



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**GENİŞLETİLMİŞ b -METRİK UZAYLARDA
BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Melisa UYSAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2021
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



GENİŞLETİLMİŞ b -METRİK UZAYLARDA
BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Melisa UYSAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Doç. Dr. Hüseyin IŞIK

Ağustos-2021
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

Melisa UYSAL tarafından hazırlanan “**Genişletilmiş b -Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri**” adlı tez çalışması 03/08/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü

Danışman

Doç. Dr. Hüseyin IŞIK

Bandırma Onyediy Eylül Üniversitesi, Mühendislik
ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Mühendislik Temel
Bilimleri Bölümü

Üye

Doç. Dr. Özgür EGE

Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonuç:

Enstitü Yönetim Kurulu/...../..... Tarih ve/..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Melisa UYSAL

Tarih: 03/08/2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENİŞLETİLMİŞ b -METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Melisa UYSAL

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin IŞIK

Bu tez çalışmasında, b -metrik, genişletilmiş b -metrik ve α - ψ -büzülme dönüşümü hakkında gerekli bilgiler verilmiş olup, genişletilmiş b -metrik ve genişletilmiş dikdörtgen b -metrik uzaylar üzerinde bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir. İlk olarak, tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra, genişletilmiş b -metrik ve genişletilmiş dikdörtgen b -metrik uzaylar kavramları verilerek bu uzaylar üzerinde bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Ayrıca ana teoremlerin etkinliğini göstermek için bazı örnekler verilmiştir.

2021, 37 Sayfa

Anahtar Kelimeler: α - ψ -Büzülme Dönüşümü, b -Metrik Uzay, Genişletilmiş b -Metrik Uzay, Genişletilmiş Dikdörtgen b -Metrik Uzay, Sabit Nokta.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

SOME FIXED POINT THEOREMS IN EXTENDED b -METRIC SPACES

Melisa UYSAL

Muş Alparslan University Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin IŞIK

In this thesis, background information about b -metric, extended b -metric and α - ψ -contractive mapping is given and some fixed point theorems on extended b -metric and extended rectangular b -metric spaces are investigated. First, the basic definitions and theorems to be used throughout the thesis are given. Then, some fixed point theorems on these spaces are examined by giving the concepts of extended b -metric and extended rectangular b -metric spaces. In addition, some examples are given to demonstrate the effectiveness of the main theorems.

2021, 37 Pages

Keywords: α - ψ -Contractive Mapping, b -Metric Space, Extended b -Metric Space, Extended Rectangular b -Metric Space, Fixed Point.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın hazırlanmasında maddi ve manevi emeği bulunan her anlamda benden desteğini eksik etmeyen, akademik gelişmemde bilgi ve becerilerini paylaşarak bana yardımcı olan, rehberliği ile bana yol gösteren başta saygı değer hocam Doç. Dr. Hüseyin IŞIK'a ve bu süreçte desteğini hiç eksik etmeyen, bu yolculukta bilgisini ve zamanını benimle paylaşan değerli arkadaşım Meryem IŞIK'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Melisa UYSAL
MUŞ-2021



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
SİMGELER ve KISALTMALAR	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEORİK ESASLAR	3
2.1 Bazı Temel Tanım ve Teoremler	3
2.2 Sabit Nokta ve Banach Teoremi	11
2.3 b -Metrik Uzayı.....	12
3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA	15
3.1 Genişletilmiş b -Metrik Uzay ve Banach Sabit Nokta Teoreminin Bu Uzaydaki Genişlemesi.....	15
3.2 Genişletilmiş b -Metrik Uzaylarda α - ψ -Büzülme Dönüşümleri için Bazı Sabit Nokta Teoremleri	20
3.3 Genişletilmiş Dikdörtgen b -Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri	28
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	35
4.1 Sonuçlar	35
4.2 Öneriler	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	37

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

\mathbb{R}	:	Reel sayılar kümesi
\mathbb{N}	:	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}^+	:	$[0, \infty)$
\forall	:	Her
\exists	:	En az bir

Kısaltmalar

(X, d)	:	Metrik uzay
θ -metrik uzay	:	Genişletilmiş b -metrik uzay
r_b -metrik uzay	:	Dikdörtgen b -metrik uzay
ω -metrik uzay	:	Genişletilmiş dikdörtgen b -metrik uzay

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Öklid metriği	5
Şekil 2.2. Taksi-kap metriği	6
Şekil 2.3. Maksimum metriği	6



1. GİRİŞ

Analizde ve geometride olduğu gibi matematiğin birçok dalında soyut bir kümenin elemanlarına uygulanabilir bir uzaklık kavramına ihtiyaç duyulmuştur. Boş olmayan bir kümenin elemanları arasındaki uzaklığı ifade etmek için Frechet (1906), metrik ve metrik uzay kavramlarını tanımlamıştır. Son yüzyılda metrik uzay ile beraber sabit nokta teorisi de önem kazanmıştır. Metrik uzaylar ve sabit nokta; fonksiyonel analiz, genel topoloji, soyut cebir, geometri, uygulamalı matematik ve buna benzer matematiğin birçok dalında sıklıkla kullanılmıştır.

Sabit nokta teorisi, diferansiyel denklemlerin, integral denklemlerin, kısmi diferansiyel denklemlerin ve diğer ilgili denklemlerin çözümlerinin varlığını ve tekliğini bulmada sıklıkla kullanılmaktadır.

X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $Tx_0 = x_0$ oluyorsa, x_0 noktasına T nin bir sabit noktası denir. Yani, T dönüşümü altında değişmeyen bir noktaya T nin bir sabit noktası denir. Örneğin, $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu $Tx = \frac{x}{20}$ olarak tanımlansın. $T0 = 0$ olduğundan $x_0 = 0$ noktası T nin bir sabit noktasıdır. Ancak $Tx = \frac{x}{20}$ ile tanımlanan $T: (0,1] \rightarrow (0,1]$ dönüşümünün bir sabit noktası yoktur. Çünkü T dönüşümü $x_0 = 0$ noktasında tanımlı değildir. Görüldüğü üzere sabit noktanın varlığı dönüşümün tanımına bağlı olduğu gibi dönüşümün tanımlandığı kümenin yapısına da bağlıdır.

Lineer olmayan fonksiyonel denklemlerle tanımlanabilen fen ve mühendislikteki sayısız problem denk bir sabit nokta problemine indirgenerek çözülebilir. Örneğin $x^2 - 5x + 6 = 0$ denklemini ele alalım. Burada $x = 2$ ve $x = 3$ bu denklemin birer köküdür. Bu denklemi $x = \frac{x^2+6}{5}$ olarak yazdığımızda $Tx = \frac{x^2+6}{5}$ olmak üzere, bu denklem $x = Tx$ olarak yazılabilir. O halde $x = 2$ ve $x = 3$ noktaları T nin iki sabit noktasıdır. Bu yüzden $Sx = 0$ olarak verilen bir denklem $Sx = Tx - x$ şeklinde yazılabileceğinden bu denklemin çözümünün bulunması ile $Tx = x$ denkleminin sabit noktasının bulunması birbirine denktir.

Metrik uzaylarda sabit nokta teorisi Banach (1922) tarafından başlatılmıştır. Tam bir metrik uzaydaki her büzülme dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğunu ifade eden Banach sabit nokta teoremi, matematiğin birçok dalında ve diğer disiplinlerde çeşitli uygulamalara sahiptir. Bu temel teorem iki ana yönde genelleştirilmiştir; ya dönüşümün

tanım kümesini genelleştirerek ya büzülme koşulunu zayıflatarak ya da bazen her ikisini birden yaparak.

Metrik uzayları genelleştiren b -metrik fikri Bakhtin (1989) in çalışmalarından ortaya çıkmıştır. Daha sonra, Czerwik (1993) üçgen eşitsizliğinden daha zayıf bir aksiyom vererek Banach sabit nokta teoremini genelleştirmek amacıyla b -metrik uzayları tanımladı. Kamran ve arkadaşları (2017) genişletilmiş b -metrik uzayları tanıtarak Banach (1922) ve Czerwik (1993) in sonuçlarını genelleştirmiştir. Son olarak, Asim ve arkadaşları (2017) genişletilmiş dikdörtgen b -metrik uzay kavramını tanıtarak yukarıda bahsedilen tüm çalışmaları geliştirmiştir.

Diğer taraftan, Samet ve arkadaşları (2012), büzülme şartını zayıflatarak α - ψ -büzülme dönüşümlerini tanımladı ve tam metrik uzaylarda bu dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını ve tekliğini inceledi. Daha sonra birçok yazar genelleştirilmiş metrik uzaylarda tanımlanan α - ψ -büzülme dönüşümleri için sabit noktanın varlığını ve tekliğini araştırmıştır. Son olarak, Wasfi ve arkadaşları (2018) genişletilmiş b -metrik uzay üzerinde α - ψ -büzülme dönüşümlerini tanıtarak bu dönüşümlerin hangi şartlar altında bir tek sabit noktaya sahip olacağını araştırmıştır.

2. TEORİK ESASLAR

Bu bölümde bilmemiz gereken ve üzerinde çalışacağımız konu için gerekli tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1 Bazı Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 X boş olmayan bir küme olsun. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

- i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- ii) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ (değişme özelliği);
- iii) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsiziği)

(Bayraktar, 2006).

Örnek 2.1 $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $d(x, y) = |x - y|$ ile tanımlansın. Bu takdirde d , \mathbb{R} üzerinde bir metriktir. Bu metriğe alışılmış (standart) metrik denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.2 X boş olmayan bir küme ve $d_1: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$d_1(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \text{ ise} \\ 1, & x \neq y \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda d_1 , X üzerinde bir metrik ve (X, d_1) bir metrik uzaydır. Bu metriğe ayrık (diskret) metrik denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.3 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere;

$$d_2(x, y) = (|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlı $d_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu \mathbb{R}^2 üzerinde bir metriktir. Bu metriğe Öklid metriği denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.2 (X, d) bir metrik uzay ve $a \in X$ olsun. $r > 0$ olmak üzere,

$$B(a, r) = \{x \in X: d(a, x) < r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı açık yuvar (veya a nın r -açık komşuluğu),

$$D(a, r) = \{x \in X: d(a, x) \leq r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(a, r) = \{x \in X: d(a, x) = r\}$$

kümesine de a merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.4 (\mathbb{R}, d) bir alışılmış metrik uzay, $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} B(a, \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R}: d(x, a) < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}: |x - a| < \varepsilon\} \\ &= (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(a, \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R}: d(x, a) \leq \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}: |x - a| \leq \varepsilon\} \\ &= [a - \varepsilon, a + \varepsilon], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(a, \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R}: d(x, a) = \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}: |x - a| = \varepsilon\} \\ &= \{x = a - \varepsilon \text{ veya } x = a + \varepsilon\} \end{aligned}$$

dır (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.5 (X, d) bir ayrık metrik uzay, $a \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde

$$B(a, \varepsilon) = \begin{cases} \{a\}, & \varepsilon \leq 1 \text{ ise} \\ X, & \varepsilon > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$D(a, \varepsilon) = \begin{cases} \{a\}, & \varepsilon < 1 \text{ ise} \\ X, & \varepsilon \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$S(a, \varepsilon) = \begin{cases} X \setminus \{a\}, & \varepsilon = 1 \text{ ise} \\ \emptyset, & \varepsilon \neq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.6 \mathbb{R}^2 uzayı üzerinde d_2, d_3 ve d_∞ metrikleri $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$d_2(x, y) = (|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$d_3(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|;$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\};$$

ile tanımlansın (Bayraktar, 2006).

a) (\mathbb{R}^2, d_2) öklid metrik uzayında $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ merkezli r yarıçaplı açık yuvar, kapalı yuvar ve kürenin grafiği;

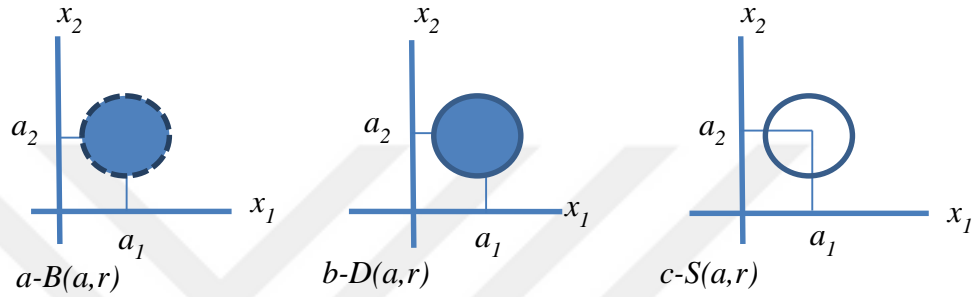
$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2: d_2(x, a) < r\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: d_2((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: |x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2 < r^2\},$$

$$\begin{aligned}
D(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, a) \leq r\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_2((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq r\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2 \leq r^2\}, \\
S(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, a) = r\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_2((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2 = r^2\},
\end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir.

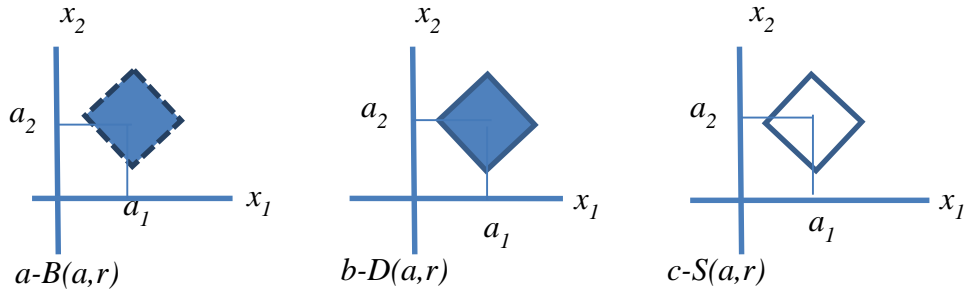


Şekil 2.1. Öklid metriği

b) (\mathbb{R}^2, d_3) taksi-kap metrik uzayında $a=(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ merkezli r yarıçaplı açık yuvar, kapalı yuvar ve kürenin grafiği;

$$\begin{aligned}
B(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_3(x, a) < r\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_3((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r\}, \\
D(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_3(x, a) \leq r\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_3((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq r\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \leq r\}, \\
S(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_3(x, a) = r\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_3((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r\},
\end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.2. Taksi-kap metriği

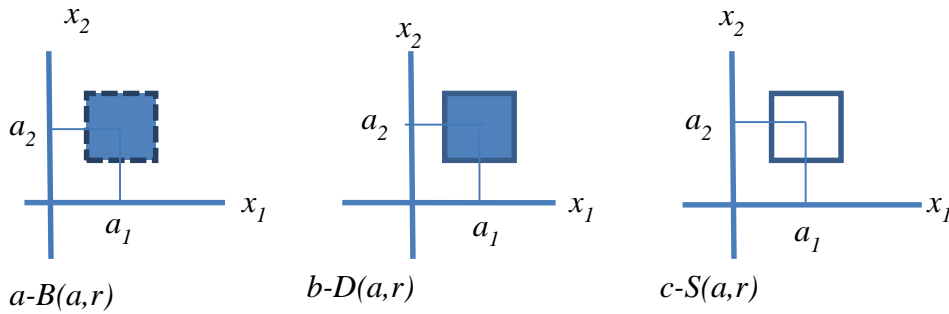
c) (\mathbb{R}^2, d_∞) maksimum metrik uzayında $a=(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ merkezli r yarıçaplı açık yuvar, kapalı yuvar ve kürenin grafiği;

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(x, a) < r\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < r\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(x, a) \leq r\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((x_1, x_2), (a_1, a_2)) \leq r\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} \leq r\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(x, a) = r\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = r\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} = r\}, \end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.3. Maksimum metriği

Tanım 2.3 (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. d metriğinin A ya kısıtlaması $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$, her $x, y \in A$ için $d_A(x, y) = d(x, y)$ ile tanımlansın. Bu takdirde d_A , A üzerinde

bir metriktir. d_A metriğine d den A üzerine indirgenmiş metrik ve (A, d_A) uzayına da (X, d) uzayının alt uzayı denir (Balcı, 1997).

Tanım 2.4 (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x, y \in A$ için $d(x, y) \leq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa A kümesine sınırlıdır denir. X uzayı d ye göre sınırlı ise d metriğine sınırlı metrik denir (Balcı, 1997).

Tanım 2.5 Bir metrik uzayda herhangi bir dizinin terimlerinin kümesi sınırlı ise, bu diziyeye sınırlı dizi denir. Yani, $\{x_n\}$ bir (X, d) metrik uzayında bir dizi olmak üzere her $n, m \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_m) \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine sınırlıdır denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.6 (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve A ile B , X in boş olmayan iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

sayısına A ile B kümeleri arasındaki uzaklık,

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

sayısına x noktasının A kümesine uzaklığı ve

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

sayısına da A kümesinin çapı denir (Balcı, 1997).

Tanım 2.7 Bir metrik uzayda herhangi bir kümenin çapı sonlu ise bu kümeye sınırlıdır denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.7 $A = [1, 3)$, $B = (3, 5]$ olmak üzere \mathbb{R} de tanımlı d (alışılmış) ve d_1 (ayrık) metrik uzaylarında A ile B arasındaki uzaklık:

$$d(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(3 - \frac{1}{n}\right) - \left(3 + \frac{1}{n}\right) \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}$$

$$= 0$$

ve $d_1(A, B) = \inf\{d_1(x, y) : x \in A, y \in B\} = 1$ dir.

Tanım 2.8 (X, d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $x \in A$ için $B(x, r) \subseteq A$ olacak biçimde bir $r > 0$ varsa x noktasına A kümesinin bir iç noktası denir. Eğer her bir $x \in A$ noktası A nın bir iç noktası ise A ya açık küme denir. $U \subseteq X$ olmak üzere eğer $U^c = X \setminus U$ açık ise U kümesine kapalı küme denir (Bayraktar, 2006).

Lemma 2.1 (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda

- i) $B(x, \varepsilon)$ açık yuvarı bir açık kümedir;
- ii) $D(x, \varepsilon)$ kapalı yuvarı bir kapalı kümedir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.9 (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0, d(x_n, x_0) < \varepsilon$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ veya $x_n \xrightarrow{d} x_0$ şeklinde gösterilir.

Bir diğer ifadeyle, $x_n \xrightarrow{d} x_0$ ise dizinin belli bir terimden sonra bütün terimleri x_0 noktasının uygun bir ε komşuluğunda bulunur (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.8 (\mathbb{R}, d) alışılmış metrik uzayını ve $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$ kümesini göz önüne alalım. $(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ dizisi \mathbb{R} de yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ dir. Fakat (x_n) , X 'de yakınsak değildir. Çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ fakat $0 \notin X$ dir. Ancak $X = [0,1)$ alınırsa $(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ dizisi X de yakınsak olur. Bu örnekte de görüldüğü üzere yakınsaklık dizinin niteliğine göre değiştiği gibi dizinin tanımlandığı aralığa göre de değişir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.9 Alışılmış metriğe göre \mathbb{R} de $\{x_n\} = (1,2,3, \dots)$ dizisi yakınsak değildir. Fakat genel terimi $x_n = \frac{1}{n+1}$ olan dizi yakınsaktır. Çünkü,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| = 0$$

dir. Yani, aynı metrik uzay üzerinde tanımlanan iki diziden biri yakınsak, diğeri ise yakınsak değildir. Dolayısıyla yakınsaklık dizinin tanımına göre de değişir (Işık, 2016).

Örnek 2.10 \mathbb{R}^2 de genel terimi $x_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ olan (x_n) dizisini göz önüne alalım. $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $d(x, y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ metriğini alırsak (x_n) dizisi bu metriğe göre $(1,0)$ noktasına yakınsar. Yani,

$$d(x_n, (1,0)) = d\left(\left(1, \frac{1}{n}\right), (1,0)\right) = \max\left\{|1-1|, \left|\frac{1}{n}-0\right|\right\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

olur. Fakat bu dizi ayrik metriğe göre yakınsak değildir. Çünkü d , \mathbb{R}^2 de ayrik metrik ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, (1,0)) = 1 \neq 0$$

olduğu görölür. Yani, yakınsaklık metriğe göre de değişir (Işık, 2016).

Teorem 2.1 Metrik uzayda yakınsak her dizinin limiti tektir ve yakınsak diziler sınırlıdır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.10 (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\} \subset X$ olsun. $k \in \mathbb{N}$ için $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.2 Bir metrik uzayda yakınsak bir dizinin her alt dizisi de yakınsaktır ve dizinin kendisi ile alt dizileri aynı noktaya yakınsar (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.11 (X, d) ve (Y, p) birer metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $p(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise f ye X uzayında süreklidir ya da kısaca süreklidir denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.12 (X, d) ve (Y, p) birer metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $T : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $p(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa T fonksiyonu x_0 noktasında düzgün süreklidir (Bayraktar, 2006)

Örnek 2.11 \mathbb{R} de $d(x, y) = |x - y|$ alışılmış metriği için $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow Tx = x^3$$

ile tanımlı fonksiyon süreklidir, fakat düzgün sürekli değildir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.13 X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ailesine X üzerinde bir topoloji denir. Burada $\mathcal{P}(X)$, X kümesinin tüm alt kümelerinin ailesini gösterir.

$(\tau_1) \emptyset, X \in \tau,$

$(\tau_2) G_1, G_2, \dots, G_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau (n \in \mathbb{N}),$

$(\tau_3) G_i \in \tau, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau (I \text{ bir indis kümesi) dir (Soykan, 2016).}$

Tanım 2.14 (X, τ) ve (Y, ρ) iki topolojik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x \in X$ olsun. X deki $x_n \rightarrow x$ olacak şekildeki her (x_n) dizisi için $f(x_n) \rightarrow f(x)$ oluyorsa f ye x noktasında dizisel süreklidir denir (Soykan, 2016).

Teorem 2.3

- i) (X, τ) ve (Y, ρ) iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm ise f dizisel süreklidir. Fakat tersi doğru olmayabilir.
- ii) X ve Y iki metrik uzay ise $f: X \rightarrow Y$ nin sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin dizisel sürekli olmasıdır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.15 (X, d) metrik uzayının tüm açık alt kümelerinin oluşturduğu

$$\tau_d = \{A : A \subseteq X, d - \text{açık}\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye d metriğinin ürettiği topoloji denir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.4 Metrik uzayda yakınsak her dizinin limiti bir tektir ve yakınsak diziler sınırlıdır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.16 Bir (X, d) metrik uzayında herhangi bir dizi $\{x_n\}$ olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ ve $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.5 (X, d) metrik uzayında

- i) yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir;
- ii) her Cauchy dizisi sınırlıdır (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.12 $X = (0, 1]$ bir alışılmış metrik uzay ve $\{x_n = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, X de bir dizi olsun. Bu takdirde $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Gerçekten, her $\varepsilon > 0$ ve $m, n > \frac{1}{\varepsilon}$ için

$d(x_n, x_m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon$ olur. Ancak $x_n \rightarrow 0 \notin X$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi X de yakınsak değildir (Balcı, 1997).

Tanım 2.17 (X, d) metrik uzay olsun. X deki her Cauchy dizisi X in bir noktasına yakınsıyorsa (X, d) ikilisine tam metrik uzay denir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.6 Bir X tam metrik uzayının bir M alt uzayının da tam olması için gerek ve yeter şart M nin X de kapalı bir küme olmasıdır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.18 (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer x noktasının her komşuluğunda A nın x den farklı noktaları varsa, x noktasına A nın bir yığılma noktasıdır denir. A nın tüm yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir. Ayrıca $A \cup A'$ kümesine A nın kapanışı denir ve \bar{A} ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.7 (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

- i) Bir $x \in X$ noktasının A nın bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter şart A kümesinde terimleri x den farklı ve $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır;
- ii) A nın kapalı olması için gerek ve yeter şart A daki yakınsak her dizinin limitinin A da olmasıdır (Bayraktar, 2006).

2.2 Sabit Nokta ve Banach Teoremi

Tanım 2.19 X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx_0 = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa, bu x_0 noktasına T nin sabit noktası denir. O halde $Tx_0 = x_0$ denkleminin çözümü veya çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir (Goebel ve Kirk, 1990).

Örnek 2.13 $X = (0,1]$ ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. $Tx = \frac{x}{2}$ dönüşümünün bir sabit noktası yoktur. $x = 0$ noktası bu dönüşümün bir sabit noktası olabilirdi ancak $0 \notin (0,1]$ dir.

Örnek 2.14 $X = (0,8]$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = 8 - x$ dönüşümünün sabit noktası vardır ve $F(T) = \{4\}$ dür.

Örnek 2.15 $X = [0,1]$ ve $T: X \rightarrow X$, $Tx = x^3$ dönüşümünün $T0 = 0$ ve $T1 = 1$ olmak üzere iki tane sabit noktası vardır ve $F(T) = \{0,1\}$ dir.

Tanım 2.20 (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$$

olacak şekilde $L \geq 0$ sayısı varsa T ye Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük L sayısına T nin Lipschitz sabiti denir.

Eğer T Lipschitz dönüşümü için, $L < 1$ ise T ye bir büzülme dönüşümü, $L = 1$ ise T ye genişlemeyen dönüşüm denir. Ayrıca eğer $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

oluyorsa T ye büzülebilir dönüşüm denir. Bu tanımlardan her büzülme dönüşümünün büzülebilir, büzülebilir dönüşümün de genişlemeyen dönüşüm olduğu açıktır (Goebel & Kirk, 1990).

Örnek 2.16 $X = [0, \infty)$ kümesi d alışımlı metriği ile verilsin. $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu $Tx = \frac{x}{5}$ ile tanımlansın. Bu durumda her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) = \frac{1}{5}d(x, y)$$

olduğundan T bir Lipschitz dönüşümüdür ve $L = \frac{1}{5} < 1$ olması nedeniyle T bir büzülme dönüşümüdür (Goebel ve Kirk, 1990).

Teorem 2.8 (Banach Sabit Nokta Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$, L Lipschitz sabitine sahip bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda T bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik, herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi $z \in X$ noktasına yakınsar ve

$$d(T^n x_0, z) \leq \frac{L^n}{1-L} d(Tx_0, x_0)$$

eşitsizliği sağlanır (Banach, 1922).

2.3 b -Metrik Uzayı

Tanım 2.21 X boş olmayan bir küme ve $s \geq 1$ olsun. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir b -metrik ve (X, d) ikilisine de b -metrik uzay denir.

- i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- ii) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$;

iii) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$ (Czerwik, 1993).

Örnek 2.17 $0 < p < 1$ olmak üzere $X = l_p(\mathbb{R})$ olsun. Burada $l_p(\mathbb{R}) = \{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ dir. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $x = \{x_n\} \in l_p(\mathbb{R})$ ve $y = \{y_n\} \in l_p(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde (X, d) , $s = 2^{1/p}$ katsayısı ile bir b -metrik uzaydır (Berinde, 1993).

Örnek 2.18 $0 < p < 1$ olmak üzere $X = L_p[0,1]$ olsun. Burada $L_p[0,1] = \{x(t) : \int_0^1 |x(t)|^p < \infty, t \in [0,1]\}$ dir. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y \in L_p[0,1]$ için

$$d(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

ile tanımlansın. Bu durumda (X, d) , $s = 2^{1/p}$ katsayısı ile bir b -metrik uzaydır (Berinde, 1993).

Yukarıdaki örnekler b -metrik uzayın, metrik uzay sınıfından daha geniş olduğunu gösterir. Çünkü $s = 1$ alındığında b -metrik uzayı bir metrik uzay olur (Kamran ve ark., 2017).

Örnek 2.19 $X = [0,1]$ olsun. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|^2$ ile tanımlansın. Açık bir şekilde (X, d) , $s = 2$ katsayısı ile bir b -metrik uzaydır, ancak bir metrik uzay değildir (Qawaqneh ve ark., 2019).

Örnek 2.20 $X = \{0,1,2\}$ olsun ve $d = X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$d(0,1) = 1, \quad d(0,2) = \frac{1}{2}, \quad d(1,2) = 2,$$

her $x \in X$ için $d(x, x) = 0$ ve her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ ile tanımlansın. Bu takdirde, $d(1,2) > d(1,0) + d(0,2)$ olduğundan d bir metrik değildir. Ancak, $s \geq \frac{4}{3}$ katsayısı ile d nin bir b -metrik olduğu açıktır (Afshari ve ark., 2020).

Tanım 2.22 (X, d) bir b -metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Bu takdirde, $\{x_n\}$

- i) Cauchy dizisidir ancak ve ancak $n, m \rightarrow \infty$ olduğunda $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ dır;
- ii) yakınsaktır ancak ve ancak $n \rightarrow \infty$ olduğunda $d(x_n, x) \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır (Czerwik, 1993).

Tanım 2.23 (X, d) bir b -metrik uzay olsun. Eğer X deki her Cauchy dizisi bu uzaydaki bir noktaya yakınsıyor ise X tamdır denir (Czerwik, 1993).



3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

3.1 Genişletilmiş b -Metrik Uzay ve Banach Sabit Nokta Teoreminin Bu Uzaydaki Genişlemesi

Tanım 3.1 X boş olmayan bir küme olsun ve $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$ verilsin, $d_\theta: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d_θ ya X üzerinde genişletilmiş b -metrik (kısaca, θ -metrik) ve (X, d_θ) ikilisine de genişletilmiş b -metrik uzay (kısaca, θ -metrik uzay) denir (Kamran ve ark., 2017).

- i) $d_\theta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- ii) $\forall x, y \in X$ için $d_\theta(x, y) = d_\theta(y, x)$;
- iii) $\forall x, y, z \in X$ için $d_\theta(x, z) \leq \theta(x, z)[d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z)]$.

Not: $s \geq 1$ için, eğer $\theta(x, y) = s$ alınırsa b -metrik uzayı elde edilir (Kamran ve ark., 2017).

Örnek 3.1 $X = \{-1, 1, 2\}$ kümesini göz önüne alalım, $X \times X$ üzerinde tanımlı θ fonksiyonu $\theta(x, y) = |x| + |y|$ olsun. d_θ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$d_\theta(2, 2) = d_\theta(1, 1) = d_\theta(-1, -1) = 0,$$

$$d_\theta(1, 2) = \frac{1}{2} = d_\theta(2, 1) \text{ ve}$$

$$d_\theta(1, -1) = d_\theta(-1, 1) = d_\theta(2, -1) = d_\theta(-1, 2) = \frac{1}{3}.$$

O zaman d_θ nın Tanım 3.1 deki ilk iki şartı sağladığı açıktır. Son şartın sağlandığını göstermek için; her $x, y, z \in X$ için;

$$d_\theta(x, z) \leq \theta(x, z)[d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z)]$$

olduğunu göstermek gerekir.

$$d_\theta(1, 2) = \frac{1}{2} \leq 3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] = \theta(1, 2)[d_\theta(1, -1) + d_\theta(-1, 2)],$$

$$d_\theta(1, -1) = \frac{1}{3} \leq 2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] = \theta(1, -1)[d_\theta(1, 2) + d_\theta(2, -1)],$$

$$d_\theta(-1, 2) = \frac{1}{3} \leq 3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] = \theta(-1, 2)[d_\theta(-1, 1) + d_\theta(1, 2)],$$

olduğundan d_θ tanımının son şartını sağlar. Bu yüzden de (X, d_θ) bir θ -metrik uzaydır (Shatanawi ve ark., 2018).

Örnek 3.2 $X = \{1, 2, 3\}$ olsun. $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$ ve $d_\theta: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\theta(x, y) = 1 + x + y,$$

$$d_\theta(1,1) = d_\theta(2,2) = d_\theta(3,3) = 0,$$

$$d_\theta(1,2) = d_\theta(2,1) = 80 \quad , \quad d_\theta(1,3) = d_\theta(3,1) = 1000, \quad d_\theta(2,3) = d_\theta(3,2) = 600$$

(Kamran ve ark., 2017).

İspat: Tanım 3.1 deki ilk iki şartın sağladığı açıktır. Üçüncü şart için,

$$d_\theta(1,2) = 80, \theta(1,2)[d_\theta(1,3) + d_\theta(3,2)] = 4(1000 + 600) = 6400,$$

$$d_\theta(1,3) = 1000, \theta(1,3)[d_\theta(1,2) + d_\theta(2,3)] = 5(80 + 600) = 3400$$

bulunur. Benzer hesaplamalar $d_\theta(2,3)$ için de yapılabilir. Bu nedenle her $x, y, z \in X$ için

$$d_\theta(x, z) \leq \theta(x, z)[d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z)]$$

elde edilir. Dolayısıyla (X, d_θ) bir θ -metrik uzaydır.

Metrik uzaydaki yakınsaklık, Cauchy dizisi ve tamlık kavramları θ -metrik uzayına genişletilebilir (Kamran ve ark., 2017).

Tanım 3.2 (X, d_θ) bir θ -metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun.

- i) Eğer $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için $d_\theta(x_n, x) < \varepsilon$ ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ e yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d_\theta(x_n, x) = 0$ ya da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilir.
- ii) Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $m, n \in \mathbb{N}$ için $m, n \geq n_1$ olduğunda $d_\theta(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir (Kamran ve ark., 2017).

Tanım 3.3 (X, d_θ) bir θ -metrik uzay olsun. Eğer X deki her Cauchy dizisi X deki bir noktaya yakınsıyor ise X e tamdır denir (Kamran ve ark., 2017).

Örnek 3.3 $X: C([a, b], \mathbb{R}), [a, b]$ üzerinde tanımlı tüm sürekli reel değerli fonksiyonların kümesi olsun. $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$ ve $d_\theta: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonsiyonları sırasıyla $\theta(x, y) = |x(t)| + |y(t)| + 2$ ve $d_\theta(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|^2$ ile tanımlansın. Bu takdirde, (X, d_θ) bir tam θ -metrik uzaydır (Kamran ve ark., 2017).

Genelde bir b -metrik sürekli bir fonksiyon olmadığı için θ -metrik de sürekli değildir.

Örnek 3.4 $X = \mathbb{N} \cup \infty$ olsun ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & m = n \text{ ise} \\ \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|, & m, n \text{ çift ya da } mn = \infty \text{ ise} \\ 5, & m, n \text{ tek ve } m \neq n \text{ ise} \\ 2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu takdirde (X, d) , $s = 3$ sabitiyle bir b-metrik uzaydır fakat sürekli değildir. Gerçekten, her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\} = \{2n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu takdirde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(2n, \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0,$$

yani, $x_n \rightarrow \infty$ fakat $d(x_n, 1) = 2 \not\rightarrow d(\infty, 1) = 1$ ($n \rightarrow \infty$) olduğundan d sürekli değildir (Hussain ve ark., 2012).

Lemma 3.1 (X, d_θ) bir tam θ -metrik uzay olsun. Eğer d_θ sürekli ise her yakınsak dizinin bir tek limiti vardır (Kamran ve ark., 2017).

İspat: $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $x, y \in X$ noktaları $\{x_n\}$ dizisinin iki limiti olsun. Yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_\theta(x_n, x) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d_\theta(x_n, y) = 0$ olsun. Bu takdirde Tanım 3.10 daki (iii) şartından;

$$d_\theta(x, y) \leq \theta(x, y)[d_\theta(x, x_n) + d_\theta(x_n, y)]$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $d_\theta(x, y) = 0$ ve bu yüzden de $x = y$ elde edilir. Bu nedenle $\{x_n\}$ dizisi bir tek noktaya yakınsar.

Teorem 3.1 d_θ sürekli bir fonksiyon olmak üzere (X, d_θ) bir tam θ -metrik uzay olsun.

$T: X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d_\theta(Tx, Ty) \leq kd_\theta(x, y) \quad (3.1)$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada $k \in [0, 1)$ ve her $x_0 \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0$ olmak üzere $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \theta(x_n, x_m) < \frac{1}{k}$ dir.

Bu takdirde T nin bir tek sabit noktası ξ dir. Ayrıca, her $y \in X$ için $T^n y \rightarrow \xi$ dir (Kamran ve ark., 2017).

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $\{x_n\}$ iterasyon dizisi

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$$

ile tanımlansın. Bu takdirde (3.1) eşitsizliğini uygulayarak

$$d_\theta(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d_\theta(x_0, x_1) \quad (3.2)$$

elde edilir. $m > n$ için üçgen eşitsizliği ve (3.2) den

$$\begin{aligned} d_\theta(x_n, x_m) &\leq \theta(x_n, x_m)k^n d_\theta(x_0, x_1) + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)k^{n+1}d_\theta(x_0, x_1) + \dots \\ &+ \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m) \dots \theta(x_{m-2}, x_m)\theta(x_{m-1}, x_m)k^{m-1}d_\theta(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq d_\theta(x_0, x_1)[\theta(x_1, x_m)\theta(x_2, x_m) \dots \theta(x_{n-1}, x_m)\theta(x_n, x_m)k^n \\ &+ \theta(x_1, x_m)\theta(x_2, x_m) \dots \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)k^{n+1} + \dots \\ &+ \theta(x_1, x_m)\theta(x_2, x_m) \dots \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m) \dots \theta(x_{m-2}, x_m)\theta(x_{m-1}, x_m)k^{m-1}] \end{aligned}$$

(3.3) yazılabilir.

$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \theta(x_{n+1}, x_m)k < 1$ olduğundan $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} k^n \prod_{i=1}^n \theta(x_i, x_m)$ serisi oran testinden dolayı yakınsaktır.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \prod_{i=1}^n \theta(x_i, x_m) \text{ ve } S_n = \sum_{j=1}^n k^j \prod_{i=1}^j \theta(x_i, x_m)$$

olsun. Böylece $m > n$ için (3.3) eşitsizliğinden

$$d_\theta(x_n, x_m) \leq d_\theta(x_0, x_1)[S_{m-1} - S_n]$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $m, n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $\lim_{n,m \rightarrow \infty} d_\theta(x_n, x_m) = 0$ elde edilir. Bu ise $\{x_n\}$ in bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow \xi$ olacak şekilde bir $\xi \in X$ vardır. Dolayısıyla, üçgen eşitsizliği ve (3.1) den

$$\begin{aligned} d_\theta(T\xi, \xi) &\leq \theta(T\xi, \xi)[d_\theta(T\xi, x_n) + d_\theta(x_n, \xi)] \\ &\leq \theta(T\xi, \xi)[kd_\theta(\xi, x_{n-1}) + d_\theta(x_n, \xi)] \end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıda $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, $d_\theta(T\xi, \xi) = 0$ ve bu yüzden $T\xi = \xi$ elde edilir. Sabit noktanın tekliği için x ve y , T nin farklı iki sabit noktası olsun. Bu durumda,

$$d_\theta(x, y) = d_\theta(Tx, Ty) \leq kd_\theta(x, y)$$

ve bu da $d_\theta(x, y) = 0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $x = y$ elde edilir (Kamran ve ark., 2017).

Bu bölüm boyunca $T: X \rightarrow X$ dönüşümü ve $x_0 \in X$ için, $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, T^2x_0, T^3x_0, \dots\}$ kümesi x_0 in yörüngesini temsil eder (Kamran ve ark., 2017).

Tanım 3.4 $T: X \rightarrow X$ ve bazı $x_0 \in X$ için $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, T^2x_0, T^3x_0, \dots\}$ kümesi x_0 in yörüngesi olsun. Bu takdirde $G: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, eğer $\{x_n\} \subset \mathcal{O}(x_0)$ ve $x_n \rightarrow t$ iken $G(t) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} G(x_n)$ oluyorsa, $t \in X$ de T -orbital alttan yarı-sürekli denir (Kamran ve ark., 2017).

Teorem 3.2 d_θ sürekli bir fonksiyon olmak üzere (X, d_θ) bir tam θ -metrik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $T: X \rightarrow X$ dönüşümü her $y \in \mathcal{O}(x_0)$ için

$$d_\theta(Ty, T^2y) \leq kd_\theta(y, Ty) \quad (3.4)$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada $k \in [0,1)$ ve her $x_0 \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0$ olmak üzere $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \theta(x_n, x_m) < \frac{1}{k}$ dir. Bu takdirde $n \rightarrow \infty$ için $T^n x_0 \rightarrow \xi \in X$ dir. Ayrıca ξ , T nin bir sabit noktasıdır ancak ve ancak $G(x) = d(x, Tx)$ fonksiyonu ξ noktasında T -orbital alttan yarı-sürekli (Kamran ve ark., 2017).

İspat: $x_0 \in X$ için $\{x_n\}$ iterasyon dizisi

$$x_0, Tx_0 = x_1, x_2 = Tx_1 = T(Tx_0) = T^2x_0, \dots, x_n = T^n x_0, \dots$$

şeklinde tanımlansın. $y = Tx_0$ için (3.4) eşitsizliği uygulanırsa

$$d_\theta(T^n x_0, T^{n+1} x_0) = d_\theta(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d_\theta(x_0, x_1) \quad (3.5)$$

elde edilir.

Teorem 3.1 in ispatındaki aynı işlemler uygulanarak $\{x_n\}$ in bir Cauchy dizisi olduğu görülür. X tam olduğundan $x_n = T^n x_0 \rightarrow \xi$ olacak şekilde bir $\xi \in X$ vardır.

Kabul edelim ki G fonksiyonu $\xi \in X$ noktasında T -orbital alttan yarı-sürekli olsun. Bu takdirde,

$$d_\theta(\xi, T\xi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d_\theta(T^n x_0, T^{n+1} x_0) \quad (3.6)$$

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} k^n d_\theta(x_0, x_1) = 0 \quad (3.7)$$

olur ki bu ise ξ nin T nin bir sabit noktası olduğunu gösterir.

Tersine $\xi = T\xi$ ve $x_n \rightarrow \xi$ olmak üzere $x_n \in \mathcal{O}(x)$ olsun. Bu takdirde,

$$G(\xi) = d(\xi, T\xi) = 0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} G(x_n) = d(T^n x_0, T^{n+1} x_0) \quad (3.8)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar (Kamran ve ark., 2017).

Örnek 3.5 $X = [0, \infty)$ olsun. $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$ ve $d_\theta(x, y): X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları $\theta(x, y) = x + y + 2$ ve $d_\theta(x, y) = (x - y)^2$ ile tanımlansın. Bu takdirde d_θ , X üzerinde bir tam θ -metriktir. $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu $Tx = \frac{x}{2}$ ile tanımlansın. Bu durumda,

$$d_\theta(Tx, Ty) = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{3}(x - y)^2 = kd_\theta(x, y)$$

olur. Her $x \in X$ için $T^n x = \frac{x}{2^n}$ olduğundan

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \theta(T^m x, T^n x) = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2^m} + \frac{x}{2^n} + 2\right) < 3$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.1 in tüm şartları sağlandığından T nin bir tek sabit noktası vardır (Kamran ve ark., 2017).

Örnek 3.6 $X = [0, \frac{1}{4}]$ olsun. $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$ ve $d_\theta(x, y): X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları $\theta(x, y) = x + y + 2$ ve $d_\theta(x, y) = (x - y)^2$ ile tanımlansın. Bu takdirde d_θ, X üzerinde bir tam θ -metriktir. $T: X \rightarrow X$ fonksiyonu $Tx = x^2$ ile tanımlansın. Bu durumda,

$$d_\theta(Tx, Ty) \leq \frac{1}{4} d_\theta(x, y)$$

olur. Her $x \in X$ için $T^n x = x^{2^n}$ olduğundan

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \theta(T^m x, T^n x) < 4$$

elde edilir. Teorem 3.1 in tüm şartları sağlandığından T nin bir tek sabit noktası vardır (Kamran ve ark., 2017).

3.2 Genişletilmiş b -Metrik Uzaylarda α - ψ -Büzülme Dönüşümleri için Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Ψ aşağıdaki şartları sağlayan tüm $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarının bir kümesi olsun:

- i) ψ azalandır;
- ii) $\forall t > 0$ için ψ^n, ψ nin n . kuvveti olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$ dir (Samet ve ark., 2012)

Lemma 3.2 $\forall t \in [0, \infty)$ için $\psi \in \Psi$ ise $\psi(t) < t$ dir (Shatanawi ve ark., 2018).

İspat: Aksini kabul edelim. Yani, $\psi \in \Psi$ fakat bazı $t_0 > 0$ için $\psi(t_0) \geq t_0$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde ψ azalmayan bir fonksiyon olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\psi^n(t_0) \geq t_0$ olur. Dolayısıyla $\psi^n(t_0) \not\rightarrow 0$ ve $\sum_n \psi^n(t_0) \not< \infty$ olur ki bu da ψ nin tanımıyla çelişir. Böylece her $t \in [0, \infty)$ için $\psi(t) < t$ dir.

Tanım 3.5 X boş olmayan bir küme ve $\theta: X \times X \rightarrow [1, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Ψ_s aşağıdaki şartları sağlayan tüm $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarının bir kümesi olsun:

- i) ψ azalandır;
- ii) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, X$ de herhangi bir dizi ve ψ^n, ψ nin n . kuvveti olmak üzere, her $t > 0$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) \prod_{i=1}^n \theta(x_i, x_m) < \infty$ dir (Shatanawi ve ark., 2018).

Not: Eğer $\psi \in \Psi_s$ ise $\forall t > 0$ için $\psi^n(t) \prod_{i=1}^n \theta(x_i, x_m) \geq \psi^n(t)$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$ dir. Dolayısıyla Lemma 3.2 den $\psi(t) < t$ dir (Shatanawi ve ark., 2018).

Ayrıca aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi Ψ_s boş olmayan bir kümedir.

Örnek 3.7

1) (X, d_θ) , θ -metrik uzayı Örnek 3.1 deki gibi tanımlansın. $k < 1$ olmak üzere $\psi(t) = \frac{kt}{4}$ dönüşümü tanımlansın. Her $x, y \in X$ için $\theta(x, y) \leq 4$ olduğu görülür. O zaman

$$\psi^n(t) \prod_{i=1}^n \theta(x_i, x) \leq \frac{k^n t}{4^n} \cdot 4^n = k^n t$$

dir. Bu nedenle,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) \prod_{i=1}^n \theta(x_i, x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} k^n t < \infty$$

olur.

2) $X = [1, \infty)$ ve $\theta(x, y) = 1 + \frac{1}{1+\ln(x+y)}$ ile verilen (X, d_θ) θ -metrik uzayını göz önüne alalım. $k < 1$ olmak üzere $\psi(t) = \frac{kt}{2}$ dönüşümü tanımlansın. Her $x, y \in X$ için $1 + \frac{1}{1+\ln(x+y)} \leq 2$ olduğundan $\theta(x, y) \leq 2$ dir. Buradan,

$$\psi^n(t) \prod_{i=1}^n \theta(x_i, x) \leq \frac{k^n t}{2^n} \cdot 2^n = k^n t$$

olur. Bu nedenle,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) \prod_{i=1}^n \theta(x_i, x) < \infty$$

ve dolayısıyla Ψ_s boş olmayan bir kümedir (Shatanawi ve ark., 2018).

Tanım 3.6 (X, d_θ) bir θ -metrik uzay olsun. Verilen bir $T: X \rightarrow X$ dönüşümü $\alpha: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ve $\psi \in \Psi_s$ olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y) d_\theta(Tx, Ty) \leq \psi(d_\theta(x, y)) \quad (3.9)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, T ye α - ψ -büzülme dönüşümü denir.

Her $x, y \in X$ için $\alpha(x, y) \geq 1$ olduğunda $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ ise, T ye α -geçişli bir dönüşüm denir (Shatanawi ve ark., 2018).

Teorem 3.3 (X, d_θ) bir tam θ -metrik uzay ve bazı $\psi \in \Psi_s$ için $T: X \rightarrow X$ bir α - ψ -büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

- i) T , α -geçişlidir;
- ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır;
- iii) T süreklidir.

Bu takdirde, T nin bir sabit noktası vardır. Ayrıca, her $x \in F(T)$ için $\alpha(x, z) \geq 1$ olacak şekilde bir $z \in X$ varsa, bu sabit nokta tektir (Shatanawi ve ark., 2018).

İspat: $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ mevcut olsun. $x_n = Tx_{n-1}$ dizisi tanımlansın. Eğer $x_n = x_{n+1}$ olacak şekilde bir n sayısı varsa, bu durumda $x = x_n$ sabit noktası elde edilir. Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. Bu ise $d_\theta(x_{n+1}, x_n) > 0$ olmasını gerektirir. Teoremin ikinci şartından, $\alpha(Tx_0, Tx_1) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için tümevarım uygulandığında $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ elde edilir. Bu durumda, (3.9) büzülme şartı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
d_\theta(x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n) d_\theta(x_n, x_{n+1}) \\
&= \alpha(x_{n-1}, x_n) d_\theta(Tx_{n-1}, Tx_n) \\
&\leq \psi(d_\theta(x_{n-1}, x_n)) \\
&\leq \psi(\alpha(x_{n-2}, x_{n-1}) d_\theta(x_{n-1}, x_n)) \\
&= \psi(\alpha(x_{n-2}, x_{n-1}) d_\theta(Tx_{n-2}, Tx_{n-1})) \\
&\leq \psi^2(d_\theta(x_{n-2}, x_{n-1})) \\
&\vdots \\
&\leq \psi^n(d_\theta(x_0, x_1))
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $m > n$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
d_\theta(x_n, x_m) &\leq \theta(x_n, x_m) [d_\theta(x_n, x_{n+1}) + d_\theta(x_{n+1}, x_m)] \\
&= \theta(x_n, x_m) d_\theta(x_n, x_{n+1}) + \theta(x_n, x_m) d_\theta(x_{n+1}, x_m) \\
&\leq \theta(x_n, x_m) \psi^n(d_\theta(x_0, x_1)) + \theta(x_n, x_m) \theta(x_{n+1}, x_m) [d_\theta(x_{n+1}, x_{n+2}) + d_\theta(x_{n+2}, x_m)] \\
&\leq \theta(x_n, x_m) \psi^n(d_\theta(x_0, x_1)) + \theta(x_n, x_m) \theta(x_{n+1}, x_m) \psi^{n+1}(d_\theta(x_0, x_1)) \\
&\quad + \theta(x_n, x_m) \theta(x_{n+1}, x_m) d_\theta(x_{n+2}, x_m)
\end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned}
&\leq \psi^n(d_\theta(x_0, x_1)) \theta(x_n, x_m) + \psi^{n+1}(d_\theta(x_0, x_1)) \theta(x_n, x_m) \theta(x_{n+1}, x_m) \\
&+ \dots + \psi^{m-1}(d_\theta(x_0, x_1)) \theta(x_n, x_m) \theta(x_{n+1}, x_m) \dots \theta(x_{m-1}, x_m)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=n}^{m-1} \psi^j(d_\theta(x_0, x_1)) \prod_{i=n}^j \theta(x_i, x_m)$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} \psi^j(d_\theta(x_0, x_1)) \prod_{i=n}^j \theta(x_i, x_m) - \sum_{j=1}^{n-1} \psi^j(d_\theta(x_0, x_1)) \prod_{i=n}^j \theta(x_i, x_m)$$

$$= S_{m-1} - S_{n-1}$$

olur ki burada

$$S_{m-1} = \sum_{j=1}^{m-1} \psi^j(d_\theta(x_0, x_1)) \prod_{i=n}^j \theta(x_i, x_m)$$

dir. $\psi \in \Psi_s$ olduğundan dolayı da

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} [S_{m-1} - S_{n-1}] = 0$$

dir. Bu nedenle, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ bir Cauchy dizisidir. (X, d_θ) uzayının tamlığından $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. T dönüşümü sürekli olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $x_{n+1} = Tx_n \rightarrow Tx$ olur. Bu yüzden de

$$d_\theta(x, Tx) \leq \theta(x, Tx)[d_\theta(x, x_{n+1}) + d_\theta(x_{n+1}, Tx)]$$

ve $n \rightarrow \infty$ için yukarıda limit alınırsa,

$$d_\theta(x, Tx) \leq \theta(x, Tx)[0 + 0]$$

elde edilir. Bu nedenle x, T nin bir sabit noktasıdır. Son olarak, sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. T nin $u, v \in X$ olmak üzere farklı iki tane sabit noktası olduğunu kabul edelim. Teoremin son hipotezinden $\alpha(u, z) \geq 1$ ve $\alpha(v, z) \geq 1$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. T, α -geçişli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\alpha(T^n u, T^n z) = \alpha(u, T^n z) \geq 1 \text{ ve } \alpha(T^n v, T^n z) = \alpha(v, T^n z) \geq 1$$

olur. Dolayısıyla, α - ψ -büzülme şartı uygulanarak,

$$\begin{aligned} d(u, T^n z) &= d(Tu, T(T^{n-1}z)) \\ &\leq \alpha(u, T^{n-1}z)d(Tu, T(T^{n-1}z)) \\ &\leq \psi(d(u, T^{n-1}z)) \\ &\vdots \\ &\leq \psi^n(d(u, z)) \end{aligned}$$

elde edilir. $\psi \in \Psi_s$ olduğundan $\{\psi^n(d(u, z))\}$ dizisi 0 a yakınsar. Bu nedenle $T^n z, u$ ya yakınsar. Benzer şekilde, $T^n z$ nin v ye yakınsadığı da gösterilebilir. Limitin tek olma şartından $u = v$ dir (Shatanawi ve ark., 2018).

Örnek 3.8 (X, d_θ) , θ -metrik uzayı Örnek 3.1 deki gibi tanımlansın. $\alpha: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) = (1, 1) \text{ ise} \\ \frac{1}{20}, & (x, y) \neq (1, 1) \text{ ise} \end{cases}$$

ile verilsin. $X = \{-1, 1, 2\}$ üzerinde $T: X \rightarrow X$ dönüşümü $T(1) = 1, T(-1) = 2, T(2) = 1$ ile tanımlansın ve her $t > 0$ için $\psi(t) = \frac{t}{8}$ olsun. T nin Teorem 3.3 ün şartlarını

sağladığını gösterelim. T nin sürekli olduğu açıktır ve $x_0 = 1$ için $\alpha(1, T(1)) = \alpha(1, 1) \geq 1$ olduğundan T , α -geçişlidir. Şimdi T nin α - ψ -büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim. $\alpha(x, y) = \alpha(y, x)$ olduğuna dikkat edilmelidir.

$$\text{Her } x \in X \text{ için } \alpha(x, x)d_\theta(Tx, Tx) = 0 \leq \psi(d_\theta(x, x)) = \psi(0) = 0,$$

$$\alpha(1, 2)d_\theta(T1, T2) = \frac{1}{20}d_\theta(1, 1) = 0 \leq \psi(d_\theta(1, 2)) = \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16},$$

$$\alpha(1, -1)d_\theta(T1, T-1) = \frac{1}{20}d_\theta(1, 2) = \frac{1}{40} \leq \psi(d_\theta(1, -1)) = \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{24},$$

$$\alpha(2, -1)d_\theta(T2, T-1) = \frac{1}{20}d_\theta(1, 2) = \frac{1}{40} \leq \psi(d_\theta(2, -1)) = \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{24},$$

olduğundan büzülme şartı sağlanır. Sonuç olarak, Teorem 3.3 ün tüm şartları sağlandığından T nin bir tek $x = 1$ sabit noktası vardır (Shatanawi ve ark., 2018).

Sonuç 3.1 (X, d_θ) bir tam θ -metrik uzay olsun ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

- i) T süreklidir;
- ii) her $x, y \in X$ için $d_\theta(Tx, Ty) \leq \psi(d_\theta(x, y))$ olacak şekilde $\psi \in \Psi_s$ vardır.

O zaman, T nin bir tek sabit noktası vardır (Shatanawi ve ark., 2018).

İspat: $\alpha: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\alpha(x, y) = 1$ eşitliği ile tanımlansın. Bu takdirde T , α -geçişlidir. Dahası, Teorem 3.3 ün tüm şartları sağlandığından T nin bir tek sabit noktası vardır.

Sonuç 3.2 (X, d_θ) bir tam θ -metrik uzay olsun ve $T: X \rightarrow X$ α -geçişli dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

- i) T süreklidir;
- ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır;
- iii) X deki her $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi ve her $x \in X$ için $k \in [0, 1)$ vardır öyle ki $\sum_{n=1}^\infty k^n \prod_{i=1}^n \theta(x_i, x) < \infty$ dir;
- iv) her $x, y \in X$ için, $\alpha(x, y)d_\theta(Tx, Ty) \leq kd_\theta(x, y)$ dir.

Bu takdirde, T nin bir sabit noktası vardır. Ayrıca, her $x \in F(T)$ için $\alpha(x, z) \geq 1$ olacak şekilde bir $z \in X$ varsa, bu sabit nokta tektir (Shatanawi ve ark., 2018).

İspat: $\psi: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\psi(t) = kt$ ile tanımlansın. Bu durumda, T dönüşümü Teorem 3.3 ün tüm şartlarını sağladığından T nin bir tek sabit noktası vardır.

Sonuç 3.3 (X, d_θ) bir tam θ -metrik uzay olsun ve $T: X \rightarrow X$ α -geçişli dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

- i) T süreklidir;
- ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır;
- iii) X deki her $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi ve her $x \in X$ için $k \in [0,1)$ vardır öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(x_n, x) < \frac{1}{k}$ dir;
- iv) her $x, y \in X$ için, $\alpha(x, y)d_\theta(Tx, Ty) \leq kd_\theta(x, y)$ dir.

Bu takdirde, T nin bir sabit noktası vardır. Ayrıca, her $x \in F(T)$ için $\alpha(x, z) \geq 1$ olacak şekilde bir $z \in X$ varsa, bu sabit nokta tektir (Shatanawi ve ark., 2018).

İspat: X deki bir $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(x_i, x) < \frac{1}{k}$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcut olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=1}^{n+1} \theta(x_i, x_m) k^{n+1}}{\prod_{i=1}^n \theta(x_i, x_m) k^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(x_{n+1}, x_m) k < 1$$

olduğuna dikkat ediniz. Böylece oran testinden, X deki her $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi ve her $x \in X$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} k^n \prod_{i=1}^n \theta(x_i, x) < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla, T dönüşümü Sonuç 3.2 nin tüm şartlarını sağladığından T nin bir tek sabit noktası vardır.

Aşağıdaki sonuç $\theta(x, y) = s \geq 1$ sabit dönüşümü alınarak Teorem 3.3, Sonuç 3.1 ve Sonuç 3.2 den elde edilir (Shatanawi ve ark., 2018).

Sonuç 3.4 (X, d) bir tam b -metrik uzay olsun ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü Teorem 3.3 ün tüm şartlarını sağlasın. Bu takdirde, T nin bir tek sabit noktası vardır (Shatanawi ve ark., 2018).

Sonuç 3.5 (X, d) bir tam b -metrik uzay olsun ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

- i) T süreklidir;
- ii) her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$ olacak şekilde $\psi \in \Psi_s$ vardır.

Bu takdirde, T nin bir tek sabit noktası vardır (Shatanawi ve ark., 2018).

Sonuç 3.6 (X, d) bir tam b -metrik uzay olsun ve $T: X \rightarrow X$ α -geçişli dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

- i) T süreklidir;
- ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır;
- iii) her $x, y \in X$ için $\alpha(x, y)d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ olacak şekilde bir $k \in [0, \frac{1}{s})$ vardır.

Bu takdirde, T nin bir sabit noktası vardır. Ayrıca, her $x \in F(T)$ için $\alpha(x, z) \geq 1$ olacak şekilde bir $z \in X$ varsa, bu sabit nokta tektir (Shatanawi ve ark., 2018).

Not: Bir sonraki sonuçta T dönüşümünün sürekliliği başka bir koşul ile değiştirilebilir.

Tanım 3.7 (X, d_θ) bir θ -metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=1}^\infty; X$ de her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x) \geq 1$ oluyorsa X uzayına α -regülerdir denir (Shatanawi ve ark., 2018).

Teorem 3.4 (X, d_θ) bir tam θ -metrik uzay ve bazı $\psi \in \Psi_s$ için $T: X \rightarrow X$ α - ψ -büzülme dönüşümü olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

- i) T , α -geçişlidir;
- ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır;
- iii) X , α -regülerdir.

Bu takdirde, T nin bir sabit noktası vardır (Shatanawi ve ark., 2018).

İspat: Sonucu ispatlamada, Teorem 3.3 ün ispatındaki aynı adımlar takip edilerek bir $x \in X$ noktasına yakınsayan bir $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi oluşturulabilir. Ayrıca, elde edilen dizi her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ özelliğine sahiptir. X in α -regüler özelliğinden dolayı da her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x) \geq 1$ elde edilir. Son olarak x noktasının T nin bir sabit noktası olduğunu göstermeliyiz. Üçgen eşitsizliğinden,

$$d_\theta(x, Tx) \leq \theta(x, Tx)[d_\theta(x, x_{n+1}) + d_\theta(x_{n+1}, Tx)]$$

$$= \theta(x, Tx)d_\theta(x, x_{n+1}) + \theta(x, Tx)d_\theta(x_{n+1}, Tx)$$

yazılabilir. $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsadığından eşitsizliğin ilk terimi $\theta(x, Tx)d_\theta(x, x_{n+1})$, 0 a yakınsar. Ayrıca eşitsizliğin ikinci terimi de

$$\begin{aligned} \theta(x, Tx)d_\theta(x_{n+1}, Tx) &\leq \theta(x, Tx)d_\theta(Tx_n, Tx)\alpha(x_n, x) \\ &\leq \theta(x, Tx)\psi(d_\theta(x_n, x)) \end{aligned}$$

$$< \theta(x, Tx)d_\theta(x_n, x)$$

olacağından, 0 a yakınsar. Böylece $d_\theta(x, Tx) \leq 0$ ve bu yüzden x , T nin bir sabit noktasıdır.

Not: Teorem 3.4 de sabit noktanın tekliği Teorem 3.3 ün son şartı göz önüne alınarak ispatlanabilir. Teklik ispatı Teorem 3.3 dekine benzerdir.

Sonuç 3.7 (X, d_θ) bir tam θ -metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $d_\theta(Tx, Ty) \leq \psi(d_\theta(x, y))$ olacak şekilde $\psi \in \Psi_s$ var ise, o zaman T nin bir tek sabit noktası vardır (Shatanawi ve ark., 2018).

İspat: Teorem 3.4 de $\alpha(x, y) = 1$ alınırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 3.8 (X, d_θ) bir tam θ -metrik uzay olsun ve $T: X \rightarrow X$ α -geçişli dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

- i) X , α -regülerdir;
- ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır;
- iii) X deki her $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi ve her $x \in X$ için $k \in [0,1)$ vardır öyle ki $\sum_{n=1}^\infty k^n \prod_{i=1}^n \theta(x_i, x) < \infty$ dir;
- iv) her $x, y \in X$ için, $\alpha(x, y)d_\theta(Tx, Ty) \leq kd_\theta(x, y)$ dir.

Bu takdirde, T nin bir sabit noktası vardır. Ayrıca, her $x \in F(T)$ için $\alpha(x, z) \geq 1$ olacak şekilde bir $z \in X$ varsa, bu sabit nokta tektir (Shatanawi ve ark., 2018).

Sonuç 3.9 (X, d_θ) bir tam θ -metrik uzay olsun ve $T: X \rightarrow X$ α -geçişli dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

- i) X , α -regülerdir;
- ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır;
- iii) X deki her $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi ve her $x \in X$ için $k \in [0,1)$ vardır öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(x_n, x) < \frac{1}{k}$ dir;
- iv) her $x, y \in X$ için, $\alpha(x, y)d_\theta(Tx, Ty) \leq kd_\theta(x, y)$ dir.

Bu takdirde, T nin bir sabit noktası vardır. Ayrıca, her $x \in F(T)$ için $\alpha(x, z) \geq 1$ olacak şekilde bir $z \in X$ varsa, bu sabit nokta tektir (Shatanawi ve ark., 2018).

Aşağıdaki sonuç $\theta(x, y) = s \geq 1$ sabit dönüşümü dikkate alınarak Teorem 3.4, Sonuç 3.7 ve Sonuç 3.8 den elde edilir (Shatanawi ve ark., 2018).

Sonuç 3.10 (X, d) bir tam b -metrik uzay olsun ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü Teorem 3.4 ün tüm şartlarını sağlasın. Bu takdirde, T nin bir tek sabit noktası vardır (Shatanawi ve ark., 2018).

Sonuç 3.11 (X, d) bir tam b -metrik uzay olsun ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

- i) X , α -regülerdir;
- ii) her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$ olacak şekilde $\psi \in \Psi_s$ vardır.

Bu takdirde, T nin bir tek sabit noktası vardır (Shatanawi ve ark., 2018).

Sonuç 3.12 (X, d) bir tam b -metrik uzay olsun ve $T: X \rightarrow X$ α -geçişli dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

- i) X , α -regülerdir;
- ii) $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır;
- iii) her $x, y \in X$ için $\alpha(x, y)d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ olacak şekilde bir $k \in [0, \frac{1}{s})$ vardır.

Bu takdirde, T nin bir sabit noktası vardır. Ayrıca, her $x \in F(T)$ için $\alpha(x, z) \geq 1$ olacak şekilde bir $z \in X$ varsa, bu sabit nokta tektir (Shatanawi ve ark., 2018).

3.3 Genişletilmiş Dikdörtgen b -Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 3.8 X boş olmayan bir küme olsun. Bir $r: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve farklı her $u, v \in X \setminus \{x, y\}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa r ye X üzerinde bir dikdörtgen metrik ve (X, r) ikilisine de dikdörtgen metrik uzay denir:

- i) $r(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- ii) $r(x, y) = r(y, x)$,
- iii) $r(x, y) \leq r(x, u) + r(u, v) + r(v, y)$ (Asim ve ark., 2019).

Tanım 3.9 X boş olmayan bir küme ve $s \geq 1$ olsun. Bir $r_b: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve farklı her $u, v \in X \setminus \{x, y\}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa r_b ye X üzerinde bir dikdörtgen metrik ve (X, r_b) ikilisine de dikdörtgen b -metrik uzay denir:

- i) $r_b(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- ii) $r_b(x, y) = r_b(y, x)$,

$$\text{iii) } r_b(x, y) \leq s[r_b(x, u) + r_b(u, v) + r_b(v, y)] \text{ (Asim ve ark., 2019).}$$

Tanım 3.10 X boş olmayan bir küme ve $\omega: X \times X \rightarrow [1, \infty)$ verilen bir dönüşüm olsun. Bir $r_\omega: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve farklı her $u, v \in X \setminus \{x, y\}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa r_ω ye X üzerinde bir genişletilmiş dikdörtgen b -metrik (kısaca, ω -metrik) ve (X, r_ω) ikilisine de genişletilmiş dikdörtgen b -metrik uzay (kısaca, ω -metrik uzay) denir:

- i) $r_\omega(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- ii) $r_\omega(x, y) = r_\omega(y, x)$,
- iii) $r_\omega(x, y) \leq \omega(x, y)[r_\omega(x, u) + r_\omega(u, v) + r_\omega(v, y)]$ (Asim ve ark., 2019).

Örnek 3.9 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun. $\omega: X \times X \rightarrow [1, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $\omega(x, y) = x + y + 1$ ile tanımlansın.

$r_\omega: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu;

$$\forall x \in X \text{ için } r_\omega(x, x) = 0,$$

$$\forall x, y \in X \text{ için } r_\omega(x, y) = r_\omega(y, x),$$

$$r_\omega(1, 3) = r_\omega(2, 5) = 70, r_\omega(1, 4) = 1000, r_\omega(1, 5) = 1200,$$

$$r_\omega(1, 2) = r_\omega(2, 3) = r_\omega(3, 4) = 60 \text{ ve } r_\omega(3, 5) = r_\omega(4, 5) = r_\omega(2, 4) = 400,$$

ile tanımlansın.

Şimdi r_ω nın ω -metrik olduğunu gösterelim. Burada, Tanım 3.10 daki (i) ve (ii) şartları kolayca gösterilebilir. Şimdi,

$$r_\omega(1, 5) = 1200, \omega(1, 5)[r_\omega(1, 3) + r_\omega(3, 2) + r_\omega(2, 5)] = 7(70 + 60 + 70) = 1400$$

ve

$$r_\omega(1, 4) = 1000, \omega(1, 4)[r_\omega(1, 2) + r_\omega(2, 3) + r_\omega(3, 4)] = 6(60 + 60 + 60) = 1080$$

dir. Benzer şekilde diğer durumlar da kolayca gösterilebilir. Böylece her $x, y \in X$ ve farklı her $u, v \in X \setminus \{x, y\}$ için,

$$r_\omega(x, y) \leq \omega(x, y)[r_\omega(x, u) + r_\omega(u, v) + r_\omega(v, y)]$$

olduğundan (iii) şartı sağlanır. Dolayısıyla (X, r_ω) bir ω -metrik uzaydır.

Tanım 3.11 (X, r_ω) ω -metrik uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi; eğer $\lim_{n, m \rightarrow \infty} r_\omega(x_n, x_m) = 0$ ise Cauchy dizisidir (Asim ve ark., 2019).

Tanım 3.12 (X, r_ω) ω -metrik uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi; $\lim_{n \rightarrow \infty} r_\omega(x_n, x) = 0$ ise $x \in X$ noktasına yakınsar (Asim ve ark., 2019).

Tanım 3.13 (X, r_ω) bir ω -metrik uzay olsun. Eğer X deki her Cauchy dizisi X deki bir noktaya yakınsıyor ise X tamdır denir (Asim ve ark., 2019).

Lemma 3.3 (X, r_ω) bir ω -metrik uzay ve $\{x_n\}$, $m \neq n$ için $x_n \neq x_m$ olacak şekilde X de bir Cauchy dizisi olsun. O zaman, $\{x_n\}$ en fazla bir noktaya yakınsar (Asim ve ark., 2019).

İspat: $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $x, y \in X$ noktaları $\{x_n\}$ dizisinin iki limiti olsun. Yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_\omega(x_n, x) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} r_\omega(x_n, y) = 0$ olsun. $m \neq n$ için $x_n \neq x_m$ olacak şekildeki $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan Tanım 3.10 daki (iii) şartından,

$$r_\omega(x, y) \leq \omega(x, y)[r_\omega(x, x_n) + r_\omega(x_n, x_m) + r_\omega(x_m, y)]$$

ve yukarıda $n, m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $r_\omega(x, y) = 0$ elde edilir. Bu yüzden de $x = y$ dir, yani, $\{x_n\}$ dizisi bir tek limit noktasında yakınsar.

Tanım 3.14 (X, r_ω) bir ω -metrik uzay olsun. Verilen bir $f: X \rightarrow X$ dönüşümü, $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{O}(x; n) = \{x, fx, \dots, f^n x\} \text{ ve } \mathcal{O}(x; \infty) = \{x, fx, \dots, f^n x, \dots\}$$

kümeleri tanımlansın. $\mathcal{O}(x; \infty)$ ya da kısaca $\mathcal{O}(x)$ kümesi f nin bir yörüngesi olarak adlandırılır (Asim ve ark., 2019).

Bu bölüm boyunca, $x \in X$ ve $f: X \rightarrow X$ dönüşümü için $\mathcal{O}(x) = \{x, fx, \dots, f^n x, \dots\}$ yörüngesi dikkate alınacaktır.

Tanım 3.15 (X, r_ω) bir ω -metrik uzay olsun ve $f: X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Eğer bazı $x \in X$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k} x = x$ olduğunda $\lim_{k \rightarrow \infty} f(f^{n_k} x) = fx$ sağlanıyorsa, f ye yörüngesel süreklidir denir. Ayrıca, bazı $x \in X$ için $\{x, fx, \dots, f^n x, \dots\}$ kümesinden elde edilen her Cauchy dizisi X de yakınsak ise (X, r_ω) f -yörüngesel tamdır denir (Asim ve ark., 2019).

Teorem 3.5 (X, r_ω) bir ω -metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar sağlansın:

i) $\lambda \in [0, 1)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $r_\omega(fx, fy) \leq \lambda r_\omega(x, y)$,

ii) $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \omega(x_n, x_m) < \frac{1}{\lambda}$,

- iii) (X, r_ω) f -yörüngesel tamdır,
- iv) f yörüngesel süreklidir.

Bu takdirde f nin bir tek sabit noktası vardır (Asim ve ark., 2019).

İspat: $x_0 \in X$ başlangıç noktası ile bir $\{x_n\}$ iterasyon dizisi

$$x_1 = fx_0, x_2 = f^2x_0, x_3 = f^3x_0, \dots, x_n = f^n x_0, \dots$$

şeklinde oluşturulsun. Şimdi $\lim_{n \rightarrow \infty} r_\omega(x_n, x_{n+1}) = 0$ olduğunu gösterelim. (i) şartında

$x = x_n$ ve $y = x_{n+1}$ olarak seçildiğinde,

$$\begin{aligned} r_\omega(f^n x_0, f^{n+1} x_0) &= r_\omega(fx_n, fx_{n+1}) \\ &\leq \lambda r_\omega(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \lambda^n r_\omega(x_0, x_1), \end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_\omega(f^n x_0, f^{n+1} x_0) = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_\omega(f^n x_0, f^{n+2} x_0) = 0$$

elde edilir.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin (X, r_ω) de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki durumları inceleyelim:

Durum 1. İlk olarak p bir tek sayı, yani, her $m \geq 1$ için $p = 2m + 1$ olsun. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için Tanım 3.10 daki (iii) kullanılarak,

$$\begin{aligned} r_\omega(x_n, x_{n+2m+1}) &\leq \omega(x_n, x_{n+2m+1})[r_\omega(x_n, x_{n+1}) + r_\omega(x_{n+1}, x_{n+2}) + \\ &\quad r_\omega(x_{n+2}, x_{n+2m+1})] \\ &\leq \omega(x_n, x_{n+2m+1})[\lambda^n r_\omega(x_0, x_1) + \lambda^{n+1} r_\omega(x_0, x_1)] + \omega(x_n, x_{n+2m+1}) \times \\ &\quad r_\omega(x_{n+2}, x_{n+2m+1}) \\ &= \omega(x_n, x_{n+2m+1})(\lambda^n + \lambda^{n+1})r_\omega(x_0, x_1) + \omega(x_n, x_{n+2m+1}) \times \\ &\quad r_\omega(x_{n+2}, x_{n+2m+1}) \\ &\leq \omega(x_n, x_{n+2m+1})(\lambda^n + \lambda^{n+1})r_\omega(x_0, x_1) + \omega(x_n, x_{n+2m+1}) \times \\ &\quad \omega(x_{n+2}, x_{n+2m+1})(\lambda^{n+2} + \lambda^{n+3})r_\omega(x_0, x_1) + \dots + \\ &\quad \omega(x_n, x_{n+2m+1}) \dots \omega(x_{n+2m-2}, x_{n+2m+1})(\lambda^{n+2m-2} + \lambda^{n+2m-1}) \times \\ &\quad r_\omega(x_0, x_1) + \omega(x_n, x_{n+2m+1}) \dots \omega(x_{n+2m-2}, x_{n+2m+1})\lambda^{n+2m} r_\omega(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^n (1 + \lambda) r_\omega(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^{2i} \prod_{j=0}^i \omega(x_{n+2j}, x_{n+2m+1}) \\
&\quad + \lambda^{n+2m} \prod_{j=0}^{m-1} \omega(x_{n+2j}, x_{n+2m+1}) r_\omega(x_0, x_1),
\end{aligned}$$

yazılabilir ve buradan

$$\sum_{i=0}^{m-1} \lambda^{2i} \prod_{j=0}^i \omega(x_{n+2j}, x_{n+2m+1}) \leq \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^{2i} \prod_{j=0}^i \omega(x_{2j}, x_{n+2m+1})$$

elde edilir.

(ii) koşuluna göre $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \omega(x_n, x_m) \lambda < 1$ olduğundan, oran testi kullanılarak, her $m \in \mathbb{N}$

için $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2i} \prod_{j=0}^i \omega(x_{2j}, x_{n+2m+1})$ serisinin yakınsak olduğu sonucuna varılır.

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2i} \prod_{j=0}^i \omega(x_{2j}, x_{n+2m+1})$$

ve

$$S_n = \sum_{i=0}^n \lambda^{2i} \prod_{j=0}^i \omega(x_{2j}, x_{n+2m+1})$$

olsun. Bu takdirde, yukarıdaki eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
r_\omega(x_n, x_{n+2m+1}) &\leq \lambda^n (1 + \lambda) r_\omega(x_0, x_1) [S_{m-1} - S_{n-1}] \\
&\quad + \lambda^{n+2m} \prod_{j=0}^{m-1} \omega(x_{n+2j}, x_{n+2m+1}) r_\omega(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $r_\omega(x_n, x_{n+2m+1}) \rightarrow 0$ olur.

Durum 2. İkinci olarak, p bir çift sayı, yani, her $m \geq 1$ için $p = 2m$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
r_\omega(x_n, x_{n+2m}) &\leq \omega(x_n, x_{n+2m}) [r_\omega(x_n, x_{n+1}) + r_\omega(x_{n+1}, x_{n+2}) + r_\omega(x_{n+2}, x_{n+2m})] \\
&\leq \omega(x_n, x_{n+2m}) [\lambda^n r_\omega(x_0, x_1) + \lambda^{n+1} r_\omega(x_0, x_1)] + \omega(x_n, x_{n+2m}) \times \\
&\quad r_\omega(x_{n+2}, x_{n+2m}) \\
&= \omega(x_n, x_{n+2m}) (\lambda^n + \lambda^{n+1}) r_\omega(x_0, x_1) + \omega(x_n, x_{n+2m}) r_\omega(x_{n+2}, x_{n+2m}) \\
&\leq \omega(x_n, x_{n+2m}) (\lambda^n + \lambda^{n+1}) r_\omega(x_0, x_1) + \omega(x_n, x_{n+2m}) \times \\
&\quad \omega(x_{n+2}, x_{n+2m}) (\lambda^{n+2} + \lambda^{n+3}) r_\omega(x_0, x_1) + \dots + \\
&\quad \omega(x_n, x_{n+2m}) \dots \omega(x_{n+2m-2}, x_{n+2m}) (\lambda^{n+2m-2} + \lambda^{n+2m-1}) r_\omega(x_0, x_1) + \\
&\quad \omega(x_n, x_{n+2m+1}) \dots \omega(x_{n+2m-2}, x_{n+2m+1}) \lambda^{n+2m} r_\omega(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^n (1 + \lambda) r_\omega(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^{2i} \prod_{j=0}^i \omega(x_{n+2j}, x_{n+2m}) \\
&\quad + \lambda^{n+2m-2} \prod_{j=0}^{m-1} \omega(x_{n+2j}, x_{n+2m}) r_\omega(x_0, x_2)
\end{aligned}$$

dır ve bu yüzden

$$\begin{aligned}
r_\omega(x_n, x_{n+2m}) &\leq \lambda^n (1 + \lambda) r_\omega(x_0, x_1) [S_{m-1} - S_{n-1}] \\
&\quad + \lambda^{n+2m-2} \prod_{j=0}^{m-1} \omega(x_{n+2j}, x_{n+2m}) r_\omega(x_0, x_2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında $r_\omega(x_n, x_{n+2m}) \rightarrow 0$ bulunur. Bu nedenle, her iki durumda da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_\omega(x_n, x_{n+p}) = 0$$

olduğundan $\{x_n\}$, (X, r_ω) uzayında bir Cauchy dizisidir. X , f -yörüngesel tam olduğundan, $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. f yörüngesel sürekli olduğu için de

$$\begin{aligned}
r_\omega(fx, x) &\leq \omega(fx, x) [r_\omega(fx, x_n) + r_\omega(x_n, x_{n+1}) + r_\omega(x_{n+1}, x)] \\
&\leq \omega(fx, x) [r_\omega(fx, x_n) + r_\omega(fx_{n-1}, fx_n) + r_\omega(x_{n+1}, x)] \\
&= \omega(fx, x) [r_\omega(fx, x_n) + \lambda r_\omega(x_{n-1}, x_n) + r_\omega(x_{n+1}, x)]
\end{aligned}$$

olur. Son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınır,sa,

$$r_\omega(fx, x) \leq 0$$

ve bu yüzden de $fx = x$ dir. Dolayısıyla x , f nin bir sabit noktasıdır. Lemma 3.3 den dolayı da $\{x_n\}$ dizisi tek bir $x \in X$ noktasında yakınsar, yani sabit nokta bir tektir (Asim ve ark., 2019).

Örnek 3.10 $X = [0,1]$ olsun. Her $x, y \in X$ için $r_\omega(x, y) = |x - y|^2$ ve $\omega(x, y) = x + y + 3$ olarak tanımlansın. Öyleyse, (X, r_ω) bir tam ω -metrik uzaydır. $f: X \rightarrow X$ dönüşümü $fx = \frac{x}{2}$ ile tanımlansın.

Teorem 3.5 in tüm şartlarının sağlandığı ve $x = 0$ ın ilgili f dönüşümün bir tek sabit noktası olduğu açıktır.

Sonuç 3.13 (X, r_ω) bir ω -metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$i) \quad \lambda \in [0,1] \text{ olmak üzere her } x, y \in X \text{ için } r_\omega(fx, fy) \leq \lambda r_\omega(x, y),$$

- ii) $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \omega(x_n, x_m) < \frac{1}{\lambda}$,
- iii) (X, r_ω) tamdır,
- iv) f süreklidir.

Bu takdirde f nin bir tek sabit noktası vardır (Asim ve ark., 2019).

Teorem 3.5 de her $x, y \in X$ için $\omega(x, y) = s \geq 1$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.14 (X, r_b) , $s \geq 1$ katsayısı ile bir dikdörtgen b -metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar sağlansın:

- i) $\lambda \in [0, \frac{1}{s})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $r_b(fx, fy) \leq \lambda r_b(x, y)$,
- ii) (X, r_b) , f -yörüngesel tamdır,
- iii) f yörüngesel süreklidir.

Bu takdirde f nin bir tek sabit noktası vardır (Asim ve ark., 2019).

Teorem 3.5 de her $x, y \in X$ için $\omega(x, y) = 1$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.15 (X, r) bir dikdörtgen metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar sağlansın:

- i) $\lambda \in [0, 1)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $r(fx, fy) \leq \lambda r(x, y)$,
- ii) (X, r) , f -yörüngesel tamdır,
- iii) f yörüngesel süreklidir.

Bu takdirde f nin bir tek sabit noktası vardır (Asim ve ark., 2019).

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Bu çalışmada genişletilmiş b-metrik uzay ve genişletilmiş dikdörtgen b-metrik uzayların bazı topolojik özellikleri incelenerek bu uzaylarda tanımlanan dönüşümlerin hangi şartlar altında bir tek sabit noktaya sahip olabileceği ifade ve ispat edildi. Dönüşümün tanımlandığı kümeyi genelleştirerek ya da büzülme koşulunu zayıflatarak literatürde mevcut olan sonuçların nasıl geliştirilebileceği, hangi ek şartların ortaya çıktığı analiz edildi.

4.2 Öneriler

Gelecek çalışmalarda genişletilmiş b-metrik uzay ve genişletilmiş dikdörtgen b-metrik uzay kavramları ya da bu uzaylarda ele alınan büzülme dönüşümleri genelleştirilerek ve daha zayıf şartlar sunularak yeni sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Afshari, H., Aydi, H., Karapınar, E. 2020. On generalized α - ψ -Geraghty contractions on b-metric spaces, *Georgian Mathematical Journal*, 27 (1), 9-21.
- Asim, M., Imdad, M., Radenovic, S. 2019. Fixed point results in extended rectangular b-metric spaces with an application, *UPB Sci. Bull., Ser. A*, 81 (2), 11-20.
- Bakhtin, I. 1989. The contraction principle in quasimetric spaces, *Func. An. Ulian. Gos. Ped. Ins*, 30, 26-37.
- Balcı, M., 1997, Matematik analiz: cilt 1, *Balcı yayınları*,
- Banach, S. 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. math*, 3 (1), 133-181.
- Bayraktar, M., 2006, Fonksiyonel Analiz, *Gazi Kitap Evi, Ankara*,
- Berinde, V., 1993, Generalized contractions in quasimetric spaces, *Seminar on Fixed Point Theory*, 3-9.
- Czerwik, S. 1993. Contraction mappings in b-metric spaces, *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, 1 (1), 5-11.
- Frechet, M. (1906), "Soft metric spaces. DSc Mathematics, University of Bordeaux", *Ph. D. Thesis*,
- Goebel, K., Kirk, W.A., 1990, Topics in metric fixed point theory, *Cambridge University Press*,
- Işık, H. (2016), "Genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri için bazı sabit nokta teoremleri", *Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara*,
- Kamran, T., Samreen, M., UL Ain, Q. 2017. A generalization of b-metric space and some fixed point theorems, *Mathematics*, 5 (2), 19.
- Qawaqneh, H., Noorani, M.S.M., Shatanawi, W. 2019. Fixed point theorems for (α, k, θ) -contractive multi-valued mapping in b-metric space and applications, *Int. J. Math. Comput. Sci*, 14 (1), 263-283.
- Samet, B., Vetro, C., Vetro, P. 2012. Fixed point theorems for α - ψ -contractive type mappings, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75 (4), 2154-2165.
- Shatanawi, W., Abodayeh, K., Mukheimer, A. 2018. Some fixed point theorems in extended b-metric spaces, *Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys*, 80, 71-78.
- Soykan, Y., 2016, Fonksiyonel analiz, *Nobel Yayın Dağıtım, Ankara*,

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Melisa UYSAL
Uyruğu :
Doğum Yeri ve Tarihi :
Telefon :
Faks :
e-mail :

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Muş Anadolu Öğretmen Lisesi	2004
Üniversite	: Dicle Üniversitesi	2009
Yüksek Lisans	: Muş Alparslan Üniversitesi	
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2011-2013	Muş Endüstri M.T.A.L	Öğretmen
2013-2021	Muş Selen Hatun M.T.A.L	Öğretmen

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR