ vardır. Öyle ki $|x-a|<\delta$ bağıntısını sağlayan her $x\in A$ için $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ dır (Balcı, 1997).

Tanım 1.7: Bir metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise uzaya tam uzay denir (Harun ve Feyzi, 2007).

Tanım 1.8: X boş olmayan bir küme, τ, X'in elemanlarından oluşan ailelerin bir sınıfı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan τ'ya X üzerinde bir topoloji ve (X, τ)'da topolojik uzay denir (Orlicz, 1992).

T1.$X,\emptyset\in\tau$

T2.τ'nun sonlu sayıdaki elemanın kesişimi, yine τ'dadır.

T3. τ ' nun keyfi sayıdaki elemanlarının birleşimi, yine τ'dadır.

Tanım 1.9: λ bir topolojik uzay olsun. Her $i\epsilon\mathbb{N}$ için $p_i(x) = x_i$ biçiminde tanımlanan $p_i: \lambda \to \mathbb{C}$ dönüşümü sürekliyse λ'ya bir $K-$ uzayı denir. tam lineer metrik bir $K-$ uzayına bir $FK-$ uzayı, normlu $FK-$ uzayına da bir $BK-$ uzayı denir (Altay ve Basar, 2005).

Tanım 1.10: (X, d) ve (Y, d') metrik uzayları verilsin. $f : X \to Y$ dönüşüm ve $x_0 \epsilon X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı var öyleki her $x\epsilon X$ için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ oluyorsa f dönüşümü x_0 noktasında süreklidir denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 1.11: $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $k > n$ olan her $n, k\epsilon\mathbb{N}$ için $a_{nk} = 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine üçgensel matris denir. $A = (a_{nk})$ üçgensel matrisinde her $n\epsilon\mathbb{N}$ için $a_{nn} \neq 0$ ise A'ya normal matris denir (Altay ve Basar, 2005).

Tanım 1.12: $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. $k > n$ olan her $n, k\epsilon\mathbb{N}$ için $a_{nk} = 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine alt üçgensel matris, $k < n$ olan her $n, k\epsilon\mathbb{N}$ için $a_{nk} = 0$ ise $A = (a_{nk})$ matrisine üst üçgensel matris denir (Boos, 2000).

Tanım 1.13: (X, g) bir paranormlu olsun. X'in elemanlarından oluşan bir (b_k) dizisi eğer, her $x \in X$ için;

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k b_k$$

olacak şekilde bir tek (λ_k) dizisi mevcut ise, (b_k) dizisine X için bir Schauder tabanı denir (Harun ve Feyzi, 2007).

Tanım 1.14: $(X, \|.\|)$ normlu uzay ve $x = (x_n)$'de X uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\forall n > n_0$ iken $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)\epsilon\mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x_0'a yakınsaktır denir (Bilgen, 1994).

Tanım 1.15: (a_n) bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $| a_n - a |< \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) > n$ sayısı varsa a_n dizisi a noktasına yakınsak denir. $a_n \to a$ ya da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ile gösterilir (Maddox, 1988).

Tanım 1.16: X herhangi bir normlu uzay olmak üzere X den ℂ'ye tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin oluşturduğu uzaya X'in dual uzayı (veya sürekli duali) denir (Maddox, 1988).

Tanım 1.17: $X = (x, d)$ bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 1.18: (S_n) reel terimli bir dizi olsun. (S_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için;

(S_n) Cauchy dizisi $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $\exists N\epsilon\mathbb{N}$ $öyle\ ki$ $\forall n, m \in N,\ |S_n - S_m| < \varepsilon$ olmalıdır (Maddox, 1988).

Tanım 1.19: $(X, \|\,.\,\|)$ normlu lineer uzaydaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse bu uzaya tam normlu uzay ya da Banach uzayı denir (Şuhubi, 2001).

Tanım 1.20: X ve Y iki lineer uzay ve $T: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer T fonksiyonu her $x_1, x_2 \epsilon X$ ve her λ, μ skalerleri için $T(\lambda x_1 + \mu x_2) = T(\lambda x_1) + T(\mu x_2)$ şartını sağlıyorsa T'ye lineer operatör denir (Kreyszig, 1991).

Tanım 1.21: $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere;

$w = \{x = (x_k) \in w : x : \mathbb{N} \to K, k \to x_k = (x_k)\}$ kümesine bütün dizilerin kümesi denir. w kümesi,

$$\Big((x_k), (y_k) \to (x_k + y_k)\ ve\ \big(\lambda, (x_k)\big) \to (\lambda x_k)\Big)$$

ikili işlemleri ile K üzerinde bir vektör uzayıdır. w'nın herhangi bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir (Boos, 2000).

Tanım 1.22: W uzayı, bir V uzayının alt uzay olması için gerek ve yeter şart;

i. $W \neq \emptyset$, (veya $\theta \in W$),

ii. w, vektörlerin toplama işlemine göre kapalıdır.

W, vektörlerin skalarla çarpma işlemine göre kapalıdır

Teorem 1.1: T dönüşümü birebir bir dönüşümdür ancak ve ancak $ker(T) = 0$ (Axler, 2015).

Teorem 1.2: Bir uzayın Banach uzayı olması için lineer uzay, bu uzayda normlu olması ve tam olması gerekir (Kreyszig, 1991).

2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1 Pascal Matrisi

Bütün kompleks ve reel değerli dizi uzaylarının kümesini w ile gösterilir. Sırasıyla sıfıra yakınsak dizilerin uzayı c_0, yakınsak dizilerin uzayı c, sınırlı dizilerin uzayı l_∞, bütün sınırlı serilerinin kümesi bs, yakınsak serilerinin kümesine cs, mutlak yakınsak serilerin kümesi l_1 ve p- mutlak yakınsak serilerinin kümesi l_p ile gösterilir. Bu dizi uzayları;

$$c_0 = \left\{x = (x_k) \in w\colon \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\},$$

$$c = \left\{x = (x_k) \in w\colon \lim_{k\to\infty} x_k \; mevcuttur.\right\},$$

$$l_\infty = \left\{x = (x_k) \in w\colon \operatorname{Sup}_k |x_k| < \infty\right\},$$

$$bs = \left\{x = (x_k) \in w\colon \operatorname{Sup}_n \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right| < \infty\right\},$$

$$cs = \left\{x = (x_k) \in w\colon \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k \; mevcuttur.\right\},$$

$$l_1 = \left\{x = (x_k) \in w\colon \sum_{k=0}^{n} |x_k| < \infty\right\}$$

ve

$$l_p = \left\{x = (x_k) \in w\colon \sum_{k=0}^{n} |x_k|^p < \infty,\; 1 \le p < \infty\right\}$$

ile tanımlanır (Kizmaz, 1981).

P ile gösterilen Pascal matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için;

$$P = [p_{nk}] = \begin{cases} \binom{n}{n-k}, & 0 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

ile tanımlanır (Lawden, 1972). Buradan;

$$[p_{nk}] = [p_{n0}, p_{n1}, p_{n2}, p_{n3}, .., p_{nk}, ...]$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots & p_{0n} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{00} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ p_{10} & p_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & p_{n4} & \dots & p_{nn} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$[p_{nk}] = \left[\binom{n}{n-0}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}, \dots, \binom{n}{n-k}, \dots\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \binom{1}{1} & \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} & \binom{2}{0} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \binom{3}{3} & \binom{3}{2} & \binom{3}{1} & \binom{3}{0} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{n-0} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-3} & \dots & \binom{n}{n-k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-3} & \dots & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

şeklindedir.

2.2 Pascal Matrisinin Tersi

Teorem 2.1: A terslenebilir bir matris olmak üzere $AX = Y$ ancak ve ancak $X = A^{-1}Y$ dir (Başar, 2007).

$P_n^{-1} = [p_{nk}]^{-1}$ ile gösterilen Pascal matrisinin tersi her $n, k \in \mathbb{N}$ için; yukarıdaki teoremden dolayı

$X_n = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix}$ ve $Y_n = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \end{bmatrix}$ $(X_n) = X$ ve $(Y_n) = Y$ olmak üzere; $PX = Y$ eşitliğinin her

iki tarafına P^{-1} 'i uygularsak ve $(P^{-1}P)X = P^{-1}Y$ ise $IX = P^{-1}Y$ den $X = P^{-1}Y$ olur. Burada I birim matristir. O halde; $AX = Y$'den

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-3} & \dots & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$x_0 = y_0$$

$$x_0 + x_1 = y_1$$

$$x_0 + 2x_1 + x_2 = y_2$$

$$x_0 + 3x_1 + 3x_2 + x_3 = y_3$$

$$x_0 + 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = y_4$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{n} x_0 + \binom{n}{n-1} x_1 + \binom{n}{n-2} x_2 + \cdots + \binom{n}{0} x_n = y_n$$

$$\vdots$$

olduğundan x_n'leri y_n'ler cinsinden bulursak,

$$x_0 = y_0$$

$$x_1 = -y_0 + y_1$$

$x_2 = y_0 - 2y_1 + y_2$

$x_3 = -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3$

$x_4 = y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4$

$\vdots$

$$x_n = (-1)^{n-k}\binom{n}{n}y_0 + (-1)^{n-k}\binom{n}{n-1}y_1 + (-1)^{n-k}\binom{n}{n-2}y_2 + \cdots + (-1)^{n-k}\binom{n}{0}y_n$$

$\vdots$

y_n'nin katsayıları P Pascal matrisinin tersi olacağından,

$$P^{-1}Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-k}\binom{n}{n} & (-1)^{n-k}\binom{n}{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & (-1)^{n-k}\binom{n}{0} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

öyleyse;

$$P^{-1} = [p_{nk}]^{-1} = \begin{cases} (-1)^{n-k}\binom{n}{n-k}, 0 \le k \le n \\ 0, \qquad k > n \end{cases} \tag{2.1}$$

bulunur (Dutta ve Baliarsingh, 2014).

Sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak Pascal dizi uzayları sırasıyla;

$$p_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w \colon \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x_k \right| < \infty \right\},$$

$$p_c = \left\{ x = (x_k) \in w \colon \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x_k \right) \text{ mevcut} \right\}$$

ve

$$p_0 = \left\{ x = (x_k) \in w \colon \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x_k \right) = 0 \right\}$$

ile tanımlanır (Polat, 2018).

2.3 Pascal Dizi Uzaylarının Ağırlıklı Ortalamaları

Bu bölümde yukarıda tanımlanan Pascal dizi uzaylarının ağırlıklı ortalamalarını hesaplayacağız. Yeni tanımladığımız bu ağırlıklı ortalamaların birer vektör uzayı, normlu uzay ve tam uzay olduklarını göstereceğiz.

$w = (w_n) \in w$ negatif olmayan bir dizi olmak üzere, sırasıyla sıfıra yakınsak Pascal dizi uzaylarının ağırlıklı ortalaması, yakınsak Pascal dizi uzaylarının ağırlıklı ortalaması ve sınırlı Pascal dizi uzaylarının ağırlıklı ortalamasını;

$$p_0(w) = \left\{ \mathrm{x} = (\mathrm{x_n}) \in \mathrm{w}: \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \left(\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-\mathrm{k}} \mathrm{x_k} \right) = 0 \right\},$$

$$p_c(w) = \left\{ \mathrm{x} = (\mathrm{x_n}) \in \mathrm{w}: \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \left(\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-\mathrm{k}} \mathrm{x_k} \right) \text{ mevcuttur.} \right\}$$

ve

$$p_\infty(w) = \left\{ \mathrm{x} = (\mathrm{x_n}) \in \mathrm{w}: \sup_{\mathrm{n}} \left| \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-\mathrm{k}} \mathrm{x_k} \right| < \infty \right\}$$

ile tanımlanır.

$$\mathrm{y_n} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-\mathrm{k}} \mathrm{x_k}, \quad \forall \mathrm{n} \in \mathrm{N} \text{ için } 0 \le k \le n \quad \text{olmak üzere} \tag{2.5}$$

$$\mathrm{y_n} = w_n \binom{n}{n} x_0 + w_n \binom{n}{n-1} x_1 + w_n \binom{n}{n-2} x_2 + \cdots + w_n \binom{n}{0} x_n$$

$n = 0,1,2,3, \ldots$ için;

$$y_0 = w_0 x_0$$

$$y_1 = w_1 x_0 + w_1 x_1 \;\; y_1$$

$$y_2 = w_2 x_0 + 2 w_2 x_1 + w_2 x_2$$

$$y_3 = w_3 x_0 + 3 w_3 x_1 + 3 w_3 x_2 + w_3 x_3$$

$$y_4 = w_4 x_0 + 4 w_4 x_1 + 6 w_4 x_2 + 4 w_4 x_3 + w_4 x_4$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{y_n} = w_n \binom{n}{n} x_0 + w_n \binom{n}{n-1} x_1 + w_n \binom{n}{n-2} x_2 + \cdots + w_n \binom{n}{0} x_n$$

$$\vdots$$

olduğundan bu x_n'leri y_n'ler cinsinden çözersek,

$$x_0 = \frac{1}{w_0} y_0$$

$$x_1 = -\frac{1}{w_0} y_0 + \frac{1}{w_1}\, y_1$$

$$x_2 = \frac{1}{w_0} y_0 - 2\frac{1}{w_1}\, y_1 + \frac{1}{w_2} y_2$$

$$x_3 = -\frac{1}{w_0} y_0 + 3\frac{1}{w_1}\, y_1 - 3\frac{1}{w_2} y_2 + \frac{1}{w_3}\, y_3$$

$$x_4 = \frac{1}{w_0} y_0 - 4\frac{1}{w_1}\, y_1 + 6\frac{1}{w_2} y_2 - 4\frac{1}{w_3}\, y_3 + \frac{1}{w_4}\, y_4$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{x_n}=(-1)^{\mathrm{n}} \frac{1}{\mathrm{w_0}} \binom{\mathrm{n}}{0} \mathrm{y_0} + (-1)^{\mathrm{n+1}} \frac{1}{\mathrm{w_0}} \binom{\mathrm{n}}{1} \mathrm{y_1} + (-1)^{\mathrm{n+2}} \frac{1}{\mathrm{w_0}} \binom{\mathrm{n}}{2} \mathrm{y_2}$$

$$+(-1)^{n+3} \frac{1}{w_0} \binom{n}{3} y_3 + \cdots + (-1)^{n+k} \frac{1}{w_0} \binom{n}{n+k} y_k$$

$$\vdots$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \frac{1}{w_n} \binom{n}{n-k} y_k \tag{2.6}$$

bulunur.

Teorem 2.2: $p_\infty(w), p_c(w)$ ve $p_0(w)$ kümeleri $K = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ cismi üzerinde birer vektör uzaylarıdır.

İspat: Önce $p_\infty(w)$'nın bir lineer uzay olduğunu gösterelim.

L1. Her $x, y \in p_\infty(w)$ ve $\alpha, \beta \in K$ skalerleri için $x + y \in p_\infty(w)$ olmalıdır.

Her $x = \operatorname{Sup}_n \left| \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} x_k \right|, y = \operatorname{Sup}_n \left| \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} y_k \right| \in p_\infty(w)$

olmak üzere;

$$x + y = \operatorname*{Sup}_{n} \left| \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} (x_k + y_k) \right| \quad \text{(üçgen eşitsizliğinden)}$$

$$\leq \operatorname*{Sup}_{n} \left| \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} x_k \right| + \operatorname*{Sup}_{n} \left| \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} y_k \right| < \infty$$

$x + y \in p_\infty(w)$ olduğu görülür.

L2. $x = \operatorname*{Sup}_{n} \left| \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} x_k \right| \in p_\infty(w)$ ve $\alpha \in R$ için;

$\alpha x \in p_\infty(w)$ olduğunu gösterelim.

$$\alpha x = \operatorname*{Sup}_{n} \left| \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} \alpha x_k \right| = \operatorname*{Sup}_{n} \left| \sum_{k=0}^{n} \alpha w_n \binom{n}{n-k} x_k \right|$$

$$= |\alpha| \operatorname*{Sup}_{n} \left| \sum_{k=0}^{n} \alpha w_n \binom{n}{n-k} x_k \right| < \infty$$

olduğundan $\alpha x \in p_\infty(w)$ olur. $p_\infty(w)$ lineer uzaydır. $p_c(w)$ ve $p_0(w)$ benzer şekilde lineer uzay oldukları gösterilebilir.

Teorem 2.3: $p_\infty(w), p_c(w)$ ve $p_0(w)$ dizi uzayları

$$\|x\|_{p_\infty(w)} = \|x\|_{p_c(w)} = \|x\|_{p_0(w)} = \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} x_k \tag{2.7}$$

ile birer normlu uzaylardır.

İspat:

$p_\infty(w)$ dizi uzayı $\|x\|_\infty = \left| \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} x_k \right|$ ile normlu uzaydır.

N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$\Rightarrow$: $x \in p_\infty(w)$ olmak üzere $\|x\|_\infty = 0$ ise

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n} \left| \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} x_k \right| = 0$$

olduğundan,

$$\left|w_n \binom{n}{n} x_0 + w_n \binom{n}{n-1} x_1 + w_n \binom{n}{n-2} x_2 + w_n \binom{n}{n-3} x_3 + \cdots + w_n \binom{n}{0} x_n\right| = 0$$

buradan $x_k = \{0,0,0,\dots\} = \theta$ olduğu görülür.

$\Leftarrow: x \in p_\infty(w)\ ve\ \ x = \theta$ ise $x_k = \{0,0,0,\dots\}$ olur. Buradan;

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{Sup}_n \left|\sum_{k=0}^{n} (w_n) \binom{n}{n-k} x_k\right|$$

$$= \left|w_n \binom{n}{n} x_0 + w_n \binom{n}{n-1} x_1 + w_n \binom{n}{n-2} x_2 + w_n \binom{n}{n-3} x_3 + \cdots + w_n \binom{n}{0} x_n\right|$$

$$= \left|w_n \binom{n}{n} 0 + w_n \binom{n}{n-1} 0 + w_n \binom{n}{n-2} 0 + w_n \binom{n}{n-3} 0 + \cdots + w_n \binom{n}{0} 0\right| = 0$$

$x_k = \{0,0,0,\dots\}$ olduğundan $\|x\|_\infty = 0$ olur.

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|\,, \quad (\alpha \in \mathbb{C})$

$x \in p_\infty(w)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\|\alpha x\|_\infty = \operatorname*{Sup}_n \left|\sum_{k=0}^{n} \alpha w_n \binom{n}{n-k} x_k\right| = \operatorname*{Sup}_n \left|\alpha \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} x_k\right|$$

$$= |\alpha| \operatorname*{Sup}_n \left|\sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} x_k\right|$$

$$= |\alpha|\|x\|_\infty$$

olur.

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$x, y \in p_\infty(w)$ olmak üzere;

$$\|x + y\|_\infty = \operatorname*{Sup}_n \left|\sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} (x_k + y_k)\right|$$

$$= \operatorname*{Sup}_n \left|\sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} x_k + \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} y_k\right|$$

üçgen eşitsizliğinden;

$$\leq \operatorname{Sup}\left|\sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} x_k\right| + \operatorname{Sup}\left|\sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} y_k\right|$$

$$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$p_\infty(w)$ uzayı (2.7) normuna göre normlu uzaydır. Benzer şekilde $p_c(w)$ ve $p_0(w)$ uzayları da (2.7) normuna göre normlu uzay oldukları gösterilebilir.

Teorem 2.4: $p_\infty(w), p_c(w)$ ve $p_0(w)$ uzayları (2.7) normuna göre tam uzaydır.

İspat: $p_\infty(w)$ uzayı (2.7) normuna göre tam uzay olduğunu gösterelim.

Bu uzayda bir Cauchy dizisi alınarak yine bu uzayda bir noktaya yakınsak olduğu gösterelim. $p_\infty(w)$ uzayı tam uzaydır. Yani $p_\infty(w)$ ‘da alınan her cauchy dizisinin bu uzayda yakınsak olduğunu gösterelim. her $t\epsilon\mathbb{N}$ için;

$$\{x^t\} = \left\{x_0^{(t)}, x_1^{(t)}, x_3^{(t)}, \dots\right\} \in \; p_\infty(w)$$

bir Cauchy disizi olsun. O halde;

her $\varepsilon > 0$ ve her $t, r > n_0$ için $\|x^t - x^r\|_\infty < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ vardır. Burada k$\epsilon\mathbb{N}$ dir.

$$|P(x^t - x^r)| < \varepsilon.$$

Bu nedenle $\{Px_k^t\} = \{(Px^0)_k, (Px^1)_k, (Px^3)_k \dots\}$ dizisi $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesinde Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan, her k$\epsilon\mathbb{N}$ için $(Px^t)_k$ dizisi $\mathbb{C}$’de yakınsak olup,

$$\lim_{t\to\infty}(Px^t)_k = (Px)_k \text{ ve } \lim_{m\to\infty}(Px^m)_k = (Px)_k \text{ dır.}$$

O halde her $n > n_0$ $için$;

$$\lim_{m\to\infty}|Px_k^t - Px_k^t| = |P(x_k^t - x_k) - P(x_k^t - x_k)| \leq \varepsilon$$

olur.

Buradan, k,t$\epsilon\mathbb{N}$ ve $m \to \infty$ için $\|x^t - x^m\| \to \infty$ olur. $x = (x_k) \in p_\infty(w)$ olduğundan $p_\infty(w)$ uzayı (2.7) normuna göre bir tam uzayıdır.

Buna göre $p_\infty(w)$ uzayı 2.2 Teorem, 2.3 Teorem ve 2.4 Teoremlerinden dolayı Banach uzayıdır.

1.22 Tanımına göre, $p_c(w)$ ve $p_0\,(w)$ uzayları, $p_\infty(w)$ uzayının kapalı alt uzaylarıdır, bu da $p_c(w)$ ve $p_0\,(w)$ uzayları da aynı zamanda (2.7) normuna göre birer Banach uzayları olur.

Teorem 2.5: $p_\infty(w), p_c(w)$ ve $p_0\,(w)$ dizi uzayları sırasıyla l_∞, c ve c_0 dizi uzaylarına lineer olarak izomorftur. Yani $p_\infty(w) \cong l_\infty, p_c(w) \cong c$ ve $p_0\,(w) \cong c_0$ dır.

İspat: $p_0\,(w) \cong c_0$ olduğunu ispatlamak için $p_0\,(w)$ ve c_0 uzayları arasında bire bir ve örten bir lineer dönüşüm olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $T: p_0\,(w) \to c_0$ olsun.

$x = (\mathrm{x_k})$ ve $y = (\mathrm{y_k})$ olmak üzere $Tx = \sum_{k=0}^{n} w_n \binom{n}{n-k} x_k$

ile tanımlarsak,

1. T lineerdir: her $x, y \in p_0\,(w)$ ve α, β skalerleri için;

$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ olduğunu gösterelim.

$$T(\alpha x + \beta y) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}} (\alpha \mathrm{x_k} + \beta \mathrm{y_k})$$

$$= \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}} \alpha \mathrm{x_k} + \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}} \beta \mathrm{y_k}$$

$$= \alpha \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}} \mathrm{x_k} + \beta \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}} \mathrm{y_k}$$

$$= \alpha T(x) + \beta T(y)$$

2. T dönüşümü birebir bir dönüşümdür. 1.1 Teoremine göre;

her $x \in p_0\,(w)$ için $Tx = 0$ ise $x = 0$ olduğunu gösterelim.

$$y = Tx = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}} \mathrm{x_k} = \Big[w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}} \mathrm{x_0} + w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-1}} \mathrm{x_1} + w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-2}} \mathrm{x_2} + \cdots$$

$$+w_n\binom{\mathrm{n}}{0}\mathrm{x_n}\Big] = 0$$

olması için $x = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla T dönüşümü birebirdir.

3. T dönüşümü örten bir dönüşümdür.

$x \in p_0\,(w)$ ve $y \in c_0$ olmak üzere;

$y_n = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}} \mathrm{x_k}$ ve $x_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{w_k}(-1)^{k+j}\binom{k}{k-j} y_j$ olduğuna göre ;

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}} \mathrm{x_k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{w_k}(-1)^{k+j}\binom{k}{k-j}y_j\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}}\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{w_k}(-1)^{k+m}\binom{k}{m}y_{k-m}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{\mathrm{m}=0}^{\mathrm{n}}\sum_{k=m}^{n} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}}\frac{1}{w_k}(-1)^{k+m}\binom{k}{m}y_{k-m}$$

$$= \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$= 0$$

olduğundan $x \in p_0\,(w)$ olur.

4. T dönüşümü norm korur. $\|x\|_{p_0(w)} = \|Tx\|$ olduğunu gösterelim.

$$\|x\|_{p_0(w)} = \sup_n\left|\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}} \mathrm{x_k}\right|$$

$$= \sup_n\left|\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}}\left[\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{w_k}(-1)^{k+j}\binom{k}{k-j}y_j\right]\right|$$

$$= \sup_n\left|\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}}\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{w_k}(-1)^{k+m}\binom{k}{m}y_{k-m}\right|$$

$$= \operatorname*{Sup}_{n} \left| \sum_{\mathrm{m}=0}^{\mathrm{n}} \sum_{k=m}^{n} w_n \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-\mathrm{k}} \frac{1}{w_k} (-1)^{k+m} \binom{k}{m} y_{k-m} \right|$$

$$= \operatorname*{Sup}_{n} |\mathrm{y_n}| = \|y\|_{c_0} = \|Tx\|$$

olur. Dolayısıyla $p_0\,(w) \cong c_0$ tır. $p_c(w)\; ve\; p_\infty(w)$ uzayları sırasıyla $c\; ve\; l_\infty$ dizi uzaylarına izomorf oldukları benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 2.6: $k \in \mathbb{N}$ için ve $b^{(k)} = \left\{b_n^{(k)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ buradan,

$$b_n^{(k)} = \begin{cases} 0, & (0 \le n < k) \\ (-1)^{n-k} \dfrac{1}{w_n} \dbinom{n}{n-k}, & (\, n \ge k) \end{cases}$$

dur. Öyleyse

i. $\left\{b_n^{(k)}\right\}$, $p_0(w)$ uzayı için bir Schauder tabandır. $x \in p_0(w)$ için

$x = \sum_k \lambda_k b^{(k)}$ olmak üzere burada $\lambda_k = (Px)_k$.

ii. $\left\{e, b^{(0)}, b^{(1)}, \dots, b^{(k)}, \dots\right\}$ dizisi $p_c(w)$ uzayı için bir Schauder tabandır.

$x \in p_c(w)$ için;

$x = le + \sum_k (\lambda_k - 1) b^{(k)}$ buradan $\lim_{k\to\infty} (Px)_k$ ve $\lambda_k = (Px)_k$.

2.4 $\boldsymbol{p_\infty(w)}$, $\boldsymbol{p_c(w)\; ve\; p_0(w)}$ Uzaylarının $\boldsymbol{\alpha-, \beta-\; ve\; \gamma-}$ Dualleri

Bu bölümde $p_\infty(w)$, $p_c(w)\; ve\; p_0(w)$ dizi uzaylarının $\alpha-, \beta-\; ve\; \gamma-$ duallerini hesaplayacağız.

X ve Y dizi uzayları için $S(X, Y)$ aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$S(X, Y) = \{z = (z_k) \in w : xz = (x_k z_k) \in Y\; her\; x \in X\; için\}$ (Garling, 1967).

$\lambda = \{c_0, c, l_\infty\}$ olmak üzere;

λ'nın $\alpha-, \beta-\; ve\; \gamma-$dual uzayları, sırasıyla λ^α, λ^β ve λ^γ ile gösterilmekte olup,

$\lambda^\alpha = S(\lambda, l_1)$, $\lambda^\beta = S(\lambda, cs)\; ve\; \lambda^\gamma = S(\lambda, bs)$

ile tanımlanır (Stieglitz ve Tietz, 1977).

Burada kullanacağımız bazı lemmalar aşağıda verildi.

Lemma 2.1: $A \in (c_0 : l_1) = (c, l_1)$ gerekli ve yeterli şart

$$\sup_{K \in F} \sum_n \left| \sum_{k \in F} a_{nk} \right| < \infty. \tag{3.1}$$

Lemma 2.2: $A \in (c_0 : c)$ için gerekli ve yeterli şart

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \tag{3.2}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_{nk} = a_k, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Lemma 2.3: $A \epsilon (c_0 : l_\infty)$ gerekli ve yeterli şart

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty. \tag{3.3}$$

Teorem 2.7: $\lambda = \{p_\infty(w),\ p_c(w), p_0(w)\}$ olmak üzere bu dizi uzaylarının $\alpha -$ duali,

$$D = \left\{ a = (a_k) \in w \colon \sup_{K \in F} \sum_n \left| \sum_{k \in F} (-1)^{n-k} \frac{1}{w_n} \binom{n}{n-k} a_n \right| < \infty \right\} \text{ kümesidir.}$$

İspat: λ dizi uzyının $\alpha - duali$;

$$\lambda^\alpha = \left\{ a = (a_k) \in w \colon \sum_{k=0}^{\infty} |a_k x_k| < \infty \right\}$$

$$= \{ a = (a_k) \in w \colon (a_k x_k) \in l_1 \}$$

olduğundan;

$$a_n x_n = a_n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{w_n} \binom{n}{n-k} y_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{w_n} \binom{n}{n-k} a_n y_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_{nk} y_k = (By)_n$$

olur. Dolayısıyla, $x \in p_\infty(w),\ p_c(w)\ ve\ p_0(w)$ için $ax = (a_n x_n) \in l_1$ olması için $By \in l_1$ olmalıdır. Dolayısı ile $y \in l_\infty, c\ ve\ c_0$ olur. Lemma 2.1'den;

$$\sup_{K\in F} \sum_n \left| \sum_{k\in F} (-1)^{n-k} \frac{1}{w_n} \binom{n}{n-k} a_n \right| < \infty$$

olur. Bundan dolayı $\{p_\infty(w)\}^\alpha = \{p_c(w)\}^\alpha = \{p_0(w)\}^\alpha = D$ olur.

Teorem 2.8: D_1, D_2 ve D_3

$$D_1 = \left\{ a = (a_k) \in w : \operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_i \right| < \infty \right\},$$

$$D_2 = \left\{ a = (a_k) \in w : \sum_{i=k}^{\infty} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_i\ her\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

ve

$$D_3 = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_i \right\}$$

kümeleri ile tanımlanırsa, bu durumda;

$\{p_0(w)\}^\beta = D_1 \cap D_2,$

$\{p_c(w)\}^\beta = D_1 \cap D_2 \cap D_3$

ve

$\{p_\infty(w)\}^\beta = D_2 \cap D_3$

olur.

İspat: İspatı sadece $p_0(w)$ uzayı için yapalım. $p_c(w)$ ve $p_\infty(w)$ uzayları için ispat benzer şekilde yapılır.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} y_i \right] a_k = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_i \right] y_k$$

$$= (Dy)_n \tag{3.5}$$

Buradan;

$$D = d_{nk} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_i, & 0 \le k \le n \\ 0, & (k > n) \end{cases} \qquad (n,k) \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Böylece (3.2) ile (3.5)'den her $x = (x_k) \in p_0(w)$ için $ax = (a_k x_k) \in cs$ ancak ve ancak her $y = (y_k) \in c_0$ için $Dy \in c$s olmasıdır. Bu nedenle (3.2) ve (3.3)'ten $k \in \mathbb{N}$ için

$\lim_{n\to\infty} d_{nk}$ mevcut, (k $\in \mathbb{N}$)

olur ve

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_i \right| < \infty$$

Dolayısıyla $\{p_0(w)\}^{\beta} = D_1 \cap D_2$ olur.

Teorem 2.9: $p_\infty(w),\ p_c(w)\ ve\ p_0(w)$ dizi uzaylarının $\gamma -$ duali D_1'dir

İspat: İspatı sadece $p_0(w)$ için verelim.

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k x_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \frac{1}{w_n} \binom{k}{k-i} y_i \right] \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_i \right] y_k \right|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_i \right| |y_k|.$$

her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k x_k \right| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_i \right| |y_k| \right)$$

$$\le \|y\|_{c_0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_i \right| \right) \le \infty$$

olur. Buradan $a = (a_k) \in \{p_0(w)\}^{\gamma}$ olur. O halde,

$$D_1 \subset \{p_0(w)\}^{\gamma}. \tag{3.7}$$

Tersine, $x \in p_0(w)$ için $a = (a_k) \in \{p_0(w)\}^\gamma$ olsun. Buradan;

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_i\right]y_k\right) \in l_\infty$$

olduğundan $ax = (a_k x_k) \in bs$ dir. Bu, (3.6)'da verilen D matrisinin $(c_0: l_\infty)$ sınıfında olduğu anlamına gelir. Bu nedenle,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_i\right|\right) < \infty$$

olur. Burada $a = (a_k) \in D_1$ olur. Başka bir ifadeyle,

$$\{p_0(w)\}^\gamma \subset D_1 \tag{3.8}$$

Bu nedenle (3.7) ve (3.8)'den $p_0(w)$ dizi uzaylarının γ dualinin D_1 olduğu anlaşılır.

2.5 Pascal Dizi Uzaylarıyla İlgili Bazı Matris Dönüşümleri

Matris dönüşümleri ispatında kullanacağımız bazı lemmaları verelim.

Lemma 2.4: BK- uzayları arasındaki matris dönüşümleri süreklidir (Stieglitz ve Tietz, 1997).

Lemma 2.5: A ϵ (c:l_p) olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K\in F}\sum_{n}\left|\sum_{k\in K}a_{nk}\right|^p < \infty, \qquad 1 \le p < \infty \text{ (Stieglitz ve Titz, 1997).} \tag{4.1}$$

Teorem 2.10: A ϵ $(p_c(w): l_p)$ olması için gerek ve yeter şart

$1 \le p < \infty$, olmak üzere;

$$\sup_{K\in F}\sum_{k}\left|\sum_{k\in K}\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni}\right|^p < \infty, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni} \qquad \text{her k} \in \mathbb{N} \text{ için,} \tag{4.3}$$

$$\sum_{k}\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni} \quad \text{her k} \in \mathbb{N} \text{ için yakınsak,} \tag{4.4}$$

$$\sup_{m\epsilon\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{m}\left|\sum_{i=k}^{m}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni}\right| < \infty \qquad n \in \mathbb{N}\,, \tag{4.5}$$

ve $p = \infty$ için (4.3) ve (4.5) sağlanması ve

$$\sup_{n\epsilon\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{i=k}^{m}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni}\right| < \infty. \tag{4.6}$$

olmasıdır.

İspat: $1 \leq p < \infty$ olsun. (4.2) - (4.6) şartlarının sağlandı kabul edilsin. Bu durumda A ϵ $(p_c(w): l_p)$ olduğu gösterilmelidir. Herhangi bir $x \in p_c(w)$ alalım. O zaman kabulden her $k, n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk}) \in \left(p_c(w)\right)^{\beta}$ olup, Ax mevcuttur. Şimdi her $k, n \in \mathbb{N}$ için $G = (g_{nk})$ matrisini tanımlayalım:

$$g_{nk} = \sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni}.$$

O zaman (4.1) koşulu G matrisi için sağladığından $G \in (c: l_p)$ olur. Şimdi $\sum_k a_{nk}x_k$ serisinin s. kısmi toplamından elde edilen eşitliği ele alalım:

$$\sum_{k=0}^{s} a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{s}\sum_{i=k}^{s}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni}y_i, \qquad m, n \in \mathbb{N} \tag{4.7}$$

bu nedenle (4.7)'den $s \to \infty$ için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni}y_i, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4.8}$$

olur. Buradan l_p normu alınırsa,

$$\|Ax\|_{l_p} = \|Gy\|_{l_p} < \infty. \tag{4.9}$$

olur. Dolayısıyla A ϵ $(p_c(w): l_p)$ olur.

Şimdi $p = \infty$ olsun. Herhangi $x \in p_c(w)$ için (4.2) ve (4.6) şartlarının sağlandığı kabul edilsin. O halde her $k, n \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} \in \left(p_c(w)\right)^\beta$ olup, Ax mevcuttur. Buradan (4.8)'de ki l_∞ normu alınırsa;

$$\|Ax\|_{l_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_k g_{nk}\right| \leq \|y\|_{l_\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_k |g_{nk}| < \infty$$

olduğundan $A \in (p_c(w): l_\infty)$ olur.

Tersine, $A \in \left(p_c(w): l_p\right)$ olsun. O halde $p_c\; ve\; l_p$ BK- uzayları olup, BK- uzayları arasındaki matris dönüşümleri sürekli olduğundan;

$$\|Ax\|_{l_p} = K\|x\|_{h_c} \tag{4.9}$$

olacak şekilde $x \in p_c(w)$ için $K > 0$ sabiti mevcuttur.

Her $x \in p_c(w)$ için (4.10) eşitliği

$$x = (x_k) = \sum_{k\in F} b^{(k)} \epsilon p_c(w)$$

için doğru olup burada,

$$b^{(k)} = \left\{b_n^{(k)}\right\} = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < k \\ (-1)^{n-k} \dfrac{1}{w_n} \dbinom{n}{n-k}, & n > k \end{cases}$$

dır. O halde;

$$\|Ax\|_{l_p} = \left[\sum_n \left|\sum_{k\in F} \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k}\right|^p\right]^{1/p} \leq K\|x\|_{p_c} = K,$$

olur. Böylece (4.2) şartı sağlanmış olur.

Teorem 2.11: $A \in (p_c(w): c)$ olması için gerek ve yeter şart (4.3), (4.5) ve (4.6) şartlarını sağlaması,

her $k \epsilon \mathbb{N}$ için;

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni}=a_k \tag{4.11}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k}\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni}=a. \tag{4.12}$$

olmasıdır.

İspat: (4.3), (4.5), (4.6), (4.11) ve (4.12) şartlarının sağlandığını kabul edilsin. Bu durumda $A\in(p_c(w):c)$ olduğu gösterilecektir. $k\to\infty$ için $x_k\to l$ olacak şekilde $x=(x_k)\in p_c(w)$ olsun. O halde Ax mevcuttur ve $x=(x_k)$ ile $y=(y_k)$ dizisinin arasındaki ilişkiden dolayı $k\to\infty$ için $y_k\to l$, olacak şekilde yakınsaktır. (4.6) ve (4.11) şartları göz önüne alınırsa;

$$\sum_{j=0}^{k}|a_j|\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j}\left|\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni}\right|<\infty$$

olduğu her $n\epsilon\mathbb{N}$ için, görülür. Böylece $a_n\in l_1$ olur. (4.8) göz önüne alındığında

$$\sum_{k}a_{nk}x_k=\sum_{k}\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni}(y_k-l)$$
$$+l\sum_{k}\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\frac{1}{w_n}\binom{i}{i-k}a_{ni}y_k. \tag{4.13}$$

olduğu görülür. Burada $n\to\infty$ için birinci kısım(4.6) ve (4.11)'e göre $\sum_k a_k(y_k-l)$ ye gider ve ikinci kısım (4.11)'den dolayı la ya gider. O zaman $n\to\infty$ için (4.13)'ten dolayı;

$$(Ax)_n\to\sum_{k}a_k(y_k-l)+la$$

olur. Böylece $A\in(p_c(w):c)$ olduğu görülür.

Tersine, $A\in(p_c(w):c)$ olduğu kabul edilsin. Buradan $c\subset l_\infty$ olduğundan (4.3), (4.5) ve (4.6) koşullarının gerekliliğini aşağıdaki eşitsizlikten doğrudan elde edilir:

$$\sup_n \sum_k \left| \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_{ni} \right| < \infty.$$

(4.11)’in sağlandığını göstermek için $x = b^{(k)} = \left\{ b_n^{(k)} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \in p_c(w)$ dizisi,

$$b^{(k)} = \left\{ b_n^{(k)} \right\} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k < n \\ (-1)^{n-k} \frac{1}{w_n} \binom{n}{n-k}, & n \geq k \end{cases}$$

tanımlanırsa, her $x \in p_c(w)$ için Ax yakınsaktır. Yani her $k \epsilon \mathbb{N}$ için,

$$Ab^{(k)} = \left\{ \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_{ni} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

olur. Dolayısıyla (4.11) şartı sağlanır. Benzer şekilde $x = e = (1,1,1, \ldots)$ olarak (4.8)’de alındığında;

$$Ax = \left\{ \sum_k \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \frac{1}{w_n} \binom{i}{i-k} a_{ni} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

olur. Dolayısıyla (4.12) şartı sağlanır.

3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

Pascal matrisi Blaise Pascal tarafından tanımlandı. (Polat 2018)’de sırasıyla sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı dizi uzaylarını tanımladı. Bizde bu Pascal dizi uzaylarının ağırlıklı ortalamalarını tanımladık. Bu ortalama ile oluşturulan sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı Pascal dizi uzayların ağırlıklı ortalamalarını tanımladık. Bu oluşturduğumuz yeni dizi uzayların birer Banach uzay olduklarını α, β ve γ duallerini hesapladık. Ayrıca Pascal dizi uzayları ağırlıklı ortalamalarının matris dönüşümlerini karakterize ettik. İleride bu dizi uzaylardan bilinen matrislere ve bilinen matrislerden bu dizi uzaylarına matris dönüşümleri de yapılabilir. Ayrıca bu Pascal dizi uzaylarının ağırlıklı ortalamalarının birinci mertebeden farkları hesaplanabilir.

KAYNAKLAR

Altay, B., Başar, F. 2005. On some Euler sequence spaces of nonabsolute type, *Ukrainian Mathematical Journal*, 57 (1), 1-17.

Axler, S., 2015, *Linear algebra done right* (3rd ed.), Springer, New York, 340.

Balcı, M., 1997, *Matematik analiz: Cilt 1*, Balcı Yayınları, Ankara, 520.

Başar, F., 2007, *Lineer Cebir*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 410.

Bilgen, T. 1994. On statistical convergence, *Analele Universităţii Timişoara, Seria Matematică-Informatică*, 32 (1), 3-7.

Boos, J., 2000, *Classical and modern methods in summability*, Clarendon Press, Oxford, 438.

Dutta, S., Baliarsingh, P. 2014. On some Toeplitz matrices and their inversions, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 22 (3), 420-423.

Garling, D. 1967. The β-and γ-duality of sequence spaces, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 63 (4), 881-888.

Kızmaz, H. 1981. On certain sequence spaces, *Canadian Mathematical Bulletin*, 24 (2), 169-176.

Kreyszig, E., 1991, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley and Sons, New York, 704.

Lawden, G. 1972. Pascal matrices, *The Mathematical Gazette*, 56 (398), 325-327.

Maddox, I. J., 1988, *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 278.

Móricz, F., Rhoades, B. 1988. Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability matrices, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 104 (3), 511-519.

Musayev, B., Alp, M., 2000, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları Tic. Ltd. Şti., Kütahya, 390.

Orlicz, W., 1992, *Linear functional analysis*, World Scientific, Singapore, 258.

Polat, H., Başar, F. 2007. Some Euler spaces of difference sequences of order m, *Acta Mathematica Scientia*, 27 (2), 254-266.

Polat, H. 2018. Some new Pascal sequence spaces, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 1 (1), 61-68.

Stieglitz, M., Tietz, H. 1977. Matrixtransformationen von Folgenräumen eine Ergebnisübersicht, *Mathematische Zeitschrift*, 154, 1-16.

Şuhubi, E. S., 2001, *Fonksiyonel Analiz*, İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı, İstanbul, 430.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı **:** Kemal BAYRAM

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Antakya Fevzi Çakmak Lisesi	2007
Üniversite	:	Niğde Ömer Halis Demir	2013
Yüksek Lisans	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2013-2014	Niğde Final Eğitim Kurumları	Matematik Öğrt.
2015-2016	Mustafa Kemal Orta Okulu	Matematik Öğrt.
2016-2017	Bilgi Analiz Eğitim Kurumu	Matematik Öğrt.
2018-2020	Ekin Eğitim Kurumları	Matematik Öğrt.
2020-2025	KMTAL	Matematik Öğrt.