



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI FONKSİYON SINIFLARINDA  
FONKSİYONLARIN RASYONEL  
FONKSİYONLARLA YAKLAŞIMI**

**Recep TÜRK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Aralık-2022**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI FONKSİYON SINIFLARINDA**  
**FONKSİYONLARIN RASYONEL**  
**FONKSİYONLARLA YAKLAŞIMI**

**Recep TÜRK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV**

**Aralık-2022**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL ve ONAYI

Prof. Dr. Sadulla JAFAROV danışmanlığında, Recep TÜRK tarafından hazırlanan “Bazı Fonksiyon Sınıflarında Fonksiyonların Rasyonel Fonksiyonlarla Yaklaşımı” adlı tez çalışması 12/12/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Doç. Dr. Muhsin İNCESU  
Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi,  
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

.....

#### Danışman

Prof. Dr. Sadulla JAFAROV  
Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi,  
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

.....

#### Üye

Dr. Öğr. Üyesi Hayri TOPAL  
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi,  
Matematik Bölümü

.....

Yukarıdaki sonuç;  
Enstitü Yönetim Kurulu 29/12/2022 Tarih ve 41/1 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI

FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Recep TÜRK

Tarih: 12.12.2022

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### BAZI FONKSİYON SINIFLARINDA FONKSİYONLARIN RASYONEL FONKSİYONLARLA YAKLAŞIMI

Recep TÜRK

Muş Alparslan Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

Bu çalışmada ilk önce kapalı regüler eğrilerde tanımlanan sürekli fonksiyonların rasyonel fonksiyonlar dizisi ile yaklaşımı ile ilgili düz teorem elde edildi. Ayrıca, rasyonel fonksiyonlar dizisinin türevi ile ilgili bilgi verilmiştir.

Kuasikonform eğrilerde ise söz konusu teoremin tersi elde edildi. Kuasidüzgün kapalı Jordan eğrilerde tanımlanan ağırlıklı Lebesgue uzaylarında Faber-Laurent rasyonel fonksiyonlarla 2. integral süreklilik modülü cinsinden yaklaşım problemi incelendi. Daha sonra kapalı kuasikonform eğri üzerine tanımlanan sürekli fonksiyonların Faber-Laurent rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı incelenmiştir. Sonuçlar fonksiyonların en iyi yaklaşımı cinsinden elde edilmiştir. Ayrıca, bu tez çalışmasında lokal fonksiyonlar sınıfı tanımlandı. Kuasikonform eğrilerde sürekli fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı ile ilgili düz lokal teoremi elde edilmiştir.

**2022, 69 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Düzgünlük modülü, En iyi yaklaşım, Kapalı regüler eğri, Kuasikonform eğri, Lebesgue uzayı, Rasyonel fonksiyonlar dizisi

## **ABSTRACT**

### **MS THESIS**

## **APPROACH OF FUNCTIONS WITH RATIONAL FUNCTIONS IN SOME FUNCTION CLASSES**

**Recep TÜRK**

**Muş Alparslan University  
Institute of Science  
Department of Mathematics**

**Advisor: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV**

In this study, firstly, the direct theorem about the approximation of the continuous functions defined on closed regular curves by the sequence of rational functions is obtained. In addition, information about the derivative of the sequence of rational functions is given.

In quasiconform curves, the inverse of the theorem is obtained. The approximation problem has been investigated in terms of the 2nd integral modulus of continuity by Faber-Laurent rational functions in weighted Lebesgue spaces defined on kuasi-smooth closed Jordan curves. Then, the approximation of continuous functions defined on the closed quasiconform curve by Faber-Laurent rational functions is examined. The results are obtained in terms of the functions best approximation. Also, in this thesis, the class of local functions is defined. In quasiconform curves, the direct local theorem regarding the approximation of continuous functions by rational functions is obtained.

**2022, 69 Pages**

**Keywords:** Array of rational functions, Best approximation, Closed regular curve, Lebesgue space, Quasiconform curve, Smoothness module

## TEŞEKKÜR

Çalıőmalarımın tüm safhalarında yardımlarımı esirgemeyen ve titizlikle takip eden tez danışmanlığımı yürüten değerli hocam Muş Alparslan Üniversitesi Eğitim Fakóltesi Matematik Eğitimi Bölümü ABD Üyesi Sayın Prof. Dr. Sadulla JAFAROV'a, ayrıca her zaman desteğini hissettiren ve beni yalnız bırakmayan aileme, eőim Ayőenur TÜRK'e ve çocuklarım Eslem TÜRK ile Mustafa TÜRK'e en içten teőekkürlerimi sunarım.

Recep TÜRK  
Muş-2022



## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>vii</b>
<b>SİMGELER ve KISALTMALAR</b> .....	<b>viii</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI</b> .....	<b>3</b>
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM</b> .....	<b>5</b>
3.1. Temel Tanımlar ve Teoremler .....	5
3.2 Bazı Fonksiyon ve Eğriler sınıfı .....	17
3.3 Yardımcı Sonuçlar .....	26
<b>4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA</b> .....	<b>41</b>
4.1 Sürekli Fonksiyonlar Sınıfının Rasyonel Fonksiyonlarla Yaklaşımı .....	41
4.2 Ağırlıklı Lebesgue Uzaylarında Fonksiyonların Rasyonel Fonksiyonlarla Yaklaşımı .....	44
4.3 Kapalı kuasikonform eğriler üzerinde fonksiyonların Faber-Laurent rasyonel fonksiyonlar ile yaklaşımı.....	50
4.4 Kuasi-konform eğrilerde tanımlanan lokal fonksiyonlar sınıfında rasyonel fonksiyonlarla yaklaşım .....	53
<b>5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER</b> .....	<b>62</b>
5.1 Sonuçlar .....	62
5.2 Öneriler .....	62
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>63</b>

## SİMGELER ve KISALTMALAR

### Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\overline{\mathbb{C}}$	: $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$mes\Gamma$	: $\Gamma$ eğrisinin bir boyutlu Lebesgue ölçüsü
$int\Gamma$	: Kapalı $\Gamma$ eğrisinin içi
$ext\Gamma$	: Kapalı $\Gamma$ eğrisinin dışı
$\partial B$	: $B$ bölgesinin sınırı
$f \preceq g$	: $f \leq cg$ , $c$ sabiti $f$ ve $g$ 'ye bağlı değil
$f \asymp g$	: $f \leq g$ ve $g \leq f$
$C(\Gamma)$	: $\Gamma$ eğrisi üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$\omega(u) = \omega(f, u)$	: $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü
$S_\theta$	: Regüler Eğri veya Carleson eğrisi
$H^\omega$	: Süreklilik modülü yardımıyla tanımlanan fonksiyonlar sınıfı
$ACL$	: Eğrilerde mutlak sürekli fonksiyon
$E_n(g)$	: $g$ fonksiyonunun en iyi yaklaşımı
$S_\Gamma(f)$	: $f \in L^1(r)$ fonksiyonunun Cauchy singüler integrali
$A_p(\Gamma)$	: $\Gamma$ üzerinde Muckenhoupt şartını sağlayan ağırlık fonksiyonlar sınıfı
$dist(z, D)$	: $z$ noktasının $D$ bölgesine uzaklığı
$U(z_0, \delta)$	: $\{z :  z - z_0  < \delta\}$
$D(z, \delta)$	: $\{t :  t - z  < \delta\}$
$A(D)$	: $D$ bölgesinde analitik fonksiyonlar sınıfı
$L^p(\Gamma)$	: Lebesgue uzayı : $\{f : f, \Gamma \text{ 'de ölçülebilir (Lebesgue anlamında) ve}$ $\int_\Gamma  f(z) ^p dz < \infty, p > 0\}$

$L^p_\omega(\Gamma)$

:  $\omega$  – ağırlıklı Lebesgue uzayı  $\{f : f, \Gamma$ 'de ölçülebilir (Lebesgue anlamında) ve

$$\int_\Gamma |f(z)|^p dz < \infty, p > 0\}$$

$E^p(G)$

:  $\omega$  – ağırlıklı Smirnov sınıfı:

$$\{f \in E_1(G) : f \in L_p(\Gamma, \omega), \Gamma = \partial G\}$$



## 1. GİRİŞ

Fonksiyonların Yaklaşım teorisi Matematik analizin en çok uygulaması olan dallarından biridir. Fonksiyonların yaklaşım teorisinde, fonksiyonların daha basit fonksiyonlara en iyi nasıl yaklaştırılabileceği incelendi ve bu sayede ortaya çıkan hatalar nicel olarak karakterize edilmiştir. İyi özelliklere sahip olmayan bir fonksiyon uzayını elemanları ile iyi özelliklere sahip trigonometrik polinomların, cebirsel polinomların, tam fonksiyonların (kompleks düzlemde analitik fonksiyonlar) ve sonsuz basamaktan diferensiyellenebilen fonksiyonların yaklaşımı incelenmiştir.

Fonksiyonların yaklaşım teorisinde düz ve ters teoremler ispatlanmaktadır. Düz teoremler, bir fonksiyonun düzgünlük özellikleri (fonksiyonun belirli bir mertebeden türevlerinin varlığı, fonksiyonun, türevlerinin veya bazı türevlerinin süreklilik modülü vb.) cinsinden fonksiyona yaklaşan polinomların yakınsaklık hızının ifade edilmesidir. Trigonometrik, cebirsel polinomlarla (rasyonel fonksiyonlarla) en iyi yaklaşım durumunda, düz teoremler Jackson tipi teoremler olarak da bilinir. Ters teoremler ise yakınsaklık hızına bağlı olarak fonksiyonların diferansiyel özelliklerini ifade etmektedir. Yani ters teoremler, fonksiyona yaklaşan polinomların yakınsaklık hızından bağımlı olarak bir fonksiyonun şu veya bu sınıfa ait olduğunu ifade eden teoremlerdir. Bu düz ve ters teoremlerin elde edilmesi fonksiyonların yaklaşım teorisinde fonksiyonların yapısal karakterizasyonu olarak adlandırılmaktadır.

Bu tez çalışmasının Kaynak Araştırması olarak adlandırılan ikinci bölümünde fonksiyonların yaklaşım teorisi ve tezde bakılan problemle ilgili olarak kaynak araştırması yapılmıştır. Bu çalışmanın Materyal ve Yöntem olarak adlandırılan üçüncü bölümü üç alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde ilk önce kompleks fonksiyonlar teorisi ile ilgili olarak temel tanımlar ve teoremler verilmektedir. Ayrıca bu bölümde bazı fonksiyon ve eğriler sınıfları tanımlanmıştır. Daha sonra ise esas sonuçların ispatında kullanılan yardımcı sonuçlar verilmektedir.

Tezin Araştırma Sonuçları ve Tartışma olarak adlandırılan dördüncü bölümü dört alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümde ilk önce kapalı regüler eğrilerde sürekli fonksiyonların rasyonel fonksiyonlar dizisi ile yaklaşımı ile ilgili düz teorem ifade ve ispat edildi. Ayrıca, rasyonel fonksiyon dizilerinin türevi ile ilgili bilgi verilmiştir. Kuazikonform eğrilerde ise soz konusu teoremin tersi elde edildi. Daha sonra ağırlıklı Lebesgue uzaylarında 2. düzgünlük modülü cinsinden kapalı regüler eğrilerde

fonksiyonların rasyonel fonksiyonlar dizisi ile yaklaşımı ile ilgili düz teorem ifade ve ispat edildi. Sürekli fonksiyonların yayının uzunluğu ve kirişi aynı basamağa sahip (kuasi-düzgün) düzeltilebilir kapalı Jordan eğrilerde Faber-Laurent rasyonel fonksiyonlarla yaklaşım problemi Mokhammed Ali, (1990 ) çalışmasında incelenmiştir. Ayrıca dördüncü bölümde kapalı  $\Gamma$  eğrisi kuasi-konform eğri olduğunda eğri üzerine sürekli fonksiyonların  $R_n(f, z)$  Faber- Laurent rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı incelenmiştir. Sonuçlar eğri üzerinde  $E_n(f, \Gamma)$  en iyi yaklaşım cinsinden elde edildi. Bildiğimiz gibi her bir kuasi-düzgün eğri aynı zamanda kuasikonform eğridir. Fakat kuasi-konform eğri genel olarak düzeltilebilir olmayabilir. Dördüncü bölümde ilave olarak süreklilik modülü cinsinden kuasi-konform eğrilerde sürekli fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı ile ilgili düz lokal teoremi elde edildi. Burada elde edilen sonuçlar global süreklilik modülü cinsinden Andrievskii (1980) çalışmasında elde edilen sonuçların genelleştirilmesi olur.  $H_\varphi^{z_0}(\Gamma)$  lokal fonksiyonlar sınıfı incelendi. Eğer  $\varphi(\delta, \eta) = \delta^\alpha \eta^\beta$  ise  $H_\varphi^{z_0}(\Gamma)$  lokal fonksiyonlar sınıfı  $D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$  lokal fonksiyonlar sınıfı ile çakışmaktadır. Elde edilen sonuçların ispatında Andrievskii, Israfilov, (1979); Musaev, Seyfullaev (1986) çalışmalarındaki ispat metodu kullanılmıştır.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Fonksiyonların yaklaşım teorisi ile ilgili ilk sonuçlar P. L. Chebyshev (1854), Weierstrass (1885) çalışmalarında elde edilmiştir.

Jackson (1911,1912) çalışmalarında fonksiyonunun süreklilik modülü kavramını kullanılarak yaklaşım teorisinin düz teoremini elde etmiştir. Jackson (1911) elde ettiği sonuç ile Weierstrass teoremini daha da güçlendirmiştir. Daha sonralar fonksiyonların polinomlarla yaklaşımının hızı ile ilgili sonuçlar (düz ve ters teoremler) Bernstein, (1912), Jackson (1924), Timan (1950), Stechkin (1951), Timan (1958), Timan (1966) çalışmalarında incelenmiştir.

Ayrıca, fonksiyonların yaklaşım teorisi ile ilgili bir çok sonuçlar Lebesgue, 1898; Vallée-Poussin, 1910, 1911; Favard, 1936, 1937, 1949; Kolmogorov, 1935; Nikolski, 1946; Timan, 1950 ve daha birçok matematikçilerin çalışmalarında elde edilmiştir.

Fonksiyonların trigonometrik ve cebirsel polinomlarla yaklaşımı ile ilgili sonuçlar La Vallée-Poussin, 1919; Jackson, 1930, 1941; Natanson, 1949; Zygmund, 1959; Timan, 1994; Bary, 1964; Akhiezer, 1965; Lorentz, 1966; De Vore ve Lorentz; 1993; De Vore, 1986; Stepanets, 1995; Mhaskar, 1996; Trigub ve Belinsky, 2004; Dzyadyk ve Shevchuk, 2009; Andrievskii ve ark., 1995; Andrievskii ve Blatt, 2002 kitaplarında bulmak mümkündür.

Fakat fonksiyonların belli aralıkta değil, kompleks düzlemde bulunan bölgelerde polinomlarla yaklaşımı önem arz etmektedir. V. K. Dzyadyk (1959, 1966) tarafından parçalı düzgün sınırlı bölgelerde tanımlanan Hölder fonksiyon sınıflarının yapısal karakterizasyonu elde edilmiştir. Daha sonraları fonksiyonları kompleks düzlemde bulunan bölgelerde yaklaşımı ile bu sonuçlar Dzyadyk, 1972, 1975; Lebedev ve Shirokov, 1971; Lebedev ve Tamrazov, 1970; Tamrazov, 1973; Belyi, 1977, 1979; Andrievskii, 1981 çalışmalarında daha genel kümelere genelleştirilmiştir (bu sonuçlar ile ilgili daha geniş bilgi Dzyadyk, 1977 kitabında verilmiştir).

Farklı uzaylarda ve kompleks düzlemde bulunan farklı eğrilerde fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı merak konusudur. Fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı farklı uzaylarda Walsh, 1934, 1935; Kocharyan, 1958; Tietz, 1955, 1957; Ivanov, 1958; Newman, 1974; Batchaev ve Mamedkhanov, 1978; Ji-feng Xie ve Ming Zhanf, 2005; Andrievskii ve Israfilov, 1980; Pekarskii, 1983, 1986, 1988,

1994; Ramazanov, 1984; Guven ve Israfilov, 2005, 2006; Israfilov ve Akgün, 2008; Cavus ve Israfilov, 1995; Israfilov, 2004; Jafarov, 1987, 2008, 2011a, 2011b, 2011c, 2015; Israfilov ve Testici, 2016; Yurt ve Güven, 2013, 2014 ve başka birçok matematikçiler tarafından araştırılmıştır. Ayrıca fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı ile ilgili sonuçlar Walsh, 1935 kitabı'nda bulunur.

Bu tez çalışmasında ilk önce kapalı regüler eğrilerde sürekli fonksiyonların rasyonel fonksiyonlar dizisi ile yaklaşımı ile ilgili düz teorem ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca, rasyonel fonksiyon dizilerinin türevi ile ilgili bilgi verilmektedir. Kuasikonform eğrilerde ise söz konusu teoremin tersi elde edilir. Daha sonra ağırlıklı Lebesgue uzaylarında 2. düzgünlük modülü cinsinden kapalı regüler eğrilerde fonksiyonların rasyonel fonksiyonlar dizisi ile yaklaşımı ilgili düz teorem ifade ve ispat edildi.

Bizim tez çalışmasında ayrıca kapalı  $\Gamma$  eğrisi kuasi- (yarım) konform eğri olduğunda eğri üzerine sürekli fonksiyonların  $R_n(f, z)$  Faber-Laurent rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı incelenmiştir. Sonuçlar eğri üzerinde  $E_n(f, \Gamma)$  en iyi yaklaşım cinsinden elde edilir. Bildiğimiz gibi her bir kuasi-düzgün eğri aynı zamanda kuasikonform egridir. Fakat kuasikonform eğri genel olarak düzeltilebilir olmayabilir.

Bu tez çalışmasında ilave olarak süreklilik modülü cinsinden sürekli fonksiyonların kuasi-konform eğrilerde fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı ile ilgili düz lokal teoremi elde edilir.  $H_\varphi^{z_0}(\Gamma)$  lokal fonksiyonlar sınıfı incelenir. Eğer  $\varphi(\delta, \eta) = \delta^\alpha \eta^\beta$  ise  $H_\varphi^{z_0}(\Gamma)$  lokal fonksiyonlar sınıfı  $D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$  lokal fonksiyonlar sınıfı ile çakışmaktadır.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

**Tanım 3.1** Kompleks değerli  $f$  fonksiyonu  $z_0$  in bir delinmiş komşuluğunda tanımlanmış olsun. Basit olarak,  $z$ ' ler  $z_0$  noktasına yaklaştığında  $f(z)$  ler de  $L$  değerine yaklaşıyorsa  $z \rightarrow z_0$  için  $f(z)$  fonksiyonunun limiti  $L$  dir denir ve

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

olarak gösterilir.  $z$  ile  $z_0$  noktaları arasındaki uzaklık  $|z - z_0|$  olduğundan yukarıdaki limit tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

- (i)  $f(z)$  fonksiyonu,  $z_0$  merkezli  $|z - z_0| < r$  yuvarındaki her  $z$  için tanımlı olsun ( $z_0$  da tanımlı olmayabilir).
- (ii)  $\varepsilon > 0$  verildiğinde  $0 < |z - z_0| < \delta$  iken  $|f(z) - L| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı vardır. Bu tanımdaki limit olan  $L$  sayısı, özel durumlarda reel sayı olabilirken genelde bir kompleks sayıdır (Başarır, 2010).

Şimdi de iki reel değişkenli ve reel değerli  $u = u(x, y)$  fonksiyonunun bir  $(x_0, y_0)$  noktasında sürekli olması tanımını hatırlayalım.

**Tanım 3.2**  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(x, y)$  fonksiyonu,  $(x_0, y_0)$  noktasında aşağıdaki üç şartı sağlarsa  $(x_0, y_0)$  noktasında süreklidir denir;

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y)$  mevcuttur,

(b)  $u(x_0, y_0)$  vardır,

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$ .

(c) şartı, (a) ve (b) şartlarını da içinde bulundurur (Başarır, 2010).

**Örnek 3.1**  $(x, y) \neq (0, 0)$  için  $u(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$  ve  $(x, y) = (0, 0)$  için  $u(x, y) = 0$

olarak tanımlı  $u(x, y)$  fonksiyonunu alalım.  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  için  $u(x, y) \rightarrow 0$  dır.

Yukarıdaki (a), (b) ve (c) şartları sağlandığından  $u(x, y)$  fonksiyonu  $(0, 0)$  noktasında süreklidir.

Şimdi kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonlar için süreklilik tanımını verelim.

**Tanım 3.3**  $f(z)$  fonksiyonu  $z_0$  merkezli yuvardaki her  $z$  için ( $z_0$  dahil) tanımlanmış olsun. Eğer  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$  ise  $f$  fonksiyonuna  $z_0$  noktasında **süreklidir** denir. Bunu daha açık ifade edersek  $f$  fonksiyonunun  $z_0$  noktasında sürekli olması için aşağıdaki üç şartı sağlaması gerekli ve yeterlidir.

(a)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  mevcuttur.

(b)  $f(z_0)$  vardır.

(c)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$  (Başarır, 2010).

Aynı tanım  $\varepsilon - \delta$  tekniğiyle, fonksiyonunun süreklilik tanımını aşağıdaki şekilde de verilebilir.

**Tanım 3.4**  $f$  fonksiyonu  $z_0$  noktasında süreklidir demek  $\varepsilon > 0$  verildiğinde,  $0 < |z - z_0| < \delta$  iken  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$  sayısının bulunması demektir. Eğer  $f$  fonksiyonu bir  $D$  kümesindeki her bir noktada sürekli ise  $f$  ye  $D$  üzerinde süreklidir denir.

Eğer  $\delta$  sayısı  $z_0 \in D$  noktalarından bağımsız olarak sadece  $\varepsilon$  sayısına bağlı olarak bulunuyorsa  $f$  fonksiyonuna  $D$  üzerinde **düzgün süreklidir** denir (Başarır, 2010).

**Tanım 3.5** Bir kompleks  $f$  fonksiyonu bir açık  $D$  kümesi üzerinde tanımlı ve  $z_0 \in D$  bir iç nokta olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = L \quad (3.1)$$

var ve  $L$  sonlu ise  $f$  ye  $z_0$  noktasında **diferansiyellenebilirdir** denir. Denk bir ifadeyle

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$  mevcut ve sonlu ise  $f$  ye  $z_0$  da diferansiyellenebilirdir (dif.

bilirdir) denir. Bu limit değerine  $z_0$  noktasında  $f$  nin türevi adı verilir ve  $f'(z_0)$  veya  $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$  olarak gösterilir. Bu limitte,  $h$  değeri kompleks sıfır sayısına, kompleks değerlerle yaklaşmaktadır. Yani, orijin merkezli bir yuvarda  $h$  orijine herhangi bir yol boyunca yaklaşacaktır. Bazen  $\Delta$  gösterimi kullanılarak  $h$  yerine  $\Delta z$  alınarak

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

yazılır.

$\varepsilon - \delta$  tekniğini kullanırsak; (3.1) deki limitin var olması demek  $\varepsilon > 0$  verildiğinde,  $0 < |z - z_0| < \delta$  iken  $\left| \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] - L \right| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$  sayısının mevcut olması demektir.

$$\eta(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), & 0 < |z - z_0| < \delta \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Fonksiyonunu tanımlarsak  $\lim_{z \rightarrow z_0} \eta(z) = 0 = \eta(z_0)$  dır. Yani  $\eta$  fonksiyonu  $z_0$  noktasında süreklidir ise  $|z - z_0| < \delta$  üzerinde süreklidir.  $|z - z_0| < \delta$  için  $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\eta(z)$  şeklinde ifade edilebilir.

$f$  fonksiyonu bir açık  $D$  kümesinin her noktasında diferansiyellenebilirse  $f$  ye  $D$  üzerinde **diferansiyellenebilirdir** denir (Başarı, 2010).

### Tanım 3.6

a) Bir  $f$  karmaşık fonksiyonu bir  $z_0$  noktasının belli bir  $D(z_0, \delta)$  komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa  $f, z_0$  da **analitiktir**, denir

b) Eğer bir  $f$  karmaşık fonksiyonu bir  $S$  kümesinin bütün noktalarında analitikse,  $f, S$  üzerinde **analitiktir**, denir.

c) Bir  $f$  fonksiyonu  $\mathbb{C}$  kompleks düzleminin tüm noktalarında analitikse,  $f$  ye **tam (entire) fonksiyon** denir (Başkan, 1998).

**Teorem 3.1**  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  fonksiyonu  $z$  noktasında diferansiyellenebilirse,

$$f'(z) = u_x + iv_x = -iu_y + v_y$$

dir, yani  $u$  ve  $v$  fonksiyonlarının  $z = (x, y)$  noktasında kısmi türevleri vardır ve de bu türevler Cauchy-Riemann eşitlikleri diye adlandırılan

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

eşitliklerini gerçeklerler (Başkan, 1998).

**Uyarı 3.1** Görülüyor ki bir  $z_0$  noktasında analitik olan fonksiyon bu noktada diferansiyellenebilir. Fakat tersinin doğru olması gerekmez. Örneğin;  $f(z) = |z|^2$  fonksiyonu  $z = 0$  da diferansiyellenebilir, fakat bu noktada analitik değildir. Çünkü,  $z = 0$  hariç,  $z = 0$  in hiçbir komşuluğunda diferansiyellenemez. Gerçekten de;

$$f(z) = u + iv = x^2 + y^2$$

olduğundan,

$$u = x^2 + y^2, v = 0$$

dir. Buradan da,

$$u_x = 2x, u_y = 2y, v_x = 0, v_y = 0$$

olur ki, Cauchy-Riemann eşitlikleri sadece  $(x, y) = (0, 0)$  noktasında gerçekleşir.

**Tanım 3.7** Kabul edelim ki  $g$  fonksiyonu bir  $D \subset \mathbb{C}$  bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer  $g$  fonksiyonu  $D$  bölgesinin farklı noktalarında farklı değerler alırsa, (yani,  $z_0, z_1 \in D$ ,  $z_0 \neq z_1$  iken  $g(z_0) \neq g(z_1)$  olduğunda) bu durumda kompleks değişkenli  $g$  fonksiyonuna  $D$  *yalnıkat fonksiyon* denir (Duren, 2001).

**Tanım 3.8** Bağlantılı açık kümeye **Bölge** adı verilir (Başkan, 1998).

**Tanım 3.9** Eğer kompleks değişkenli  $g$  fonksiyonu  $z_1 \in \mathbb{C}$  noktasının belli bir komşuluğunda analitik olup, fakat  $z_1$  noktasında da analitik değilse, bu durumda  $z_1$  noktasına  $g$  fonksiyonunun *singüler* noktası denir (Başkan, 1998).

Matematiğin temel kavramlarından olan eğri (curve) ve yay (arc) sözcükleri için kesin bir terim birliği sağlanmış değildir. Bazen yay ve eğri kelimeleri eş anlamda kullanıldığı gibi bazen de farklı iki kavram gibi kullanılmaktadır. Üstelik birçok halde

eğri ve yay sözcükleri yerine bunlarla eş anlamda olmak üzere sürekli eğri ve sürekli yay sözcükleri de kullanılmaktadır. Biz günlük konuşmada kullanılan eğri sözcüğünü benimseyecek ve diğerlerini buna bağlı olarak tanımlayacağız. Burada düzlemdeki eğriler dikkate alınacaktır.

### Tanım 3.10

a)  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  olmak üzere sürekli bir

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonuna  $\mathbb{C}$  düzleminde bir **eğri** denir. Burada  $\gamma(a)$  ve  $\gamma(b)$  noktalarına sırayla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir;

b) Bir  $\gamma$  eğrisi verildiğinde  $\gamma(a) = \gamma(b)$  ise,  $\gamma$  ya **kapalı eğridir**, denir;

c) Bir  $\gamma$  eğrisi sadece  $t_1 = t_2$  için  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  oluyorsa **basit eğridir**, denir; Bazen basit eğrilere Jordan eğrisi de denir.  $\gamma$  basit bir eğri ve  $\gamma(a) = \gamma(b)$  ise **basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi)** denir;

d) Bir  $\gamma$  eğrisi verildiğinde  $\gamma'$  türevi var ve sürekli ise  $\gamma$  **diferansiyellenebilir eğri (yay)** diye, adlandırılır;

e)  $\gamma$  diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer  $\gamma'(t) \neq 0$  ise,  $\gamma$  ya **düzgün eğri (regüler eğri)** denir.

f)  $[a, b]$  aralığının sonlu tane noktası hariç,  $\gamma$  eğrisi diferansiyellenebiliyorsa ve bu söz konusu noktalarda  $\gamma$  nın sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar  $\gamma'$  nün bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse  $\gamma$  **parçalı diferansiyellenebilir eğridir**, denir;

g)  $\gamma$  parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer her  $t \in [a, b]$  için  $\gamma'(t) \neq 0$  ise,  $\gamma$  **parçalı düzgün eğridir**, denir (Başkan, 1998).

**Uyarı 3.2** Burada  $\mathbb{C}$  düzlemindeki eğriler söz konusu olduğundan, çok kez

$$z(t) = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

biçiminde yazacağız. Bazen bir  $\gamma$  eğrisi

$$x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$$

parametrik gösterimi ile de verilebilir.

**Tanım 3.11** Eğer  $\gamma = \gamma(t)$  eğri fonksiyonu sınırlı değişimli ise, bunun belirttiği  $\gamma$  eğrisine *doğrultulabilir (rektifiye edilebilir) eğri* denir (Başkan, 1998).

$[c, d]$  aralığının  $P = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$  şeklindeki tüm parçalanmalarının ailesi  $\wp$  ile gösterilsin ve  $\ell_n(P) := \sum_{m=1}^n |\zeta(s_m) - \zeta(s_{m-1})|$  olsun.

**Tanım 3.12** Eğer

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\ell_n(P) : P \in \wp\} < \infty$$

şartı sağlanırsa,  $\Gamma$  eğrisine *ölçülebilir eğri (düzlendirilebilir)* denir.

**Tanım 3.13** Sonlu sayıda  $\gamma_j, j=1, 2, \dots, n$  düzgün eğrileri verilmiş olsun. Eğer bütün  $j=1, 2, \dots, n-1$  değerleri için  $\gamma_j$ 'nin bitim noktası  $\gamma_{j+1}$ 'in başlangıç noktası ile çakışiyorsa, bu  $\gamma_j$  eğrilerinin birleşimi olan  $\gamma$  eğrisine *çevre (parçalı düzgün eğri)* denir (Başkan, 1998).

Özel olarak  $\gamma_1$ 'in başlangıç noktası  $\gamma_n$ 'in bitim noktası ile çakışiyorsa *kapalı çevre* denir. Zaman zaman karşılaşılabacağından belirtelim ki, “basit çevre” sözcüğü kendisini kesmeyen çevre, ”basit kapalı çevre” sözcüğü ise, kendisini kesmeyen kapalı çevre anlamında kullanılacaktır. Çevrelerin yönlendirilmesi, eğrilerin yönlendirilmesinde olduğu gibi yapılır.

Şimdi  $\mathbb{C}$  düzleminde kompleks integral kavramını verelim.

Bir  $C$  yay parçası üzerinde tanımlı bir  $z$  kompleks değişkenli  $f$  fonksiyonunun integrali  $\int_C f(z) dz$  ile gösterilir ve *kompleks bir integral* olarak adlandırılır.

Kompleks integralin tanımını vermek için aşağıdaki adımların gerçekleştirilmesi gerekmektedir:

1. Kompleks düzlemde kalan düzgün bir  $C$  eğrisinin tüm noktalarında tanımlı bir  $z$  değişkeninin bir fonksiyonu  $f$  olsun.  $C$  eğrisi  $z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$  parametrisasyonu ile tanımlanmış olsun.

2.  $P, \Delta t_k = t_k - t_{k-1}$  uzunluğunda  $n$  sayıda  $[t_{k-1}, t_k]$  alt aralıklarından oluşan  $[a, b]$  parametrik aralığının aşağıdaki gibi parçalanışı olsun:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

$P$  parçalanışı  $C$  eğrisini, başlangıç ve bitiş noktaları aşağıdaki sayı çiftleri olan  $n$  tane alt yay parçalanışına indirger

$$z_0 = x(t_0) + iy(t_0),$$

$$z_1 = x(t_1) + iy(t_1),$$

$$z_1 = x(t_1) + iy(t_1),$$

$$z_2 = x(t_2) + iy(t_2),$$

.

.

.

$$z_{n-1} = x(t_{n-1}) + iy(t_{n-1}),$$

$$z_n = x(t_n) + iy(t_n),$$

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}, k = 1, 2, \dots, n$  olsun.

3.  $\|P\|, [a, b]$  nin  $P$  parçalanışının normu olsun, yani, en uzun alt aralığın uzunluğu olsun.

4.  $C$  nin her bir alt yayından bir  $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$  noktası seçelim.

5.  $n$  tane  $f(z_k^*)\Delta z_k, k = 1, 2, \dots, n$ , çarpımları oluşturur ve bu çarpımları toplarsak:

$$\sum_{k=1}^n f(z_k^*)\Delta z_k.$$

**Tanım 3.14**  $C$  üzerinde  $f$  nin kompleks integrali aşağıdaki gibidir:

$$\int_c f(z)dz = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(z_k^*)\Delta z_k. \quad (3.2)$$

(3.2) deki limit varsa, bu durumda  $f, C$  üzerinde **integrallenebilirdir** denir.  $C$  nin sürekli olduğu noktalarda ve  $C$  nin düzgün veya parçalı düzgün olduğu tüm durumlarda bu limit vardır (Zill ve Shanahan, 2003).

**Tanım 3.15**  $w = f(z)$  bir  $D$  bölgesinde tanımlı bir kompleks tasvir ve  $z_0, D$  deki bir nokta olsun. Bu taktirde,  $z_0$  noktasında kesişen  $D$  deki her yönlendirilmiş  $C_1$  ve  $C_2$  düzgün eğri çiftinin  $z_0$  'daki aralarındaki açı,  $C_1'$  ve  $C_2'$  resim eğrilerinin  $f(z_0)$  'da aralarındaki açığa hem büyüklükte hem de yönde eşitse,  $w = f(z)$  kompleks tasvirine  $z_0$  da **konform** denir (Zill ve Shanahan, 2003).

Konform tasvir terimini,  $z_0$  da konform olan bir  $w = f(z)$  kompleks tasvirine atıfta bulunmak için de kullanırız. Buna ek olarak,  $w = f(z)$  bir tasviri bir  $D$  bölgesini bir  $D'$  bölgesi üzerine resmediyorsa ve  $D$  deki her noktada konform ise,  $w = f(z)$  ye  $D$  nin  $D'$  üzerine bir **konform tasviridir** deriz.  $a \neq 0$  olmak üzere  $f(z) = az + b$  bir doğrusal fonksiyon ise,  $w = f(z)$  nin kompleks düzlemdeki her noktada konform olduğu sezgisel olarak açıktır.  $w = \bar{z}$  tasvirinin  $z_0 = 1 + i$  noktasında  $\theta$  ve  $\phi$  açıları büyüklükte eşit, fakat yönde eşit olmadığından,  $z_0 = 1 + i$  noktasında konform değildir.

**Teorem 3.2 (Riemann Konform Dönüşüm Teoremi):**  $G \subset \mathbb{C}$  sınırı basit bağlantılı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve  $z_0 \in G$  olsun. Bu durumda,  $G$  bölgesini  $U$  birim diskinde  $f(z_0) = 0$  ve  $f'(z_0) > 0$  şartları altında dönüştüren bir tek  $f$  konform dönüşümü vardır (Markushevich, 1977).

**Tanım 3.16** Bağlantılı kapalı kümeye Kontinyum adı verilir (Dzyadyk, 1977).

**Teorem 3.3**  $U, \mathbb{C}$  kompleks düzlemde birim çemberi ve  $D \subset \mathbb{C}$  sınırı en az iki noktadan oluşan, bağlantılı tümleyene sahip, sınırlı bir kontinyum olsun. Bu durumda,  $CD$  bölgesini  $C\bar{U}$  ya

$$\Phi(\infty) = \infty \text{ ve } \Phi'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

şartları altında dönüştüren bir tek  $\Phi$  konform dönüşümü vardır (Markushevich, 1977).

**Teorem 3.4 (Cauchy Teoremi):**  $f$  fonksiyonu, basit kapalı bir  $C$  eğrisi içinde ve üzerinde analitik ve  $f'$  türev fonksiyonu süreklilyse,

$$\int_C f = 0 \quad (3.3)$$

olur (Dönmez, 1999).

**Teorem 3.5 (Cauchy Teoremi):**  $f$ ,  $D$  bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun.  $C$  eğrisi  $D$  bölgesinde kapalı ve bir noktaya homotopik ve ayrıca  $z_0 \in D$  noktası  $C$  eğrisi üzerinde değilse,

$$f(z_0)I(C, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (3.4)$$

olur. Bu ifadeye **Cauchy İntegral Formülü** denir (Dönmez, 1999).

**Teorem 3.6 (Türevler için Cauchy İntegral Formülü):**  $f$ ,  $D$  bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu halde,  $f$  fonksiyonunun  $D$  kümesinde tüm türevleri vardır.

Ayrıca  $z_0 \in D$  ve  $z_0 \notin C$  olmak üzere  $C$  eğrisi  $z_0$  noktasında homotopik ve kapalı ise,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  olarak alındığında

$$f^{(k)}(z_0)I(C, z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \quad (3.5)$$

olur (Dönmez, 1999).

**Teorem 3.7 (Sınırsız Bölgeler İçin Cauchy İntegral Teoremi):**

$G$ , sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisiyle sınırlanmış sınırlı bölge ve  $\Gamma$  bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. Eğer  $f$ ,  $CG$  bölgesinde analitik bir fonksiyon ise,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(\infty) - f(z) & : z \in C \bar{G} \\ f(\infty) & : z \in G \end{cases}$$

olur (Gonzalez, 1991).

**Tanım 3.17** Kabul edelim ki  $f$  fonksiyonunun  $z_0 \in G$  noktasında  $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$

kısmi türevleri vardır. Bu durumda  $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$  ve  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$  türevleri aşağıdaki gibi

tanımlanır:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) =: f_z(z_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right) =: f_z(z_0).$$

Özel olarak  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  alınırsa,

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y),$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y),$$

elde edilir (Ahlfors, 1979).

**Teorem 3.8 (Green Formülü):**  $G$ , sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisiyle sınırlanmış sınırlı bir bölge ve  $f, G$  bölgesinde  $f_z$  ve  $f_{\bar{z}}$  sürekli kısmi türevlerine sahip ve  $\bar{G}$  kümesinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer  $f_{\bar{z}}$  fonksiyonu  $G$  üzerinde integrallenebilirse,

$$\iint_G f_{\bar{z}} d\sigma_z = \frac{1}{2i} \int_{\partial G} f(z) dz$$

olur (Gaier, 1987).

**Teorem 3.9 (Cauchy-Green Formülü):**  $G$ , sınırı sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge ve  $f, G$  bölgesinde  $f_z$  ve  $f_{\bar{z}}$  sürekli kısmi türevlerine sahip ve  $\bar{G}$  kümesinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer  $f_{\bar{z}}$  fonksiyonu  $G$  üzerinde integrallenebilirse, bu durumda her  $z \in G$  için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f_{\bar{z}}(\zeta)}{\zeta - z} d\sigma_\zeta$$

olur (Conway, 1995).

**Tanım 3.18** Boş olmayan bir  $X$  kümesi ve bir

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+, (x, y) \rightarrow d(x, y)$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu  $d$  dönüşümü  $\forall x, y, z \in X$  için

$$(M1) \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(M2) \ d(x, y) = d(y, x);$$

$$(M3) \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

özellikleri sağlıyorsa  $X$  üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır ve bu durumda  $(X, d)$  ikilisine bir metrik uzay denir. Burada (M1)-(M3) özelliklerine metrik aksiyomları denir. Bir küme üzerinde birden fazla metrik tanımlanabilir.

(M3) aksiyomunu tekrar uygulayarak  $\forall x, y, z_1, \dots, z_n \in X$  için

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z_1) + d(z_1, y) \\ &\leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + d(z_2, y) \\ &\leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \dots + d(z_n, y) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$d(x, y) \leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \dots + d(z_n, y)$$

ifadesine **genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği** denir (Musayev, 2000).

**Teorem 3.10**  $(X, d)$  bir metrik uzay ise  $\forall x, y, z \in X$  için

$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$  (ters üçgen eşitsizliği) eşitsizliği doğrudur (Musayev, 2000).

**Teorem 3.11**  $X = \mathbb{R}$  olmak üzere

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, (x, y) \rightarrow d(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan  $d$  dönüşümü  $\mathbb{R}$  üzerinde bir metriktir. Bu metriğe  $\mathbb{R}$  üzerinde **mutlak değer metriği** denir (Musayev, 2000).

**Tanım 3.19**  $X$  boş olmayan bir küme ve  $K$  cismi  $\mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$  olsun

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \rightarrow x + y,$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X, \quad (a, x) \rightarrow ax,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her  $x, y, z \in X$  ve  $a, b \in K$  için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1.  $x + y = y + x$ ;
2.  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ;
3. Her  $x \in X$  için  $x + 0 = x$  eşitliğini sağlayan bir tek  $0 \in X$  vardır;
4. Her  $x \in X$  için  $x + (-x) = 0$  eşitliğini sağlayan bir tek  $-x \in X$  vardır;
5. Her  $x \in X$  için  $1 \cdot x = x$ ;
6.  $a(x + y) = ax + ay$ ;
7.  $(a + b)x = ax + bx$ ;
8.  $(ab)x = a(bx)$ .

Bu durumda  $X$ 'e  $K$  üzerinde bir **vektör uzayı (lineer uzayı)** ve elemanlarına da **vektör** veya **nokta** adı verilir.  $K = \mathbb{R}$  alınırsa  $X$ 'e bir reel vektör uzayı ve  $K = \mathbb{C}$  alınırsa  $X$  e bir **Kompleks vektör uzayı** denir (Musayev, 2000).

**Tanım 3.20**  $X$  bir  $K$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü  $\forall x, y \in X$  ve  $\forall a \in K$  için

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$(N2) \quad \|ax\| = |a| \|x\|;$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

özelliklerini sağlıyorsa  $X$  üzerinde norm adını alır ve bu durumda  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisine bir **normlu vektör uzayı** adı verilir. (N1)- (N3) özelliklerine **norm aksiyomları** denir. Bu

vektör uzayı üzerinde birden fazla norm tanımlanabilir.  $K$  cismine bağlı olarak, reel normlu uzay ve kompleks normlu uzay söylemleri de kullanılır (Musayev, 2000).

### 3.2 Bazı Fonksiyon ve Eğriler sınıfı

**Tanım 3.21**  $f$  fonksiyonu  $[a,b]$  aralığında sürekli olsun.  $[0,b-a]$  aralığında tanımlanan ve

$$\omega(u) = \omega(f, u) = \sup_{\substack{a \leq x \leq b-h \\ 0 \leq h \leq u}} |f(x+h) - f(x)|$$

veya

$$\omega(f, u) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leq u \\ x_1, x_2 \in [a, b]}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

eşitsizlikleri ile verilen  $\omega(u) = \omega(f, u)$  fonksiyonuna  $f$  fonksiyonunun **süreklilik modülü denir.**

Süreklilik modülü için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- 1)  $\omega(0) = 0$
- 2)  $\omega(u)$ , monoton artan fonksiyondur;
- 3)  $\omega(u)$  fonksiyonu süreklidir;
- 4)  $u_1 \geq 0$  ve  $u_2 \geq 0$  için

$$\omega(u_1 + u_2) \leq \omega(u_1) + \omega(u_2) \text{ olur.}$$

- 5)  $n$  doğal sayısı ve  $nu \in [0, b-a]$  için

$$\omega(nu) \leq n\omega(u)$$

- dır ve keyfi  $\lambda > 0, (\lambda + 1)u \in [0, b-a]$  için

$$\omega(\lambda u) \leq \lambda + 1 \quad \omega(u) \leq (\lambda + 1)\omega(u)$$

olur;

- 6)  $u \in [0, b-a]$  için  $\omega(u) \neq 0$  ise

$$\omega(u) \geq \frac{\omega(b-a)}{2(b-a)}u$$

olur (Dzyadyk, 1977).

$C(\Gamma)$  ile  $\Gamma$  eğrisi üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfını göstereceğiz.

$\omega(\delta), \delta > 0$  süreklilik modülü tipinde fonksiyon olsun (fonksiyonun süreklilik modülü aşağıda tanımlanacaktır). Yani herhangi  $C = const > 0$  için  $\omega(t\delta) \leq ct\omega(\delta), \delta > 0, t > 1$  şartını sağlayan pozitif, azalmayan fonksiyondur (hem de  $\omega(+0) = 0$ ).

$$CH^\omega = CH^\omega(\Gamma), C = const > 0 \text{ ile}$$

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq C\omega(|z_1 - z_2|), z_1, z_2 \in \Gamma$$

şartını sağlayan  $f(z) \in C(\Gamma)$  fonksiyonlar sınıfını göstereceğiz.  $H^\omega$  ile herhangi  $C$  için  $CH^\omega$ , ya ait olan fonksiyonlar sınıfını göstereceğiz.

**Tanım 3.22** Her not edilen  $\alpha \in (0, 1]$  için  $f$  fonksiyonun süreklilik modülü

$$\omega(f, \delta) \leq M_1 \delta^\alpha, \quad (3.6)$$

şartını sağlıyorsa,  $f$  fonksiyonlar sınıfı  $\alpha$  mertebeden Hölder (veya Lipschitz) sınıfına aittir denir. Burada  $M_1, \delta$  'dan bağımlı olmayan herhangi pozitif sabittir. Bu sınıf  $H^\alpha$  veya  $Lip\alpha$  ile gösterilir.

J. I. Mamedkhanov'un (1980) çalışmasında  $D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma), 0 < \alpha \leq 1, \beta \geq 0$  fonksiyon sınıfı incelenmiştir.  $D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$  fonksiyon sınıfı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

**Tanım 3.23**  $\mathbb{C}$  kompleks düzlemde  $\Gamma$  - Jordan eğrisi ve  $z_0 \in \Gamma$  - sabit nokta,  $0 < \alpha \leq 1, \beta \geq 0$  olsun. Eğer

$$|g(z_1) - g(z_2)| \leq C_g \max\{|z_0 - z_1|^\beta, |z_0 - z_2|^\beta\} |z_1 - z_2|^\alpha, \forall z_1, z_2 \in \Gamma$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda  $g$  fonksiyonu  $D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$  sınıfındandır denir ve  $g \in D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$  ile gösterilir. Tanımdan görüldüğü gibi  $D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma) \subset H_\alpha(\Gamma)$  dir, burada

$H_\alpha(\Gamma)$  ise  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere sürekli fonksiyonların Hölder sınıfıdır, ve  $D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$  fonksiyon sınıfı  $z_0$  noktasının komşuluğunda ilave düzgünlük şartına sahiptir (J. I. Mamedkhanov, 1985).

İlave olarak J. I. Mamedkhanov ve V. V. Salaev'in (1980) ve R. M. Rzaev'in (1981) çalışmalarında

$$\omega_f^{z_0}(\delta, \zeta) = \sup_{|z_1 - z_2| \leq \delta} |f(z_1) - f(z_2)|, \quad \delta \leq 2\zeta, \quad z_1, z_2 \in \{z : |z_1 - z_2| \leq \zeta\} \cap \Gamma$$

biçiminde lokal-global süreklilik modülü incelenmektedir; burada  $z_0$  ise  $\Gamma$  eğrisi üzerinde sabit noktadır.

$\varphi(\delta, \zeta)$ ,  $\delta$  ve  $\zeta$  'ya göre azalmayan fonksiyon olsun.  $\varphi(\delta, \zeta)/\delta$  artmayandır ve  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(\delta, \zeta) = 0$  şartı sağlansın.  $H_\varphi^{z_0}$  fonksiyon sınıfını tanımlayalım.

**Tanım 3.24**  $\mathbb{C}$  kompleks düzlemde  $\Gamma$  - Jordan eğrisi ve  $z_0 \in \Gamma$  - sabit nokta olsun.

$$H_\varphi^{z_0} = \{f \in C(\Gamma) : \omega_f^{z_0}(\delta, \zeta) \leq c_f \varphi(\delta, \zeta), \quad 0 < \delta \leq 2\zeta\}.$$

J. I. Mamedkhanov ve V. V. Salaev'in (1980) çalışması gereğince, eğer  $\varphi(\delta, \zeta) = \delta^\alpha \zeta^\beta$  alınırsa,  $D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma) = H_\varphi^{z_0}(\Gamma)$  olur.

**Tanım 3.25** Eğer tarafları  $x$  ve  $y$  eksenlerine paralel olan keyfi kapalı  $R \subset G$  dikdörtgeni için  $u(x, y)$  fonksiyonu hemen tüm yatay ve hemen tüm düşey parçalarında mutlak sürekli ise diyeceğiz ki,  $G$  bölgesinde fonksiyon  $u(x, y) \in ACL$  'dir (eğrilerde **mutlak sürekli**dir denir). Bu tür fonksiyonun elbette  $G$  'de hemen-hemen her yerde  $u'_x, u'_y$  kısmi türevleri vardır, öyle ki biçimsel,

$$u_z = \frac{1}{2}(u'_x - iu'_y); \quad u_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u'_x + iu'_y)$$

türevleri vardır (Lehto ve Virtanen, 1973).

**Tanım 3.26**  $\Gamma$ ,  $\mathbb{C}$  düzleminde düzeltilebilir bir kapalı Jordan eğrisi olsun.  $\Gamma$  eğrisi üzerinde tanımlı ve  $1 < p < \infty$  olmak üzere

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left( \int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p} < \infty$$

şartını sağlayan ölçülebilir kompleks değerli fonksiyonlar sınıfı  $L^p(\Gamma)$  ile gösterilir (Cavus ve Israfilov, 1995).  $L^p(\Gamma)$  uzayı,  $\|\cdot\|_{L^p(\Gamma)}$  formuna göre Banach uzayıdır.

**Teorem 3.12 (Hölder Eşitsizliği):**  $\Gamma$ ,  $\mathbb{C}$  düzleminde sonlu uzunluklu kapalı bir Jordan eğrisi olsun.  $p > 1$ ,  $q > 1$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  için  $f \in L^p(\Gamma)$  ve  $g \in L^q(\Gamma)$  ise  $f \cdot g \in L^1(\Gamma)$

ve

$$\left| \int_{\Gamma} f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \left( \int_{\Gamma} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_{\Gamma} |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

olur (Goluzin, 1968).

**Teorem 3.13 (Minkowski Eşitsizliği):**  $p > 1$  için  $f, g \in L^p(\Gamma)$  ise

$$\left( \int_{\Gamma} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_{\Gamma} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_{\Gamma} |g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

olur (Goluzin, 1968).

**Teorem 3.14 (Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği)**  $f(x, y), \mathbb{R}^2$  üzerinde tanımlı ve ölçülebilir olsun.  $\|f(\cdot, y)\|_{L^p(\mathbb{R})} \in L^1(\mathbb{R})$  ise bu durumda

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} f(\cdot, y) dy \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \int_{\mathbb{R}} \|f(\cdot, y)\|_{L^p(\mathbb{R})} dy$$

gerçeklenir (Butzer ve Nessel, 1971).

**Tanım 3.27**  $f, D$  bölgesi içerisinde analitik ve  $p > 0$  olsun.  $D$  bölgesi içindeki  $\Gamma_n \rightarrow \Gamma$  özelliğine sahip sonlu uzunluklu kapalı Jordan eğrilerinin bir  $\{\Gamma_n\}$  dizisi için

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p |dz| \leq M$$

şartını sağlayan  $f$  fonksiyonlarının sınıfına **Smirnov sınıfı** denir ve  $E^p(D)$  ile gösterilir, burada,  $M$  sabiti  $n'$ 'den bağımsız bir sabittir. Özel halde  $D:=U$  ise  $H^p(U)$  **Hardy uzayı** elde edilir (Goluzin, 1968).

**Teorem 3.15** Eğer  $f(z) \in E^1(D)$  ise  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$  eşitliği sağlanır (Goluzin, 1968).

**Tanım 3.28**  $\Gamma$  sonlu uzunluklu bir eğri ve  $\omega: \Gamma \rightarrow [0, \infty]$  ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer  $\omega^{-1}(\{0, \infty\})$  kümesinin ölçümü 0 ise bu durumda  $\omega$  fonksiyonuna bir **ağırlık fonksiyonu** denir.

**Tanım 3.29**  $\Gamma$  sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve  $\omega, \Gamma$  üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun.  $1 < p < \infty$  için  $\left( \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} |f(z)|^p |\omega(z)| |dz| \right)^{1/p} < \infty$  koşulunu sağlayan  $\Gamma$  üzerinde tanımlı bütün *Lebesgue ölçülebilir kompleks değerli*  $f$  fonksiyonlarının kümesine **ağırlıklı Lebesgue uzayı** denir ve  $L^p_{\omega}(\Gamma)$  ile gösterilir (Israfilov, 2001).

**Tanım 3.30** Kabul edelim ki  $p \in (1, \infty)$  ve  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  şartları sağlanır.  $\Gamma$  eğrisi üzerinde tanımlı ve

$$\sup_{t \in \Gamma} \sup_{\varepsilon > 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma(t, \varepsilon)} \omega^p(\tau) |d\tau| \right)^{1/p} \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma(t, \varepsilon)} \omega^{-q}(\tau) |d\tau| \right)^{1/q} < \infty \quad (3.7)$$

şartını sağlayan  $\omega$  ağırlık fonksiyonlarının sınıfı  $A_p(\Gamma)$  ile gösterilir. (3.7) koşuluna *Muckenhoupt*– $A_p$  koşulu denir, burada  $\Gamma(t, \varepsilon) = \{\tau \in \Gamma : |\tau - t| < \varepsilon\}$  dur (Böttcher ve Karlovich, 1997).

$\Gamma$  eğrisi  $\mathbb{C}$  kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Ayrıca,  $G = \text{Int}\Gamma$  ve  $G^- = \text{Ext}\Gamma$  gösterelim.  $f \in L_1(\Gamma)$  olmak üzere

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G \quad (3.8)$$

ve

$$f^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G^- \quad (3.9)$$

biçiminde tanımlanan  $f^+$  ve  $f^-$  fonksiyonları, sırasıyla  $G$  ve  $G^-$  bölgelerinde analitikler ve  $f^-(\infty) = 0$  olur.

$f \in L_1(\Gamma)$  fonksiyonunun bir  $z \in \Gamma$  noktasındaki **Cauchy singüler integrali**,

$$S_{\Gamma}(f)(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma(z, \varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

olarak tanımlanır. Bu limit hemen her  $z \in \Gamma$  için mevcuttur (Böttcher ve Karlovich, 1997).

Eğer  $f \in L_1(\Gamma)$  için,  $f^+$  ve  $f^-$  fonksiyonlarından birinin  $\Gamma$  üzerinde hemen her yerde açılalimit değerleri mevcut ise, bu durumda  $S_{\Gamma}(f)(z)$  Cauchy singüler integrali  $\Gamma$  üzerinde hemen her yerde vardır ve  $f^+$  ve  $f^-$  fonksiyonlarından diğerinin de  $\Gamma$  üzerinde hemen her yerde açılalimit değerleri mevcuttur. Tersine olarak,  $S_{\Gamma}(f)(z)$  Cauchy singüler integrali  $\Gamma$  üzerinde hemen her yerde var ise, bu durumda  $f^+$  ve  $f^-$  fonksiyonlarının  $\Gamma$  üzerinde hemen her yerde açılalimit değerleri mevcuttur. Ayrıca, hemen her  $z \in \Gamma$  için

$$f^+(z) = S_{\Gamma}(f)(z) + \frac{1}{2}f(z) \quad (3.10)$$

ve

$$f^-(z) = S_{\Gamma}(f)(z) - \frac{1}{2}f(z) \quad (3.11)$$

eşitlikleri sağlanır (Goluzin, 1968) ve dolayısıyla  $\Gamma$  üzerinde hemen her yerde

$$f = f^+ - f^- \quad (3.12)$$

olur.

$f \in L_1(\Gamma)$  fonksiyonuna,  $\Gamma$  üzerinde hemen her yerde  $S_{\Gamma}(f)(z)$  değerini alan  $S_{\Gamma}(f)$  fonksiyonunu karşılık getirebiliriz. Bu şekilde tanımlanan  $S_{\Gamma}$  lineer operatörüne **Cauchy singüler operatörü** denir.

Not edelim ki,  $S_\Gamma$  lineer operatörünün sınırlılığı, yaklaşım teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu operatörün  $L_p(\Gamma)$  Lebesgue uzayı üzerinde sınırlılığı problemi G. David tarafından incelenmiştir (David, 1984). Bu konu ile ilgili ayrıntılı ispatlar ve Cauchy singüler integrali ile ilgili geniş bilgi (Böttcher ve Karlovich, 1997) kitabında bulunabilir.

**Tanım 3.31**  $\mathbb{C}$  kompleks düzlemde bir  $\Gamma$  eğrisi verilmiş olsun. Eğer bir  $T$  çemberini  $\Gamma$  eğrisine dönüştüren ve  $T$  çemberinin bir komşuluğunda konform olan bir dönüşüm varsa, bu durumda  $\Gamma$  eğrisine **analitik eğri** denir (Lehto ve Virtanen, 1973).

**Tanım 3.32**  $R > 1$  olmak üzere, merkezi 0 ve yarıçapı  $R$  olan çemberin  $\Phi$  fonksiyonu altındaki ters görüntüsü olan

$$\Gamma_R = \{z : |\Phi(z)| = R, R > 1\}$$

eğrilerine  $D$  kontinyumunun **seviye çizgileri** denir (Suetin, 1998).

Kuazikonform dönüşümünün farklı tanımları bulunmaktadır. Bunlardan birini kullanalım.

**Tanım 3.33** Eğer

- 1)  $G$  de  $\varphi \in ACL$ ,

- 2)  $G$  de hemen-hemen her yerde  $\left| \varphi_z \right| \leq \frac{K+1}{K-1} \left| \varphi_{\bar{z}} \right|$

ise  $G$  – bölgesinin topoloji  $\varphi$  dönüşümüne  $K$  – **kuazikonform (yarikonform)** dönüşüm denir (Ahlfors, 1987).

Bizi esas olarak  $\Gamma$  – kuazikonform eğri olduğu hali ilgilendirecektir.

**Tanım 3.34** Düzlemi kendisine dönüştüren herhangi  $K$  – kuazikonform dönüşümünde çemberin görüntüsüne **kuazikonform (yarikonform) eğri** veya **kuasiçember** denir (Lehto ve Virtanen, 1973).

Eğrinin kuazikonformluğunun geometrik kriteri daha kullanışlıdır (Belinskii, 1974).  $\Gamma$  – Jordan eğrisinin ve onun üzerinde keyfi iki  $z_1$  ve  $z_2$  noktalarını göz önüne alalım.  $z_1$  ve  $z_2$  noktalarının  $\Gamma$  eğrisini böldüğü iki yaydan birini (küçük çaplı)

$\Gamma(z_1, z_2)$  ile gösterelim.  $\Gamma$  eğrisinin kuasikonform olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki bağıntının sağlanmasıdır:

$$\text{diam}\Gamma(z_1, z_2) \prec |z_1 - z_2|$$

**Lemma 3.1**  $B, \Gamma$  kuasikonform eğri sınırlı bölge,  $z_1 \in \Gamma, z_2 \in \Gamma$  olsun. Bu durumda uzuluğu  $S(z_1, z_2)$  olmak üzere

$$S(z_1, z_2) \leq M |z_1 - z_2|$$

şartını sağlayan  $z_1, z_2 \in \bar{B}$  düzeltilebilir yayı vardır, üstelik  $M > 1$  sabiti ancak  $B$  den bağımlıdır (Belyi, 1977).

**Tanım 3.35** Eğer keyfi çift  $z_1$  ve  $z_2$  noktaları için bu noktalar arasında kalan eğrinin  $\Gamma(z_1, z_2)$  küçük parçasının uzunluğu

$$\text{mes}\Gamma(z_1, z_2) \leq |z_1 - z_2|$$

şartını sağlıyorsa, düzeltilebilir Jordan  $\Gamma$  eğrisine *kuazidüzgün eğri* denir (Andrievskii, 1986).

$\Gamma$  – kapalı Jordan eğrisi olsun.  $\delta > 0$  için

$$U(z, \delta) = \{\zeta : |\zeta - z| < \delta\}, \quad d(\zeta, \Gamma) = \inf_{z \in \Gamma} |\zeta - z|,$$

$$\Gamma_\delta = \bigcup_{z \in \Gamma} U(z, \delta) = \{\zeta : d(\zeta, \Gamma) < \delta\}$$

gösterelim.

$\Gamma$  – kapalı düzeltilebilir Jordan eğrisi olsun.  $\Gamma$  eğrisinin uzunluğu  $l$ , çapı  $d$  ( $d = \sup_{t, \tau \in \Gamma} |t - \tau|$ ) ve denklemi  $t = t(s)$  ( $0 \leq s \leq l$ ) biçiminde olsun.  $\Gamma_\delta(t) = \{\tau \in \Gamma : |t - \tau| \leq \delta\}$ , ( $0 < \delta \leq d$ ),  $\theta_t(\delta) = \text{mes}\Gamma_\delta(t)$ , (ölçü Lebesgue ölçüsüdür),  $\theta(\delta) = \sup_{t \in \Gamma} \theta_t(\delta)$  gösterelim. Açık ki,  $\theta(\delta) \geq \delta$  eşitsizliği sağlanır.

**Tanım 3.36** Eğer  $\theta(\delta) \leq C\delta$  şartını sağlayan  $C = C(\Gamma) \geq 1$  sabiti varsa, bu durumda  $\Gamma$  eğrisi  $S_\theta$  sınıfına aittir diyeceğiz (Salaev, 1976).

$S_\theta$  sınıfına ait olan eğrilere *Regüler eğri* veya *Carleson eğrisi* de denir.

Kabul edelim ki  $\Gamma$  kapalı Jordan eğrisidir.  $G = C\Gamma = G_1 \cup G_2$  ( $0 \in G_1, \infty \in G_2$ ) bölgesi  $\Gamma$  kapalı eğrisinin iki bileşenli tümleyeni olsun. Ayrıca kabul edelim ki  $w = \Phi_i(z)$  ( $i=1,2$ ) fonksiyonları konform ve yalınkat olarak  $\Phi_1(0) = \infty, \lim_{z \rightarrow 0} z\Phi_1(z) > 0, \Phi_2(\infty) = \infty$  ve  $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2(z)/z > 0$  normları ile  $G_1$  ve  $G_2$  bölgelerini birim çemberinin dışına dönüştürür.

Birim çemberin içini  $U_1$ , birim çemberin dış kısmını ise  $U_2$  ile gösterelim. Birim çemberin sınırı  $T$  olsun.

$\Phi_i(z)$  ( $i=1,2$ ) fonksiyonlarının tersi  $z = \Psi_i(w)$  ( $i=1,2$ ) olsun. Caratheodory teoremi gereğince  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  ( $\Psi_1$  ve  $\Psi_2$ ) fonksiyonları sürekli olarak  $\Gamma(T)$ 'ye genişletilebilir (örneğin bkz. Markushevich 1977).

$f \in C(\Gamma)$  olsun. Bu durumda  $f$  fonksiyonunu genelleştirilmiş Faber-Laurent serisi cinsinden

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) F_k(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (-a_k(f)) F_k(1/z),$$

biçiminde ifade edebiliriz, burada  $a_k(f)$  ve  $a_k(f)$  katsayıları

$$a_k(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f[\Psi_2(\omega)]}{\omega^{k+1}} d\omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

ve

$$a_k(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f[\Psi_1(\omega)]}{\omega^{k+1}} d\omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

olarak tanımlanır.  $a_k(f)$  ve  $a_k(f)$  katsayılarına  $f \in C(\Gamma)$ 'nin **Faber-Laurent katsayıları** denir.  $F_k(z)$  polinomu,  $\Gamma$  eğrisi için  $k$ . dereceli Faber polinomu olarak adlandırılır.  $F_k(z)$  polinomunun integral şekli

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\Phi_2(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta, \quad (3.15)$$

biçimindedir, burada

$$\Gamma_R := \{\zeta \in G_2 : |\Phi_2(\zeta)| = R\}.$$

dir.

$F_k(1/z)$  rasyonel fonksiyonu,  $\Gamma$  eğrisi için  $k$  dereceli Faber esas kısmı olarak adlandırılır ve integral şekli

$$F_k(1/z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{[\Phi_1(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta \quad (3.16)$$

biçimindedir, burada

$$\Gamma_R := \{\zeta \in G_1 : |\Phi_1(\zeta)| = R\}.$$

dir.

**Tanım 3.37**  $f \in C(\Gamma)$  ve  $a_k(f)$ ,  $a_k(f)$  ise Faber-Laurent katsayıları olsun. Bu durumda

$$R_n(f, z) := \sum_{k=0}^n a_k(f) F_k(z) + \sum_{k=0}^n -a_k(f) F_k(1/z)$$

rasyonel fonksiyonuna  $f$ 'nin  $n$ . Dereceden **Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu** denir.

$\Gamma$  kapalı Jordan eğrisi ve  $f \in C(\Gamma)$  olsun.  $E_n(f, \Gamma)$  ile  $f$  fonksiyonunun  $\Gamma$  eğrisi üzerinde en iyi yaklaşımını gösterelim. Yani,

$$E_n(f, \Gamma) = \inf_{\{R_n\}} \max_{z \in \Gamma} |f(z) - R_n(z)|$$

dir.

### 3.3 Yardımcı Sonuçlar

$\Gamma \setminus \Omega = CT = \Omega_1 \cup \Omega_2, (0 \in \Omega_1, \infty \in \Omega_2)$  tümleyeni ile keyfi kapalı Jordan eğrisi olsun. Konform ve yalınkat  $\Phi_1(0) = 0, \Phi_1'(0), \Phi_2(\infty) = \infty, \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi_2(z)}{z} > 0$  normu ile uygun olarak  $\Omega_i - i, \Omega_i' - a$   $\Omega_1' = \{w : |w| < 1\}, \Omega_2' = \{w : |w| > 1\}$  dönüştüren

$w = \Phi_i(z)$ ,  $i = 1, 2$  fonksiyonlarını göz önüne alalım. Her  $\Phi_i(z)$ , ( $i = 1, 2$ ) fonksiyonunu  $\Gamma = \partial\Omega_1 = \partial\Omega_2$  sınırına kadar devam ettirelim. (genel olarak  $z \in \Gamma$  iken  $\Phi_1(z) \neq \Phi_2(z)$  ve devam ettirilen fonksiyonlar için  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  gösterimlerini değiştirmeyelim.)  $w = \Phi_i(z)$  fonksiyonlarının tersini  $z = \Psi_i(w)$ ,  $i = 1, 2$  ile gösterelim.

$\Gamma$ -Jordan eğrisi olsun. Sınırı  $\Gamma$  olan sonlu bölgeyi  $\text{int } \Gamma = \mathbb{C} \setminus \overline{\text{int } \Gamma}$  ve gösterelim.

Şartlaşalım ki, gelecekte  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) bölgesinin noktalarını  $z^{(i)}$  ve  $\zeta^{(i)}$  harflerle veya yanlış anlamaya sebep oluyorsa, sadece  $z$  ve  $\zeta$  ile göstereceğiz.

Keyfi doğal  $n$  sayısı için

$$\Gamma_{1+\frac{(-1)^i}{n}} = \left\{ \zeta : \zeta \in \Omega_i; \left| \Phi_i(\zeta) \right| = 1 + \frac{(-1)^i}{n} \right\},$$

$$\rho_{1+\frac{(-1)^i}{n}}(z) = \inf_{\zeta \in \Gamma_{1+\frac{(-1)^i}{n}}} |\zeta - z|, \quad \rho_{1/n}^*(z) = \max_{i=1,2} \left\{ \rho_{1+\frac{(-1)^i}{n}}(z) \right\},$$

burada  $i = 1, 2$  'dir.

$$\delta_n^* \stackrel{df}{=} \delta_n^*\left(\frac{1}{n}\right) = \sup_{\zeta \in \left\{ \text{int } \Gamma_{1+\frac{1}{n}} \cap \text{ext } \Gamma_{1-\frac{1}{n}} \right\}} d(\zeta, \Gamma)$$

olsun.

Her not edilen  $u_0 \in (0, 1)$  için

$$D_{u_0}^1 = \text{int } \Gamma_{1+u_0}, \quad D_{u_0}^2 = \text{ext } \Gamma_{1-u_0}$$

$$D_{u_0} = D_{u_0}^1 \cap D_{u_0}^2$$

gösterelim.

Gelecekte  $A \prec B$  ( $A \geq 0, B \geq 0$ ) simgelerini kullanacağız, bu ise  $A \leq CB$  demektir, burada  $C = const > 0$ ,  $A$  ve  $B$  'den bağımlı olmayan sabittir ve eğer aynı zamanda  $A \prec B$  ve  $B \prec A$  ise  $\underline{A \prec B}$  simgesini kullanacağız.

P. M. Tamrazovun bir sonucunu önemini değışmeyecek şekilde verelim (Lebedev ve Tamrazov, 1970; Tamrazov, 1973; Dzyadyk, 1977, 418-5-426).

**Lemma 3.2**  $\Gamma$ -keyfi Jordan eğrisi olsun ve derecesi  $\leq n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , olan

$R_n(z) = \sum_{k=-n}^n a_k^{(n)} z^k$  rasyonel fonksiyon için  $M_0 = const > 0$ ,  $z_0 \in \Gamma$  ve  $\delta > 0$  olmak üzere tüm  $z \in \Gamma$  noktalarında

$$|R_n(z)| \leq M_0 \left( 1 + \left| \frac{z - z_0}{\delta} \right|^{c_1} \right), c_1 = const > 0$$

eşitsizliğı sağlanır. Bu durumda tüm  $z \in U(z_0, \delta) \cap \text{int} \Gamma_{1+\frac{c_2}{n}} \cap \text{ext} \Gamma$ , (burada  $c_2 = const > 0$ ) için

$$|R_n(z)| \leq c_3 M_0, \quad c_3 = c_3(c_1, c_2, \Gamma) > 0$$

eşitsizliğı sağlanır.

$$\delta_n^* \stackrel{df}{=} \delta_n^* \left( \frac{1}{n} \right) = \sup_{\zeta \in \left\{ \text{int} \Gamma_{1+\frac{1}{n}} \cap \text{ext} \Gamma_{1-\frac{1}{n}} \right\}} d(\zeta, \Gamma)$$

olsun.

Her not edilen  $u_0 \in (0, 1)$  için

$$D_{u_0}^1 = \text{int} \Gamma_{1+u_0}, D_{u_0}^2 = \text{ext} \Gamma_{1-u_0}$$

$$D_{u_0} = D_{u_0}^1 \cap D_{u_0}^2$$

gösterelim.

Şimdi daha geniş eğriler sınıfında  $(\zeta - z)^{-1}$  Cauchy çekirdeğinin yaklaşım problemi ile ilgilenelim.

**Lemma 3.3** (Andrievskii, (1986)):  $E$  – bir bağıntılı tümleyene sahip keyfi kontinyum  $u_0 > 0$ - not edilen keyfi sayı ,  $c = 2(1+u_0)e^{2\pi}$  ,  $\Gamma = \partial E$  olsun. Bu durumda tüm  $n = 1, 2, \dots$  doğal sayıları ve  $\zeta \in \text{int} \Gamma_{1+u_0} \setminus E_{\delta(c/n)}$  için  $\zeta$  ' ya göre sürekli  $a_j(\zeta)$  ,  $j = \overline{0, n}$  katsayılarıyla

$$\pi_n(\zeta, z) = \sum_{j=0}^n a_j(\zeta) z^j , \quad n = 1, 2, \dots$$

biçiminde öyle  $\pi_n(\zeta, z)$  polinomsal çekirdeği var ki ,  $z \in E$  ve  $p = 0, 1$  iken aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial z^p} \left[ \frac{1}{\zeta - z} - \pi_n(\zeta, z) \right] \right| \leq \delta^2 \left( \frac{1}{n} \right) |\zeta - z|^{-p-3} ,$$

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial z^p} \pi_n(\zeta, z) \right| \leq |\zeta - z|^{-p-1} ,$$

burada  $\delta(u) = \sup_{\zeta \in \Gamma_{1+u}} d(\zeta, E)$  ve  $E_\delta = \bigcup_{z \in E} U(z, \delta) = (\zeta : d(\zeta, E) < \delta)$  dir.

**Lemma 3.4**  $\Gamma$  – keyfi kapalı Jordan eğrisi,  $0 < u_0 < 1$  keyfi not edilen sayı,  $c = 2(1+u_0)e^{2\pi}$  olsun. Bu durumda tüm doğal  $n = 1, 2, \dots$  sayıları ve  $\zeta \in D_{u_0} \setminus \Gamma_{\delta^*(c/n)}$

için  $\zeta$  'ya göre sürekli  $a_j(\zeta)$  ,  $j = \overline{-n, n}$  katsayıları öyle  $\pi_n(\zeta, z) = \sum_{j=-n}^n a_j(\zeta) z^j$

fonksiyonu vardır ki ,  $z \in \Gamma$  ve  $p = 0, 1$  iken aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial z^p} \left[ \frac{1}{\zeta - z} - \pi_n(\zeta, z) \right] \right| \leq \delta^{*2} \left( \frac{1}{n} \right) |\zeta - z|^{-p-3}$$

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial z^p} \pi_n(\zeta, z) \right| \leq |\zeta - z|^{-p-1} ,$$

Şu lemma, Lemma 3.2' ye benzer şekilde ispat edilir.

Fakat not etmek gerekiyor ki ,  $\zeta \in \left\{ D_{u_0}^1 \setminus \Gamma_{\delta^* \left( \frac{c}{n} \right)} \right\} \cap \Omega_2$  ,iken  $\pi_n(\zeta, z)$  bir polinomsal çekirdek olur,  $\zeta \in \left\{ D_{u_0}^2 \setminus \Gamma_{\delta^* \left( \frac{c}{n} \right)} \right\} \cap \Omega_1$  iken  $\pi_n(\zeta, z)$  bize rasyonel fonksiyonu vermektedir.

**Lemma 3.5**  $\Gamma \in S_\theta, 0 < u_0 < 1$ – keyfi sayı olsun. Bu durumda keyfi  $n = 1, 2, \dots$  ve  $\zeta \in D_{u_0}$  için  $z$  değişkenine ,  $\zeta$  'ya göre toplanabilen katsayılarla, öyle  $K_n(\zeta, z)$  rasyonel fonksiyonu vardır ki,  $z \in \Gamma$  ve  $p = 0, 1$  için

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial z^p} \left[ \frac{1}{\zeta - z} - K_n(\zeta, z) \right] \right| \leq \frac{1}{|\zeta - z|^{p+1}} \left[ \frac{\delta_n^*}{|\zeta - z| + \delta_n^*} \right]^2, \quad (3.17)$$

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial z^p} K_n(\zeta, z) \right| \leq [|\zeta - z| + \delta_n^*]^{-p-1}, \quad (3.18)$$

eşitsizlikleri sağlar.

**İspat:**  $n$  – yeteri kadar büyük doğal sayı olsun.  $c = 2(1 + u_0)e^{2\pi}$  gösterelim.  $\overline{\Gamma_{\delta^* \left( \frac{c}{n} \right)}}$

kompakt olduğuna göre

$$\Gamma_{\delta^* \left( \frac{c}{n} \right)} \subset \bigcup_{k=1}^m U(\zeta_k, \delta_n^*)$$

olmak üzere sonlu sayıda  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n \in \overline{\Gamma_{\delta^* \left( \frac{c}{n} \right)}}$  noktalarını seçmek mümkündür.

$\Gamma \in S$  olduğuna göre, bu durumda her  $\zeta_k, k = \overline{1, m}$  noktası için

$$|\zeta_k - \zeta'_k| \leq \delta_n^* \quad (3.19)$$

özellği ile  $\zeta'_k \in D_{u_0} \setminus \Gamma_{\delta^* \left( \frac{c}{n} \right)}$  noktasını kurmak olur.

$z \in \Gamma, \zeta \in U(\zeta_k, \delta_n^*)$  için

$$|\zeta'_k - z| |\zeta - z| + \delta_n^* \quad (3.20)$$

olduğu kolayca görünür.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta' - z} + \frac{\zeta' - \zeta}{(\zeta' - z)^2} + \left( \frac{\zeta' - \zeta}{\zeta' - z} \right) \frac{1}{\zeta - z}$$

özdeşliği gereğince,

$$\zeta \in U(\zeta_k, \delta_n^*), k = 1, \dots, m \quad \text{iken}$$

$$\lambda_n^{(k)}(\zeta, z) = \pi_n(\zeta'_k, z) + (\zeta'_k - \zeta) \left( \pi_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\zeta'_k, z) \right)^2$$

fonksiyonuna bakalım, burada  $\pi_n(\zeta'_k, z)$ , Lemma 3.3'den alınan fonksiyondur. Aranan

$K_n(\zeta, z)$  fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yapalım:

1) Eğer  $\zeta \in U(\zeta_1, \delta_n^*)$  ise, bu durumda

$$K_n(\zeta, z) = \lambda_n^{(1)}(\zeta, z)$$

alalım.

2) Eğer  $\zeta \in U(\zeta_k, \delta_n^*) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} U(\zeta_j, \delta_n^*)$ ,  $k = \overline{2, m}$

ise bu durumda

$$K_n(\zeta, z) = \lambda_n^{(k)}(\zeta, z)$$

alalım.

3) Eğer  $\zeta \in D_{u_0} \setminus \left\{ \bigcup_{j=1}^m U(\zeta_j, \delta_n^*) \right\}$  ise, bu durumda lemma 3.3 deki uygun

fonksiyonu alalım. Bu durumda (3.17) ve (3.18) eşitsizliklerinin doğruluğu yukarıda verilen yapılardan, lemma 3.3 den, (3.19) ve (3.20) bağıntılarından ve kolaylıkla elde edilen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} - \lambda_n^{(k)}(\zeta, z) &= \left( \frac{\zeta'_k - \zeta}{\zeta' - z} \right)^2 \frac{1}{\zeta - z} + \left( \frac{1}{\zeta' - z} - \pi_n(\zeta', z) \right) + \\ &\quad + (\zeta'_k - \zeta) \left[ \frac{1}{(\zeta' - z)^2} - \left( \frac{\pi_n(\zeta', z)^2}{2} \right) \right], \\ \left| \frac{\partial^p}{\partial z^p} \left[ \frac{1}{\zeta - z} - \lambda_n^{(k)}(\zeta, z) \right] \right| &\leq \frac{1}{|\zeta - z|^{p+1}} \left( \frac{\delta_n^*}{|\zeta - z| + \delta_n^*} \right)^2 \\ \left| \frac{\partial^p}{\partial z^p} \lambda_n^{(k)}(\zeta, z) \right| &\leq (|\zeta - z| + \delta_n^*)^{-p-1} \end{aligned}$$

bağıntılarından kolayca elde edilir, burada  $\zeta \in U(\zeta_k, \delta_n^*)$ ,  $z \in \Gamma$ ,  $p = 0, 1$  dir.

$G$  kompleks düzlemde bir  $\Gamma$  kapalı Jordan eğrisi verilmiş olsun. Kabul edelim ki,  $w = \varphi(z)$  fonksiyonu  $\Gamma$  eğrisinin dışını  $U$  birim çemberinin dışına dönüştürür.  $\varphi(w)$  fonksiyonu ise  $\varphi(z)$  fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun. Ayrıca, kabul edelim ki,  $w = \varphi(z)$  fonksiyonu  $\Gamma$  eğrisinin iç kısmını  $U$  birim çemberinin iç kısmına dönüştürür, ve  $\varphi(w)$  ise  $\varphi(z)$  fonksiyonunun tersi olsun. Yukarıdaki gösterimleri kullanarak aşağıdaki şekilde genelleştirilmiş düzgünlük modüllerini tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \omega_p^{(2)}(f, \delta) &= \delta^2 \sup_{t \geq \delta} t^{-2} u_p^{(2)}(f, t)_\Gamma, \\ \omega_p^{(2)}(f, \delta) &= \delta^2 \sup_{t \geq \delta} t^{-2} u_p^{(2)}(f, t)_\Gamma, \end{aligned}$$

burada,

$$\begin{aligned} u_p^{(2)}(f, t) &= \sup_{|h| \leq t} \|f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z)\|_{L_p(\Gamma)}, z_h = \varphi(\varphi(z) e^{ih}), \\ u_p(f, t) &= \sup_{|h| \leq t} \|f(\tilde{z}_h) + f(\tilde{z}_{-h}) - 2f(z)\|_{L_p(\Gamma)}, \\ \tilde{z}_h &= \varphi(\varphi(z) e^{ih}). \end{aligned}$$

Kabul edelim ki  $w = \varphi(z)$  fonksiyonu  $\Gamma$  kapalı eğrisinin dışını  $U = \{w: |w|=1\}$  birim dairesinin dışına dönüştürür ve  $\varphi(\infty) = \infty$ ,  $\varphi'(\infty) > 0$  şartı sağlanıyor,  $z = \varphi(w)$  fonksiyonu ise  $w = \varphi(z)$  fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun. Ayrıca,

$$z_{\pm h} = \psi\left(\varphi(z)e^{\pm ih}\right)$$

olmak üzere

$$J_1(h) = \left\| f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z) \right\|_{L_p(\Gamma)}$$

gösterelim.

$$\text{Şimdi } z = \frac{a}{z_1} + b \left( z_1 = \frac{a}{z-a} \right), a \neq 0, b \notin \mathbb{R} \quad \text{dönüşümü} \quad \text{yerine} \quad z = \frac{1}{z}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda  $\Gamma$  eğrisi  $\Gamma_1$  eğrisinin dönüşümü olur ve  $z=0$  noktası  $\Gamma$  eğrisinin içindedir. Ayrıca, kabul edelim ki,  $u = \varphi_1(z_1)$  fonksiyonu  $\Gamma_1$  eğrisinin iç kısmını,  $U_1 = \{u : |u|=1\}$  birim dairesinin iç kısmına dönüştürür ve  $\varphi_1(\infty) = \infty$  ve  $\varphi_1'(\infty) > 0$  şartı sağlanıyor.  $\varphi_1(z_1)$  fonksiyonunun tersini  $\varphi_1(u)$  ile gösterelim. Ayrıca,

$$(z_1)_{\pm h} = \varphi_1\left(\varphi_1(z_1)e^{\pm ih}\right); \quad \forall h \in [-\pi, \pi]$$

olmak üzere

$$J_3(h) = \left\| f_1((z_1)_h) + f_1((z_1)_{-h}) - 2f_1(z_1) \right\|_{L_p(\Gamma_1)}$$

gösterelim.

**Lemma 3.6** Aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$J_1(h) \asymp J_3(h) \tag{3.21}$$

**İspat:** Not edelim ki,  $\Gamma$  eğrisini  $U_0 = \{w : |w|=1\}$  eğrisine iki yöntem ile dönüştürmek mümkündür.

1.  $w = \varphi(z)$  fonksiyonu yardımıyla;

2. Aşağıdaki üç ardışık dönüşüm yardımıyla: ilk önce  $z_1 = \frac{1}{z}$  ( $z \in \Gamma$ )

dönüşümü yardımıyla  $\Gamma$  eğrisi  $\Gamma_1$  eğrisine dönüştürülür, sonra  $u = \varphi_1(z_1)$  fonksiyonu

yardımıyla  $U_1 = \{u : |u| = 1\}$  birim çemberine dönüştürülür, son olarak  $w = \frac{1}{u}$  fonksiyonu yardımıyla  $U_0 = \{w : |w| = 1\}$  çemberine dönüştürülür. Yukarıdaki işlemlere göre

$$w = \frac{1}{u} = \frac{1}{\varphi_1(z_1)} = \frac{1}{\varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)}$$

yazılabilir.  $\Gamma$  eğrisi  $U_0$  birim çemberine dönüşülmesini gerçekleştiren yukarıdaki iki yöntem gereğince

$$\varphi(z) = \varphi_1^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) \quad (3.22)$$

olur.

Ayrıca, yukarıdaki işleme benzer şekilde işlem yapılırsa, her bir  $w \in U_0$  için

$$\psi(w) = \psi^{-1}(w^{-1}) \quad (3.23)$$

elde edilir.

(3.22) ve (3.23) den eğer  $z = z_1^{-1}$  ise  $z_{\pm} = (z_1)_{\pm}^{-1}$  elde edilir. Gerçekten, (3.22) ve (3.23) eşitlikleri gereğince aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned} z_{\pm h} &= \psi(\varphi(z)e^{\pm ih}) = \psi^{-1}(\varphi^{-1}(z)e^{\pm ih}) = \\ &= \psi^{-1}(\varphi_1(z^{-1})e^{\pm ih}) = \psi^{-1}(\varphi_1(z_1)e^{\pm ih}) = (z_1)_{\pm h}^{-1}. \end{aligned}$$

Buradan aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned} J_3(h) &= \left\| f_1(z_1)_{-h} + f_1((z_1)_h) - 2f_1(z_1) \right\| \\ &= \left( \int_{\Gamma} \left| f_1((z_1)_{-h}) + f_1((z_1)_h) - 2f_1(z_1) \right|^p |dz_1| \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_{\Gamma} \left| f((z_1)_{-h}^{-1}) + f((z_1)_h^{-1}) - 2f(z_1^{-1}) \right|^p |dz_1| \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_{\Gamma_1} \left| f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z) \right|^p \frac{|dz|}{|z|^2} \right)^{1/p} \asymp \left\| f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z) \right\|_{L_p(\Gamma_1)} \\ &= J_1(h) \end{aligned}$$

istenen bağıntı ispat edildi.

Şimdi kabul edelim ki,  $\varphi^*$  fonksiyonu  $\Gamma$  eğrisinin iç kısmını  $U_0$  birim çemberinin iç kısmına dönüştürür, ( burada  $\varphi^*(0)=0$  'dır),  $\psi^*$  ise  $\varphi^*$ 'ın ters dönüşümü olsun.

$$J_1^* = \left\| f(z_h^*) + f(z_{-h}^*) - 2f(z) \right\|_{L_p(\Gamma)}, \quad h \in [-\pi, \pi]$$

olsun, burada  $z_{\pm}^* = \psi^*(\varphi^*(z)e^{\pm ih})$  dır.

Kabul edelim ki,  $\varphi_1^*$  fonksiyonu  $\Gamma_1(\varphi_1^*(\infty)=\infty)$  eğrisinin dışını  $U'_0$  birim çemberinin dışına dönüştürür,  $\psi_1^*$  ise  $\varphi_1^*$  dönüşümünün ters dönüşümü olsun. Yukarıda yazdığımız dönüşümleri kullanarak,

$$J_3^*(h) = \left\| f_1(z_1^*)_h + f_1(z_1^*)_{-h} - 2f_1(z_1) \right\|_{L_p(\Gamma)}, \quad h \in [-\pi, \pi]$$

gösterelim, burada  $(z_1^*)_{\pm} = \psi_1^*(\varphi_1^*(z_1)e^{\pm ih})$  dır.

(3.21) bağıntısının ispat edilmesinde kullanılan işlemleri aynı şekilde tekrarlırsak, aşağıdaki lemma'nın ispatı kolayca yapılabilir:

**Lemma 3.7**  $J_1^*(h) \asymp J_3^*$  bağıntısı geçerlidir.

Böttcher ve Karlovich, (1997) kitabındaki, Teorem 4.15'i kullanarak Paataşvili, (1973) makalesindeki, Lemmayı değişik bir biçimde aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

**Lemma 3.8**  $\Gamma \in S_0$  ve  $u(t) \in A_p(\Gamma)$  olsun bu durumda  $u(t) \in L_p(\Gamma)$  ve  $(u(t))^{-1} \in L_{p'}(\Gamma)$ ,  $\left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \right) = 1$  olur (Paataşvili, 1973).

**Lemma 3.9** Kabul edelim ki,  $w = \varphi(z)$  fonksiyonu  $z$  düzlemindeki  $\Gamma$  eğrisini  $w$  düzlemindeki  $\Gamma^*$  eğrisine dönüştürür.  $\psi(w)$  fonksiyonu  $w = \varphi(z)$  fonksiyonunun tersi olsun. Eğer  $\psi'(w)$  ise bu durumda

$$f(z) \in L^p(\Gamma) \Leftrightarrow f^*(w) \in L^p(\Gamma^*)$$

olur.

Şu lemma'nın doğruluğu aşağıdaki bağıntıdan direkt olarak elde edilir:

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)} = \left( \int_{\Gamma} |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{\Gamma} |f(\psi(w))|^p |\psi'(w)| |dw| \right)^{\frac{1}{p}} z \|f^*\|_{L^p(\Gamma^*)}$$

Bölüm 4.3 için

Kabul edelim ki  $\Gamma$  kapalı Jordan eğrisidir.  $G = C\Gamma = G_1 \cup G_2$  ( $0 \in G_1$ ,  $\infty \in G_2$ ) bölgesi  $\Gamma$  kapalı eğrisinin iki bileşenli tümleyeni olsun. Ayrıca kabul edelim ki  $w = \Phi_i(z)$  ( $i=1,2$ ) fonksiyonları konform ve yalınkat olarak  $\Phi_1(0) = \infty$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} z\Phi_1(z) > 0$ ,  $\Phi_2(\infty) = \infty$  ve  $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2(z)/z > 0$  normları ile  $G_1$  ve  $G_2$  bölgelerini birim çemberinin dışına dönüştürür.

Birim çemberin içini  $U_1$ , birim çemberin dış kısmını ise  $U_2$  ile gösterelim. Birim çemberin sınırı  $T$  olsun.

$\Phi_i(z)$  ( $i=1,2$ ) fonksiyonlarının tersi  $z = \Psi_i(w)$  ( $i=1,2$ ) olsun. Caratheodory teoremi gereğince  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  ( $\Psi_1$  ve  $\Psi_2$ ) fonksiyonları sürekli olarak  $\Gamma(T)$ 'ye genişletilebilir (örneğin bkz. Markushevich 1977).

Andrievskii'nin bir sonucunu anlamını değiştirmeyecek şekilde formülize edelim (bkz. Andrievskii, 1980, Lemma 1).

**Lemma 3.10:**  $\Gamma$ , kapalı bir kuasikonform eğri,  $0 < a \leq 1$  ve  $z \in \Gamma$  olsun. Öyleyse

$$\int_{\Gamma_{1+\frac{1}{n}}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leq (n+1)^{1-a} + \ln(n+2),$$

ve

$$\int_{\Gamma_{1+\frac{1}{n}}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leq (n+1)^{1-a} + \ln(n+2),$$

eşitsizlikleri geçerlidir, burada

$$\Gamma_{1+\frac{1}{n}} = \left\{ \zeta : \left| \Phi_1(\zeta) \right| = 1 + \frac{1}{n} \right\},$$

$$\Gamma_{1+\frac{1}{n}} = \left\{ \zeta : \left| \Phi_2(\zeta) \right| = 1 + \frac{1}{n} \right\},$$

Bölüm 4.4. için yardımcı sonuçlar

$\Gamma$  - iki  $\Omega = C\Gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$  ( $0 \in \Omega_1, \infty \in \Omega_2$ ) tamamlayıcıya sahip, keyfi sınırlı Jordan eğrisi olsun.  $\Omega_i$  ( $i=1,2$ ) bölgesini  $\Omega_i$  ( $\Omega_1 = \{w : |w| < 1\}, \Omega_2 = \{w : |w| > 1\}$ ) bölgesine konform ve yalınkat olarak dönüştüren  $w = \varphi_i(z)$ ,  $i=1,2$  fonksiyonlarını göz önüne alalım ve ayrıca  $\varphi_1(0)=0$ ,  $\varphi_1'(0) > 0$ ,  $\varphi_2(\infty)=\infty$  ve  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \varphi_2(z) > 0$  şartları sağlanmaktadır.  $w = \varphi_i(z)$ ,  $i=1,2$  fonksiyonlarının tersini ise  $z = \Psi_i(w)$ , ( $i=1,2$ ) ile gösterelim.

Keyfi doğal  $n$  sayısı için

$$\Gamma_{1+\frac{1}{n}} = \left\{ \xi : \xi \in \Omega_2 : \left| \varphi_2(\xi) \right| = 1 + \frac{1}{n} \right\},$$

$$\Gamma_{1-\frac{1}{n}} = \left\{ \xi : \xi \in \Omega_1 : \left| \varphi_1(\xi) \right| = 1 - \frac{1}{n} \right\},$$

$$\rho_{1+\frac{1}{n}}(z) = \inf_{\xi \in \Gamma_{1+\frac{1}{n}}} |\xi - z|, \quad \rho_{1-\frac{1}{n}}(z) = \inf_{\xi \in \Gamma_{1-\frac{1}{n}}} |\xi - z|,$$

$$\rho_{1/n}^*(z) = \max \left\{ \rho_{1+\frac{1}{n}}|z|, \rho_{1-\frac{1}{n}}|z| \right\}$$

gösterelim.

$$G_1 = \left\{ \xi : \xi \in \Omega_1 : \left| \varphi_1(\xi) \right| \in \left( \frac{1}{3}, 1 \right) \right\};$$

$$G_2 = \left\{ \xi : \xi \in \Omega_2 : \left| \varphi_2(\xi) \right| \in (1, 3) \right\};$$

$G = G_1 \cup G_2$  gösterelim.

Andrievskii, Israfilov (1979) çalışmasında

$$w(f, z, \delta) = \sup_{\substack{\xi \in \Gamma \\ |\xi - z| < \delta}} |f(\xi) - f(z)|, \quad z \in \Gamma \quad (3.24)$$

karakterizasyonu kullanılmaktadır.

Bölüm 4.4' ün esas sonucun ispatında aşağıdaki yardımcı sonuçlardan yararlanacağız:

**Teorem 3.16** (Andrievskii, Israfilov, (1979))  $\Gamma$  - kuasikonform eğri ve  $f(z) \in Lip1(\Gamma)$  olsun. Bu durumda her bir doğal  $n$  sayısı için derecesi  $n$ 'yi aşmayan öyle  $R_n(z) = R_n(f; z)$  rasyonel fonksiyonu var ki,

$$\begin{aligned} |f(z) - R_n(z)| &\leq \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^2 \iint_{G_i} \frac{w(f, \xi_\Gamma, c |\xi - \xi_\Gamma|)}{|\xi - \xi_\Gamma|} \times \left[ \frac{\rho_{1+\frac{(-1)^i}{n}}(z)}{|\xi - z| + \rho_{1+\frac{(-1)^i}{n}}(z)} \right]^m \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z|} \\ &= \frac{1}{2^n} + J(G_1) + J(G_2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

şartı sağlanıyor, burada  $\xi_\Gamma = \Psi_i \left[ \varphi_i(\xi) |\varphi_i(\xi)|^{-1} \right]$ ,  $m \geq 0$  keyfi sabit sayı,  $c > 0$  ise yalnız  $\Gamma$ 'den bağımlı sabittir.

**Lemma 3.11.** (Andrievskii, Israfilov (1979)):  $\Gamma$  -kuasikonform eğri ve  $f(z) \in C(\Gamma)$  olsun. Bu durumda her bir doğal  $n$  sayısı için öyle  $f_n(z)$  fonksiyon dizisi var ki,

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \omega \left[ f, z, c \rho_{\frac{1}{n}}^*(z) \right], \quad (3.26)$$

$$|f_n(z) - f_n(\xi)| \leq \begin{cases} \omega(f, z, c |z - \xi|), & |\xi - z| \geq \rho_{\frac{1}{n}}^*(z) \\ \omega \left[ f, z, c \rho_{\frac{1}{n}}^*(z) \right] \frac{|\xi - z|}{\rho_{\frac{1}{n}}^*(z)}, & |\xi - z| \leq \rho_{\frac{1}{n}}^*(z) \end{cases} \quad (3.27)$$

burada  $z, \xi \in \Gamma$  ve  $c > 0$  sabiti yalnız  $\Gamma$ 'ya bağlıdır.

$\gamma$  - sonlu kuasikonform yay olsun. Yani;  $\gamma$ -yayı düzlemin kendi kendine kuasi-konform dönüşümünde parçanın dönüşümüdür Ahlfors (1987).  $\varphi$  ise  $\gamma$  yayının  $\Omega$  tamamlayıcısını birim dairesinin dışına konform ve yalınkat olarak dönüştüren

fonksiyon olsun, ve ayrıca,  $\varphi(\infty) = \infty$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$  şartı sağlansın.

Ayrıca,  $\Omega_1 = \Psi(\Omega_1')$ ,  $\Omega_2 = \Psi(\Omega_2')$  gösterelim, burada  $\Omega_1' = \{w : |w| > 1$ ,  $\arg b_1 < \arg w < \arg b_2$ ,  $b_1 = \varphi(a_1)$ ,  $b_2 = \varphi(a_2)$ ,  $a_1$  ve  $a_2$  -  $\gamma$  yayının uç noktalarıdır  $\}$ ,

$\Omega_2' = \{w: |w| > 1\} \setminus \Omega_1$  dır. Daha sonra  $\gamma_{j,n} = \left\{ z \in \Omega_j : |\varphi(z)| = 1 + \frac{1}{n} \right\}$ ,

$$\rho_{1+\frac{1}{n}}^{(j)}(z) = \inf \{ |z - \xi| : \xi \in \gamma_{j,n}; j = 1, 2 \}, \quad \rho_{1+\frac{1}{n}}^*(z) = \max \left\{ \rho_{1+\frac{1}{n}}^{(1)}(z), \rho_{1+\frac{1}{n}}^{(2)}(z) \right\}$$

gösterelim.

$\Omega$  bölgesinin Caratheodory'ye göre basit uçlarla kompaktifikasyonunu (sıkıştırılmış)

$\tilde{\Omega}$  ile gösterelim. Her bir  $z \in \gamma$  noktası  $z^{(1)}$  ve  $z^{(2)} \in \Omega$  basit uçlarının cismidir.  $z \in \Omega$

iç noktasına aynı zamanda  $z = Z \in \Omega$  basit uçların cismi gibi bakılabilir.  $\gamma = \Omega \setminus \Omega$ ,

$\Omega_j = \psi(\bar{\Omega}_j)$ ,  $\gamma^{(j)} = \Omega_j \cap \gamma$  gösterelim.

**Lemma 3.12** (Andrievskii, 1980):  $\gamma$  - kuasikonform yay olsun. Ayrıca  $z$ ,  $\xi$  ve  $\xi_\gamma$  ise

$z^{(j)} \in \gamma^{(j)}$ ,  $\mathfrak{Z}^{(j)} \in \Omega^{(j)}$  ( $|\varphi(\mathfrak{Z}^{(j)})| \leq 3, j = 1, 2$ ),  $\mathfrak{Z}_\gamma = \psi \left[ \varphi(\mathfrak{Z}^{(j)}) \left| \varphi(\mathfrak{Z}^{(j)}) \right|^{-1} \right]$ , basit

uçların cismi olsun.

$n$  keyfi doğal sayı olmak üzere,

$$\tilde{z}^{(j)} = \psi \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \varphi(Z^{(j)}) \right],$$

$$\xi^{(j)} = \psi \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \varphi(\mathfrak{Z}^{(j)}) \right],$$

$$d(\xi, \Gamma) = \inf_{z \in \Gamma} |\xi - z|,$$

$$\varphi(\mathfrak{Z}^{(j)}) = w^{(j)}, \quad \varphi(\xi^{(j)}) = w^{(j)}, \quad \varphi(Z^{(j)}) = \tau^{(j)}, \quad \varphi(\mathfrak{Z}_\gamma) = w_\Gamma$$

gösterelim.

Aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

$$1) \quad d(\xi, \gamma) \asymp |\xi - \xi_\gamma|, \quad \rho_{1+\frac{1}{n}}^{(j)}(z) \asymp \left| z - \tilde{z}^{(j)} \right|; \quad (3.28)$$

2) eğer  $|z - \xi| \leq \rho_{1+\frac{1}{n}}^{(j)}(z)$  ise

$$\left| \xi - \xi^{(j)} \right| \asymp \rho_{1+\frac{1}{n}}^{(j)}(z)$$

ve sonuç olarak

$$\rho_{1+\frac{1}{n}}^*(z) \asymp \rho_{1+\frac{1}{n}}^*(\xi), \quad |z - \xi| \leq \rho_{1+\frac{1}{n}}^*(z), \quad \xi \in \gamma$$

$$3) \left| \frac{\xi - \xi_{\Gamma}}{\xi - z} \right| \leq \left[ \frac{|w^{(j)}| - 1}{|w^{(j)} - \tau^{(j)}|} \right]^{\alpha}$$

$$4) \left| \frac{w^{(j)} - w^{(j)}}{w^{(j)} - \tau^{(j)}} \right|^{\beta} \preceq \left| \frac{\xi^{(j)} - \xi}{\xi^{(j)} - z} \right| \preceq \left| \frac{w^{(j)} - w^{(j)}}{w^{(j)} - \tau^{(j)}} \right|^{\alpha}$$

$$5) \left| \xi - z \right| \succeq \rho_{1+\frac{1}{n}}^{(j)}(z) \quad \text{ise}$$

$$\frac{1}{n^{\beta} |w^{(j)} - \tau^{(j)}|^{\beta}} \preceq \frac{\rho_{1+\frac{1}{n}}^{(j)}(z)}{|\xi - z|} \preceq \frac{1}{n^{\alpha} |w^{(j)} - \tau^{(j)}|^{\alpha}} \quad (3.29)$$

ve sonuç olarak

$$\left[ \frac{\rho_{1+\frac{1}{n}}^{(j)}(z)}{|\xi - z|} \right]^A \preceq \left| \frac{\xi - \xi^{(j)}}{\xi - z} \right| \preceq \left[ \frac{\rho_{1+\frac{1}{n}}^{(j)}(z)}{|\xi - z|} \right]^{\delta} \quad (3.30)$$

burada  $j=1,2$  ve  $A, \alpha, \beta$  ve  $\delta$  pozitif sabitleri  $\gamma$  yayının kuasikonform katsayısına bağlıdır.

#### 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

##### 4.1 Sürekli Fonksiyonlar Sınıfının Rasyonel Fonksiyonlarla Yaklaşımı

Kapalı Jordan eğrilerinde düz ve ters teoremleri inceleyelim.

**Teorem 4.1**  $\Gamma$  eğrisi  $S_\theta$  sınıfına ait keyfi sonlu kapalı Jordan eğrisi,  $\omega(\delta)$ –süreklilik modülü tipinde fonksiyon ve  $f(z) \in H^\omega(\Gamma)$  olsun. Bu durumda derecesi  $\leq n$  olan öyle  $R_n(z)$  rasyonel fonksiyonlar dizisi vardır ki,  $z \in \Gamma$  ve  $n = 1, 2, \dots$  iken

$$|f(z) - R_n(z)| \leq c_1 \omega(\delta^*) , \quad (4.1)$$

$$|R_n'(z)| \leq c_2 \frac{\omega(\delta_n^*)}{\delta_n} , \quad (4.2)$$

eşitsizlikleri sağlanır, burada  $c_i > 0, i = 1, 2$  sabitleri  $n$  ve  $z$ 'den bağımlı değildir.

**İspat:**  $f(z) \in H^\omega(\Gamma)$  olsun.  $f(z)$  fonksiyonunu sürekli olarak tüm  $\mathbb{C}$  kompleks düzleme öyle devam ettirelim ki, devam ettirilen fonksiyonun süreklilik modülü ( $f(z)$  gösterimini koruyarak) ilk önce olduğu gibi  $c\omega(\delta)$   $c = \text{const} > 0$  (bk. Stein, 1970) büyüklüğü ile sınırlansın. Her not edilen  $n = 1, 2, \dots$  ve  $\delta_n^* = \delta_n^{*df} \left( \frac{1}{n} \right)$  için aşağıdaki şekilde  $f(z)$  fonksiyonunun  $\delta_n^*$  – ortalamasını yapalım:

$$f_n(z) = \frac{1}{\pi \delta_n^{*2}} \iint_{U(z, \delta_n^*)} f(\zeta) d\sigma_\zeta , \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.3)$$

Elde edilen  $f_n(z)$  fonksiyonu aşağıdaki eşitsizliği sağlıyor (bk. Dzydik, 1977, Lemma 2).

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \omega(\delta_n^*) , \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.4)$$

Öte yandan  $f_n(z)$  fonksiyonu  $\mathbb{C}$ 'de sürekli kısmi türevlenebilirdir, onun biçimsel türevi

$$\left| \frac{\partial f_n(z)}{\partial \bar{z}} \right| \leq \frac{\omega(\delta_n^*)}{\delta_n^*} , \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.5)$$

şartını sağlıyor.

$f_n(z)$  fonksiyonuna Cauchy-Green formülünü uygulayalım:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1+u_0}} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1-u_0}} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{D_{u_0}} \frac{\partial f_n(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D_{u_0} \quad (4.6)$$

istenen rasyonel fonksiyon (4.4) ve (4.6) bağıntılarına göre aşağıdaki şekilde yapılır:

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1+u_0}} f_n(\zeta) K_n(\zeta, z) d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1-u_0}} \int_{\Gamma_{1+u_0}} f_n(\zeta) K_n(\zeta, z) d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{D_{u_0}} \frac{\partial f_n(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot K_n(\zeta, z) d\sigma_\zeta, \quad z \in D_{u_0}, \quad (4.7)$$

burada  $K_n(\zeta, z)$ ,  $u_0 = \frac{1}{2}$  iken Lemma 3.5'ten alınan rasyonel fonksiyondur.

(4.1) bağıntısını ispat edelim.  $z \in \Gamma$  olsun ve  $U_n = U(z, \delta_n)$  diyelim.

(4.4),(4.5),(4.6),(4.7) bağıntılarını ve Lemma 3.5 gereğince aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned} |f(z) - R_n(z)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - R_n(z)| \leq \\ &\leq \omega(\delta_n^*) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{1+\frac{1}{2}}} |f_n(\zeta)| \left| \frac{1}{\zeta - z} - K_n(\zeta, z) \right| |d\zeta| + \frac{1}{\pi} \iint_{D_{\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial f_n(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right| \left| \frac{1}{\zeta - z} - K_n(\zeta, z) \right| d\sigma_\zeta \leq \\ &\leq \omega(\delta_n^*) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{1+\frac{1}{2}}} |f_n(\zeta)| \frac{1}{|\zeta - z|} \left[ \frac{\delta_n^*}{|\zeta - z| + \delta_n^*} \right]^2 |d\zeta| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{1+\frac{1}{2}}} |f_n(\zeta)| \frac{1}{|\zeta - z|} \left[ \frac{\delta_n^*}{|\zeta - z| + \delta_n^*} \right]^2 |d\zeta| + \frac{1}{\pi} \iint_{D_{\frac{1}{2}}} \left| \frac{\partial f_n(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right| \frac{1}{|\zeta - z|} \left[ \frac{\delta_n^*}{|\zeta - z| + \delta_n^*} \right]^2 d\sigma_\zeta \leq \\ &\leq \omega(\delta_n^*) + \delta_n^{*2} + \frac{\omega(\delta_n^*)}{\delta_n^*} \iint_{U_n} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|} + \\ &+ \omega(\delta_n) \delta_n^* \iint_{D_{\frac{1}{2}} \setminus U_n} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|} \leq \omega(\delta_n^*) \end{aligned}$$

$z \in \Gamma$  ve  $\zeta \in \partial U_n = \gamma_n$  iken aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$|f_n(\zeta) - f(z)| \leq \omega(\delta_n^*) \quad (4.8)$$

(4.5), (4.8) ve Lemma 3.5'i kullanarak

$$\begin{aligned}
|R'_n(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1+\frac{1}{2}}} |f_n(\zeta)| \frac{\partial K_n(\zeta, z)}{\partial z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1+\frac{1}{2}}} |f_n(\zeta)| \frac{\partial K_n(\zeta, z)}{\partial z} d\zeta - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\pi} \iint_{D_{1/2}} \frac{\partial f_n(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial K_n(\zeta, z)}{\partial z} d\sigma_\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{1+\frac{1}{2}}} |f_n(\zeta)| \left| \frac{1}{\partial z} \left[ \frac{1}{\zeta - z} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - K_n(\zeta, z) \right] \right| |d\zeta| + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{1+\frac{1}{2}}} |f_n(\zeta)| \left| \frac{1}{\partial z} \left[ \frac{1}{\zeta - z} - K_n(\zeta, z) \right] \right| |d\zeta| + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \iint_{U_n} \left| \frac{\partial f_n(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \right| \left| \frac{1}{\partial z} \left[ \frac{1}{\zeta - z} - K_n(\zeta, z) \right] \right| d\sigma_\zeta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n} \frac{|f_n(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \leq \omega(\delta_n^*) / \delta_n^*
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Teorem 4.1 ispat edildi.

$\Gamma$  – kapalı kuazikonform eğri olduğunda, Teorem 4.1.'in tersi geçerlidir. Şöyle ki, aşağıdaki teorem doğrudur.

**Teorem 4.2**  $\Gamma$  – kapalı kuazikonform eğri,  $\omega(\delta)$  – süreklilik modülü tipinde fonksiyon olsun. Eğer  $z \in \Gamma$  iken

$$\begin{aligned}
|f(z) - R_n(z)| &\leq \omega(\delta_n^*), \\
|R'_n(z)| &\leq \frac{\omega(\delta_n^*)}{\delta_n^*}
\end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlayan derecesi  $\leq n$  olan  $R_n(z)$  rasyonel fonksiyonlar dizisi varsa, bu durumda,  $f(z) \in H^\omega(\Gamma)$  olur.

**İspat:**  $z$  ve  $\zeta \in \Gamma$  ve  $|z - \zeta| < \delta$  ( $\delta$  – yeteri kadar küçük) olsun. Bu noktaları

$$mes\gamma(z, \zeta) \leq |z - \zeta|$$

özellliği ile  $\gamma(z, \zeta) \subset \bar{\Omega}_2$  yayı ile birleştirelim. (Lemma 3.1 gereğince  $z$  ve  $\zeta \in \Gamma$  noktalarını  $\gamma(z, \zeta) \subset \bar{\Omega}_2$  yayı ile birleştirmek mümkündür)

$\delta_{n+1}^* < |z - \zeta| \leq \delta_n^*$  şartından  $n$  doğal sayısını bulalım.

$$|R_n'(\xi)| \leq \frac{\omega(\delta_n^*)}{\delta_n^*} \left( 1 + \left| \frac{\xi - z}{\delta_n^*} \right|^{c_1} \right), \quad c_1 > 0, \quad \xi \in \Gamma$$

değerlendirmesi doğrudur. Lemma 3.2 gereğince

$$|R_n'(\xi)| \leq \frac{\omega(\delta_n^*)}{\delta_n^*}, \quad \xi \in \gamma(z, \zeta)$$

elde ederiz.

Böylece, aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(\zeta)| &\leq |f(z) - R_n(z)| + \int_{\gamma(z, \zeta)} |R_n(\xi)| |d\xi| + \\ &\quad + |f(\zeta) - R_n(\zeta)| \leq \omega(\delta_n^*) \leq \omega(|z - \zeta|) \end{aligned}$$

olur. Bu ise gösterir ki,  $f(z) \in H^\omega(\Gamma)$  dir.

## 4.2 Ağırlıklı Lebesgue Uzaylarında Fonksiyonların Rasyonel Fonksiyonlarla Yaklaşımı

Bu bölümde  $L_p(\Gamma, u)$  sınıfından olan fonksiyonların

$$R_n(z) = \sum_{k=-n}^{k=n} a_k (z-b)^k \quad (4.9)$$

biçiminde rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı incelenmektedir, burada  $b$  - noktası kapalı  $\Gamma$  eğrisinin içinde bulunmaktadır. Genelliği bozmadan,  $b=0$  olduğunu kabul edelim.

**Teorem 4.3**  $\Gamma \in S_\theta$ ,  $u(t) \in A_p(\Gamma)$ , ( $p > 1$ ) ve  $f \in L_p(\Gamma, u)$ ,  $p > 1$  olsun. Bu durumda her bir  $n \in \mathbb{N}$  için (3.16) biçiminde öyle bir  $R_n(z)$  rasyonel fonksiyonu var ki,

$$\|f - R_n\|_{L_p(\Gamma, u)} \leq \omega_{p,u}^2 \left( f, \frac{1}{n} \right) + \omega_{p,u}^2 \left( f, \frac{1}{n} \right) \quad (4.10)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:**  $f \in L_p(\Gamma, u)$  ve  $u \in A_p(\Gamma)$  olsun. Bu durumda  $f \in L_1(\Gamma)$  olur. Gerçekten lemma 3.7 gereğince

$$\int_{\Gamma} |f(z)| |dz| = \int_{\Gamma} \frac{|f(z)| |u(z)|}{|u(z)|} |dz| \leq \|f\|_{L_p(\Gamma, u)} \cdot \left\| \frac{1}{u} \right\|_{L_p(\Gamma, u)}$$

olur. Bu ise gösterir ki,  $f \in L_1(\Gamma)$ 'dir.

Şimdi  $u \in A_p(\Gamma)$  olduğuna göre

$$S_f = (S_{\Gamma} f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-t} dz$$

singüler integrali  $\Gamma$  üzerinde hemen her yerde var. Bu durumda Cauchy tipli integral  $\Gamma$  üzerinde hemen her yerde

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-t} dz$$

biçiminde açışal limit değerlerine sahiptir (Privalov, 1950).

Buradan

$$f(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) \quad (4.11)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlik gösterir ki,  $\Gamma$  eğrisi üzerinde tanımlanmış fonksiyonu  $L_p(\Gamma, u)$  uzayında yaklaştırmak için  $\Phi^+$  ve  $\Phi^-$  fonksiyonlarını eğrinin içinde ve dışında yaklaştırmak yeterlidir.

Teoremi ispat etmek için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

**Lemma 4.1**  $u(t) \in A_p(\Gamma)$  ve  $f \in L_p(\Gamma, u)$ ,  $p > 1$  olsun. Bu durumda  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

derecesi  $n$  olan öyle  $p_n(z)$  ve  $p_n\left(\frac{1}{z}\right)$  polinomları var ki,

$$\left\| \Phi^+(z) - P_n(z) \right\|_{L_p(\Gamma, u)} \leq \omega_p^2 \left( f, \frac{1}{n} \right)_{\Gamma} \quad (4.12)$$

ve

$$\left\| \Phi^-(z) - P_n(z) \right\|_{L_p(\Gamma, u)} \leq \omega_{p, u}^2 \left( f, \frac{1}{n} \right) \quad (4.13)$$

bağıntıları geçerlidir.

**İspat:** İlk önce (4.12) eşitsizliğini ispat edelim.  $f \in L_p(\Gamma, u)$  ve  $f \in A_p(\Gamma)$  olduğuna göre, eğer  $\|f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z)\|_{L_p(\Gamma, u)} < \infty$  ise  $F(z, h) = f(z_h) + f(z_{-h}) \in L_1(\Gamma)$  olur. Gerçekten, Lemma 3.7 gereğince aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |F(z, h)| |dz| &= \int_{\Gamma} \frac{|f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z)| |u(z)| |dz|}{|u(z)|} \leq \\ &\leq \int_{\Gamma} \frac{|f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z)|}{|u(z)|} |u(z)| |dz| + 2 \int_{\Gamma} \frac{|f(z)| |u(z)|}{|u(z)|} |dz| \\ &\leq \|f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z)\|_{L_p(\Gamma, u)} \cdot \left\| \frac{1}{u} \right\|_{L_p(\Gamma)} + 2 \|f\|_{L_p(\Gamma, u)} \cdot \left\| \frac{1}{u} \right\|_{L_p(\Gamma)} < +\infty \end{aligned}$$

Bu ise gösterir ki,  $F(z, h) \in L^1(\Gamma)$  'dir.

$F(z, h) \in L^1(\Gamma)$  ve  $u(t) \in A_p(\Gamma)$  olduğuna göre

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z_h) + f(z_{-h})}{z-t} dz$$

singüler integrali esas değer anlamında  $\Gamma$  üzerinde hemen her yerde mevcuttur.

Bu ise gösterir ki,  $\Phi^+(t)$  fonksiyonunu  $t \in \Gamma$  olmak üzere

$$P_n(t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^h K_n(h) dh \int_{\Gamma} \frac{f(z_h) + f(z_{-h})}{z-t} dz + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_n(t) [f(t_h) + f(t_{-h})] dh \quad (4.14)$$

biçiminde tanımlanan Jackson-Dzyadyk polinomu (Dzyadyk, 1977) ile yaklaştırmak mümkündür, burada  $K_n(h)$  derecesi  $n$  olan bir trigonometrik polinomdur ve aşağıdaki şartları sağlıyor:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(h) dh = 1, \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)| dt \leq c \quad (4.16)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^k |K_n(t)| dt \leq c(k)(n+1)^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

Diğer taraftan (4.15)-(4.17) şartlarından

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( \left| t \right| + \frac{1}{n} \right)^K |K_n(t)| dt \leq n^{-K} \quad (4.18)$$

bağıntısı elde edilir.

(4.15) bağıntısı kullanılırsa,  $\Phi^+(t)$  fonksiyonunu

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^h K_n(h) dh \int_{\Gamma} \frac{2f(z)}{z-t} dz + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_n(h) 2f(t) dt \quad (4.19)$$

biçiminde yazabiliriz.

(4.14) ve (4.19) bağıntılarını kullanarak,  $\Phi^+(t) - P_n(t)$  farkının normunu  $L_p(\Gamma, u)$  metriki anlamında değerlendirelim: Açıktır ki,

$$\begin{aligned} & \left\| \Phi^+ - P_n \right\|_{L_p(\Gamma, u)} \\ &= \left\| \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{\pi} K_n(h) dh \int_{\Gamma} \frac{f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z)}{z-t} dz + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_n(h) [f(t_h) + f(t_{-h}) - 2f(t)] dh \right\|_{L_p(\Gamma, u)} \end{aligned}$$

olur. Buradan ilk önce Minkowski eşitsizliğini daha sonra ise genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği kullanılırsa aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned} \left\| \Phi^+ - P_n \right\|_{L_p(\Gamma, u)} &\leq \left\| \int_0^{\pi} K_n(h) dh \int_{\Gamma} \frac{f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z)}{z-t} dz \right\|_{L_p(\Gamma, u)} \\ &+ \left\| \int_0^{\pi} K_n(h) dh [f(t_h) + f(t_{-h}) - 2f(t)] \right\|_{L_p(\Gamma, u)} \leq \\ &\leq \left\| \int_0^{\pi} |K_n(h)| dh [f(t_h) + f(t_{-h}) - 2f(t)] \right\|_{L_p(\Gamma, u)} + \\ &+ \int_0^{\pi} K_n(h) dh \left\| \int_{\Gamma} \frac{f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z)}{z-t} \right\|_{L_p(\Gamma, u)} \leq \\ &\leq \int_0^{\pi} K_n(h) A(h) dh + \int_0^{\pi} |K_n(h)| \omega_{p,h}^2(f, h) dh, \end{aligned} \quad (4.20)$$

burada

$$A(h) = \left( \int_{\Gamma} \left| \int_{\Gamma} \frac{f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z)}{z-t} dz \right|^p |u(t)|^p |dt| \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir. Son eşitlikten  $u(t) \in A_p(\Gamma)$  olduğuna göre

$$A(h) \leq \left( \int_{\Gamma} |f(z_h) + f(z_{-h}) - 2f(z)|^p |u(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir.

Buradan (4.20) bağıntısından

$$\|\Phi^+ - P_n\|_{L_p(\Gamma, u)} \leq \int_0^{\pi} |K_n(h)| \omega_{p,u}^2(f, h) dh \quad (4.21)$$

bulunur. Son eşitsizlikten istenen (4.12) bağıntısı elde edilir.

Şimdi (4.13) bağıntısının doğruluğunu gösterelim. Bunun için  $z$  düzlemini  $z = \frac{1}{z'}$  fonksiyonu yardımıyla  $z'$  düzlemine dönüştürelim. Bu durumda  $\Gamma$  eğrisi  $\Gamma'$

eğrisine,  $f(z)$  fonksiyonu  $f(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right) = f_1(z')$  fonksiyonuna,  $u(z)$  fonksiyonu ise

$u(z) = u\left(\frac{1}{z'}\right) = u_1(z')$  fonksiyonuna dönüşmüş olur.

Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterelim:

$$f(z) \in L_p(\Gamma, u) \Leftrightarrow f_1(z') \in L_p(\Gamma', u_1) \quad (4.22)$$

ve

$$u(z) \in A_p(\Gamma) \Rightarrow u_1(z') \in A_p(\Gamma') \quad (4.23)$$

(4.22)'nin doğruluğu Lemma 3.9 dan elde edilir. Daha sonra aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned} (S_{\Gamma} f)(t) &= \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(z) dz}{z-t} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(z') dz'}{z'-t'} - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(z')}{z'} dz' \\ &= (S_{\Gamma'} f_1)(t') - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(z')}{z'} dz'. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Buradan (4.22)'i ve  $z'=0$  noktasının  $\Gamma'$  eğrisinin içinde olduğu dikkate alınır, (4.23) elde edilir.

Diğer taraftan  $z \in \overline{G}^+$  (burada  $G^+$  bölgesi,  $\Gamma$  eğrisinin iç kısmıdır.) olduğunda  $\Phi(t)$  fonksiyonu  $z'$  düzleminde

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z-t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f_1(z') dz'}{z'-t'} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(z')}{z'} dz'$$

biçiminde yazılabilir.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f_1(z')}{z'} dz' = 0$$

olduğu dikkate alınır,  $\Phi(t) = \Phi_1(t')$  eşitliği elde edilir.

Açıktır ki,  $z$  düzleminde tanımlanan  $\Phi^-(t)$  fonksiyonuna  $z'$  düzleminde  $\Phi_1^+(t')$  fonksiyonu karşılık gelmektedir. Buradan (4.12) bağıntısına göre

$$\left\| \Phi_1^+(t') - P_n(t') \right\|_{L_p(\Gamma', u_1)} \leq \omega_{p, u_1}^2 \left( f_1, \frac{1}{n} \right)_{\Gamma'} \quad (4.25)$$

elde edilir.

Ayrıca,  $\Phi_1^+(t') = \phi^-(t)$ ,  $u_1(t') = u(t)$  ve  $z=0$  noktasının  $\Gamma$  eğrisi içinde olduğu dikkate alınır,

$$\left\| \phi_1^+(t') - p_h(t') \right\|_{L_p(\Gamma', u_1)} \asymp \left\| \phi^-(t) - p_h \left( \frac{1}{t} \right) \right\|_{L_p(\Gamma, u)} \quad (4.26)$$

elde edilir.

Öte yandan Lemma 3.7 gereğince

$$\omega_{p, u}^2(f_1, \delta)_{\Gamma'} \asymp \omega_{p, u}^2(f, \delta)_{\Gamma} \quad (4.27)$$

olur. Dolayısıyla (4.25), (4.26) ve (4.27) bağıntılarından (4.13) bağıntısı elde edilir. Lemma 4.1 ispat edildi.

Teorem 4.3 ün ispatının tamamlanması için Lemma 4.1'i kullanmak ve

$R_n(z) = P_n\left(z, \frac{1}{z}\right)$  fonksiyonu yerine  $R_n(z) = P_n(z) + P_n\left(\frac{1}{z}\right)$  fonksiyonunu almak

yeterlidir (4.11) bağıntısından (4.10) bağıntısı elde edilir. Teorem 4.3 ispat edildi.

### 4.3 Kapalı kuasikonform eğriler üzerinde fonksiyonların Faber-Laurent rasyonel fonksiyonlar ile yaklaşımı

Bu bölümde sonlu bir  $\Gamma$  Jordan eğrisi üzerinde verilen keyfi sürekli fonksiyonların Faber-Laurent rasyonel fonksiyonlar ile yaklaşım problemini ele almaktadır.

Parçalı-düzgün sınırlı bölgelerde fonksiyonların Faber polinom serilerinin kısmi toplamları ile yaklaşımı Alper, Ivanov (1953) çalışmasında incelenmiştir. Alper, Ivanov (1953) çalışmasında elde edilen sonuçlar, Lesley, Vinge, Warschawski (1974) çalışmasında yayının uzunluğu ve kirişi aynı tertipe sahip olan düzeltilebilir Jordan eğrilerine genişletilmiştir. Benzer problemler, Andrievskii (1980) çalışmasında Jordan ve düzeltilebilir olmayan sınırlı kontinyumlarda incelenmiştir.

Benzer yaklaşım problemleri aynı zamanda integral metrikte de çalışılmıştır. Faber polinomları ve Faber-Laurent rasyonel fonksiyonları ile yaklaşım problemleri Cavus, Israfilov (1995), Israfilov (1987), Israfilov (2001), Israfilov (2004) çalışmalarında incelenmiştir. Faber polinomlarının yaklaşımı ile ilgili daha ayrıntılı sonuçlar Gaier (1987) ve Suetin (1998) kitaplarında bulunabilir.

Sürekli fonksiyonların Faber-Laurent rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı yayının uzunluğu ve kirişi aynı tertipten olan Jordan düzeltilebilir eğrilerde Mokhammed Ali (1990) çalışmasında incelenmiştir. Bu çalışmada ise benzer sonuçları kuasikonform eğrilerde elde edilmiştir. P. Belinskii'nin örneğinin gösterdiği gibi (bkz. Belinskii, 1974) kuasikonformal eğri, herhangi bir yerinde düzeltilebilir olmayan olabilir.

Kabul edelim ki  $\Gamma$  kapalı Jordan eğrisidir.  $G = C\Gamma = G_1 \cup G_2$  ( $0 \in G_1, \infty \in G_2$ ) bölgesi  $\Gamma$  kapalı eğrisinin iki bileşenli tümleyeni olsun. Ayrıca kabul edelim ki  $w = \Phi_i(z)$  ( $i = 1, 2$ ) fonksiyonları konform ve yalınkat olarak  $\Phi_1(0) = \infty$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0} z\Phi_1(z) > 0$ ,  $\Phi_2(\infty) = \infty$  ve  $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_2(z)/z > 0$  normları ile  $G_1$  ve  $G_2$  bölgelerini birim çemberinin dışına dönüştürür.

Birim çemberin içini  $U_1$ , birim çemberin dış kısmını ise  $U_2$  ile gösterelim. Birim çemberin sınırı  $T$  olsun.

$\Phi_i(z) (i=1,2)$  fonksiyonlarının tersi  $z = \Psi_i(w) (i=1,2)$  olsun. Caratheodory teoremi gereğince  $\Phi_1$  ve  $\Phi_2$  ( $\Psi_1$  ve  $\Psi_2$ ) fonksiyonları sürekli olarak  $\Gamma(T)$ 'ye genişletilebilir (örneğin bkz. Markushevich, 1968).

Bu bölümün ana sonucu aşağıdaki teoremdir.

**Teorem 4.4**  $\Gamma$  kapalı bir kuasikonformal eğrisi ve  $f(z) \in C(\Gamma)$ ,  $0 < a \leq 1$  olsun,

Bu durumda

$$|f(z) - R_n(f, z)| \leq E_n(f, \Gamma) \left[ (n+1)^{1-a} + \ln(n+2) \right] \ln(n+2),$$

eşitsizliği sağlanır, burada  $R_n(f, z)$ ,  $f$ 'nin  $n$ . dereceden Faber-Laurent rasyonel fonksiyonudur.  $E_n(f, \Gamma)$  ise  $f$  fonksiyonunun  $\Gamma$  üzerinde  $n$  dereceli rasyonel fonksiyonlarla en iyi düzgün yaklaşımıdır.

**İspat:** Andrievskii (1980) çalışmasına göre,  $\Gamma$  eğrisini örten sonlu sayıda kuasikonform  $\Gamma_j (j = \overline{1, k})$  yayı vardır.  $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}^{(j)} = \Gamma_{1+\frac{1}{n}}(\Gamma_j)$ ,  $j = \overline{1, k}$  gösterelim ( burada  $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}(\Gamma_j)$ ,  $j = \overline{1, k}$ ,  $\Gamma_j$ ,  $j = \overline{1, k}$  yayının seviye eğrisidir)  $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}^{(j)} \cap G_i (j = \overline{1, k}, i = 1, 2)$  kesişimi kapalı  $\Gamma^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  eğrilerini oluşturur. Açıktır ki,  $\Gamma^{(1)} \subset \text{ext} \Gamma_{1+\frac{1}{n}}$ ,  $\Gamma^{(2)} \subset \text{int} \Gamma_{1+\frac{1}{n}}$  yazabiliriz.

Lemma 3.10 ' u kullanarak, basit hesaplamalardan sonra

$$\int_{\Gamma^{(i)}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_{1+\frac{1}{n}}^{(j)} \cap \Gamma^{(i)}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leq (n+1)^{1-a} + \ln(n+2), \quad i = 1, 2. \quad (4.28)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.15) ve (3.16) eşitlikleri gereğince,  $F_k(z)$  Faber polinomu ve  $F_k(1/z)$  rasyonel fonksiyonları için sırasıyla

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(2)}} \frac{|\Phi_2(\zeta)|^k}{\zeta - z} d\zeta, \quad (4.29)$$

$$F_k(1/z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(1)}} \frac{|\Phi_1(\zeta)|^k}{\zeta - z} d\zeta \quad (4.30)$$

gösterimleri geçerlidir.

Sonuç olarak, (4.28) ve (4.29) gereğince

$$|F_k(z)| \leq \frac{(1+1/n)^n}{2\pi} \int_{\Gamma^{(2)}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leq (n+1)^{1-a} + \ln(n+2)$$

değerlendirmesi elde edilir.

(4.28) ve (4.30) kullanılırsa, öncekine benzer şekilde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$|F_k(1/z)| \leq (n+1)^{1-a} + \ln(n+2).$$

Eğer  $a_k(f)$ ,  $a_k(f)$  katsayıları (3.13) ve (3.14) formülleri ile tanımlanırsa, S.Y. Alper, V. V. Ivanov, (1953) çalışmasında gösterildiği gibi,

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k(f) \omega^k \right| \leq \ln(n+2) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|, \quad |\omega| = 1, \quad (4.31)$$

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k(f) \omega^k \right| \leq \ln(n+2) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|, \quad |\omega| = 1, \quad (4.32)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İyi bilinen S. N. Bernstein teoremi (bkz. örnek; Smirnov, Lebedev, 1968), (4.31) ve (4.32) değerlendirmeleri gereğince aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k(f) [\Phi_2(z)]^k \right| \leq \ln(n+2) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|, \quad z \in \Gamma^{(2)}, \quad (4.33)$$

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k(f) [\Phi_1(z)]^k \right| \leq \ln(n+2) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|, \quad z \in \Gamma^{(1)}, \quad (4.34)$$

(4.28),(4.33) ve (4.34) eşitsizliklerini kullanılırsa ve (4.29),(4.30) değerlendirmeleri dikkate alınır,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=0}^n a_k(f) F_k(z) + \sum_{k=0}^n (-a_k(f)) F_k(1/z) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(2)}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \sum_{k=0}^n a_k(f) [\Phi_2(\zeta)]^k + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(1)}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \sum_{k=0}^n a_k(f) [\Phi_1(\zeta)]^k \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma^{(2)}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \sum_{k=0}^n a_k(f) [\Phi_2(\zeta)]^k \right| + \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma^{(1)}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \sum_{k=0}^n a_k(f) [\Phi_1(\zeta)]^k \right| \leq \\
& \leq \left[ (n+1)^{1-a} + \ln(n+2) \right] \ln(n+2) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|.
\end{aligned}$$

olur.

$R_n(z)$ ,  $f(z)$  fonksiyonuna  $\Gamma$  üzerinde en iyi düzgün yaklaşımını veren  $n$ . dereceden rasyonel fonksiyon olsun. Açıkthatır ki,  $R_n(R_n; z) = R_n(z)$  'dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|f(z) - R_n(f, z)| &\leq |f(z) - R_n(z)| + |R_n(f - R_n; z)| \leq \\
&\leq E_n(f; \Gamma) \left[ (n+1)^{1-a} + \ln(n+2) \right] \ln(n+2).
\end{aligned}$$

olur. Teorem 4.4'ün ispatı tamamlandı.

#### 4.4 Kuasi-konform eğrilerde tanımlanan lokal fonksiyonlar sınıfında rasyonel fonksiyonlarla yaklaşım

Bu bölümde lokal süreklilik cinsinden sürekli fonksiyonların kuasi-konform eğrilerde yaklaşım problemi incelenmiştir. Yaklaşım aparatı olarak

$$R_n(z) = \sum_{k=-n}^n a_k z^k$$

biçiminde rasyonel fonksiyon kullanılmaktadır.

Not edelim ki, Mamedkhanov (1980) çalışmasında J. I. Mamedkhanov tarafından  $D_L^\beta(z_0, \Gamma)$  fonksiyon sınıfı tanımlanmıştır. Eğer  $\Gamma$  eğrisi kuasi-düzgün eğri ise ve sürekli  $f$  fonksiyonu  $D_L^\beta(z_0, \Gamma)$  sınıfından ise Mamedkhanov (1985) çalışmasında rasyonel fonksiyonların yaklaşımı üzerine yaklaşım teorisinin düz teoremi elde edilmiştir. Ayrıca Mamedkhanov (1985) çalışmasında kuasi-düzgün eğrilerde  $D_L^\beta(z_0, \Gamma)$  fonksiyon sınıfı için lokal polinomal yaklaşım cinsinde yapısal karakterizasyon elde edilir. Mamedkhanov (1985) çalışmasında gösterilir ki, eğer  $\alpha + \beta < 1$  ise bu durumda  $D_L^\beta(z_0, \Gamma)$  fonksiyon sınıfı Cauchy singüler integrale göre değişmezdir. Jafarov (1987) çalışmasında ise  $\Gamma$ -kuasi konform eğri olduğunda rasyonel fonksiyonların türevi ile ilgili ilave şart vermekle rasyonel yaklaşım cinsinden  $D_L^\beta(z_0, \Gamma)$  fonksiyon sınıfının yapısal karakterizasyonu elde edilir. Mamedkhanov, Salaev (1980) çalışmasında ise sürekli fonksiyonların lokal özelliklerini ifade etmek için lokal süreklilik modülü tanımlanır ve lokal süreklilik modülü cinsinden  $D_L^\beta(z_0, \Gamma)$  fonksiyon sınıfı tanımlanır.

Bu çalışmada süreklilik modülü cinsinden sürekli fonksiyonların kuasi-konform eğrilerde düz lokal yaklaşım teoremi elde edilir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, global süreklilik modülü cinsinden Andrievskii (1980) çalışmasında elde edilen sonuçların genelleştirilmesi olur. Bu çalışmada  $H_\varphi^{z_0}(\Gamma)$  fonksiyon sınıfı incelenir. Bilindiği gibi  $\varphi(\delta, \zeta) = \delta^\alpha \zeta^\beta$  ise  $H_\varphi^{z_0}(\Gamma)$  sınıfı  $D_L^\beta(z_0, \Gamma)$  sınıfı ile çakışmaktadır. Musaev, Seyfullaev (1986) çalışmasında lokal süreklilik modülü cinsinden kuasi-konform yaylarda sürekli fonksiyonların düz lokal yaklaşım teoremi elde edilir. Bu çalışmada elde edilen sonuçların ispatında Andrievskii, Israfilov (1979), Musaev, Seyfullaev (1986) çalışmasındaki ispat metodu kullanılmaktadır.

$\Gamma$  - iki  $\Omega = C\Gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$  ( $0 \in \Omega_1, \infty \in \Omega_2$ ) tamamlayıcıya sahip, keyfi sınırlı Jordan eğrisi olsun.  $\Omega_i$  ( $i=1,2$ ) bölgesini  $\Omega_i$  ( $\Omega_1 = \{w: |w| < 1\}, \Omega_2 = \{w: |w| > 1\}$ ) bölgesine konform ve yalınkat olarak dönüştüren  $w = \varphi_i(z)$ ,  $i=1,2$  fonksiyonlarını göz önüne alalım ve ayrıca  $\varphi_1(0)=0$ ,  $\varphi_1'(0)>0$ ,  $\varphi_2(\infty)=\infty$  ve  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \varphi_2(z) > 0$  şartları

sağlanmaktadır.  $w = \varphi_i(z)$ ,  $i = 1, 2$  fonksiyonlarının tersini ise  $z = \Psi_i(w)$ , ( $i = 1, 2$ ) ile gösterelim.

Keyfi doğal  $n$  sayısı için

$$\Gamma_{1+\frac{1}{n}} = \left\{ \xi : \xi \in \Omega_2 : |\varphi_2(\xi)| = 1 + \frac{1}{n} \right\},$$

$$\Gamma_{1-\frac{1}{n}} = \left\{ \xi : \xi \in \Omega_1 : |\varphi_1(\xi)| = 1 - \frac{1}{n} \right\},$$

$$\rho_{1+\frac{1}{n}}(z) = \inf_{\xi \in \Gamma_{1+\frac{1}{n}}} |\xi - z|, \quad \rho_{1-\frac{1}{n}}(z) = \inf_{\xi \in \Gamma_{1-\frac{1}{n}}} |\xi - z|,$$

$$\rho_{\frac{1}{n}}^*(z) = \max \left\{ \rho_{1+\frac{1}{n}}(z), \rho_{1-\frac{1}{n}}(z) \right\}$$

Ayrıca

$$G_1 = \left\{ \xi : \xi \in \Omega_1 : |\varphi_1(\xi)| \in \left( \frac{1}{3}, 1 \right) \right\};$$

$$G_2 = \left\{ \xi : \xi \in \Omega_2 : |\varphi_2(\xi)| \in (1, 3) \right\};$$

$G = G_1 \cup G_2$  gösterelim. Andrievskii, Israfilov (1979) çalışmasında

$$w(f, z, \delta) = \sup_{\substack{\xi \in \Gamma \\ |\xi - z| < \delta}} |f(\xi) - f(z)|, \quad z \in \Gamma$$

karakterizasyonu kullanılmaktadır.

**Teorem 4.5**  $\Gamma$  – keyfi kapalı kuasikonform eğri ve  $f \in H_\varphi^{z_0}$  ve  $\varphi(\delta, \zeta) \leq M_1 \varphi(\delta, \zeta)$  olsun. Bu durumda her bir doğal  $n$  sayısı için derecesi  $n$ 'yi aşmayan

$$R_n(z) = \sum_{k=-n}^n a_k z^k$$

biçiminde öyle rasyonel fonksiyon var ki,

$$|f(z) - R_n(z)| \leq C \varphi \left( \rho_{\frac{1}{n}}^*(z), \rho_{\frac{1}{n}}^*(z) + |z - z_0| \right)$$

eşitsizliği sağlanır, burada  $z_0 \in \Gamma$  sabit bir nokta,  $z \in \Gamma$  ve  $C$  ise  $n$  ve  $z$ 'den bağımsız sabit sayıdır.

**İspat:**  $\Gamma$  - kuasikonform eğri ve  $z \in \Gamma$  olsun.

$\varphi(\delta, 2\zeta) \leq M\varphi(\delta, \zeta)$  şartı gereğince öyle  $M > 0$  ( $M$  -sayısı doğal sayı kabul edilebilir)

sayısı var ki,  $0 < \delta_1 < \delta_2$  için  $\varphi(\delta_1, \delta_2) \leq c \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^M \varphi(\delta_1, \delta_2)$  şartı sağlanır.

$\omega(f, z, \delta)$ ,  $\omega_f^{z_0}(\delta, \zeta)$  lokal süreklilik modüllerinin tanımını ve (3.26) eşitsizliğini kullanırsak, aşağıdakini elde ederiz:

$$\begin{aligned} |f(z) - f_n(z)| &\leq \omega \left[ f, z, c\rho_{1/n}^*(z) \right] \leq w_f^{z_0} \left( c\rho_{1/n}^*(z), c\rho_{1/n}^*(z) + |z - z_0| \right) \\ &\leq \varphi \left( \rho_{1/n}^*(z), \rho_{1/n}^*(z) + |z - z_0| \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Şimdi

$$\rho_{1/n}^*(z) = \rho_n^*, \quad \rho_i = \rho_{1 + \frac{(-1)^i}{n}}^{(z)} \quad \eta_i = |z - z_0| + \rho_i, \quad \eta^* = |z - z_0| + \rho^*$$

gösterelim.

$G_i$  integralleme bölgesini alt bölgelere bölelim.

$$D = \left\{ \xi \in \mathbb{C} : |\varphi_1(\xi)| \geq 1 - \frac{1}{n} \right\} \cap G_1 \cup \left\{ \xi \in \mathbb{C} : |\varphi_2(\xi)| \leq 1 + \frac{1}{n} \right\} \cup G_2$$

$$D_{1i} = G_i \cap B_{\rho_i}(z)$$

gösterelim, burada  $B_{\rho_i}^*(z)$  merkezi  $z$  ve yarıçapı  $\rho_i$  olan kapalı dairedir.

$$D_{2i} = G_i \cap \left( D \cap \left( B_{\eta_i}(z_0) \setminus B_{\rho_i}(z) \right) \right) \cup B_{\eta_i}(z), \quad i = 1, 2$$

$$D_{3i} = G_i \cap \left( \left( B_{\mu_i}(z_0) \setminus D \right) \right), \quad (i = 1, 2);$$

$$D_{4i} = G_i \cap \left( \left( B_{\eta_i}(z) \setminus B_{\eta_i}(z_0) \setminus D \right) \right), \quad (i = 1, 2);$$

$$D_{5i} = G_i \cap \left( D \setminus \left( B_{\eta_i}(z) \cup B_{\eta_i}(z_0) \right) \right), \quad (i = 1, 2);$$

$$D_{6i} = G_i \setminus \left( B_{\eta_i}(z) \cup B_{\eta_i}(z_0) \cup D \right), \quad (i = 1, 2)$$

olsun.

Açıktır ki,  $G = G_1 \cup G_2 = \bigcup_{i=1}^2 \left( \bigcup_{j=1}^6 D_{ji} \right)$  ve  $D_{ji} \cap D_{j'i} \neq \emptyset$ ,  $j \neq j'$  'dir.

$$J(G) = \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{j=1}^6 J(D_{ji}) \right) \quad (4.36)$$

yazabiliriz. Kuasikonform yayları için elde edilen (3.29) eşitsizliği ve Lemma 3.12 kullanılırsa, aynı yöntem kullanılarak, kapalı kuasikonform eğriler için aşağıdaki bağıntının doğruluğu gösterilebilir:

$$\frac{\rho^{(z)}}{1 + \frac{(-1)^i}{n}} \left| \xi - z \right| \preceq \begin{cases} 1, & \xi \in D_{1i}, \\ \rho^{(z)} \frac{(-1)^i}{n}, & \xi \in D \\ \frac{1}{n^\alpha |w_i - \tau_i|^\alpha}, & \xi \notin D \end{cases} \quad (4.37)$$

burada  $w_i = \varphi_i(\xi)$ ,  $\tau_i = \varphi_i(z)$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $i = 1, 2$ .

Şimdi  $J(D_{1i})$  ifadesini değerlendirelim.  $\xi \in D_{1i}$  için

$$|\xi - z| \preceq \rho_i(z), \quad |\xi - \xi_\Gamma| \preceq \rho^{(z)} \frac{(-1)^i}{n}, \quad \rho_{1/n}^*(\xi_\Gamma) \asymp \rho_{1/n}^*(z)$$

bağıntıları doğrudur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \omega(f_n, \xi_\Gamma, c|\xi - \xi_\Gamma|) &\preceq \omega(f_n, \xi_\Gamma, c_1 \rho_{1/n}^*(\xi_\Gamma)) \preceq \omega(f, \xi_\Gamma, c_1 \rho_{1/n}^*(\xi_\Gamma)) \frac{|\xi - \xi_\Gamma|}{\rho_{1/n}^*(\xi_\Gamma)} \\ &\asymp \omega(f, \xi_\Gamma, c_1 \rho_{1/n}^*(z)) \frac{|\xi - \xi_\Gamma|}{\rho_{1/n}^*(z)} \preceq \omega_f^{z_0}(c_1 \rho_{1/n}^*(z), |\xi_\Gamma - z_0| + c_1 \rho_{1/n}^*(z)) \frac{|\xi - \xi_\Gamma|}{\rho_{1/n}^*(z)} \\ &\preceq \omega_f^{z_0}(c_2 \rho_{1/n}^*(z), c_3 \eta^*) \frac{|\xi - \xi_\Gamma|}{\rho^*} \preceq \varphi(\rho^*, \eta^*) \frac{|\xi - \xi_\Gamma|}{\rho_{1/n}^*(z)} \end{aligned} \quad (4.38)$$

bağıntısı elde edilir. (4.37) ve (4.38) gereğince

$$J(D_{1i}) = \frac{\varphi(\rho^*, \eta^*)}{\rho^*} \iint_{D_{1i}} \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z|} \preceq \varphi(\rho^*, \eta^*), \quad i = 1, 2 \quad (4.39)$$

olur.

Şimdi  $J(D_{2i})$  ifadesini değerlendirelim. Bu durumda  $|\xi - z| \geq \rho_i$  olur.

$$1) |\xi - z| \geq \rho^*; \quad 2) |\xi - z| \leq \rho^*$$

durumlarını incelemek gerekir.

1)  $|\xi - z| \geq \rho^*$  olsun. Bu durumda  $|\xi - \xi_\Gamma| \leq \rho_{1+\frac{(-1)^i}{n}}(\xi_\Gamma)$  olur. (3.27) gereğince

$$\begin{aligned} \omega(f_n, \xi_\Gamma, c|\xi - \xi_\Gamma|) &\leq \omega\left(f_n, \xi_\Gamma, c_1 \rho_{\frac{1}{n}}^*(\xi_\Gamma)\right) \frac{|\xi - \xi_\Gamma|}{\rho_{\frac{1}{n}}^*(\xi_\Gamma)} \\ &\leq \omega_f^{\tilde{z}_0}\left(c_1 \rho_{\frac{1}{n}}^*(\xi_\Gamma), |\xi_\Gamma - z_0| + c_2 |\xi - z|\right) \frac{|\xi - \xi_\Gamma|}{\rho_{\frac{1}{n}}^*(\xi_\Gamma)} \\ &\leq \varphi\left(\rho_{\frac{1}{n}}^*(\xi_\Gamma), |\xi_\Gamma - z_0| + c_3 |\xi - z|\right) \frac{|\xi - \xi_\Gamma|}{\rho_{\frac{1}{n}}^*(\xi_\Gamma)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

elde edilir.

$$|\xi_\Gamma - z_0| \leq |\xi_\Gamma - \xi| + |\xi - z_0| \leq |\xi - z| + |\xi - z_0| \leq 2|\xi - z| + |z - z_0| \quad (4.41)$$

eşitsizliği doğrudur. (3.28), (3.29) ve (3.30) değerlendirmeleri ile ilgili ispat şeması ve Lemma 3.12 kullanılırsa,

$$\rho_{1+\frac{(-1)^i}{n}}(\xi_\Gamma) \asymp \left| \xi - \xi^{(i)} \right| \quad (4.42)$$

$$\frac{|\xi - z|}{\left| \xi - \xi^{(i)} \right|} \leq \left[ \frac{\|\xi - z\|}{g_i} \right]^{m_i} \quad (4.43)$$

elde ederiz, burada  $\xi^{(i)} = \psi_i \left[ \left( 1 + \frac{(-1)^i}{n} \right) \varphi_i(\xi^{(i)}) \right]$  ve  $m_i$  ise  $\Gamma$  eğrisine bağlı sabittir.

(4.40), (4.41), (4.42) ve (4.43) gereğince

$$\begin{aligned} \omega(f_n, \xi_\Gamma, c|\xi - \xi_\Gamma|) &\leq \varphi\left(|\xi - z|, |\xi - z_0| + |\xi - z|\right) \frac{|\xi - \xi_\Gamma|}{|\xi - z|} \frac{|\xi - z|}{g_{1+\frac{(-1)^i}{n}}(z)} \\ &\leq \varphi\left(|\xi - z|, |\xi - z_0| + |\xi - z|\right) \frac{|\xi - \xi_\Gamma| |\xi - z|}{|\xi - z| \left| \xi - \xi^{(i)} \right|} \end{aligned}$$

$$\preceq \varphi(|\xi - z|, |\xi - z| + |z - z_0|) \frac{|\xi - \xi_\Gamma|}{|\xi - z|} \left( \frac{|\xi - z|}{\rho_i} \right)^{m_i} \quad (4.44)$$

2) durumu benzer olarak incelenir.

$$\begin{aligned} J(D_{2i}) &\preceq \iint_{D_{2i}} \frac{\varphi(|\xi - z|, |\xi - z| + |z - z_0| + \rho_{1/n}^*(z))}{|\xi - z|^2} \left( \frac{\rho_i}{|\xi - z|} \right)^{m-m_1} d\sigma_\xi \\ &\preceq \frac{\varphi(\rho_i, \eta^*)}{\rho_i^{m_1-m+1}} \int_{\rho_i}^{\rho_i \eta^*} \frac{\tau d\tau}{\tau^{m-m_1+1}} \preceq \varphi(\rho_i, \eta^*) \end{aligned} \quad (4.45)$$

elde edilir.

Şimdi  $J(D_{3i})$  değerlendirelim. Açık ki,  $|\xi - z| \geq \rho_i$  şartı sağlanır.

$$\text{a) } |\xi - \xi_\Gamma| \geq \rho_{1/n}^*(\xi_\Gamma), \quad \text{b) } |\xi - \xi_\Gamma| \leq \rho_{1/n}^*(\xi_\Gamma) \text{ ve } |\xi - \xi_\Gamma| \geq \rho_{1+\frac{(-1)^i}{n}}(\xi_\Gamma)$$

durumları mümkündür.

a) durumu için aşağıdaki elde edilir:

$$|\xi - z| \geq d(\xi, \Gamma) \asymp |\xi - \xi_\Gamma|,$$

burada  $d(\xi, \Gamma) = \inf \{|\xi - z| : z \in \Gamma\}$  'dir.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \omega(f_n, \xi_\Gamma, c|\xi - \xi_\Gamma|) &\preceq \omega(f, \xi_\Gamma, c_1|\xi - z|) \\ &\preceq \omega_f^{z_0}(c_1|\xi - z|, |\xi_\Gamma - z_0| + c_1|\xi - z|) \\ &\preceq \varphi(|\xi - z|, |\xi_\Gamma - z_0| + |\xi - z|) \end{aligned} \quad (4.46)$$

olur.

b) durumu için benzer olarak aynı eşitsizlik elde edilir.

$\xi \in D_{3i}$  için

$$\omega(f_n, \xi_\Gamma, c|\xi - \xi_\Gamma|) \preceq \varphi(g_i, \eta^*) \frac{|\xi - z|}{\rho_i} \quad (4.47)$$

olur. Bu durumda Andrievskii (1980) çalışmasında ki, ispat şeması kullanılırsa,

$$J(D_{3i}) \leq \varphi(\rho_i, \eta^*) \iint_{D_{3i}} \left( \frac{\rho_i}{|\xi - z|} \right)^{m-1} \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z| |\xi - \xi_\Gamma|} \leq \varphi(\rho_i, \eta^*) \quad (4.48)$$

elde edilir.

$J(D_{3i})$ 'nin değerlendirilmesindeki ispat şeması kullanılırsa, benzer olarak  $J(D_{4i})$  ifadesi değerlendirilir:

$$J(D_{4i}) \leq \varphi(\rho_i, \eta^*). \quad (4.49)$$

$J(D_{2i})$ 'nin değerlendirilmesindeki ispat şeması kullanılırsa, benzer olarak

$$J(D_{5i}) \leq \varphi(\rho_i, \eta^*) \quad (4.50)$$

değerlendirilmesi elde edilir.

Son olarak  $J(D_{6i})$  ifadesini değerlendirelim. Bu durumda  $|\xi - z| > \rho_i$ ,  $|\xi - z_0| > \rho_i$  olur.  $|\xi - \xi_\Gamma| \leq |\xi - z|$  eşitsizliği kullanılırsa, aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned} \omega(f_n, \xi_\Gamma, c_1 |\xi - \xi_\Gamma|) &\leq c_2 \omega(f, \xi_\Gamma, c_1 |\xi - z|) \\ &\leq c_3 \omega_f(z_0, 2c_1 |\xi - \xi_\Gamma|, |\xi_\Gamma - z_0| + c_1 |\xi - \xi_\Gamma|) \\ &\leq c_4 \omega_f(z_0, c_1 |\xi - \xi_\Gamma|, |\xi - z_0| + c_5 |\xi - \xi_\Gamma|) \\ &\leq c_6 \varphi(|z - \xi|, |\xi - z_0| + |\xi - z|) \leq c_6 \varphi(|\xi - z|, 2|\xi - z| + |z - z_0|) \\ &\leq c_7 \varphi(|\xi - z|, 3|\xi - z|) \leq c_8 \varphi(|\xi - z|, |\xi - z|). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Diğer taraftan eğer  $\varphi(\delta, 2\zeta) \leq M \varphi(\delta, \zeta)$  şartı sağlanırsa, bu durumda öyle  $M > 0$  sayısı var ki,  $0 < \delta_1 < \delta_2$  için

$$\varphi(\delta_2, \delta_2) \leq c \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^M \varphi(\delta_1, \delta_1) \quad (4.52)$$

eşitsizliği sağlanır. (4.51) ve (4.52) kullanılırsa

$$J(D_{6i}) = \iint_{D_{6i}} \frac{\omega(f_n, \xi, c_1 |\xi - \xi_\Gamma|)}{|\xi - \xi_\Gamma|} \left[ \frac{\rho_i}{|\xi - z| + g_i} \right]^m \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z|}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_9 \frac{\varphi(\rho_i, \rho_i)}{[\rho_i]^M} \iint_{D_{6i}} \left[ \frac{\rho_i}{|\xi - z|} \right]^m \frac{|\xi - z|}{|\xi - z| \cdot |\xi - \xi_\Gamma|} \\
&\leq c_{10} \varphi(\rho_i, \rho_i) \iint_{D_{6i}} \left[ \frac{\rho_i}{|\xi - z|} \right]^{m-\mu} \frac{d\sigma_\xi}{|\xi - z| \cdot |\xi - \xi_\Gamma|} \\
&\leq c_{11} \varphi(\rho_i, \eta^*) \tag{4.53}
\end{aligned}$$

elde edilir. Açık ki, her bir bağlantılı küme için  $\frac{1}{2^n} \leq \left(\frac{1}{2^n}\right)^\mu \leq \left(\frac{1}{n^2}\right)^\mu$  eşitsizliği sağlanıyor.  $\varphi(\delta, \eta)$  fonksiyonunun özelliği dikkate alınırsa,

$$\frac{1}{2^n} \leq c[\rho_i]^n \leq c(\rho_i, \rho_i) \leq c(\rho_i, \rho_i + |z - z_0|) \tag{4.54}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.25), (4.35), (4.36), (4.39), (4.44), (4.45), (4.48), (4.49), (4.50), (4.52) ve (4.54) kullanılırsa aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned}
|f(z) - R_n(z)| &\leq |f(z) - f_n(\delta)| + |f_n(z) - R_n(\delta)| \leq \\
&\leq c\varphi\left(\rho_{1/n}^*(z), \rho_{1/n}^*(z) + |z - z_0|\right), \quad z \in \Gamma
\end{aligned}$$

burada  $z_0 \in \Gamma$  sabit bir nokta  $c$  ise  $n$  ve  $z$ 'den bağımsız bir sabittir. Teorem 4.5 ispat edildi.

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

### 5.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında ilk önce kapalı regüler eğrilerde sürekli fonksiyonların 1. süreklilik modülü cinsinden rasyonel fonksiyonlar dizisi ile yaklaşımı ile ilgili düz teorem ifade ve ispat edilir. Ayrıca, rasyonel fonksiyon dizilerinin türevi ile ilgili bilgi verilmektedir. Kuasikonform eğrilerde ise söz konusu teoremin tersi elde edilir. Daha sonra ağırlıklı Lebesgue uzaylarında 2. düzgünlük modülü cinsinden kapalı regüler eğrilerde fonksiyonların rasyonel fonksiyonlar dizisi ile yaklaşımı ile ilgili düz teorem ifade ve ispat edilir. Ayrıca, kapalı  $\Gamma$  eğrisi kuasi-konform eğri olduğunda eğri üzerine sürekli fonksiyonların  $R_n(f, z)$  Faber- Laurent rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı incelenmiştir. Sonuçlar eğri üzerinde  $E_n(f, \Gamma)$  en iyi yaklaşım cinsinden elde edilir. Daha sonra ilave olarak sürekli fonksiyonların süreklilik modülü cinsinden kuasi-konform eğrilerde rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı ile ilgili düz lokal teoremi elde edilir. Burada elde edilen sonuçlar global süreklilik modülü cinsinden Andrievskii (1980) çalışmasında elde edilen sonuçların genelleştirilmesi olur.  $H_\varphi^{z_0}(\Gamma)$  lokal fonksiyonlar sınıfı incelenir. Eğer  $\varphi(\delta, \eta) = \delta^\alpha \eta^\beta$  ise  $H_\varphi^{z_0}(\Gamma)$  lokal fonksiyonlar sınıfı  $D_\alpha^\beta(z_0, \Gamma)$  lokal fonksiyonlar sınıfı ile çakışmaktadır. Elde edilen sonuçların ispatında Andrievskii, Israfilov, (1979); Musaev, Seyfullaev (1986) çalışmalarındaki ispat metodu kullanılmaktadır.

### 5.2 Öneriler

Kapalı regüler eğrilerde sürekli fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı problemi daha yüksek mertebeden süreklilik modülü cinsinden incelenebilir. Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında  $k$  ( $k=3,4,\dots$ ) mertebeden düzgünlük modülü cinsinden ve daha genel uzaylarda (Orlicz, değişken üslü Lebesgue uzayları) kapalı regüler eğrilerde fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı ile ilgili problem araştırılabilir. Kapalı regüler eğrilerde sürekli fonksiyonların Faber-Laurent rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı en iyi yaklaşım cinsinden incelenebilir. İlave olarak kapalı regüler eğrilerde sürekli fonksiyonların rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımı ile ilgili düz lokal teoremi elde edilebilir.

**KAYNAKLAR**

- Ahlfors, L. V., 1987, Lectures on Quasiconformal Mappings, *Wads Worth and Brooks Cole Advanced Books and Software, Monterey, California.*
- Ahlfors, L. V., 1979, "Complex Analysis" second Edition, *McGrow Hill. Ltd. Tokyo,* 336 s.
- Akhiezer, N.I., 1965, Lectures on Approximation Theory, *Nauka, Moscow, (Russian).*
- Alper S.Y., Ivanov V.V., 1953. On approximation of functions by partial sums of a series by Faber polynomials, *Soviet Doklady*, 90, No 3, pp.325-328.
- Andrievskii V. V., Israfilov D.M. 1979, Approximation on quasiconformal curves, *Deposited article in VINITI 5. UP. NO: 2629-79, 24 pages (Russian).*
- Andrievskii V.V., 1980, (Rusça). On approximation of functions by partial sums of a series in Faber polynomials in continua with non-zero local geometrical character, *Ukr.math Zh.* 1980, 32, 1, pp.3-10.
- Andrievskii, V., 1981, Constructive characterization of functions in Hölder classes on continua without exterior zero angles, *Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A*, 3-5.
- Andrievskii, V.V., Israfilov, D., 1980, Approximation of functions on quasiconformal curves by rational functions. *Izv.Akad.Nauk Azerb. SSR Ser. FizTekhn.Math.Nauk.* (36), 21-26.
- Andrievskii, V.V., 1980, Direct theorems of approximation theory on quasiconformal arcs, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 44, 243-261; *English transl. in Math. USSR Izv.* 16 (1981).
- Andrievskii, V.V., 1986, Approximation characterization of classes of functions on continua of the complex plane. *Math. USSR Sbornik*, 53 (1). 69-87.
- Andrievskii, V.V., and Blatt, H.P., 2002, Discrepancy of Signed Measures and Polynomial Approximation, *Springer-Verlag New York.*
- Andrievskii, V.V., Belyi, V.I., Dzydyk, V.K., 1995, Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Plane Atlanta: *World Federation Publ. Comp.*, 199.
- Bary, N.K., 1964, A Treatise on Trigonometric Series, *Fizmatgiz, Moscow, 1961 (Russian).*- *English transl.: Pergamon Press, MacMillan, New York.*
- Başarır, M., 2010, Kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisi (2. bs.), *Adapazarı: Sakarya Yayıncılık*, 339 s.
- Başkan, T., 1998, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, *Baskı Vipaş*, 360 s.
- Batchaev, I. M., Mamedkhanov, D.I. 1978.(Rusça). Approach to quasiconformal arc with regular metric, *Tez.Dokl.I.Resp.Konf.Asp.Vuz, Azerb.*
- Belinskii, P. P., 1974, (Rusça). General Properties of Quasiconformal Mappings, *Novosibirsk Nauk.*
- Belyi, V. I., 1977, Conformal mappings and the approximation of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary, *Mat. Sb. (N.S.)* 102 (144):3, 331-361; *Math. USSR-Sb.*, 31:3, 289-317.

- Belyi, V. I., 1979, Approximation of functions of the classes  $A'(\overline{G})$  in finite domains with a quasiconformal boundary, *Theory of Functions and Mappings* (G. D. Suvorov, editor), *Naukova Dumka Kiev*, pp. 37-62.
- Bernstein, S.N., 1912, Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes, *Proceedings of 5th International Mathematical Congress* Vol. 1, 256-266.
- Böttcher, A., Karlovich, Yu.I., 1997, Carleson Curves, Muckenhoupt Weights and Teopltz Operators, *Birkhäuser*, Basel.
- Butzer, P.L. and Nessel, R.J., 1971, Fourier Analysis and Approximation, *Academic Press*, New York and London, 554p.
- Cavus, A., Israfilov, D., 1995, Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of class  $L_p(\Gamma)$  With  $1 < p < \infty$ , *Approximation Theory and its Applications*, 11 (1), 105-118.
- Chebyshev, P.L., 1953, Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, *Mémoires de l' Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg*, 7 (1854). 539-568.
- Conway, J.B., 1995, Functions of one Complex Variable II. *Springer-Verlag*, Berlin, New York, London.
- David G., 1984, Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 17, 157-189.
- De Vore R.A., 1986, Approximation by Rational Functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 98 (4), 601-604.
- De Vore, R.A. and Lorentz, G.G., 1993, Constructive Approximation, *Springer Berlin Heidelberg* New York.
- Dönmez, A., 1999, Karmaşık Fonksiyonlar Kuramı, *Beta Yayınları*, Istanbul, 555 s.
- Duren., P. L., 2001, ‘Univalent Functions’, *Springer-Verlag*, New York, 384 s.
- Dzyadyk, V., 1972. On the application of generalized Faber polynomials to the approximation of Cauchy-type integrals and functions of classes  $A_r$  in domains with a smooth and a piecewise-smooth boundary. *Ukrainian Mathematical Journal*, 24(1), 1-13.
- Dzyadyk, V., 1977, Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials, *Nauka*, Moscow.
- Dzyadyk, V. K., 1959. On a problem of SM Nikol'skii in a complex region. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 23(5), 697-736.
- Dzyadyk, V. K., 1966. Approximation of functions by positive linear operators and singular integrals. *Matematicheskii Sbornik*, 112(4), 508-517.
- Dzyadyk, V. K., 1975. On the theory of the approximation of functions on closed sets of the complex plane (apropos of a certain problem of SM Nikol'skii). *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*, 134, 63-114.

- Dzyadyk, V.K., and Shevchuk, I.A. 2009. Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials, *Brill Academic Publishers*.
- Favard, J., 1936, Application de la formule sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques ou presque-périodiques, *Matematisk Tidsskrift K B.H.* 4, 81-94.
- Favard, J., 1937. Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynômes trigonométriques, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 61, 209-224, 243-256.
- Favard, J., 1949. Sur l'approximation dans les espaces vectoriels, *Anali di Matematica Pura ed Applicabile.*, (4) 24, 259-291.
- Gaier, L., 1987, On Complex Approximation, *Birkhause, Boston*, Stut Basel.
- Goluzin, G. M., 1968, Geometric Theory of Functions of a Complex Variable, Translation of Mathematical Monographs, Vol. 26, *Amer. Math. Soc. Providence, RI*.
- Gonzalez, M. O., 1991, Classical Complex Analysis, *Marcel Dekker Inc*, New York.
- Güven, A., Israfilov D.M., 2005. Rational approximation in Orlicz spaces on Carleson curves, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 12, 223-234.
- Güven, A., Israfilov, D.M., 2006. Approximation in rearrangement invariant spaces in Carleson curves, *East J. Approximation*, 12, 381-395.
- Israfilov D.M., 1987, Approximate, properties of generalized Faber series in an integral metric, *Izv. Akad. Nauk Az. SSR, Ser. Fiz-Tekn. Mat. Nauk*, 2, pp.10-14 (in Russian).
- Israfilov, D.M., 2004. Approximation by  $p$ -Faber-Laurent rational functions in the weighted Lebesgue spaces, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54, 751-765.
- Israfilov, D.M., 2001. Approximation by  $p$ -Faber polynomials in weighted Smirnov class  $E^p(G, \omega)$  and Bieberbach polynomials, *Constructive Approximation*, 17, 335-351.
- Israfilov, D.M., Akgün, R. 2008. Approximation by polynomials and rational functions in weighted rearrangement invariant spaces, *Journal of mathematical analysis and applications*, 346, 489-500.
- Israfilov, D.M., Testici, A., 2016. Approximation by Faber–Laurent rational functions in Lebesgue spaces with variable exponent, *Indagationes Mathematicae*, 27 (4), 914-922.
- Ivanov, V.V., 1958. Some properties of singular integrals, *Izv.Vuzov.Matematica*, 4, 89-95. (Rusca).
- Jackson, D., 1911, Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganzerationale Functionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung, *Diss., Göttingem*.
- Jackson, D., 1912. On approximation by trigonometric sums and polynomials,

- Transaction American Mathematica Society*, 13, 491-515.
- Jackson, D., 1924. A general class of problems in approximation, *American Journal. of Mathematics*, 46, 215-234.
- Jackson, D., 1930, The Theory of Approximation, *Amer. Math. Soc.*, New York.
- Jackson, D., 1941, Fourier series and orthogonal polynomials, *Carus Mathematical Monographs*.
- Jafarov, S., 1987. A direct and an inverse theorem in the theory of approximation on quasiconformal curves, *Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR Ser. Fiz-Tekhn. Mat. Nauk*, 8, 8-11 Russian.
- Jafarov, S.Z., 2008. Approximation of Functions by Faber–Laurent rational functions on closed quasiconformal curves, *Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical–Technical and Mathematical Sciences*, 28, 97-102.
- Jafarov, S.Z., 2011a. Approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces, *J. Comput. Anal. Appl. (JoCAA)*, 13, 953-962.
- Jafarov, S.Z., 2011b. Approximation by rational functions in Smirnov–Orlicz classes, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 379, 870-877.
- Jafarov, S.Z., 2011c. Approximation of functions by rational functions on closed curves of the complex plane, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 36, 1529-1534.
- Jafarov, S.Z., 2015. On approximation of functions by  $p$ –Faber-Laurent rational functions, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 60 (3), 416-428.
- Ji-feng, X., Ming, Z. 2005. A complex approximation on doubly-connected domain, *J. Fudan Univ. Nat. Sci*, 44 (2), 328-331.
- Kocharyan, G.S., 1958. On a generalization of the Laurent and Fourier series, *Izv. Akad. Nauk Arm. SSR Ser. Fiz.-Mat. Nauk* 11 (1), 53-77.
- Kolmogorov, A.N., 1935. Zur Größenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen, *Ann. of Mathem.* 36, 521-526.
- Lebedev N. A., and Shirokov N. A . 1971. The uniform approximation of functions on closed sets that have a finite number of angular points with nonzero exterior angles, *Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR Ser. Mat.* 6, 311-341.
- Lebedev N.A., Tamrazov P. M. 1970. Inverse approximation theorems on regular compact of the complex plane, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 6 (4), 1340-1390. (Russian).
- Lebesgue, H., 1898. Sur l'approximation des fonctions, *Bulletin Science Mathematica*, 2, 22, 278-287.
- Lehto, O., Virtanen, K., 1973. Quasiconformal Mapping in the Plane, *Springer Verlag*, Berlin, Heidelberg, New York.
- Lesley F. D., Vinge V.S. and Warschawski S.E., 1974. Approximation by Faber-Polynomials for a class of Jordan Domains, *Math.Z.* 138, pp.225-237.
- Lorentz, G.G., 1966, Approximation of Functions, New York, *Chicago, San Francisco*,

*Toronto, London.*

- Mamedkhanov Dj. I., Salaev V. V., 1980. O new classes of functions related to the local structure of singular integrals and some approximation in them, *Abstract of the All-Union Symposium on Approximation Theory, Ufa*, 91-92. (Russian).
- Mamedkhanov Dj. I., 1980. On a strengthening of the Plemlj-Privalov theorem and the best approximation problem, *Theory of cubature formulas and computational mathematics (Proceedings conference on differential equations and computational mathematics, Novosibirsk, 1978)*, M., 1980, 164-167 (Russian).
- Mamedkhanov Dj. I., 1985. Approximation in the complex plane and singular operators with Cauchy kernel, *Dissertation abstract for the degree of doctor of physical and mathematical Sciences, Tbilisi*. (Russian).
- Markushevich A.I., 1968. Theory of Analytical Functions (in 2 V.), Vol. 2, *Nauka*, Moscow.
- Markushevich, A.I., 1977. Theory of Functions of a Complex Variable, *IIIChelsee Publishing Company*, New York.
- Mhaskar, H.N., 1996. Introduction to the Theory of Weighted Polynomial Approximation, *Series in Approximation and Decompositions 7*, World Sci., River Edge, NJ.
- Mokhammed Ali, 1990. (Rusça).The problems of approximation theory in a complex domain, *Author's summary of candidates dissertation*, Baku.
- Musaev A.A., Seyfullaev P. K., 1986. Direct local theorem approximation on a quasiconformal arc, In book: *Singular integral operators*, Baku, 92-99.
- Musayev, B., 2000, Fonksiyonel Analiz, *Balcı yayınları*, 470 s.
- Natanson, I.P., 1949, Constructive theory of functions, *Moskow-Leningrad: Gostecizdat*, (Russian).
- Nikolski, S.M., 1946. Approximation of functions by trigonometric polynomials in the mean, *Izvestia Akademia Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 10, 207-256. (Russian).
- Nyumen D., (Newman D.J.), 1974. Jackson's theorem on complex arcs. *J. Approximation Theory*, 10, 206 – 217.
- Paatashvili, V. A., 1973. On the boundedness of singular integrals in weighted Lebesgue spaces, *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze*, 43,111-119.
- Pekarskii, A. A., 1994. Uniform rational approximation and Hardy-Sobolev spaces, *Math. Notes*, 56(4), 1082-1088.
- Pekarskii, A.A., 1988. Tchebycheff rational approximation in the disk, on the circle, and on a closed interval, *Math. USSR-Sb*, 61 (1), 87-102.
- Pekarskii, A.A., 1986. Approximation by rational functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 98 (4), 601-604.
- Pekarskii, A. A., 1983. Rational Approximation of absolutely continuous functions with derivative in an Orlicz spaces, *Matyhematics of the USSR-Sbornik*, 45 (1), 121-137.

- Privalov, I.I., 1950. Boundary Properties of Analytic Functions, 2nd ed., *GITTL*, Moscow Leningrad, (Russian).
- Ramazanov, A.-R.K., 1984. On approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces, *Analysis Mathematica*, 10, 117-132.
- Rzaev, R. M., 1981. About some metric characteristics of the functions, Baku, 40 pages- The manuscript was submitted to the Institute of Cybernetics, *Academy of Sciences Azerbaijan SSR*, July 21, No: 3674-81, *Dep. (Deposited article) in VINITI*.
- Salaev, V.V., 1976. Direct and inverse estimates for a singular Cauchy integral along a closed curve, *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR* (19), 221-231.
- Smirnov V.I., Lebedev N.A., 1968. Functions of a Complex Variable, Constructive Theory. Cambridge: *Massachusetts Institute of Technology*.
- Stechkin, S.B., 1951. On the order of approximation of continuous function, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskii*, 15, 219-242.
- Stein, E. M., 1970, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, *Princeton University Press*, Princeton NJ, 304s.
- Stepanets, A.I., 1995. Clasification and Approximation of Periodic Functions, *Naukova Dumka, Kiev*, 1987. (Russian). *English transl.: Kluwer, Dordrecht*.
- Suetin, P. K., 1998. Series of Faber Polynomials, *Cordon and Breach Science Publishers*.
- Tamrazov, P. M., 1973. The sold inverse problem of a polyonimial approximation of functions on a regular compactum. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 37, 148-164; *English transl. in Math. USSR Izv.* 7 (1973).
- Tietz, H., 1955. Laurent-Trennung und zweifach unendliche Faber-Systeme, *Mathematische Annalen*, 129 (1), 431-450.
- Tietz, H., 1957. Faber series and the Laurent decomposition, *Michigan Mathematical Journal*, 4 (2), 157-179.
- Timan, A. F., 1994, Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. *Dover Publications. Russian original*, Moscow: Fizmatgiz, 1960. First English edition, Oxford: *Pergamon Press*, 1963.
- Timan, A.F., and Timan, M.F., 1950. Generalized modulus of continuity and best approximation in the mean, *Doklad Akademia Nauk SSSR* 71, 17-20.
- Timan, M.F., 1958. Converse Theorems of the Constructive Theory of Functions, *Matematicheskii Sbornik*, 46, 125-132.
- Timan, M.F., 1966. On Jackson's Theorem in spaces, *Ukrainian Mathematica Journal*, 18, 134-137.
- Trigub, R.M. and Belinsky, E.S., 2004. Fourier Analysis and Approximation of Functions, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London*.

- Vallée-Poussin, Ch. J. La., 1910. Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle, *Bulletin Academie Science Belgique*, 12, 808-844.
- Vallée-Poussin, Ch. J. La., 1911. Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe, *Buletin de l'Academie Royali des Sciences de Belgique Clesse des Sciences*, 199-211.
- Vallée-Poussin, Ch. J. La., 1919, Leçons sur l'approximation des fonctions d'unevariable reele, *Paris, Gautier-Villars*.
- Walsh, J.L., 1934. On approximation to analytic function by rational functions of best approximation, *Mathematische Zeitschrift*, 38, 163-176.
- Walsh, J.L., 1935. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, *American Mathematical Soc. Russian transl. Moscow (IL): 1961*.
- Weierstrass, K., 1885. Über die analytische Darsdellung sogenannter willkürlicher Funktionen einerieelen Veränderlichen, *Sitzungsberichte der Akad. zu. Berlin*, 633-639, 789-805.
- Yurt, H, Guven, A., 2013. Onrational approximation of functions in rearrangement invariant spaces, *J. Class. Analysis*, 3 (1), 69-83.
- Yurt, H, Guven, A., 2014. Approximation by Faber- Laurent rational functions on doubly connected domains, *New Zealand J. Math.* 44, 113-124.
- Zill, D. G., Shanahan, P., 2003. A First Course in Complex Analysis with Applications. *Jones and Barlett Publishers, USA, 449 S*.
- Zygmund, A., 1959. Trigonometric series, 2nd ed. Voll I.II, *Cambridge University Press, Cambridge*.