



T.C.

MUĞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT GÜÇLÜ KESİMLİK İÇERİK DÜZGÜNEĞİN İSTATİSTİKSEL  
YAKINSAKLIĞI

Koray İbrahim ATABEY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2019

MUĞ

Her Hakkı Saklıdır



T.C.  
MUG ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT GÜNLÜK İŞİĞİ FARK DÜZİERİĞİNİN İSATİSTİKSEL  
YAKINSAKLIĞI

Koray İbrahim ATABEY

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman  
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

Haziran-2019  
MUG  
Her Hakkı Saklıdır

## TEZ KABUL VE ONAYI

Doç. Dr. Muhammed ÇINAR danışmanlığında, Koray İbrahim ATABEY tarafından hazırlanan “Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı” adlı tez çalışması 11/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

#### Başkan

Prof. Dr. Mikail ET  
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi,  
Matematik Bölümü

#### Danışman

Doç. Dr. Muhammed ÇINAR  
Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi,  
Matematik Eğitimi


#### Üye

Prof. Dr. Harun POLAT  
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Bölümü

### İmza







Yukarıdaki sonuç;  
Enstitü Yönetim Kurulu 19/06/2019 Tarih ve 16/IV nolu kararı  
ile onaylanmıştır.

  
Doç. Dr. Sedat BOZARI  
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

  
Koray İbrahim ATABEY

Tarih: 11.06.2019

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### ÇİFT İNDİSLİ KESİRLİ FARK DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

**Koray G̃brahim ATABEY**

**Muğ Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR**

**2019, 30 Sayfa**

**Jüri**

**Danışman: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR**

**Jüri Üyesi: Prof. Dr. Mikail ET**

**Jüri Üyesi: Prof. Dr. Harun POLAT**

Bu çalışmanın amacı, çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı,  $(\lambda, \mu)$  – istatistiksel yakınsaklık ve Cesaro, kuvvetli p-Cesaro, De la Vallée-Poussin, kuvvetli p- De la Vallée-Poussin toplanabilirlik tanımlarını vererek bunlar arasındaki ilişkileri incelemek ve istatistiksel yakınsaklık kavramını genişletmektir.

Bu tez beş bölüme ayrılmıştır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde tezin konusu hakkında genel bilgiler verilerek tezin amacı vurgulanmıştır ve sonraki bölümlerden bahsedilmiştir. İkinci bölümde kaynak araştırmasına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde bulgular bölümünü aydınlatmak için bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ve çift indisli kesirli fark dizilerinin  $(\lambda, \mu)$  – istatistiksel yakınsaklığı tanımları yapılarak örnek ve teoremlere yer verilmiştir. Son bölümde bazı sonuçlara ulaşılarak bu konu ile ilgili ileride çalışılabilecek alanlara önerilerde bulunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:**  $\lambda$  – İstatistiksel yakınsaklık, İstatistiksel yakınsaklık, Kesirli farklar

## ABSTRACT

## MS THESIS

### ON STATISTICAL CONVERGENCE OF DIFFERENCE DOUBLE SEQUENCE OF FRACTIONAL ORDER

**Koray G̃brahim ATABEY**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF  
MUĞ ALPARSLAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS SCIENCE**

**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammed ÇINAR**

**2019, Page 30**

#### **Jury**

**Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammed ÇINAR**

**Jüri Üyesi: Prof. Dr. Mikail ET**

**Jüri Üyesi: Prof. Dr. Harun POLAT**

The aim of this study is to explore the relationship between statistical convergence, double  $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$ -statistical convergence, Cesaro, p-strongly Cesaro, De la Vallée-Poussin, p-strongly De la Vallée-Poussin summability in statistical convergence of difference double sequence of fractional order via giving their definitions and to expand the definition of statistical convergence.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is reserved for the introduction. In this chapter, the aim of the thesis is given by giving general information about the subject of the thesis and the following chapters are mentioned. In the second chapter, the source research is included. In the third chapter, some basic definitions and theorems are given to illuminate the findings section. In the fourth chapter, on statistical convergence of difference double sequences of fractional order and the double  $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$  - statistical convergence definitions and examples and theorems are given. In the last chapter, some results were reached and suggestions were made about the area that can be studied in the future.

**Keywords:**  $\lambda$  –Statistical Convergence, Fractional Difference and Statistical Convergence

## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında göstermiş olduğu her türlü yardım, rehberlik ve çok değerli katkılarından dolayı danışman hocam Doç. Dr. Muhammed ÇINAR' a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca bu süreçte bana destek olan eğim Nejla ATABEY ve kızım Asya ATABEY' e de çok teşekkür ediyorum.

Koray Öbrahim ATABEY  
MUğ-2019

## İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	2
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	3
3.1. Temel tanım ve teoremler .....	3
3.2. Doğal yoğunluk fonksiyonu ve İstatistiksel yakınsaklık .....	6
3.3. Fark Dizileri.....	11
3.4. Kesirli Fark Dizileri.....	12
3.5. Kesirli Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı.....	14
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	15
4.1. Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı .....	15
4.2. Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin $(\lambda, \mu)$ – İstatistiksel Yakınsaklığı.....	21
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	26
5.1 Sonuçlar .....	26
5.2 Öneriler .....	26
KAYNAKLAR .....	27
EKLER.....	29
ÖZGEÇMİŞ.....	30

## SİMGELER

$N$	: Doğal sayılar kümesi
$R$	: Reel sayılar kümesi
$\delta(K)$	: $K$ kümesinin doğal yoğunluğu
$c$	: Yakınsak dizi uzaylarının kümesi
$c_2$	: Çift indisli yakınsak dizi uzayı
$S$	: İstatistiksel yakınsak dizi uzayı
$S_2$	: İstatistiksel yakınsak çift indisli dizi uzayı
$[C, 1, 1]$	: Tüm kuvvetli <i>Cesaro</i> toplanabilir dizi uzayı
$[V, \lambda, \mu]$	: Tüm kuvvetli $(V, \lambda, \mu)$ toplanabilir dizi uzayı
$\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$	: İstatistiksel yakınsak çift indisli kesirli fark dizilerinin uzayı
$\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu})$	: $(\lambda, \mu)$ – İstatistiksel yakınsak çift indisli kesirli fark dizilerinin uzayı
$w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$	: Kuvvetli $p$ - <i>Cesaro</i> toplanabilir çift indisli kesirli fark dizilerinin uzayı
$[V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$	: Kuvvetli $p$ - Vallée-Poussin toplanabilir çift indisli kesirli fark dizilerinin uzayı

## 1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık Analizin çok çalışılan konularından biridir. Yıllar boyunca ve farklı isimler altında *Fourier* analizi teorisinde, *ergodik* teoride, sayı teorisinde, ölçü teorisinde, trigonometrik serilerde, Turnike teorisinde ve *Banach* uzaylarında istatistiksel yakınsama tartışılmıŒ. İstatistiksel yakınsaklık *Fast* (1951), *Steinhaus* (1951), *Schoenberg* (1959), *Zygmund* (1979), *Salat* (1980), *Fridy* (1985), *Connor* (1988), *Rath* ve *Tripathy* (1994), Nuray ve SavaŒ (1995), *Mursaleen* (2000), SavaŒ (2000), Et ve Nuray (2001), Duman ve Orhan (2004), GÜngör ve Gökhan (2005) ve daha birçok bilim adamı tarafından çalışılmıŒ.

Bu çalışmanın amacı, çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı,  $(\lambda, \mu)$  – istatistiksel yakınsaklık ve Cesaro, kuvvetli p- Cesaro, De la Vallée-Poussin, kuvvetli p- De la Vallée-Poussin toplanabilirlik tanımlarını vererek bunlar arasındaki ilişkileri incelemek ve istatistiksel yakınsaklık kavramını genişletmektir.

Özgün olarak bu tezde “Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı” ve “Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin  $(\lambda, \mu)$  – İstatistiksel Yakınsaklığı” tanımları verilmiŒ.

Tezin ikinci bölümünde kaynak araştırmasına değinilmiŒ. Üçüncü bölümde ise dördüncü bölümdeki bulgular bölümünü aydınlatmak için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilmiŒ. Dördüncü bölümde çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı, çift indisli kesirli fark dizilerinde  $(\lambda, \mu)$  – istatistiksel yakınsaklık, Cesaro, kuvvetli p- Cesaro, De la Vallée-Poussin, kuvvetli p- De la Vallée-Poussin toplanabilirlik tanımları yapılarak örnek ve teoremlere yer verilmiŒ. Son bölümde bazı sonuçlara ulaŒarak bu konu ile ilgili ileride çalışabilecek alanla ilgili öneride bulunulmuŒ.

## 2. KAYNAK ARAĖTIRMASI

İstatistiksel yakınsaklık fikri, 1935'te VarĖova'da yayınlanan *Zygmund* (1979)'un monografisinin ilk baskısında verildi. İstatistiksel yakınsama kavramı, *Steinhaus* (1951) ve Fast (1951) tarafından kısa bir not olarak verildi ve daha sonra bağımsız olarak *Schoenberg* (1959) istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak inceledi.

İstatistiksel yakınsaklık, yaklaşıkelli yıldan fazla bir süre önce tanıtılsa da, son zamanlarda aktif bir arağtırma alanı haline geldi. Farklı matematikçiler istatistiksel yakınsaklığın özelliklerini incelediler ve bu kavramı ölçüm teorisi, trigonometrik seri, yaklaşımteorisi, lokal dığbükey uzaylar, sonlu toplamsal küme fonksiyonları, Banach uzaylarında ve doğal sayı kümesinin Stone-Chech kompaktlaşırmasının alt kümeleri gibi çeğgili alanlarda uyguladılar.

Çift indisli diziler ilk kez Pringsheim (1900) tarafından verildi ve Türkiye'de Türkmenoğlu (1993) tarafından "Bazı Çift İndisli Dizi Uzayları" bağlığı altında doktora tezi olarak çalışıldı. Fark dizileri kavramı Kızmaz (1981) tarafından tanımlandı. Et ve Çolak (1995) bu kavramı genelleğtirdi. Baliarsingh (2013) kesirli fark operatörlerini kullanarak bazı dizi uzaylarını genelleğtirdi, daha sonra Baliarsingh ve Dutta (2015), Baliarsingh (2016) konuya ilişkin çalışmalar yaptılar. Kesirli fark operatörü kullanılarak dizilerin istatistiksel yakınsaklığı Baliarsingh ve ark., (2018) tarafından genelleğtirildi.

Yukarıda verilenler kaynaklardan faydalanarak çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı,  $(\lambda, \mu)$  – istatistiksel yakınsaklığı ve Cesaro, kuvvetli p- Cesaro, De la Vallée-Poussin, kuvvetli p- De la Vallée-Poussin toplanabilirliği tanımları verilerek bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiğ ve istatistiksel yakınsaklık kavramı geniğtilmiğtir.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Tezin bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

#### 3.1. Temel Tanım ve Teoremler

**Tanım 3.1.**  $X$  boş olmayan bir küme ve  $F'$  de  $R$  veya  $C$  kümelerinden birini gösterebilir.

$$+: X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x + y,$$

$$\cdot: F \times X \rightarrow X, \quad (a, x) \mapsto ax,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her  $x, y, z \in X$  ve  $a, b \in F$  için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1.  $x + y = y + x$ ;
2.  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ;
3. Her  $x \in X$  için  $x + 0 = x$  eğiğini sağlayan bir tek  $0 \in X$  vardır;
4. Her  $x \in X$  için  $x + (-x) = 0$  eğiğini sağlayan bir tek  $-x \in X$ ;
5. Her  $x \in X$  için  $1 \cdot x = x$ ;
6.  $a(x + y) = ax + ay$ ;
7.  $(a + b)x = ax + bx$ ;
8.  $(ab)x = a(bx)$ .

Bu durumda  $X$  e  $F$  cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.  $F = R$  alınırsa  $X$  e reel vektör uzayı ve  $F = C$  alınırsa  $X$  e kompleks vektör uzayı adı verilir (Musayev ve Alp., 2000).

**Tanım 3.2.**  $X$  bir  $F$  cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\|: X \rightarrow R^+, \quad x \mapsto \|x\|$$

dönüşümü  $\forall x, y \in X$  ve  $\forall a \in F$  için

$$N1. \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$N2. \|ax\| = |a| \|x\| ;$$

$$N3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (üçgen eğiizliği)}$$

özelliklerini sağlıyorsa  $\|\cdot\|$  dönüşümü  $X$  üzerinde bir norm adını alır ve bu durumda  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisine bir normlu uzay denir (Musayev ve Alp., 2000).

**Tanım 3.3.** Bir  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzaydaki her *Cauchy* dizisi  $X$  içinde bir limite yakınsıyorsa, bu  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* adı verilir (Musayev ve Alp., 2000).

Kompleks terimli tüm  $x = (x_k)$ ,  $(k = 1, 2, 3, \dots)$  dizileri kümesini  $w$  ile göstereceğiz.  $x = (x_k), y = (y_k) \in w$  ve  $\alpha$  bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

Çeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$\ell_\infty = \{x = (x_k): \sup_k |x_k| < \infty\}$$

sınırlı,

$$c = \{x = (x_k): \lim_k x_k \text{ mevcut}\}$$

yakınsak,

$$c_0 = \{x = (x_k): \lim_k x_k = 0\}$$

sıfır dizileri uzayı,  $\|x\| = \sup_k |x_k|$  normu ile birer Banach uzayıdır

(Musayev ve Alp., 2000).

**Tanım 3.4.**  $X$  boş olmayan bir küme ve  $k \in N^+$  olmak üzere  $x_k: N^+ \rightarrow X$  fonksiyonuna dizi denir. Diziler değer kümesine göre isimlendirilirler;  $X = R$  olduğunda reel terimli dizi,  $X = C$  olduğunda kompleks terimli dizi olarak söylenir (Musayev ve Alp., 2000).

**Tanım 3.5.**  $x = (x_k)$  reel terimli bir dizi,  $L \in R$  olmak üzere  $\forall \varepsilon > 0$  için öyle bir  $N_0 \in N$  var ve her  $k \geq N_0(\varepsilon) \in N$  için  $|x_k - L| \leq \varepsilon$  oluyorsa  $x = (x_k)$  dizisi  $L$ 'ye yakınsıyor denir ve  $x_k \rightarrow L$  şeklinde gösterilir (Musayev ve Alp., 2000).

**Tanım 3.6.**  $x = (x_k)$  dizi verilsin. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0$$

ise  $x = (x_k)$  dizisi  $L$ 'ye kuvvetli *Cesaro* toplanabilirdir. Tüm kuvvetli *Cesaro* toplanabilir dizi uzayını  $[C,1]$  şeklinde, yani

$$[C, 1] = \left\{ x = (x_k): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0, \text{ bazı } L \text{ ler için} \right\}$$

olarak tanımlayacağız (Boss ve Cass, 2000).

**Tanım 3.7.**  $N$  doğal sayılar kümesi ve  $X$  boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere

$$f: N \times N \rightarrow X$$

$$(j, k) \rightarrow f(j, k) = x_{jk}$$

Çıkında tanımlanan  $f$  fonksiyonuna “çift indisli dizi” denir. Çift indisli  $x = (x_{jk})$  dizisini

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & \dots & x_{0k} \\ x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{j0} & x_{j1} & \dots & x_{jk} \end{bmatrix}$$

Çıkında bir tablo olarak düğünbiliriz (Burkill ve Burkill, 1980).

Bu çalışmada

$$w^2 = \{x = (x_{jk}): \forall j, k \in N \text{ için } (x_{jk}) \in C\}$$

ile tüm kompleks terimli çift indisli dizi uzaylarını,

$$l_\infty^2 = \{x = (x_{jk}): \forall j, k \in N \text{ için } \sup_{j,k \geq 1} |x_{jk}| < \infty\}$$

ile çift indisli sınırlı dizi uzaylarını,

$$c^2 = \{x = (x_{jk}): \forall j, k \in N \text{ için } \lim_{j,k \rightarrow \infty} x_{jk} \text{ mevcut}\}$$

ile çift indisli yakınsak dizi uzaylarını,

$$c_0^2 = \{x = (x_{jk}): \forall j, k \in N \text{ için } \lim_{j,k \rightarrow \infty} x_{jk} = 0\}$$

ile çift indisli sıfıra yakınsayan dizilerin uzayını göstereceğiz (Türkmenoğlu, 1993).

**Tanım 3.8.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için öyle  $N_0 \in N$  var ve tüm  $j, k \geq N_0$  için  $|x_{jk} - L| \leq \varepsilon$  oluyorsa  $x = (x_{jk})$  dizisinin *Pringsheim* limiti  $L$  dir denir (Pringsheim, 1900).

**Tanım 3.9.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için öyle  $N_0 \in N$  ve  $M_0 \in N$  sayıları var ve tüm  $j, m \geq N_0$ ,  $k, n \geq M_0$  için  $|x_{mn} - x_{jk}| \leq \varepsilon$  oluyorsa  $x = (x_{jk})$  dizisine bir *Cauchy* dizisi denir (Pringsheim, 1900).

**Tanım 3.10.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi olsun. Tüm  $j, k \in N$  için öyle bir  $M > 0$  sayısı var ve  $|x_{jk}| < M$  oluyorsa  $x = (x_{jk})$  dizisi sınırlıdır denir (Mursaleen ve Edely, 2003).

### 3.2. Doğal Yoğunluk Fonksiyonu ve İstatistiksel Yakınsaklık

**Tanım 3.11** Doğal yoğunluk fonksiyonu,  $K$  doğal sayıların bir alt kümesi olmak üzere

$$\delta: K \subset N \rightarrow [0,1]$$

olarak tanımlanır.  $|K(n)|$  doğal sayıların bir  $K$  alt kümesini  $n$ ' den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta_1(K) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|K(n)|}{n}$$

ifadesine  $K$  kümesinin doğal yoğunluğu ya da yoğunluğu denir.  $(\frac{|K(n)|}{n})$  dizisinin limiti mevcut ise  $K$  kümesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K(n)|}{n}$$

şeklinde tanımlanır (Niven ve Zuckerman 1980).

**Tanım 3.12**  $x = (x_k)$  bir dizi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\delta(\{k \in N: |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir  $L$  sayısı varsa  $x = (x_k)$  dizisi  $L$ ' ye istatistiksel yakınsaktır denir.

$$\text{st} - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L$$

veya

$$x_k \rightarrow L(S)$$

şeklinde gösterilir (Fast, 1951).

**Teorem 3.13.** Bir dizi yakınsaksa aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır (Fridy, 1985).

**İspat:**  $x_k \rightarrow L$  olsun. O halde  $\forall \varepsilon > 0$  için öyle bir  $N_0 \in N$  var ve her  $k \geq N_0(\varepsilon) \in N$  için  $|x_k - L| \leq \varepsilon$  oluyor demektir. Fakat  $k \leq N_0$  için  $|x_k - L| \geq \varepsilon$  tir. Buda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot N_0 = 0$$

anlamına gelir ki  $x_k \rightarrow L(S)$  sonucuna bizi ulaştırır. Bu teoremin tersi doğru değildir bunu aşağıdaki örnekle gösterebiliriz.

**Örnek 3.14.**

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}$$

Şeklinde tanımlanan  $x = (x_k)$  dizisini inceleyelim. Her  $\varepsilon > 0$  için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \neq 1\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} = 0$$

olduğundan  $st - \lim x = 1$  olur. Buna rağmen dizi ne sınırlıdır ne de yakınsaktır.

**Tanım 3.15.**  $\forall \varepsilon > 0$  ve  $h. h. k$  için  $|x_k - x_{N_0}| \leq \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  varsa, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x_{N_0}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $x = (x_k)$  dizisine *istatistiksel Cauchy* dizi denir (Fridy, 1985).

**Tanım 3.16.** Tüm pozitif reel sayıların azalmayan, sonsuza giden ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 0$$

koşulunu sağlayan  $\lambda = (\lambda_n)$  dizilerinin kümesini  $\Lambda$  sembolüyle göstereceğiz. (Mursaleen, 2000).

Tezde  $n_0 \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  olmak üzere  $N_{n_0}$  kümesini

$N_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$  şeklinde tanımlayacağız.

**Tanım 3.17.**  $\lambda = (\lambda_n)$  dizisi, pozitif reel sayıların azalmayan, sonsuza giden ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 0$$

$$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$$

koşulunu sağlayan bir dizisi olsun. Genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin ortalaması

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j \in I_n} x_j$$

şeklinde tanımlanır.  $n \rightarrow \infty$  iken  $t_n(x) \rightarrow L$  gidiyorsa  $x = (x_k)$  dizisi  $L$ 'ye

$(V, \lambda)$  – toplanabilir denir (Mursaleen, 2000).

**Tanım 3.18.**  $K \subset \mathbb{N}$  olsun ve  $K$ 'nin  $\lambda$  –yoğunluğunu

$$\delta_\lambda(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n: k \in K\}|$$

olarak tanımlanır. Burada  $\lambda_n = n$  olması durumunda  $K$ 'nin  $\lambda$  –yoğunluğunu  $\delta_\lambda(K)$ ,  $K$ 'nin doğal yoğunluğuna dönüştürür. Her  $K \subset \mathbb{N}$  için  $(\lambda_n/n) \leq 1$  ise  $\delta(K) \leq \delta_\lambda(K)$  olur (Mursaleen, 2000).

**Tanım 3.19.**  $x = (x_k)$  bir dizi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  ve  $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| > \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa  $x = (x_k)$  dizisi  $L$  ye  $\lambda$  –istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_\lambda - \lim_{k \rightarrow} x_k = L$$

Çekilde gösterilir. Tüm  $\lambda$  –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini  $S_\lambda$  ile göstereceğiz (Mursaleen, 2000).

**Tanım 3.20.**  $x = (x_k)$  bir dizi ve  $M > 0$  olmak üzere

$$\delta_\lambda(\{k \leq n : |x_k| > M\}) = 0$$

oluyorsa  $x = (x_k)$  dizisi  $\lambda$  –istatistiksel sınırlıdır denir (Mursaleen ve ark., 2010).

**Tanım 3.21.**  $K \subset NxN$  ve  $j \leq m, k \leq n$  olmak üzere  $K(m, n)$  kümesinin elemanlarını  $(j, k)$  olarak kabul edelim ve  $K(m, n)$  kümesini

$$K(m, n) = \{j \leq m \text{ ve } k \leq n : (j, k) \in K\}$$

Çekilde tanımlayalım.

$$\delta_2(K) = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \inf \frac{|K(m, n)|}{mn}$$

ifadesi  $K$  kümesinin doğal yoğunluğudur.  $\frac{|K(m, n)|}{mn}$  kümesinin limiti tek ise  $K$  kümesinin doğal yoğunluğu aÇekilde tanımlanır;

$$\delta_2(K) = (P) - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{|K(m, n)|}{mn}$$

(Mursaleen ve Edely, 2003).

**Örnek 3.22.**  $K = \{(j^2, k^2) : j, k \in N\}$  olarak tanımlarsa  $K$  kümesinin yoğunluğu

$$\delta_2(K) = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} |K(m, n)| \leq \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} (\sqrt{m}\sqrt{n}) = 0$$

olur (Mursaleen ve Edely, 2003).

**Tanım 3.23.**  $x = (x_{jk})$  reel terimli çift indisli bir dizi olmak üzere,

$$\delta_2(\{(j, k); j \leq m \text{ ve } k \leq n : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak Çekilde bir  $L$  sayısı varsa  $x = (x_{jk})$  dizisi  $L$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_2 - \lim_{j, k \rightarrow} x_{jk} = L$$

Çekilde gösterilir. Tüm çift indisli istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi  $S_2$  ile gösterilir (Mursaleen ve Edely, 2003).

**Örnek 3.24.**  $x = (x_{jk})$  reel terimli çift indisli dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$x_{jk} = \begin{cases} jk, & j \text{ ve } k \text{ tam kare} \\ 1, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

çift indisli dizisi ne yakınsaktır ne de sınırlıdır. Fakat  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$|\{(j, k); j \leq m \text{ ve } k \leq n : |x_{jk} - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \sqrt{m}\sqrt{n}$$

ve

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} |\{(j, k); j \leq m \text{ ve } k \leq n : |x_{jk} - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{mn} = 0$$

$$st_2 - \lim_{j,k \rightarrow} x_{jk} = 1$$

olur.

### Sonuçlar 3.25.

- i. Eğer bir  $x = (x_{jk})$  çift indisli dizisi yakınsaksa aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir.
- ii.  $x = (x_{jk})$  çift indisli dizisinin satır ve sütunları sonlu ise  $x = (x_{jk})$  dizisi istatistiksel yakınsaktır.  $s_1$  ve  $s_2$  sonlu reel sayılar olmak üzere

$$K(m, n) \leq s_1 m + s_2 n$$

- iii. Eğer bir  $x = (x_{jk})$  çift indisli dizisi  $L$  ye istatistiksel yakınsaksa  $L$  tektir.

$x = (x_{jk})$  dizisi istatistiksel yakınsaksa bu dizinin sınırlı ya da yakınsak olmasına gerek yoktur (Örnek 3.2.14. deki gibi) (Mursaleen ve Edely, 2003).

**Tanım 3.26.**  $\lambda = (\lambda_m)$  ve  $\mu = (\mu_n)$  sonsuza giden, pozitif sayıların azalmayan ve

$$\lambda_{m+1} \leq \lambda_m + 1, \quad \lambda_1 = 0$$

$$\mu_{n+1} \leq \mu_n + 1, \quad \mu_1 = 0$$

koşullarını sağlayan iki dizi olsun.  $K \subset N \times N$  alalım ve  $K$  nın  $(\lambda, \mu)$  yoğunluğunu

$$\delta_{\lambda, \mu}(K) = (P) \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{m - \lambda_m + 1 \leq j \leq m, n - \mu_n + 1 \leq k \leq n : (j, k) \in K\}|$$

şeklinde tanımlayacağız.

$\lambda_m = m$ ,  $\mu_n = n$  olduğu durumda  $\delta_{\lambda, \mu}(K)$  yoğunluğu  $\delta_2(K)$  yoğunluğuna indirgenir. Her  $K \subset N \times N$  için  $\lambda_m/m \leq 1$  ve  $\mu_n/n \leq 1$  ise  $\delta_2(K) \leq \delta_{\lambda, \mu}(K)$  tir (Mursaleen ve ark., 2010).

**Tanım 3.27.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi,  $\forall \varepsilon > 0$  için  $K \subset N \times N$

$$K = \{j \in J_m, k \in I_n : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

olarak tanımlandığında  $\delta_{\lambda, \mu}(K) = 0$  oluyorsa  $x = (x_{jk})$  dizisi  $L$ ' ye  $(\lambda, \mu)$  istatistiksel yakınsaktır denir. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\delta_{\lambda, \mu}(K) = (P) \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{j \in J_m, k \in I_n : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $x = (x_{jk})$  dizisi  $L$  sayısına  $(\lambda, \mu)$  istatistiksel yakınsaktır denir ve  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} x_{jk} = L$  şeklinde gösterilir. Tüm  $(\lambda, \mu)$  istatistiksel yakınsak çift indisli dizilerin kümesini  $S_{\lambda, \mu}$  ile gösterilir.

Eğer  $\lambda_m = m$ ,  $\mu_n = n$  ise  $S_{\lambda, \mu}$ ,  $S_2$  ye indirgenir.  $\delta_2(K) \leq \delta_{\lambda, \mu}(K)$  olduğu için  $S_{\lambda, \mu} \subset S_2$  kapsamı elde edilir (Mursaleen ve ark., 2010).

**Tanım 3.28.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi ve  $M > 0$  olmak üzere;

$$\delta_{\lambda, \mu}(\{(j, k) : |x_{jk}| > M\}) = 0$$

oluyorsa  $x = (x_{jk})$  dizisi  $(\lambda, \mu)$  istatistiksel sınırlıdır denir (Mursaleen ve ark., 2010).

**Tanım 3.29.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi,  $\lambda_m$  ve  $\mu_n \in \Lambda$ ,  $I_n = [n - \mu_n + 1, n]$  ve  $J_m = [m - \lambda_m + 1, m]$  olmak üzere

$$t_{m, n}(x) = \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \sum_{j \in J_m} \sum_{k \in I_n} x_{jk}$$

toplamına çift indisli diziler için De la Vallée-Poussin ortalaması denir (Mursaleen ve ark., 2010).

**Tanım 3.30.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi olmak üzere;

$$(P) - \lim_{m, n \rightarrow \infty} t_{m, n}(|x_{jk} - L|) = 0$$

ise  $x = (x_{jk})$ ,  $L$  ye kuvvetli  $(V, \lambda, \mu)$  toplanabilir denir. Tüm kuvvetli  $(V, \lambda, \mu)$  toplanabilir dizilerin kümesini  $[V, \lambda, \mu]$  ile göstereceğiz.

Eğer  $\lambda_m = m$ ,  $\mu_n = n$  olduğu durumda kuvvetli  $(V, \lambda, \mu)$  -toplabilirlik, kuvvetli Cesaro toplanabilirliğe indirgenir (Mursaleen ve ark., 2010).

**Teorem 3.31.**  $\lambda = (\lambda_m)$  ve  $\mu = (\mu_n)$  sonsuza giden, pozitif sayıların azalmayan ve

$$\begin{aligned} \lambda_{m+1} &\leq \lambda_m + 1, & \lambda_1 &= 0 \\ \mu_{n+1} &\leq \mu_n + 1, & \mu_1 &= 0 \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan iki dizi olsun. Bu durumda;

- i.  $x_{jk} \rightarrow L [V, \lambda, \mu]$  iken  $x_{jk} \rightarrow L (S_{\lambda, \mu})$  tır. Fakat tersi doğru değildir.
- ii. Eğer  $x_{jk} \in l_2^\infty$  ve  $x_{jk} \rightarrow L (S_{\lambda, \mu})$  ise  $x_{jk} \rightarrow L [V, \lambda, \mu]$  tır ve böylece  $x_{jk} \rightarrow L [C, 1, 1]$  tır.
- iii.  $S_{\lambda, \mu}^\infty = [V, \lambda, \mu] \cap l_2^\infty$  (Mursaleen ve ark., 2010).

### 3.3 Fark Dizileri

Fark dizileri kavramı ilk kez Kızılmaz (1981) tarafından 1981 yılında tanımlandı.  $x = (x_k)$  kompleks terimli dizi ve  $k \in N$  olmak üzere

$$\Delta x = (\Delta x)_k = (x_k - x_{k+1})$$

$\ell_\infty(\Delta)$ ,  $c(\Delta)$  ve  $c_0(\Delta)$  dizi uzayları Kızılmaz(1981) tarafından

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k): \Delta x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k): \Delta x \in c\}$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k): \Delta x \in c_0\}$$

olarak tanımlandı ve

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normuyla birer *Banach* uzayı oldukları gösterildi.

$x = (x_k)$  kompleks terimli dizi ve  $k, m \in N$  olsun. Et ve Çolak (1995)

$$\Delta^0 x = (x)_k, \Delta x = (x_k - x_{k+1})$$

$$\Delta^m x = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$$

$$(\Delta^m x)_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$$

olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k): \Delta^m x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k): \Delta^m x \in c\}$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k): \Delta^m x \in c_0\}$$

uzaylarına genelleştirdiler ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normuyla birer *Banach* uzayı olduklarını gösterdiler.

### 3.4. Kesirli Fark Dizileri

**Tanım 3.32.** Gamma fonksiyonu  $\alpha \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$  ve  $\alpha$  reel sayı olmak üzere;

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

olarak tanımlanır ve

**i.**  $\alpha$  herhangi bir doğal sayı olursa  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$

Örneğin  $\Gamma(1) = 1!, \Gamma(2) = 1!, \Gamma(3) = 2!, \Gamma(4) = 3! \dots$

**ii.**  $\alpha \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$  ve  $\alpha$  reel sayı olursa  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$  elde edilir.

$w$  tüm reel değerli dizi uzayını göstermek üzere  $x = (x_k) \in w$ ,  $\alpha \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$  ve  $\alpha$  reel sayı olmak üzere fark operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlayacağız;

$$(\Delta^\alpha x)_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{i! \Gamma(\alpha - i + 1)} x_{k+i}$$

$$(\Delta^{(\alpha)} x)_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{i! \Gamma(\alpha - i + 1)} x_{k-i}$$

$$(\Delta^{-\alpha} x)_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{i! \Gamma(1 - \alpha - i)} x_{k+i}$$

$$(\Delta^{(-\alpha)} x)_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{i! \Gamma(1 - \alpha - i)} x_{k-i}$$

ilk iki operatörün açılımı yapılırsa;

$$(\Delta^\alpha x)_k = x_k - \alpha x_{k+1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x_{k+2} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x_{k+3} + \dots$$

$$(\Delta^{(\alpha)} x)_k = x_k - \alpha x_{k-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x_{k-2} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x_{k-3} + \dots$$

elde edilir (Baliarsingh, 2013).  $\Delta^\alpha$  ve  $\Delta^{(\alpha)}$  için;

**i.**  $\alpha = 1$  durumunda  $\Delta^\alpha$  operatörü Kızmaz (1981) tarafından tanımlanan

$$(\Delta x)_k = (x_k - x_{k+1})$$

operatörüne indirgenir.

**ii.**  $\alpha = m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) durumunda  $\Delta^\alpha$  operatörü Et ve Çolak (1995) tarafından verilen

$$(\Delta^m x)_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$$

operatörüne indirgenir.

Fark operatörlerinde kesirli olan  $\alpha$ lar  $\tilde{\alpha}$  ile gösterilerek fark operatörü ağıdaki gibi tanımlanır.

$$(\Delta^{\tilde{\alpha}} x)_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\Gamma(\tilde{\alpha} + 1)}{i! \Gamma(\tilde{\alpha} - i + 1)} x_{k+i}$$

(Baliarsingh, 2013).

Kesir dereceli fark operatörü çift indisli diziler için ağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha} + 1)^2}{m! n! \Gamma(\tilde{\alpha} - m + 1) \Gamma(\tilde{\alpha} - n + 1)} x_{j+m, k+n}$$

$$\Delta^{(\tilde{\alpha})}(x_{jk}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha} + 1)^2}{m! n! \Gamma(\tilde{\alpha} - m + 1) \Gamma(\tilde{\alpha} - n + 1)} x_{j-m, k-n}$$

$$\Delta^{-\tilde{\alpha}}(x_{jk}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\Gamma(1 - \tilde{\alpha})^2}{m! n! \Gamma(1 - \tilde{\alpha} - m) \Gamma(1 - \tilde{\alpha} - n)} x_{j+m, k+n}$$

$$\Delta^{-(\tilde{\alpha})}(x_{jk}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\Gamma(1 - \tilde{\alpha})^2}{m! n! \Gamma(1 - \tilde{\alpha} - m) \Gamma(1 - \tilde{\alpha} - n)} x_{j-m, k-n}$$

$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}$  için bu operatörün açılımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \Delta^{\frac{1}{2}}(x_{jk}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2}{m! n! \Gamma\left(\frac{1}{2} - m + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)} x_{j+m, k+n} \\ &= x_{j,k} - \frac{1}{2} x_{j, k+1} - \frac{1}{8} x_{j, k+2} - \frac{1}{16} x_{j, k+3} - \frac{5}{128} x_{j, k+4} - \cdots - \frac{1}{2} x_{j+1, k} \\ &\quad + \frac{1}{4} x_{j+1, k+1} + \frac{1}{16} x_{j+1, k+2} + \frac{1}{32} x_{j+1, k+3} + \frac{5}{256} x_{j+1, k+4} + \cdots - \frac{1}{2} x_{j+2, k} \\ &\quad + \frac{1}{16} x_{j+2, k+1} + \frac{1}{64} x_{j+2, k+2} + \frac{1}{128} x_{j+2, k+3} + \frac{5}{1024} x_{j+2, k+4} + \cdots \end{aligned}$$

elde edilir (Baliarsingh, 2016).

### 3.5. Kesirli Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

**Tanım 3.33.**  $x = (x_k)$  bir dizi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir  $L$  sayısı varsa  $x = (x_k)$  dizisi  $L$  ye  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  – istatistiksel yakınsaktır denir.  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  – istatistiksel yakınsak kümeleri  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S)$  ile gösterilir ve  $x_k \rightarrow L \left( \Delta^{\tilde{\alpha}}(S) \right)$  olarak yazılır (Baliarsingh ve ark., 2018).

**Örnek 3.34.**  $x = (x_k)$  bir dizi olsun ve  $y = (y_k) = (\Delta^{\tilde{\alpha}} x_k)$  dizisini aşağıdaki gibi tanımlarsak

$$y_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ \frac{1}{k}, & \text{diğer durumda} \end{cases} \quad n = 0,1,2,3, \dots$$

$(y_k)$  yakınsak olmamasına rağmen 0' a istatistiksel yakınsaktır.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

### 4.1. Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

**Tanım 4.1.**  $x = (x_{jk})$  reel terimli çift indisli bir dizi  $K \subset N \times N$  ve olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$K(m, n) = \{(j, k); j \leq m \text{ ve } k \leq n : |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfır yani;

$$P - \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} |\{(j, k); j \leq m \text{ ve } k \leq n : |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $x = (x_{jk})$  çift indisli dizisi  $L$ 'ye  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ -istatistiksel yakınsaktır denir.  $x_{jk} \rightarrow L \left( \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2) \right)$  ile gösterilir. Tüm  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ -istatistiksel yakınsak çift indisli dizilerin kümesini  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$  ile göstereceğiz.

**Tanım 4.2.**  $x = (x_{jk})$  dizisi kompleks terimli çift indisli bir dizi olmak üzere tüm  $j, k \in N$  için  $|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})| < M$  olacak şekilde  $M > 0$  var yani  $\sup_{j, k \geq 1} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk}| < \infty$  ise

$(\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}))$  çift indisli dizi sınırlıdır denir. Bütün  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ -sınırlı çift indisli dizi uzayını

$$l_{\infty}^2(\Delta^{\tilde{\alpha}}) = \{x = (x_{jk}) : \forall j, k \in N \text{ için } \sup_{j, k \geq 1} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk}| < \infty\}$$

şeklinde göstereceğiz.

Yakınsak çift indisli bir dizi ağırlıklı olarak istatistiksel yakınsaktır fakat tersi doğru değildir ancak çift indisli dizilerin kesirli farklarından oluştuğundan sınırlı ve istatistiksel yakınsak olması gerekmez. Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

**Örnek 4.3.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli dizi olsun ve  $y = (y_{jk}) = (\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk})$  dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$y_{jk} = \begin{cases} 1, & j = m^3, k = n^3 \\ \frac{1}{j+k}, & \text{diğer durumda } n, m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$(y_{jk})$  yakınsak olmamasına rağmen istatistiksel yakınsaktır, gerçekten

$$(y_{jk}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+2} & \frac{1}{1+3} & & 1 & \frac{1}{1+9} & \dots \\ 1 & \frac{1}{2+2} & \frac{1}{2+3} & \dots & \frac{1}{2+8} & \frac{1}{2+9} & \dots \\ \frac{1}{3+1} & \frac{1}{3+2} & \frac{1}{3+3} & & \frac{1}{3+8} & \frac{1}{3+9} & \dots \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & . & & \dots & & . & \end{bmatrix}$$

olup

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} |\{(j,k); j \leq m \text{ ve } k \leq n : |y_{jk} - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{m} \sqrt[3]{n}}{mn} = 0$$

dır. Dolayısıyla  $(y_{jk})$ , 0 a istatistiksel yakınsaktır, yani  $y_{jk} \rightarrow 0$  ( $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ ) tır.

**Örnek 4.4.**  $x = (x_{jk}) = \frac{1+(-1)^{j+k}}{2}$  dizisini göz önüne alırsak  $x = (x_{jk})$  sınırlıdır, iraksaktır ve istatistiksel yakınsak değildir.  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})$  dizisini aşağıdaki gibi açarsak

$$\begin{aligned} \Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m! n! \Gamma(\tilde{\alpha}-m+1) \Gamma(\tilde{\alpha}-n+1)} x_{j+m,k+n} \right) \\ \Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( (-1)^{m+0} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m! 0! (\tilde{\alpha}-m+1) (\tilde{\alpha}-0+1)} x_{j+m,k+0} \right. \\ &\quad + (-1)^{m+1} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m! 1! \Gamma(\tilde{\alpha}-m+1) \Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)} x_{j+m,k+1} \\ &\quad + (-1)^{m+2} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m! 2! \Gamma(\tilde{\alpha}-m+1) \Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)} x_{j+m,k+2} \\ &\quad \left. + (-1)^{m+3} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m! 3! \Gamma(\tilde{\alpha}-m+1) \Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)} x_{j+m,k+3} \dots \right) \end{aligned}$$

$m = 0$  için

$$\begin{aligned} &(-1)^0 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{0! 0! \Gamma(\tilde{\alpha}-0+1) \Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)} x_{j+0,k+0} + (-1)^1 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{0! 1! \Gamma(\tilde{\alpha}-0+1) \Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)} x_{j+0,k+1} + \\ &(-1)^2 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{0! 2! \Gamma(\tilde{\alpha}-0+1) \Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)} x_{j+0,k+2} + (-1)^3 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{0! 3! \Gamma(\tilde{\alpha}-0+1) \Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)} x_{j+0,k+3} \dots \\ &= \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1) \cdot \Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{0! 0! \Gamma(\tilde{\alpha}+1) \Gamma(\tilde{\alpha}+1)} x_{j,k} - \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1) \cdot \Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{0! 1! \Gamma(\tilde{\alpha}+1) \Gamma(\tilde{\alpha})} x_{j,k+1} \\ &\quad + \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1) \cdot \Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{0! 2! \Gamma(\tilde{\alpha}+1) \Gamma(\tilde{\alpha}-1)} x_{j,k+2} - \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1) \cdot \Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{0! 3! \Gamma(\tilde{\alpha}+1) \Gamma(\tilde{\alpha}-2)} x_{j,k+3} \dots \\ &= \binom{\tilde{\alpha}}{0} \binom{\tilde{\alpha}}{0} x_{j,k} - \binom{\tilde{\alpha}}{0} \binom{\tilde{\alpha}}{1} x_{j,k+1} + \binom{\tilde{\alpha}}{0} \binom{\tilde{\alpha}}{2} x_{j,k+2} - \binom{\tilde{\alpha}}{0} \binom{\tilde{\alpha}}{3} x_{j,k+3} \dots \end{aligned}$$

$m = 1$  için

$$\begin{aligned}
& (-1)^1 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{1!0!\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)} x_{j+1,k+0} + (-1)^2 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{1!1!\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)} x_{j+1,k+1} + \\
& (-1)^3 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{1!2!\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)} x_{j+1,k+2} + (-1)^4 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{1!3!\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)} x_{j+1,k+3} + \dots \\
& = -\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{1!0!\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\tilde{\alpha}+1)} x_{j+1,k} + \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{1!1!\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\tilde{\alpha})} x_{j+1,k+1} \\
& \quad - \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{1!2!\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\tilde{\alpha}-1)} x_{j+1,k+2} + \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{1!3!\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\tilde{\alpha}-2)} x_{j+1,k+3} \dots \\
& = -\binom{\tilde{\alpha}}{1} \binom{\tilde{\alpha}}{0} x_{j+1,k} + \binom{\tilde{\alpha}}{1} \binom{\tilde{\alpha}}{1} x_{j+1,k+1} - \binom{\tilde{\alpha}}{1} \binom{\tilde{\alpha}}{2} x_{j+1,k+2} + \binom{\tilde{\alpha}}{1} \binom{\tilde{\alpha}}{3} x_{j+1,k+3} \dots
\end{aligned}$$

$m = 2$  için

$$\begin{aligned}
& (-1)^2 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{2!0!\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)} x_{j+2,k+0} + (-1)^3 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{2!1!\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)} x_{j+2,k+1} + \\
& (-1)^4 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{2!2!\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)} x_{j+2,k+2} + (-1)^5 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{2!3!\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)} x_{j+2,k+3} + \dots \\
& = +\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{2!0!\Gamma(\tilde{\alpha}-1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)} x_{j+2,k} - \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{2!1!\Gamma(\tilde{\alpha}-1)\Gamma(\tilde{\alpha})} x_{j+2,k+1} \\
& \quad + \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{2!2!\Gamma(\tilde{\alpha}-1)\Gamma(\tilde{\alpha}-1)} x_{j+2,k+2} \\
& \quad - \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{2!3!\Gamma(\tilde{\alpha}-1)\Gamma(\tilde{\alpha}-2)} x_{j+2,k+3} \dots \\
& = \binom{\tilde{\alpha}}{2} \binom{\tilde{\alpha}}{0} x_{j+2,k} - \binom{\tilde{\alpha}}{2} \binom{\tilde{\alpha}}{1} x_{j+2,k+1} + \binom{\tilde{\alpha}}{2} \binom{\tilde{\alpha}}{2} x_{j+2,k+2} - \binom{\tilde{\alpha}}{2} \binom{\tilde{\alpha}}{3} x_{j+2,k+3} \dots
\end{aligned}$$

$m = 3$  için

$$\begin{aligned}
& (-1)^3 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{3!0!\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-0+1)} x_{j+3,k+0} + (-1)^4 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{3!1!\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-1+1)} x_{j+3,k+1} + \\
& (-1)^5 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{3!2!\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-2+1)} x_{j+3,k+2} + (-1)^6 \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{3!3!\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-3+1)} x_{j+3,k+3} + \dots \\
& = -\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{3!0!\Gamma(\tilde{\alpha}-2)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)} x_{j+3,k} + \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{3!1!\Gamma(\tilde{\alpha}-2)\Gamma(\tilde{\alpha})} x_{j+3,k+1} \\
& \quad - \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{3!2!\Gamma(\tilde{\alpha}-2)\Gamma(\tilde{\alpha}-1)} x_{j+3,k+2} + \frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{3!3!\Gamma(\tilde{\alpha}-2)\Gamma(\tilde{\alpha}-2)} x_{j+3,k+3} \dots \\
& = -\binom{\tilde{\alpha}}{3} \binom{\tilde{\alpha}}{0} x_{j+3,k} + \binom{\tilde{\alpha}}{3} \binom{\tilde{\alpha}}{1} x_{j+3,k+1} - \binom{\tilde{\alpha}}{3} \binom{\tilde{\alpha}}{2} x_{j+3,k+2} + \binom{\tilde{\alpha}}{3} \binom{\tilde{\alpha}}{3} x_{j+3,k+3} \dots
\end{aligned}$$

$j + k$  çift olduğunda,

$$\binom{\tilde{\alpha}}{0} \binom{\tilde{\alpha}}{0} + \binom{\tilde{\alpha}}{0} \binom{\tilde{\alpha}}{2} + \binom{\tilde{\alpha}}{0} \binom{\tilde{\alpha}}{4} + \binom{\tilde{\alpha}}{0} \binom{\tilde{\alpha}}{6} + \dots = 2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{0}$$

$$\binom{\tilde{\alpha}}{1} \binom{\tilde{\alpha}}{1} + \binom{\tilde{\alpha}}{1} \binom{\tilde{\alpha}}{3} + \binom{\tilde{\alpha}}{1} \binom{\tilde{\alpha}}{5} + \binom{\tilde{\alpha}}{1} \binom{\tilde{\alpha}}{7} + \dots = 2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{1}$$

$$\binom{\tilde{\alpha}}{2} \binom{\tilde{\alpha}}{0} + \binom{\tilde{\alpha}}{2} \binom{\tilde{\alpha}}{2} + \binom{\tilde{\alpha}}{2} \binom{\tilde{\alpha}}{4} + \binom{\tilde{\alpha}}{2} \binom{\tilde{\alpha}}{6} + \dots = 2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{2}$$

$$\binom{\tilde{\alpha}}{3} \binom{\tilde{\alpha}}{1} + \binom{\tilde{\alpha}}{3} \binom{\tilde{\alpha}}{3} + \binom{\tilde{\alpha}}{3} \binom{\tilde{\alpha}}{5} + \binom{\tilde{\alpha}}{3} \binom{\tilde{\alpha}}{7} + \dots = 2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{3}$$

...

$$2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{0} + 2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{1} + 2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{2} + 2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{3} + \dots = 2^{\tilde{\alpha}-1} \cdot 2^{\tilde{\alpha}} = 2^{2\tilde{\alpha}-1}$$

$j + k$  tek olduğunda,

$$-\binom{\tilde{\alpha}}{0} \binom{\tilde{\alpha}}{1} - \binom{\tilde{\alpha}}{0} \binom{\tilde{\alpha}}{3} - \binom{\tilde{\alpha}}{0} \binom{\tilde{\alpha}}{5} - \binom{\tilde{\alpha}}{0} \binom{\tilde{\alpha}}{7} - \dots = -2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{0}$$

$$-\binom{\tilde{\alpha}}{1} \binom{\tilde{\alpha}}{0} - \binom{\tilde{\alpha}}{1} \binom{\tilde{\alpha}}{2} - \binom{\tilde{\alpha}}{1} \binom{\tilde{\alpha}}{4} - \binom{\tilde{\alpha}}{1} \binom{\tilde{\alpha}}{6} - \dots = -2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{1}$$

$$-\binom{\tilde{\alpha}}{2} \binom{\tilde{\alpha}}{1} - \binom{\tilde{\alpha}}{2} \binom{\tilde{\alpha}}{3} - \binom{\tilde{\alpha}}{2} \binom{\tilde{\alpha}}{5} - \binom{\tilde{\alpha}}{2} \binom{\tilde{\alpha}}{7} - \dots = -2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{2}$$

$$-\binom{\tilde{\alpha}}{3} \binom{\tilde{\alpha}}{0} - \binom{\tilde{\alpha}}{3} \binom{\tilde{\alpha}}{2} - \binom{\tilde{\alpha}}{3} \binom{\tilde{\alpha}}{4} - \binom{\tilde{\alpha}}{3} \binom{\tilde{\alpha}}{6} - \dots = -2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{3}$$

...

$$-2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{0} - 2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{1} - 2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{2} - 2^{\tilde{\alpha}-1} \binom{\tilde{\alpha}}{3} - \dots = -2^{\tilde{\alpha}-1} \cdot 2^{\tilde{\alpha}} = -2^{2\tilde{\alpha}-1}$$

elde edilir. Yani

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) = \begin{cases} 2^{2\tilde{\alpha}-1} & , j + k \text{ çift} \\ -2^{2\tilde{\alpha}-1} & , i + k \text{ tek} \end{cases}$$

Şeklinde ifade edebiliriz.  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})$  dizisi sınırlıdır fakat ne istatistiksel yakınsak ne de yakınsaktır.

**Örnek 4.5.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi olsun ve  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})$  aşağıdaki gibi tanımladığımızda

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) = \begin{cases} j + k, & j = m^2, k = n^2 \quad m, n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})$  istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı değildir.

Gerçekten,

$$(\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 8 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\left| \{(j, k); j < m, k < n : |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - 0| > \varepsilon\} \right| \leq \sqrt{m}\sqrt{n}$$

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} |\{(j^2, k^2), j \leq m \text{ ve } k \leq n : |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{mn} = 0$$

**Sonuçlar 4.6.**  $\tilde{\alpha}$  kesirli bir reel sayı olmak üzere;

- $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$  ve  $S_2$  birbirini içermez.
- $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$  ve  $l_{\infty}^2(\Delta^{\tilde{\alpha}})$  birbirini içermez.
- $\Delta^{\tilde{\alpha}}(C^2) \subset \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$  ve bu kapsama kesindir.

**Tanım 4.7.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{m,n} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} = L$$

ise  $x = (x_{jk})$  dizisi  $L$ 'ye  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  -Cesaro toplanabilir denir. Tüm çift indisli  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  -Cesaro toplanabilir dizilerin kümesini  $(C, 1, 1)(\Delta^{\tilde{\alpha}})$  ile göstereceğiz.

**Tanım 4.8.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi ve  $p$  pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{m,n} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p = 0$$

ise  $x = (x_{jk})$  dizisi  $L$ 'ye kuvvetli  $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$  - Cesaro toplanabilir denir. Tüm kuvvetli  $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$  - Cesaro toplanabilir çift indisli dizi uzaylarını  $w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$  ile göstereceğiz.

**Teorem 4.9. i.**  $\tilde{\alpha}$  kesirli bir reel sayı ve  $0 < p < \infty$  olmak üzere eğer  $x_{jk} \in L(w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$  ise  $x_{jk} \in L(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2))$  dir.

**ii.** Eğer  $x_{jk} \in L(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2))$  ve  $(x_{jk}) \in l_{\infty}^2(\Delta^{\tilde{\alpha}})$  ise  $x_{jk} \in L(w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$  dir.

**Gspat: i.**  $K_{\varepsilon}(p) = \{(j, k); j \leq m, k \leq n : |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \geq \varepsilon\}$  alalım.

$\varepsilon > 0$  ve  $x_{jk} \in L(w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$  olsun.  $x = (x_{jk})$  dizisi  $L$  ye kuvvetli  $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$  - Cesaro toplanabilir olduğundan;

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{m,n} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p = \frac{1}{mn} \left( \sum_{(j,k) \in K_\varepsilon(p)} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p + \sum_{(j,k) \in K_\varepsilon(p)^c} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \right) \\
&\geq \frac{1}{mn} |\{(j,k); j \leq m, k \leq n: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \geq \varepsilon\}| \varepsilon
\end{aligned}$$

Böylece  $x = (x_{jk})$  dizisi  $L$ 'ye istatistiksel yakınsaktır.

ii.  $M = \sup |\Delta^{\tilde{\alpha}} x| + |L|$  ve  $I_\varepsilon(p) = \{(j,k); j \leq m, k \leq n: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{1/p}\}$  alalım.

$x = (x_{jk})$  dizisi sınırlı istatistiksel yakınsak olduğundan  $\forall \varepsilon > 0$  ve tüm  $m, n \geq N_0$  için öyle bir  $N_0 \in \mathbb{N}$  vardır ki;

$$\frac{1}{mn} |\{(j,k); j \leq m, k \leq n: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{1/p}\}| \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot (\|\Delta^{\tilde{\alpha}} x\|_\infty + L)^p} = \frac{\varepsilon}{2 \cdot M^p}$$

olur. ğimdi tüm  $m, n \geq N_0$  için;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p &= \frac{1}{mn} \left( \sum_{(j,k) \in I_\varepsilon(p)} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p + \sum_{(j,k) \in I_\varepsilon(p)^c} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \right) \\
&< \frac{1}{mn} \cdot mn \cdot \frac{\varepsilon}{2M^p} M^p + \frac{1}{mn} \cdot mn \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu da  $x_{jk} \rightarrow L$  ( $w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ ) anlamına gelir.

**Sonuç 4.10.**  $x = (x_{jk}) \in l_\infty^2(\Delta^{\tilde{\alpha}})$  ve  $x_{jk} \rightarrow L$  ( $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ ) ise aynı zamanda  $(C, 1, 1)(\Delta^{\tilde{\alpha}})$ 'dir. Fakat  $x = (x_{jk})$  yakınsak olmak zorunda değildir.

**Örnek 4.11.**  $x = (x_{jk})$  bir dizi ve her  $k \in \mathbb{N}$  için  $\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} = (-1)^j$  olarak tanımlarsak

$$\lim_{m,n} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} = 0$$

olur. Ama  $x = (x_{jk})$  istatistiksel yakınsak değildir.

**Tanım 4.12.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için öyle  $N_0 \in \mathbb{N}$  ve  $M_0 \in \mathbb{N}$  sayıları var ve tüm  $j \geq N_0, k \geq M_0$  için

$$\lim_{m,n} \frac{1}{mn} |\{(j,k); j \leq m, k \leq n: |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk} - x_{N_0 M_0})| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  - istatistiksel *Cauchy* dizisidir.

**Teorem 4.13.** Eğer  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  – istatistiksel yakınsak bir dizi ise  $x = (x_{jk}), \Delta^{\tilde{\alpha}}$  – istatistiksel *Cauchy* dizisidir.

**İspat:** Varsayalım ki  $\forall \varepsilon > 0$  ve  $x_{jk} \rightarrow L (\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2))$  olsun. Doğaldır ki hemen hemen tüm  $j, k \in N$  için  $|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  ve seçilen  $N_0, M_0 \in N$  sayıları için  $|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{N_0 M_0}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$  dir. Şimdi biz hemen hemen tüm  $j, k \in N$  için

$$\begin{aligned} |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - \Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{N_0 M_0})| &= |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L + L - \Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{N_0 M_0})| \\ &< |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L| + |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{N_0 M_0}) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece  $x = (x_{jk}), \Delta^{\tilde{\alpha}}$  – istatistiksel *Cauchy* dizisidir.

#### 4.2. Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin $(\lambda, \mu)$ – İstatistiksel Yakınsaklığı

**Tanım 4.14.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizinin kesirli De la Vallée-Poussin ortalaması  $I_n = [n - \mu_n + 1, n]$  ve  $J_m = [m - \lambda_m + 1, m]$  olmak üzere

$$t_{m,n}(x) = \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \sum_{j \in J_m} \sum_{k \in I_n} \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 4.15.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi olmak üzere

$$(P) \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \sum_{j \in J_m} \sum_{k \in I_n} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p = 0$$

ise  $x = (x_{jk}), L$  ye kuvvetli  $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$  – De la Vallée-Poussin toplanabilir denir. Tüm kuvvetli  $(V, \lambda, \mu)(\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$  toplanabilir dizilerin kümesini  $[V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$  ile göstereceğiz.

Eğer  $\lambda_m = m, \mu_n = n$  ise kuvvetli  $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$  – De la Vallée-Poussin toplanabilirliği, kuvvetli  $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$  – Cesaro toplanabilirliğe indirgenir, yani  $[V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) = [C, 1, 1](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$  dir.

**Tanım 4.16.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi,  $\forall \varepsilon > 0$  için  $K \subset N \times N$

$$K = \{j \in J_m, k \in I_n : |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

olarak tanımlandığında  $\delta_{\lambda, \mu}(K) = 0$  oluyorsa yani;

$$\delta_{\lambda, \mu}(K) = (P) \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{j \in J_m, k \in I_n : |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $x = (x_{jk})$  dizisi  $L$  ye  $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$  istatistiksel yakınsaktır denir.  $x = (x_{jk})$  çift indisli dizisi  $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$  istatistiksel yakınsak ise  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} = L$  şeklinde yazacağız.

Tüm  $(\lambda, \mu)$  istatistiksel yakınsak çift indisli dizilerin kümesini  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu})$  ile göstereceğiz.

$\lambda_m = m, \mu_n = n$  olması durumunda  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu})$  yerine  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$  yazacağız.

$\delta_2(K) \leq \delta_{\lambda, \mu}(K)$  olduğu için  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu}) \subset \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$  kapsamını elde ederiz.

**Tanım 4.17.**  $x = (x_{jk})$  çift indisli bir dizi ve  $M > 0$  olsun.

$$\delta_{\lambda, \mu}(\{(j, k): |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk}| > M\}) = 0$$

oluyorsa  $x = (x_{jk})$  dizisi  $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$  istatistiksel sınırlıdır denir.

**Teorem 4.18.**  $\lambda = (\lambda_m)$  ve  $\mu = (\mu_n)$ ,  $\Lambda$  kümesine ait olan iki dizi olsun. Bu takdirde

- i. Eğer  $x_{jk} \rightarrow L$  ( $[V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ ) ise  $x_{jk} \rightarrow L$  ( $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu})$ ) tır, fakat tersi doğru değildir,
- ii. Eğer  $x_{jk} \in l_2^{\infty}(\Delta_2^{\tilde{\alpha}})$  ve  $x_{jk} \rightarrow L$  ( $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu})$ ) ise  $x_{jk} \in L([V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$  ve böylece  $x_{jk} \in L([C, 1, 1](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$ ,
- iii.  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu})^{\infty} = [V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \cap l_2^{\infty}(\Delta_2^{\tilde{\alpha}})$

tır.

**Teorem 4.19.**  $\lambda = (\lambda_m)$ ,  $\mu = (\mu_n)$ ,  $\theta = (\theta_m)$ ,  $\gamma = (\gamma_n)$  dizileri tüm  $m, n \in N_{n_0}$  için  $\lambda_m \leq \theta_m, \mu_n \leq \gamma_n$  koşullarını sağlayan  $\Lambda$  kümesinin dört elemanı olsun. Bu durumda;

- i. Eğer  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_m \mu_n}{\theta_m \gamma_n} > 0$  (4.1)

ise  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\theta, \gamma}) \subseteq \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu})$ .

- ii. Eğer  $\lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_m}{\theta_m} = 1$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\mu_n}{\gamma_n} = 1$  (4.2)

ise  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu}) \subseteq \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\theta, \gamma})$ .

**İspat:** i. tüm  $m, n \in N_{n_0}$  için  $\lambda_m \leq \theta_m, \mu_n \leq \gamma_n$  koşulları sağlansın ve  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_m \mu_n}{\theta_m \gamma_n} > 0$  olduğunu kabul edelim.

$$J_{m_1} = [m - \lambda_m + 1, m], J_{m_2} = [m - \theta_m + 1, m], I_{n_1} = [n - \mu_n + 1, n],$$

$I_{n_2} = [n - \gamma_n + 1, n]$  olarak tanımlanırsa  $J_{m_1} \subset J_{m_2}$  ve  $I_{n_1} \subset I_{n_2}$  olur ve bu nedenle biz her  $\varepsilon > 0$  için

$$\{(j, k): j \in J_{m_2}, k \in I_{n_2}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\} \supset \{(j, k): j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

elde ederiz. Buradan

$$\frac{1}{\theta_m \gamma_n} |\{(j, k): j \in J_{m_2}, k \in I_{n_2}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{\lambda_m \mu_n}{\theta_m \gamma_n} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{(j, k): j \in J_{m_2}, k \in I_{n_2}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz. Son eġisizlikte her iki tarafta *Pringsheim* limit alırsak ( $m, n \rightarrow \infty$ )  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\theta, \gamma}) \subseteq \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu})$  elde ederiz.

ii.  $x = (x_{jk}) \in \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu})$  ve  $\lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_m}{\theta_m} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\mu_n}{\gamma_n} = 1$  olduğunu kabul edelim.  $J_{m_1} \subset J_{m_2}$  ve  $I_{n_1} \subset I_{n_2}$  olduğundan tüm  $m, n \in N_{n_0}$  ve her  $\varepsilon > 0$  için;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta_m \gamma_n} |\{(j, k): j \in J_{m_2}, k \in I_{n_2}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{\theta_m \gamma_n} |\{m - \theta_m + 1 \leq j < m - \lambda_m, n - \gamma_n + 1 \leq k < n - \mu_n: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| \\ & \quad + \frac{1}{\theta_m \gamma_n} |\{(j, k): j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{(\theta_m - \lambda_m)(\gamma_n - \mu_n)}{\theta_m \gamma_n} + \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{(j, k): j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \left(1 - \frac{\lambda_m}{\theta_m}\right) \left(1 - \frac{\mu_n}{\gamma_n}\right) + \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{(j, k): j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m}{\theta_m} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\mu_n}{\gamma_n} = 1$  ve  $x = (x_{jk}) \in \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu})$  olduğundan eġisizliğin her iki tarafının  $m, n \rightarrow \infty$  iken limiti alınırsa  $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu}) \subseteq \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\theta, \gamma})$  elde edilir.

**Teorem 4.20.**  $\lambda = (\lambda_m)$ ,  $\mu = (\mu_n)$ ,  $\theta = (\theta_m)$ ,  $\gamma = (\gamma_n)$  dizileri tüm  $m, n \in N_{n_0}$  için  $\lambda_m \leq \theta_m$ ,  $\mu_n \leq \gamma_n$  koġulunu saġlayan  $\Lambda$  kümesinin dört elemanı olsun.

- i. Eġer (4.1) saġlanırsa  $[V, \theta, \gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset [V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ 'tir.
- ii. Eġer (4.2) saġlanırsa  $l_2^\infty(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset [V, \theta, \gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ 'tir.

**Ėspat:** i.  $m, n \in N_{n_0}$  için  $\lambda_m \leq \theta_m$ ,  $\mu_n \leq \gamma_n$  koġulları saġlansın.  $J_{m_1} \subset J_{m_2}$  ve  $I_{n_1} \subset I_{n_2}$  olduğundan her  $\varepsilon > 0$  için;

$$\frac{1}{\theta_m \gamma_n} \sum_{j \in J_{m_2}} \sum_{k \in I_{n_2}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \geq \frac{1}{\theta_m \gamma_n} \sum_{j \in J_{m_1}} \sum_{k \in I_{n_1}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p$$

yazıp eġisizliğin saġ tarafını  $\lambda_m \mu_n$  ile çarpıp bölersek

$$\frac{1}{\theta_m \gamma_n} \sum_{j \in J_{m_2}} \sum_{k \in I_{n_2}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \geq \frac{\lambda_m \mu_n}{\theta_m \gamma_n} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \sum_{j \in J_{m_1}} \sum_{k \in I_{n_1}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p$$

yazabiliriz. Her iki taraftan limit alır ve (4. 1)'i kullanırsak  $[V, \theta, \gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset [V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$  elde ederiz.

ii.  $x = (x_{jk}) \in l_2^\infty(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$  ise  $x = (x_{jk}) \in l_2^\infty(\Delta^{\tilde{\alpha}})$  tir. Bundan dolayı tüm  $j, k$  ler için öyle bir  $M > 0$  sayısı vardır ki  $|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| < M$  olur.  $J_{m_1} \subset J_{m_2}$  ve  $I_{n_1} \subset I_{n_2}$  olduğundan her  $\varepsilon > 0$  ve tüm  $m, n \in N_{n_0}$  için;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta_m \gamma_n} \sum_{j \in J_{m_2}} \sum_{k \in I_{n_2}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p &= \frac{1}{\theta_m \gamma_n} \sum_{j \in J_{m_2} - J_{m_1}} \sum_{k \in I_{n_2} - I_{n_1}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p + \frac{1}{\theta_m \gamma_n} \sum_{j \in J_{m_1}} \sum_{k \in I_{n_1}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \\ &\leq \frac{(\theta_m - \lambda_m)(\gamma_n - \mu_n)}{\theta_m \gamma_n} M + \frac{1}{\theta_m \gamma_n} \sum_{j \in J_{m_1}} \sum_{k \in I_{n_1}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \\ &\leq \left(1 - \frac{\lambda_m}{\theta_m}\right) \left(1 - \frac{\mu_n}{\gamma_n}\right) + \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \sum_{j \in J_{m_1}} \sum_{k \in I_{n_1}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \end{aligned}$$

Bu nedenle  $l_2^\infty(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset [V, \theta, \gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$  elde edilir.

**Sonuç 4.21.**  $\lambda = (\lambda_m)$ ,  $\mu = (\mu_n)$ ,  $\theta = (\theta_m)$ ,  $\gamma = (\gamma_n)$  dizileri tüm  $m, n \in N_{n_0}$  için  $\lambda_m \leq \theta_m$ ,  $\mu_n \leq \gamma_n$  koşulunu sağlayan  $\Lambda$  kümesinin dört dizisi olsun. Eğer (4.2) sağlanırsa  $l_2^\infty(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [V, \lambda, \mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset l_2^\infty(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [V, \theta, \gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$  kapsamasını elde ederiz.

**Teorem 4.22.**  $\lambda = (\lambda_m)$ ,  $\mu = (\mu_n)$ ,  $\theta = (\theta_m)$ ,  $\gamma = (\gamma_n)$  dizileri tüm  $m, n \in N_{n_0}$  için  $\lambda_m \leq \theta_m$ ,  $\mu_n \leq \gamma_n$  koşulunu sağlayan  $\Lambda$  kümesinin dört dizisi olsun. Eğer önce (4.2) sonra (4.1) sağlanırsa;

$x_{jk} \rightarrow L \left( [V, \theta, \gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \right) \Rightarrow x_{jk} \rightarrow L(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu}))$  ve  $[V, \theta, \gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu})$  kapsama kesindir.

**Öspt:**  $\varepsilon > 0$  ve  $x_{jk} \rightarrow L([\mathbb{V}, \theta, \gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$  olsun. Biz

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_{m_2}} \sum_{k \in I_{n_2}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p &\geq \sum_{j \in J_{m_1}} \sum_{k \in I_{n_1}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \\ &\geq \sum_{\substack{j \in J_{m_1} \\ k \in I_{n_1} \\ |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \\ &\geq |\{(j, k); j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

eĖişizliđini elde ederiz. Buradan tüm  $m, n \in N_{n_0}$  için

$$\frac{1}{\theta_m \gamma_n} \sum_{j \in J_{m_2}} \sum_{k \in I_{n_2}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \geq \frac{\lambda_m \mu_n}{\theta_m \gamma_n} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{(j, k); j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon$$

elde edilir ve (4.1)'den dolayı  $x_{jk} \rightarrow L(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda, \mu}))$  ulağır.

## 5.SONUÇ VE ÖNERGIER

### 5.1. Sonuçlar

Bu tezde P. Baliarsingh (2016) tarafından tanımlanan çift indisli dizilerin kesir dereceli fark operatörleriyle;

Çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını ( $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  –istatistiksel yakınsaklığı),  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  –sınırlılığını,  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  –istatistiksel *Cauchy* dizisini,  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  –Cesaro toplanabilirliğini, kuvvetli  $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$  – *Cesaro* toplanabilirliğini,  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  –De la Vallée-Poussin ortalamasını, kuvvetli  $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$  –De la Vallée-Poussin toplanabilirliğini ve  $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$  istatistiksel yakınsaklığı tanımları verildi.

$\Delta^{\tilde{\alpha}}$  –istatistiksel yakınsak çift indisli bir dizinin aynı zamanda  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  –istatistiksel *Cauchy* dizisi olduğunu, kuvvetli  $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$  – *Cesaro* toplanabilir olan çift indisli dizilerin  $\Delta^{\tilde{\alpha}}$  –istatistiksel yakınsak olduğunu ve kuvvetli  $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$  –De la Vallée-Poussin toplanabilirse  $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$  istatistiksel yakınsak olduğu sonuçlarına ulaşıldı.

### 5.2 Öneriler

Bu tanımlar genelleştirilerek çift indisli kesirli fark dizilerinin  $\beta$ . dereceden ağırlıklı ve *deferred* istatistiksel yakınsaklığı çalışılabilir.

## KAYNAKLAR

- Baliarsingh, P., 2013, Some new difference sequence spaces of fractional order and their dual spaces, *Applied Mathematics and Computation*, 219 (18), 9737-9742.
- Baliarsingh, P. and Dutta, S., 2015, A unifying approach to the difference operators and their applications, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 33 (1), 49-56.
- Baliarsingh, P., 2016, On difference double sequence spaces of fractional order, *Indian Journal Mathematical*, 58, 287-310.
- Baliarsingh, P., Kadak, U. and Mursaleen, M., 2018, On statistical convergence of difference sequences of fractional order and related Korovkin type approximation theorems, *Quaestiones Mathematicae*, 41 (8), 1117-1133.
- Boos, J. and Cass, F. P., 2000, *Classical and modern methods in summability*, Clarendon Press.
- Burkill, J. C. and Burkill, H., 1980, *A Second Course in Mathematical Analysis* Cambridge University Press, Cambridge, New York.
- Connor, J., 1988, The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, *Analysis*, 8 (1-2), 47-64.
- Duman, O. and Orhan, C., 2004,  $\mu$ -statistically convergent function sequences, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54 (2), 413-422.
- Et, M. and Çolak, R., 1995, On some generalized difference sequence spaces, *Soochow J. Math*, 21 (4), 376-387.
- Et, M. and Nuray, F., 2001,  $\Delta^m$  statistical convergence, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 32(6), 961-969.
- Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, In *Colloquium Mathematicae*, 3-4, 241-244.
- Fridy, J. A., 1985, On statistical convergence, *Analysis*, 5 (4), 301-314.
- Güngör, M. and Gökhan, A., 2005, On uniform statistical convergence, *Int. J. Pure Appl. Math*, 19 (1), 17-24.
- Kizmaz, H., 1981, On certain sequence spaces, *Canadian Mathematical Bulletin*, 24 (2), 169-176.
- Mursaleen, M., 2000,  $\lambda$ -statistical convergence, *Mathematica Slovaca*, 50 (1), 111-115.
- Mursaleen, M., and Edely, O. H., 2003, Statistical convergence of double sequences, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288 (1), 223-231.

- Mursaleen, M., Çakan, C., Mohiuddine, S. A. and SavaÇ, E. ,2010, Generalized statistical convergence and statistical core of double sequences, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 26 (11), 2131-2144.
- Musayev, B. ve Alp, M., 2000, Fonksiyonel analiz, Mustafa Balcı, *Ankara, Kütahya*, 63-85.
- Niven, I. and Zuckerman, H. S., 1980, The Theory of Numbers, 4-th Ed., New York, John Wiley and Sons.
- Nuray, F. and SavaÇ, E., 1995, Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers, *Mathematica Slovaca*, 45 (3), 269-273.
- Pringsheim, A., 1900, Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen, *Mathematische Annalen*, 53 (3), 289-321.
- Rath, D. and Tripathy, B. C., 1994, On statistically convergent and statistically Cauchy sequences, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 25, 381-381.
- Salat, T., 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica Slovaca*, 30 (2), 139-150.
- SavaÇ, E., 2000, Strong almost convergence and almost  $\lambda$ -statistical convergence, *Hokkaido Mathematical Journal*, 29 (3), 531-536.
- Schoenberg, I. J., 1959, The integrability of certain functions and related summability methods II, *The American Mathematical Monthly*, 66 (7), 562-563.
- Steinhaus, H., 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, In *Colloq. Math*, No. 1, 73-74.
- Türkmenoğlu, A., 1993, Bazı çift indisli dizi uzayları, Doktora tezi, *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ, 2-5.
- Zygmund A, 1979, *Trigonometric Series*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

**EK-1**

<b>Kontrol Edilecek Hususlar</b>	<b>Evet</b>	<b>Hayır</b>
Sayfa yapısı uygun mu?	✓	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	✓	
Denklem yazımları uygun mu?	✓	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirim, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür yazıldı mı?	✓	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	✓	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	✓	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	✓	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	✓	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	✓	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	✓	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

Unvanı Adı SOYADI

İmza

**Öğrenci** : Koray İbrahim ATABEY

.....  
.....

**Danışman** : Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

.....  
.....

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum.**

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI

Tarih

İmza

Doç. Öğretim Üyesi Harun ÖNLÜ

19.06.2019

.....  
.....

## ÖZGEÇMİŞİ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Koray Çbrahim ATABEY  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Yatağan /MUĞLA-12/01/1981  
**Telefon** : 506 930 17 32  
**Faks** :  
**e-mail** : korayatabey7@gmail.com

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe İl	Bitirme Yılı
Lise	: Muğla Turgut Reis Lisesi, Muğla	1998
Üniversite	: Akdeniz Üniversitesi	2005
Tezsiz Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi	2006
Doktora	:	

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2006-2010	Milas Sınav Dergisi Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2010-2014	Ziraat Bankası	Operasyon Asistanı
2014-2019	Milli Eğitim	Matematik Öğretmeni

### YABANCI DİLLER

İngilizce, Yökdil Puan: 56.25