



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**RIESZ UZAYLARI ÜZERİNDE ZAYIF
İSTATİSTİKSEL SIRA YAKINSAKLIK**

İshak AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2026
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**RIESZ UZAYLARI ÜZERİNDE ZAYIF
İSTATİSTİKSEL SIRA YAKINSAKLIK**

İshak AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Muhammed ÇINAR

Jüri: Dr. Öğr. Üyesi Sabahattin ILBIRA

Jüri: Dr. Öğr. Üyesi Reha YAPALI

Ocak-2026
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

İshak AYDIN tarafından hazırlanan "**Riesz Uzayları Üzerinde Zayıf İstatistiksel Sıra Yakınsaklık**" adlı tez çalışması 20/01/2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Dr. Öğr. Üyesi Sabahattin ILBIRA
Amasya Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Danışman

Prof. Dr. Muhammed ÇINAR
Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Reha YAPALI
Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .././.... Tarih ve ../... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Bu tez çalışması TÜBİTAK tarafından 2210-A Yurt içi Genel Yüksek Lisans Burs Programı ile desteklenmiştir.

Prof. Dr. Selçuk SAĞIR

FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

İshak AYDIN

Tarih:20/01/2026

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RIESZ UZAYLARI ÜZERİNDE ZAYIF İSTATİSTİKSEL SIRA YAKINSAKLIK

İshak AYDIN

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Muhammed ÇINAR

Bu çalışma, σ -sıra sürekli dual $E_c^\sim$ tarafından karakterize edilen, Riesz uzaylarında yeni bir yakınsaklık türü olan zayıf istatistiksel sıra yakınsaklığı kuramını tanıtmakta ve geliştirmektedir. Önerilen bu yakınsaklık, vektör latislerinde istatistiksel yakınsaklık ve sıra yakınsaklığı kuramları arasında köprü kuran birleştirici bir çerçeve sunmaktadır. Çalışmada, doğrusallık, limitlerin tekliği ve pozitif koninin kaplılığı da dahil olmak üzere, bu yakınsaklığın temel latis-teorik özellikleri ortaya konulmaktadır. $L_1[0, 1]$ ve c_0 gibi uzaylarda özenle oluşturulmuş karşı örnekler aracılığıyla, bu yakınsaklığın hem istatistiksel sıra yakınsaklığından hem de olağan sıra yakınsaklığından kesin olarak daha zayıf olduğu gösterilmektedir. Ayrıca, zayıf istatistiksel sıra Cauchy dizileri tanıtmakta ve bunların, σ -sıra sürekli normlarla donatılmış Banach latislerinde istatistiksel norm sınırlılık ile olan ilişkisi araştırılmaktadır. Elde edilen sonuçlar, toplanabilirlik kuramı ile Riesz uzaylarının sıra yapısını birbirine bağlayan yeni bir dizisel yaklaşım sunmaktadır.

2026, 25 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Banach latis, istatistiksel yakınsaklık, Riesz uzayı, sıra sürekli operatör, Zayıf istatistiksel sıra yakınsaklık.

ABSTRACT

MS THESIS

WEAK STATISTICAL ORDER CONVERGENCE ON RIESZ SPACES

İshak AYDIN

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Muhammed ÇINAR

This paper introduces and develops the theory of *weak statistical order convergence*, a new mode of sequential convergence in Riesz spaces characterized by the σ -order continuous dual, denoted by $E_c^\sim$. The proposed convergence provides a unifying framework that bridges the theories of statistical convergence and order convergence in vector lattices. We establish its fundamental lattice-theoretic properties, including linearity, uniqueness of limits, and the closedness of the positive cone. Through carefully constructed counterexamples in spaces such as $L_1[0, 1]$ and c_0 , we demonstrate that this convergence is strictly weaker than both statistical order convergence and ordinary order convergence. Furthermore, we introduce weakly statistically order Cauchy sequences and investigate their relationship with statistical norm boundedness in Banach lattices endowed with σ -order continuous norms. Our results provide a new sequential approach that connects summability theory with the order structure of Riesz spaces.

2026, 25 Pages

Keywords: Banach lattice, order continuous operator, Riesz space, statistical convergence, weak statistical order convergence.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca her türlü görüş ve düşünceleriyle bana yol gösteren, desteğini ve katkılarını esirgemeyen saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. Muhammed ÇINAR’a, “TÜBİTAK 2210/A Yurt İçi Genel Lisansüstü Burs Programı” desteğinden dolayı TÜBİTAK kurumuna ve eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan canım aileme sonsuz teşekkürler.

İshak AYDIN

MUŞ-2026

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	4
3. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
3.1 Riesz Uzayları	5
3.2 İstatistiksel Yakınsaklık.....	9
3.3 Riesz Uzaylarında İstatistiksel Yakınsaklık	11
4. ZAYIF İSTATİSTİKSEL SIRA YAKINSAKLIK.....	13
KAYNAKLAR.....	23
ÖZGEÇMİŞ	25

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
E^+	: E nin pozitif kısmı
$x \vee y$	: x ve y nin supremumu
$x \wedge y$	: x ve y nin infimumu
θ	: E Riesz uzayının sıfır vektörü
x^+	: x ve θ in supremumu
x^-	: $-x$ ve θ in supremumu
$ x $	: x ve $-x$ in supremumu
E^*	: E nin topolojik duali
$L(E, F)$	: E den F ye tüm operatörlerin (doğrusal dönüşümler) uzayı
$L_b(E, F)$	: E den F ye tüm sıra sınırlı operatörlerin uzayı
$E^\sim$	: σ -Sıra sınırlı dual
$E_c^\sim$	: σ -Sıra sürekli dual
$E_n^\sim$	: Sıra sürekli dual
$(x_n) \downarrow x$	: (x_n) aşağı yönlendirilmiş olup infimumu x tir
$(x_n) \uparrow x$	: (x_n) yukarı yönlendirilmiş olup supremumu x tir
$\delta(K)$	: K kümesinin doğal yoğunluğu
$ K $	: K kümesinin eleman sayısı (kardinalitesi)

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, pür ve uygulamalı matematiğin temel unsurlarındandır; zira birçok uzaydaki tanımlar ve olgular, dizilerin ve ağların yakınsaklıklarıyla karakterize edilir. Topolojik uzaylarda en yaygın yakınsaklık biçimi topolojik yakınsaklıktır. Ancak bazı uzaylarda, topolojik bir yapı olmaksızın da yakınsaklık kavramı tanımlanabilir. Riesz uzaylarında sıra yakınsaklığı, sıra sürekli operatörleri tanımlamak için kullanılır ve bu tanım için herhangi bir topolojik yapı gerektirmez. Gorokhova (1996), Riesz uzaylarındaki sıra yakınsaklığının, uzayın sonsuz boyutlu olduğu durumlarda topolojik olmadığını göstermiştir. Benzer şekilde Ordman (1966), yakınsaklığın her zaman bir topoloji ile tanımlanamayacağını belirtmiştir. Riesz uzay teorisinde, istatistiksel sıra yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık gibi topolojik olmayan yakınsaklık türlerinin önemi iyi bilinmektedir (Abramovich ve Sirotkin, 2005; Albayrak ve Pehlivan, 2012; Aydın, 2020, 2022; Aydın ve ark., 2021b).

İstatistiksel yakınsaklık kavramı, gerçek sayılardaki klasik yakınsaklığın bir benzeri olarak öncelikle Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından bağımsız olarak çalışılmıştır. Daha sonra Schoenberg (1959), istatistiksel yakınsaklığın temel özelliklerini tesis etmiş ve onu bir toplanabilirlik yöntemi olarak incelemiştir. Uzun yıllar önce tanımlanmış olmasına rağmen, istatistiksel yakınsaklık aktif bir araştırma alanı haline gelmeye devam etmektedir (Bhardwaj ve ark., 2007; Ercan, 2009; Fekete, 1953; Fridy ve Orhan, 1997; Fridy, 1985; Pehlivan ve Mamedov, 2000; Tripathy, 1997). İstatistiksel yakınsaklık, sıra yakınsaklık yardımıyla Riesz uzayları üzerinde tanımlanmıştır (Albayrak ve Pehlivan, 2012; Aydın, 2020, 2022, 2024; Sencimen ve Pehlivan, 2012). Bu kavramla ilgili literatürde; Beattie ve Butzmann (2013) normlu uzaylarda zayıf istatistiksel yakınsaklığı tanıtmış, Nuray (2011) laküner zayıf istatistiksel yakınsaklığı incelemiş, Tripathy (1998) istatistiksel sınırlı diziler üzerine çalışmış ve Ercan ve ark. (2020) ertelenmiş zayıf istatistiksel yakınsaklığa odaklanmıştır.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin yoğunluğuna dayanmaktadır. $\mathbb{N}$ nin bir K alt kümesinin *doğal yoğunluğu* (veya *asimptotik yoğunluğu*),

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \in K : k \leq n\}|$$

olarak tanımlanır. Burada $|\{k \in K : k \leq n\}|$ ifadesi, K kümesinin n den küçük veya n ye

eşit olan elemanlarının sayısını (kardinalitesini) göstermektedir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

şartı sağlanırsa, (x_n) dizisi L sayısına *istatistiksel olarak yakınsaktır* denir ve $st\text{-}\lim x_k = L$ ile gösterilir.

Vektör latileri veya diğer adıyla Riesz uzayları kavramı kökenini Riesz (1928) in çalışmalarından almaktadır. O tarihten beri bu teori; ölçü teorisi, operatör teorisi ve ekonomi gibi matematiğin birçok farklı disiplinde kendine yer bulmuştur (bkz. Abramovich ve Aliprantis (2002a,b); Aliprantis ve Border (2006); Aliprantis ve Burkinshaw (2003, 2006); Aydın ve ark. (2021b); Huijsmans (1991); Lowdenslager (1957); Luxemburg ve Zaanen (1971); Meyer-Nieberg (1991); Niven ve ark. (1991); Schaefer (1974); Vulikh (1967); Wickstead (2001); Wnuk (1999); Zaanen (1983, 1997)). Sıra sürekli operatörler ve istatistiksel sıra kompakt operatörler gibi çeşitli operatör sınıfları, sıra yakınsaklığı kullanılarak başarılı bir şekilde karakterize edilebilmiştir (Aydın, 2024).

Bir E kümesi üzerinde tanımlanan " $\leq$ " bağıntısı yansıma, ters simetrik ve geçişkenlik özelliklerini sağlıyorsa, E kümesine *kısmen sıralı küme* denir. Kabul edelim ki bir E vektör uzayı üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlanmış olsun. Bir E vektör uzayı üzerindeki sıralama bağıntısı, toplama ve skaler çarpma işlemleriyle uyumluysa; yani her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ iken $x + z \leq y + z$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (negatif olmayan skaler) için $\alpha x \leq \alpha y$ sağlanıyorsa, $(E, \leq)$ ikilisine sıralı vektör uzayı denir. E sıralı bir küme iken, eğer E üzerindeki sıralamaya göre her x, y eleman çiftinin supremumu ve infimumu mevcutsa, E ye Riesz uzayı veya *vektör latis* (*vector lattice*) adı verilir. Bir E Riesz uzayında (x_n) dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için;

$$|x_n - x| \leq p_n$$

olacak şekilde $p_n \downarrow \theta$ (sıfıra azalan) olan başka bir (p_n) dizisi mevcut ise (x_n) dizisi $x \in E$ noktasına *sıra* (*order*) yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{o} x$ sembolüyle gösterilir.

Bu çalışmada, normlu uzaylar için tanımlanmış olan zayıf istatistiksel yakınsaklık kavramı, Riesz uzayları bağlamında σ -sıra sürekli dual $E_c^\sim$ kullanılarak genişletilmekte ve *zayıf istatistiksel sıra yakınsaklığı* olarak adlandırılan yeni bir yakınsaklık tipi tanıtılmaktadır. Önerilen bu yakınsaklık, vektör latilerindeki istatistiksel yakınsaklık teorisi ile sıra yapısı arasında bir köprü oluşturarak bütünleştirici bir çerçeve sunmaktadır. Çalışma

kapsamında, bu yakınsaklığın doğrusallık, limitlerin tekliği ve pozitif koninin kapalılığı gibi temel latis-teorik özellikleri ortaya konmaktadır. Özellikle $L_1[0, 1]$ ve c_0 gibi uzaylarda inşa edilen karşı örneklerle, bu yeni modun hem istatistiksel sıra yakınsaklığından hem de sıradan sıra yakınsaklığından kesin olarak daha zayıf olduğu gösterilmektedir. Ayrıca, zayıf istatistiksel sıra Cauchy dizileri tanıtılarak, bunların σ -sıra sürekli normlara sahip Banach latislerindeki istatistiksel norm sınırlılığı ile ilişkisi araştırılmaktadır.



2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Riesz uzaylarında yapılan araştırmaların kökeni, Frigyes Riesz in 1928 yılında Bologna da düzenlenen bir konferansta sunulan "Lineer Fonksiyonların Ayrışımı" başlıklı makalesine dayanmaktadır (Riesz, 1928). Bu alan, 1930 larda Kantorovich in önemli katkıları ile daha da gelişmiştir (Kantorovitch, 1937). Zamanla artan ilgi ile Nakano (1950), Lowdenslager (1957) ve Vulikh (1967) bu alanda çalışmalar yapmışlardır. Riesz uzayları, matematiksel analiz ve diğer disiplinlerde, örneğin oyun teorisi, denge teorisi, ölçüm teorisi ve ekonomi alanlarında uygulama bulmuştur (Abramovich ve Aliprantis, 2002a; Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, 2006; Gutman, 1996; Huijsmans, 1991; Luxemburg ve Zaanen, 1971; Zaanen, 1983).

Araştırmacılar, farklı yakınsaklık kavramlarını tanımlamak için yakınsaklık yapısını detaylı olarak incelemişlerdir. Hyland (1979) topolojik olmayan yakınsaklık türlerini araştırdı. Dahası, Beattie ve Butzmann (2013), yakınsaklık yapılarının teorisi üzerine önemli bulgular sunmuştur. Aydın ve ark. (2021b) ise Riesz uzaylarında tam kafes yakınsaklığını tanıtmıştır.

Fonksiyonel analizde, istatistiksel yakınsaklık büyük bir önem taşımaktadır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından temel alınmıştır. Bu kavram, Buck (1953) ve Fekete (1953) tarafından reel ve kompleks diziler için incelenmiştir. Fridy (1985), istatistiksel Cauchy dizisi kavramını tanıtmış ve bu kavramın istatistiksel yakınsamaya eşdeğer olduğunu göstermiştir. Ayrıca, Fridy (1985), istatistiksel monotonluk kavramını tanıtmış, ancak istatistiksel yakınsaklık için monoton yakınsaklık teoremi Tripathy (1998) tarafından sunulmuştur. $\mathbb{R}^n$ de istatistiksel yakınsaklık kavramı ise Pehlivan ve Mamedov (2000) tarafından araştırılmıştır. Riesz uzaylarında istatistiksel yakınsaklığın bir karakterizasyonu Ercan (2009) tarafından ortaya konulmuştur. Sencimen ve Pehlivan (2012) Riesz uzaylarında istatistiksel monoton yakınsaklık ve istatistiksel sıra yakınsaklık kavramlarını tanıtmıştır. Bu makale ile ilgili araştırmalar, normlu uzaylarda zayıf istatistiksel yakınsamanın tanıtıldığı Beattie ve Butzmann (2013) ve laküner zayıf istatistiksel yakınsamanın özelliklerini inceleyen Nuray (2011) tarafından yapılmıştır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmanın geri kalanında ihtiyaç duyulacak temel tanım ve teoremler sunulmaktadır. Kısmi sıralı yapılar, Riesz uzayları, istatistiksel yakınsaklık ve bunların Riesz uzaylarındaki genellemeleri ele alınacaktır. Temel kaynaklar olarak (Abramovich ve Aliprantis, 2002a; Albayrak ve Pehlivan, 2012; Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, 2006; Aydın, 2020; Aydın ve ark., 2021b; Beattie ve Butzmann, 2013; Fridy ve Orhan, 1997; Fridy, 1985; Gutman, 1996; Huijsmans, 1991; Luxemburg ve Zaanen, 1971; Sencimen ve Pehlivan, 2012; Vulikh, 1967; Wickstead, 2001; Zaanen, 1983) referans alınmıştır.

3.1 Riesz Uzayları

Tanım 3.1 E boştan farklı bir küme ve $\leq$, E de bir bağıntı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa E ye *kısmi sıralı küme* denir ve $(E, \leq)$ şeklinde gösterilir:

- (1) Her $x \in E$ için $x \leq x$;
- (2) Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ iken $x = y$;
- (3) Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ iken $x \leq z$.

Eğer kısmi sıralanmış bir kümede her eleman, tanımlanan bağıntıya göre birbirleriyle karşılaştırılabilirse bu kümeye *tam sıralı küme* denir.

Tanım 3.2 E gerçel sayılar üzerinde tanımlı bir vektör uzayı ve $\leq$ bağıntısı E de bir sıralama bağıntısı olsun. Eğer;

- (1) Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ iken $x + z \leq y + z$,
- (2) Her $x, y \in E$, $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ iken $\lambda x \leq \lambda y$,

şartları sağlanırsa $(E, \leq)$ *sıralı vektör uzayı* olarak adlandırılır.

Tanım 3.3 E bir sıralı vektör uzayı, A da bu uzayın herhangi bir alt uzayı olsun. Eğer

- (1) Her $x \in A$ için $x \leq z$,
- (2) Her $x \in A$ ve $x \leq y$ olacak şekildeki her $y \in E$ için $z \leq y$,

şartları sağlanırsa z elemanına A kümesinin *supremumu* denir ve $\sup(A) = z$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, eğer;

(1) Her $x \in A$ için $z \leq x$,

(2) Her $x \in A$ ve $y \leq x$ olacak şekildeki her $y \in E$ için $y \leq z$,

şartları sağlanırsa z elemanına A kümesinin *infimumu* denir ve $\inf(A) = z$ ile gösterilir.

Tanım 3.4 E sıralı vektör uzayı ve θ , E nin sıfır vektörü olsun. $\theta \leq x$ şartını sağlayan E nin x elemanına *pozitif eleman* denir. E nin bütün pozitif elemanlarının kümesi,

$$E_+ = \{x \in E : \theta \leq x\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.5 E sıralı bir küme olsun. Eğer E üzerindeki sıralamaya göre her x ve y elemanının supremum ve infimumu varsa ve bu değerler E kümesine ait ise E uzayına bir *latis* denir. E vektör uzayına ise *Riesz uzayı* veya *vektör lattice* adı verilir.

Aşağıda bazı Riesz uzay örnekleri verilmiştir.

Örnek 3.1

(1) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere;

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

şeklinde tanımlanan $\leq$ koordinatsal sıralamasıyla birlikte $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı bir Riesz uzayıdır.

(2) $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere;

$$x \leq y \iff x_1 < y_1 \text{ veya } x_1 = y_1 \text{ ve } x_2 < y_2$$

sıralaması (lexicographic ordering) ile birlikte $\mathbb{R}^2$ bir Riesz uzayıdır.

(3) $\mathbb{R}^x$ bir X kümesi üzerinde tanımlı tüm reel değerli fonksiyonların ailesini belirtmek üzere $f, g \in \mathbb{R}^x$ için;

$$f \leq g \iff \forall x \in X, f(x) \leq g(x)$$

şeklinde tanımlı olan " $\leq$ " noktasal sıralama bağıntısı ile birlikte $\mathbb{R}^x$ bir Riesz uzayıdır.

Teorem 3.1 E bir Riesz uzayı ise her $x, y, z \in E$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ve $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
- (ii) $x \vee y = y \vee x$ ve $x \wedge y = y \wedge x$
- (iii) $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$ ve $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$
- (iv) $x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$

Tanım 3.6 E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun.

- (1) $x \vee \theta$ elemanına x in pozitifliği denir ve x^+ ile gösterilir.
- (2) $(-x) \vee \theta$ elemanına x in negatifliği denir ve x^- ile gösterilir.
- (3) $(-x) \vee x$ elemanına x in modülü (*mutlak değeri*) denir ve $|x|$ ile gösterilir.
- (4) Her $x, y \in E$ için $x \wedge y = \theta$ ise x ile y elemanları *birbirine diktir* denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

Teorem 3.2 E bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) $x \vee y = -((-x) \wedge (-y))$
- (ii) $x \wedge y = -((-x) \vee (-y))$
- (iii) $x + y = x \vee y + x \wedge y$
- (iv) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$
- (v) $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$
- (vi) $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$ ve $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$
- (vii) $x = x^+ - x^-$
- (viii) $|x| = x^+ + x^-$
- (ix) $x^+ \wedge x^- = \theta$

Teorem 3.3 E Riesz uzayı ve her $x, y, z \in E$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

- (i) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ ve $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$
- (ii) Eğer $x, y, z \geq \theta$ ise $x \wedge (y + z) \leq x \wedge y + x \wedge z$

Teorem 3.4 E sıralı vektör uzayı için aşağıdakiler birbirine denktir.

- (i) E bir Riesz uzayıdır.
- (ii) Her $x \in E$ için $x^+ \in E$ dir.
- (iii) Her $x \in E$ için $x^- \in E$ dir.
- (iv) Her $x \in E$ için $|x| \in E$ dir.

Tanım 3.7 E bir Riesz uzayı olsun. Herhangi $a, b \in E$ iki eleman ve $a \leq b$ olmak üzere $\{x \in E : a \leq x \leq b\}$ kümesine E de bir *sıralı aralık* denir ve $[a, b]$ ile gösterilir.

Bir $A \subseteq E$ alt kümesi için $A \subseteq [a, b]$ olacak şekilde $a, b \in E$ varsa A ya E de sıra sınırlı küme denir.

Tanım 3.8 E sıralı vektör uzayı ve $A \subseteq E$ olsun.

- (1) Eğer her $x, y \in A$ için $x \leq z$ ve $y \leq z$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa, A ya *yukarı yönlendirilmiş küme* denir ve $A \uparrow$ biçiminde gösterilir. A yukarı yönlendirilmiş küme ve E içinde $\sup(A) = a$ varsa, $A \uparrow a$ biçiminde gösterilir.
- (2) Eğer her $x, y \in A$ için $z \leq x$ ve $z \leq y$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa, A ya *aşağı yönlendirilmiş küme* denir ve $A \downarrow$ biçiminde gösterilir. A aşağı yönlendirilmiş küme ve E içinde $\inf(A) = a$ varsa, $A \downarrow a$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.9 E Riesz uzayında her $x \in E_+$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n^{-1} \cdot x \downarrow \theta$ şartı sağlanırsa, E ye *Archimedean Riesz uzayı* denir.

Örnek 3.2 $\mathbb{R}^2$ üzerinde, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \text{ ve } x_2 \leq y_2$$

sıralamasına göre Archimedean Riesz uzayıdır. Fakat, $\mathbb{R}^2$ lexicographic sıralamaya göre Archimedean özelliğine sahip olmayan bir Riesz uzayıdır.

Tanım 3.10 E bir Riesz uzayı olsun. E nin boştan farklı ve üstten sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir alt kümesinin) supremumu ya da alttan sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir alt kümesinin) infumumu varsa E Riesz uzayına *Dedekind tam* (σ -Dedekind tam) Riesz uzayı denir.

Tanım 3.11 (x_n) bir Riesz uzayı E içinde bir dizi olsun. Eğer E içinde bir $(q_n) \downarrow \theta$ dizisi var ve her n için $|x_n - x| \leq q_n$ sağlanır ise (x_n) dizisi $x \in E$ ye *sıra (order) yakınsar* $(x_n \xrightarrow{o} x)$ denir.

Sıra yakınsama ile $\mathbb{R}$ üzerindeki geleneksel yakınsama örtüşmektedir (Vulikh, 1967, s.29). Okuyucunun sıra yakınsama hakkında detaylı bir tartışma için (Abramovich ve Sirotkin, 2005) ye başvurması önerilir. Öte yandan, iki Riesz uzayı arasındaki bir operatör (doğrusal fonksiyon) $T : E \rightarrow F$ için;

- (1) Eğer her $x \in E^+$ için $T(x) \geq \theta$ olursa T ye *pozitif operatör*,
- (2) E nin sıra sınırlı kümelerini F nin sıra sınırlı kümelerine gönderiyorsa *sıra sınırlı operatör*,
- (3) Her $x_n \xrightarrow{o} \theta$ dizisi için $Tx_n \xrightarrow{o} \theta$ sağlanırsa T ye σ -sıra sürekli operatör denir.

Önemli bir nokta, σ sembolünün Riesz uzaylarında genellikle dizilerle uğraşılırken kullanılmaktadır; bu nedenle çalışmamızda bu notasyonu kullanacağız. İki Riesz uzayı arasındaki bir pozitif $T : E \rightarrow F$ operatörünün σ -sıra sürekli olması için azalan herhangi bir $x_n \downarrow \theta$ dizisi için $Tx_n \downarrow \theta$ sağlanması gerekir ve bunun tersi her zaman doğru değildir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006, Exer.30, s.48). Bir σ -sıra sürekli operatörün genel olarak sıra sınırlı olması gerekmez. Tüm *sıra sınırlı lineer fonksiyonlar* kümesini içeren $E^\sim$ vektör uzayı, E nin sıra duali olarak adlandırılır ve özellikle $E^\sim = L_b(E, \mathbb{R})$ olarak gösterilir. Tüm σ -sıra sürekli lineer fonksiyonlar kümesini $E_c^\sim$ olarak gösteririz. Böylece, $E_c^\sim \subseteq E^\sim$ kapsamının geçerli olduğu açıktır (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, s.59).

3.2 İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.12 Pozitif tam sayılar kümesi $\mathbb{N}$ in bir K alt kümesi verilsin. $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ kümesini alalım. $|K| = \text{card}(K)$ (K kümesinin kardinalitesi) olmak üzere;

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{K_n}{n} \right|$$

ve

$$\overline{\delta}(K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{K_n}{n} \right|$$

limitlerine, sırasıyla K kümesinin *alt ve üst yoğunluğu* denir. $\overline{\delta}(K) = \underline{\delta}(K)$ ise bu durumda $(\frac{K_n}{n})$ dizisinin limiti mevcuttur denir. Bu limit " $\delta(K)$ " ile gösterilir ve K kümesinin *doğal*

yoğunluğu (*asymptotic density*) denir. $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

ile gösterilir (Niven ve ark., 1991). Şimdi doğal yoğunluk ile ilgili bazı özellik ve örnekleri verelim.

- (i) Eğer $K \subseteq \mathbb{N}$ sonlu ise $\delta(K) = 0$ olur.
- (ii) Eğer $K = \mathbb{N}$ ise $\delta(K) = \frac{n}{n} = 1$ olur.
- (iii) Eğer $K = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\} = T$ ise $\delta(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.
- (iv) Eğer $K = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = C$ ise $\delta(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.
- (v) $K = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ ise $\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$.
- (vi) $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ ise $\delta(K_1 \cup K_2) = \delta(K_1) + \delta(K_2)$
- (vii) $K_1 \subseteq K_2$ ise $\delta(K_1) \leq \delta(K_2)$ olur.
- (viii) $\delta(K) = 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus K)$

Tanım 3.13 Bir (x_n) dizisi verilsin. Herhangi x ve her $\varepsilon > 0$ için

$$K(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geq \varepsilon\}$$

sıfır doğal yoğunluğuna sahip ise (x_n) dizisi x noktasına *istatistiksel yakınsaktır* denir. Ayrıca burada $x = 0$ alınırsa (x_n) dizisine *istatistiksel sıfır dizisi* denir.

Kolaylıkla görülebilir ki yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat bu önermenin tersi her zaman doğru olmayabilir. Yani, istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek 3.3 Reel sayılarda bir (x_n) dizisi alalım. Dizinin terimleri $n = k^2$ olduğu durumlarda $x_n = 1$, diğer durumlarda $x_n = 0$ olarak tanımlayalım. Bu durumda dizinin terimleri $x_k = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots\}$ şeklinde olur. O halde, $K_\varepsilon = \{k : |x_k - l| \geq \varepsilon\} = \{k : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{k : k = n^2\}$ olacağından,

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

sağlanır. Böylece $\text{st-lim } x_n = 0$ elde edilir.

Tanım 3.14 $x = (x_n)$ reel sayıları dizisi için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : |x_n| > A\}) = 0$$

olacak şekilde en az bir sonlu $A > 0$ reel sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine *istatistiksel sınırlıdır* denir (Fridy ve Orhan, 1997).

Tanım 3.15 Bir $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{k : |x_k - x_N| > \varepsilon\}) = 0$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ varsa $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel Cauchy* dizisi denir (Fridy, 1985).

3.3 Riesz Uzaylarında İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklığın Riesz uzaylarında tanımlanması ilk olarak Ercan tarafından (Ercan, 2009) çalışmasında ele alınmıştır. Bu çalışmasında Ercan, Riesz uzaylarında istatistiksel olarak u -uniform yakınsayan dizilerin kavramları üzerine sonuçlar elde etmiştir. Daha sonra Şençimen ve Pehlivan istatistiksel yakınsamayı sıra yakınsama bakımından Riesz uzaylarına genişletmiştir (Sencimen ve Pehlivan, 2012). Son zamanlarda, Aydın ve ark., istatistiksel yakınsama üzerine bazı çalışmaları Riesz uzaylarında ve yerel katı Riesz uzaylarında incelemiştir (Aydın, 2020, 2022, 2024).

Tanım 3.16 Bir E Riesz uzayında (x_n) dizisi verilsin. Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq x_{n+1}$ oluyorsa (x_n) dizisine *monoton artan* denir ve " $x_n \uparrow$ " sembolüyle gösterilir. Benzer olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \leq x_n$ sağlarsa (x_n) dizisi *monoton azalan* denir ve " $x_n \downarrow$ " ile gösterilir.

Tanım 3.17 Bir E Riesz uzayında (x_n) dizisi verilsin. Eğer (x_n) dizisi monoton artan, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin supremumu mevcut ve bir $x \in E$ elemanına eşit ise bu durum $x_n \uparrow x$ sembolüyle gösterilir. Benzer olarak, (x_n) dizisi monoton azalan, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin infimumu mevcut ve bir $x \in E$ elemanına eşit ise bu durum $x_n \downarrow x$ şeklinde ifade edilir. (x_n) dizisi için $x_n \uparrow x$ veya $x_n \downarrow x$ ifadelerinden biri sağlanıyorsa (x_n) dizisi x noktasında *monoton yakınsaktır* denir.

Tanım 3.18 (Tripathy, 1997) $x = (x_n)$ dizisi verilsin. (x_{k_n}) monoton artan ve $\delta(K) = 1$ olacak şekilde $K = \{k_1 < k_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi varsa (x_n) reel sayı dizisine *istatistiksel monoton artandır* denir. Benzer şekilde monoton azalma da tanımlanabilir.

Tanım 3.19 (x_n) bir E Riesz uzayında bir dizi olsun. Eğer doğal yoğunluğu 1 olan bir $K = \{k_1 < k_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ indeks kümesi var (x_{k_n}) azalan ve $\inf_{n \in K} (x_{k_n}) = \theta$ sağlanıyorsa,

bu durumda (x_n) dizisine istatistiksel olarak azalarak sıfıra yakınsar denir. Bu durumda bu yakınsama $x_n \downarrow^{st_0} \theta$ ile gösterilir.

Tanım 3.20 (x_n) , E Riesz uzayında bir dizi ve $x \in E$ olsun. Eğer $q_n \downarrow^{st_0} \theta$ olacak şekilde $K = \{n_1 < n_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ ve $\delta(K) = 1$ ve aynı zamanda $|x_n - x| \leq q_n$ eşitsizliği tüm $n \in K$ için sağlanırsa (x_n) dizisi x e *istatistiksel sıra yakınsaktır* denir ve $x_n \xrightarrow{st_0} x$ ile gösterilir.

Tanım 3.21 (x_n) , E Riesz uzayında bir dizi olsun. Eğer bir pozitif $e \in E$ vektörü ve $\delta(K) = 1$ şartını sağlayan bir $K = \{n_1 < n_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ indeks kümesi mevcut ve $|x_{k_n}| \leq e$ eşitsizliği her $k_n \in K$ için sağlanıyor ise (x_n) dizisine *st₀-sınırlı* denir.



4. ZAYIF İSTATİSTİKSEL SIRA YAKINSAKLIK

Bu bölüm, çalışmanın temelini oluşturan esas kavram olan zayıf istatistiksel sıra yakınsaklığı tanıtmakta ve bu tanım üzerine inşa edilen temel sonuçları sunmaktadır. Aksi belirtilmedikçe, E bir Riesz uzayı olarak varsayılacaktır.

Tanım 4.1 E bir Riesz uzayı ve (w_n) , E de bir dizi olsun. Eğer her $g \in E_c^\sim$ σ -sıra sürekli lineer fonksiyoneli için, $(g(w_n))$ reel sayı dizisi istatistiksel olarak 0 a yakınsıyorsa, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : |g(w_n)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

koşulu sağlanıyorsa, (w_n) dizisi θ ya *zayıf istatistiksel sıra yakınsaktır* denir ve $w_n \xrightarrow{w-st_0} \theta$ şeklinde gösterilir.

Tanımdan görüleceği üzere, bir (w_n) dizisinin w ye zayıf istatistiksel sıra yakınsaması $(w_n \xrightarrow{w-st_0} w)$ için gerek ve yeter koşul, her $g \in E_c^\sim$ fonksiyoneli için $g(w_n - w)$ dizisinin sıfıra istatistiksel yakınsamasıdır.

Sonuç 4.1 (i) $C([0, 1])$ Riesz uzayının σ -sıra sürekli dualinin yalnızca sıfır fonksiyoneli ibaret olması nedeniyle, bu uzaydaki her dizi zayıf istatistiksel sıra yakınsaktır (bkz. (Zaanen, 1997, Exam.21.6(ii))).

(ii) $1 \leq p < \infty$ için $L_p[0, 1]$ uzayında, zayıf istatistiksel yakınsaklık ile zayıf istatistiksel sıra yakınsaklık kavramları örtüşmektedir (bkz. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, s.59) ve (Meyer-Nieberg, 1991, Exam.(v), s.9)).

(iii) $S : E \rightarrow F$, Riesz uzayları arasında σ -sıra sürekli bir pozitif operatör olsun. E de $w_n \xrightarrow{w-st_0} w$ ise, o zaman F de $S(w_n) \xrightarrow{w-st_0} S(w)$ sağlanır; zira her $g \in F_c^\sim$ için $g \circ S \in E_c^\sim$ dir.

(iv) E , σ -sıra sürekli norma sahip sonlu boyutlu bir Banach latisi olsun. Bu durumda, zayıf istatistiksel sıra yakınsaklık istatistiksel norm yakınsaklığı gerektirmektedir (bkz. (Beattie ve Butzmann, 2013, Thm.2.3(iii))).

(v) Eğer (w_n) dizisi w ye zayıf sıra yakınsak ise, yani her $g \in E_c^\sim$ için $g(w_n) \rightarrow g(w)$ ise, o zaman $w_n \xrightarrow{w-st_0} w$ dir.

Örnek 4.1 $E = L_1[0, 1]$ uzayını standart L_1 -normu ile bir Riesz uzayı olarak ele alalım. Bu uzay aynı zamanda bir Banach latisidir (bkz. (Abramovich ve Aliprantis, 2002b, Prob. 2.3.3, s. 73)) ve norm duali E^* , $L_\infty[0, 1]$ uzayına izometrik izomorftur. E üzerindeki normun sıra

sürekli olması (bkz. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, s. 187)), sıra duali $E^\sim$, norm duali E^* ile σ -sıra sürekli dual $E_c^\sim$ 'in üçünün de çakışması sonucunu doğurur (bkz. (Abramovich ve Aliprantis, 2002a, Thm. 1.33)). Her $n \in \mathbb{N}$ ve $t \in [0, 1]$ için $w_n(t) = \sin(\pi nt)$ şeklinde tanımlanan (w_n) dizisini inceleyelim.

- (1) *Zayıf istatistiksel sıra yakınsaklık:* $w_n \xrightarrow{w-st_0} \theta$ olduğunu gösterelim. $g \in E_c^\sim$ keyfi bir fonksiyonel olsun. $E_c^\sim \cong L_\infty[0, 1]$ olduğundan, her $y \in E$ için $g(y) = \int_0^1 y(t)\phi(t) dt$ olacak şekilde bir $\phi \in L_\infty[0, 1]$ fonksiyonu vardır. Riemann–Lebesgue lemmasından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin(\pi nt) \phi(t) dt = 0$$

elde edilir. $\mathbb{R}$ 'deki olağan yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiğinden, her $g \in E_c^\sim$ için $g(w_n) \xrightarrow{st} 0$ sağlar. Dolayısıyla $w_n \xrightarrow{w-st_0} \theta$ 'dır.

- (2) *Modülüs dizisinin yakınsamaması:* $(|w_n|)$ dizisinin zayıf istatistiksel sıra yakınsak olmadığını gösterelim. Bunun için, $(g(|w_n|))$ skaler dizisinin sıfıra istatistiksel yakınsamadığı bir $g \in E_c^\sim$ fonksiyoneli bulmak yeterlidir. $g \in E^*$ fonksiyoneli, $\mathbf{1} \in L_\infty[0, 1]$ sabit fonksiyonuna karşılık gelen, yani her $y \in E$ için

$$g(y) := \int_0^1 y(t) dt$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyoneli $|w_n|$ üzerinde değerlendirirsek, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$g(|w_n|) = \int_0^1 |\sin(\pi nt)| dt = \frac{2}{\pi}$$

bulunur. Böylece $(g(|w_n|))$ dizisi sabit $\frac{2}{\pi}$ dizisidir. $\varepsilon = \frac{1}{\pi}$ alındığında, her $n \in \mathbb{N}$ için $|g(|w_n|) - 0| = \frac{2}{\pi} > \frac{1}{\pi} = \varepsilon$ olur. Bu durumda,

$$\{n \in \mathbb{N} : |g(|w_n|) - 0| \geq \varepsilon\} = \mathbb{N}$$

kümesinin doğal yoğunluğu 1'dir. O halde $(g(|w_n|))$ dizisi sıfıra istatistiksel yakınsak değildir; dolayısıyla $|w_n|$ dizisi zayıf istatistiksel sıra yakınsak değildir.

Teorem 4.1 E 'deki (w_n) ve (v_n) dizileri verilsin.

- (i) Eğer $w_n \xrightarrow{w-st_0} w$, $v_n \xrightarrow{w-st_0} v$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ise, o zaman $\alpha w_n + \beta v_n \xrightarrow{w-st_0} \alpha w + \beta v$ olur.

- (ii) Eğer $w_n \xrightarrow{w\text{-}st_0} w$ ve $w_n \xrightarrow{w\text{-}st_0} v$ ise ve $E_c^\sim$ uzayı E 'nin noktalarını ayırıyorsa, o zaman $w = v$ olur.

İspat. (i) Herhangi bir $g \in E_c^\sim$ fonksiyoneli için, $g(\alpha w_n + \beta v_n) = \alpha g(w_n) + \beta g(v_n)$ eşitliği geçerlidir. Hipotez gereği $g(w_n) \xrightarrow{st} g(w)$ ve $g(v_n) \xrightarrow{st} g(v)$ olduğundan, reel dizilerde istatistiksel yakınsaklığın lineerliği ile $\alpha g(w_n) + \beta g(v_n) \xrightarrow{st} \alpha g(w) + \beta g(v)$ elde edilir. Bu ise $\alpha w_n + \beta v_n \xrightarrow{w\text{-}st_0} \alpha w + \beta v$ anlamına gelir.

(ii) $w_n \xrightarrow{w\text{-}st_0} w$ ve $w_n \xrightarrow{w\text{-}st_0} v$ olduğundan, her $g \in E_c^\sim$ için $g(w_n) \xrightarrow{st} g(w)$ ve $g(w_n) \xrightarrow{st} g(v)$ sağlanır. Reel sayı dizilerinde istatistiksel limitin tekliği gereği tüm $g \in E_c^\sim$ için $g(w) = g(v)$ olur. $E_c^\sim$ uzayı E 'nin noktalarını ayırdığından dolayı $w = v$ sonucuna ulaşılır. $\square$

E 'deki bir (w_n) dizisi, her $g \in E_c^\sim$ fonksiyoneli için $g(w_n) \rightarrow 0$ oluyorsa θ 'ya *zayıf sıra yakınsaktır* denir.

Teorem 4.2 E bir Riesz uzayı olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) E 'de zayıf sıra yakınsak olan her dizi, aynı zamanda zayıf istatistiksel sıra yakınsaktır.
- (ii) E , σ -sıra sürekli norma sahip bir Banach latisi ise, norma göre yakınsak olan her dizi zayıf istatistiksel sıra yakınsaktır.
- (iii) E , σ -sıra sürekli norma sahip bir Banach latisi olduğunda, zayıf istatistiksel yakınsaklık ile zayıf istatistiksel sıra yakınsaklık kavramları çakışır.
- (iv) E , sıra sürekli norma sahip bir Banach latisi ise, her disjoint ve sıra sınırlı dizi zayıf istatistiksel sıra anlamında sıfıra yakınsar.

İspat. (i) (w_n) dizisinin θ 'ya zayıf sıra yakınsak olduğunu varsayalım; yani her $g \in E_c^\sim$ için $g(w_n) \rightarrow 0$ olsun. Keyfi bir $g \in E_c^\sim$ ve $\varepsilon > 0$ seçelim. $g(w_n) \rightarrow 0$ olduğundan, öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki bütün $n \geq n_0$ için $|g(w_n)| < \varepsilon$ sağlanır. Bu durumda $\{n \in \mathbb{N} : |g(w_n)| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonludur, dolayısıyla doğal yoğunluğu sıfırdır. O halde her $g \in E_c^\sim$ için $g(w_n) \xrightarrow{st} 0$ 'dır, yani $w_n \xrightarrow{w\text{-}st_0} \theta$.

(ii) E üzerindeki normun σ -sıra sürekli olduğunu ve $w_n \rightarrow w$ (norm yakınsaklığı) olduğunu varsayalım. Her sürekli lineer fonksiyonel norm sürekli olduğundan, her $g \in E^*$ için $g(w_n) \rightarrow g(w)$ 'dir. Normun σ -sıra sürekli olması nedeniyle $E^* = E_c^\sim$ eşitliği geçerlidir (bkz. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, Exer. 5(b), s. 204)). Bu nedenle, her $g \in E_c^\sim$ için

$g(w_n) \rightarrow g(w)$ olur. $\mathbb{R}$ 'deki olağan yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiğinden, her $g \in E_c^\sim$ için $g(w_n) \xrightarrow{\text{st}} g(w)$; yani $w_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} w$.

(iii) σ -sıra sürekli norm durumunda, yukarıda belirtildiği gibi $E^* = E_c^\sim$ 'dir. Zayıf istatistiksel yakınsaklık her $g \in E^*$ için $g(w_n)$ 'in istatistiksel yakınsaklığı ile, zayıf istatistiksel sıra yakınsaklık ise her $g \in E_c^\sim$ için aynı koşulla tanımlandığından, bu iki kavram özdeştir.

(iv) E 'nin sıra sürekli norma sahip olduğunu ve (w_n) 'in disjoint ve sıra sınırlı bir dizi olduğunu varsayalım. Sıra sürekli norm aynı zamanda σ -sıra sürekli olduğundan, (ii) şıkında kullanılan gerekçeyle $E^* \subseteq E_c^\sim$ 'dir. Diğer taraftan, bir Banach latisinde sıra sürekli norm var ise, her sıra sınırlı küme norm sınırlıdır (bkz. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, Thm. 4.9)). Dolayısıyla (w_n) norm sınırlıdır. Ayrıca disjoint olduğu için (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, Thm. 4.14) gereğince zayıf sıfıra yakınsar; yani her $g \in E^*$ için $g(w_n) \rightarrow 0$ 'dır. Bu durumda, özellikle her $g \in E_c^\sim$ için $g(w_n) \rightarrow 0$ sağlanır. Reel sayılarda yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiğinden, her $g \in E_c^\sim$ için $g(w_n) \xrightarrow{\text{st}} 0$; dolayısıyla $w_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$. $\square$

Teorem 4.3 (w_n) ve (v_n) , E_+ içinde yer alan diziler olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur:

- (i) Eğer $w_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ ve $v_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ ise, o zaman $w_n \vee v_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ olur.
- (ii) Eğer $w_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ ve $v_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ ise, o zaman $w_n \wedge v_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ olur.

İspat. (w_n) ve (v_n) 'nin E_+ içinde olduğunu ve $w_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$, $v_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ koşullarını sağladığını varsayalım.

(i) $g \in E_c^\sim$ keyfi bir fonksiyonel olsun. (Zaanen, 1983, Thm. 84.1)'ya göre $|g|$ modülüsü, E üzerinde pozitif, lineer ve σ -sıra sürekli bir fonksiyoneldir. $w_n, v_n \in E_+$ olduğundan,

$$\theta \leq w_n \vee v_n \leq w_n + v_n$$

eşitsizliği geçerlidir. $|g|$ pozitif bir operatör olduğu için bu sırayı korur; dolayısıyla

$$|g(w_n \vee v_n)| \leq |g|(|w_n \vee v_n|) = |g|(w_n \vee v_n) \leq |g|(w_n + v_n) = |g|(w_n) + |g|(v_n).$$

$w_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ ve $v_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ olduğundan, her $g \in E_c^\sim$ için $g(w_n) \xrightarrow{\text{st}} 0$ ve $g(v_n) \xrightarrow{\text{st}} 0$ sağlanır. Özel olarak $|g| \in E_c^\sim$ için de $|g|(w_n) \xrightarrow{\text{st}} 0$ ve $|g|(v_n) \xrightarrow{\text{st}} 0$ 'dır. Reel sayı dizilerinde istatistiksel yakınsaklık lineer olduğundan, $|g|(w_n) + |g|(v_n) \xrightarrow{\text{st}} 0$ elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik

gereği $g(w_n \vee v_n) \xrightarrow{\text{st}} 0$ olur. g keyfi seçildiğinden, $w_n \vee v_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ sonucuna varılır.

(ii) Benzer şekilde, $w_n \wedge v_n \geq \theta$ ve $w_n \wedge v_n \leq w_n$ olduğundan (çünkü $w_n, v_n \geq \theta$), $|g|$ 'nin pozitifliği ile

$$|g(w_n \wedge v_n)| \leq |g|(w_n \wedge v_n) \leq |g|(w_n).$$

$|g|(w_n) \xrightarrow{\text{st}} 0$ olduğu için $g(w_n \wedge v_n) \xrightarrow{\text{st}} 0$ bulunur. Dolayısıyla $w_n \wedge v_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ 'dır. $\square$

Sonuç 4.2 Teorem 4.3'in genel bir Riesz uzayındaki keyfi diziler için geçerli olmadığını belirtmek gerekir; (w_n) ve (v_n) için pozitiflik varsayımı esastır. Genel olarak kafes işlemleri, zayıf istatistiksel sıra yakınsaklığı korumaz. Bu durum, Örnek 4.1'deki $L_1[0, 1]$ uzayında $w_n(t) = \sin(\pi nt)$ dizisinin hem $w_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ hem de $-w_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} \theta$ olmasına rağmen, $|w_n| = w_n \vee (-w_n)$ modülüs dizisinin zayıf istatistiksel sıra yakınsak olmamasından açıkça görülmektedir. Dolayısıyla, pozitif dizilerle sınırlama yapılması gereklidir ve bu varsayım ihmal edilemez.

Teorem 4.4 Eğer (w_n) dizisi w 'ye istatistiksel sıra yakınsak ise, o zaman (w_n) aynı zamanda w 'ye zayıf istatistiksel sıra yakınsaktır.

İspat. $w_n \xrightarrow{\text{st}_0} w$ olduğunu varsayalım. İstatistiksel sıra yakınsaklığının tanımı gereği, doğal yoğunluğu $\delta(M) = 1$ olan bir $M \subseteq \mathbb{N}$ kümesi ve her $m \in M$ için $|w_m - w| \leq v_m$ eşitsizliğini sağlayan bir $(v_n) \downarrow \theta$ dizisi vardır. $g \in E_c^\sim$ keyfi bir fonksiyonel olsun. (Zaanen, 1983, Lem. 84.1)'ya göre $|g|$ modülüsü de $E_c^\sim$ içinde yer alır, dolayısıyla σ -sıra süreklidir. Bu nedenle $v_n \downarrow \theta$ olduğundan $|g|(v_n) \downarrow 0$ sağlanır.

Her $m \in M$ için, $|g|$ 'nin pozitifliği ve lineerliği kullanılarak

$$|g(w_m) - g(w)| = |g(w_m - w)| \leq |g|(|w_m - w|) \leq |g|(v_m)$$

eşitsizliği elde edilir. $|g|(v_m) \rightarrow 0$ olduğundan, $m \in M$ üzerinde $g(w_m) \rightarrow g(w)$ olur. $\delta(M) = 1$ olduğu için bu, $g(w_n)$ dizisinin $g(w)$ 'ye istatistiksel yakınsadığı anlamına gelir; yani $g(w_n) \xrightarrow{\text{st}} g(w)$. Bu her $g \in E_c^\sim$ için doğru olduğundan $w_n \xrightarrow{\text{w-st}_0} w$ sonucuna varılır. $\square$

Sonuç 4.3 Her istatistiksel sıra yakınsak dizi zayıf istatistiksel sıra yakınsaktır.

Aşağıdaki örnek, zayıf istatistiksel sıra yakınsaklığın ne sıra yakınsaklığı ne de istatistiksel sıra yakınsaklığı gerektirmediğini göstermektedir.

Örnek 4.2 Sıfıra yakınsayan tüm reel dizilerin uzayı olan $E := c_0$ Riesz uzayını ele alalım. E 'nin bir Banach latisi olduğu iyi bilinmektedir (Meyer-Nieberg, 1991, Exam.(i), s. 8). Üzerindeki norm sıra süreklidir (Meyer-Nieberg, 1991, s. 92), bu da normun aynı zamanda

σ -sıra sürekli olduğu anlamına gelir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, s. 59). c_0 uzayının standart norm duali ℓ_1 'e izometrik izomorftur; dolayısıyla σ -sıra sürekli dual $E_c^\sim$ de ℓ_1 olarak tanımlanır (bkz. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, Exer. 5, s. 204)). Ayrıca $E_c^\sim$ 'in E 'nin noktalarını ayırdığını not edelim.

E 'nin standart birim vektörlerinden oluşan (e_n) dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin zayıf istatistiksel sıra yakınsak olduğunu gösterelim. Herhangi bir $g = (a_m) \in \ell_1 \cong E_c^\sim$ için $g(e_n) = a_n$ 'dir. $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| < \infty$ olduğundan $a_n \rightarrow 0$ 'dır, yani $g(e_n) \rightarrow 0$ 'dır. $\mathbb{R}$ 'deki yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığı gerektirdiğinden, her $g \in E_c^\sim$ için $g(e_n) \xrightarrow{st} 0$ sağlanır. O halde $e_n \xrightarrow{w-st_0} \theta$ 'dır.

Şimdi (e_n) dizisinin sıra yakınsak olmadığını gösterelim. Aksini varsayalım, yani $e_n \xrightarrow{o} \theta$ olsun. Bu durumda E 'de $v_n \downarrow \theta$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|e_n| \leq v_n$ olacak şekilde bir (v_n) dizisi vardır. Ancak n 'inci koordinata bakıldığında $1 \leq v_n(n)$ olur. $v_n \downarrow \theta$ olduğundan, her sabit k için $v_n(k) \downarrow 0$ olmalıdır; fakat $v_n(n) \geq 1$ ile bu çelişir. Dolayısıyla (e_n) sıra yakınsak değildir.

Son olarak (e_n) 'in istatistiksel sıra yakınsak olmadığını kanıtlayalım. Varsayalım ki $e_n \xrightarrow{st_0} \theta$ olsun. O zaman doğal yoğunluğu $\delta(M) = 1$ olan bir $M \subseteq \mathbb{N}$ kümesi ve $v_n \downarrow \theta$ olan bir (v_n) dizisi vardır öyle ki her $m \in M$ için $|e_m| \leq v_m$ 'dir. Yine m 'inci koordinattan $1 \leq v_m(m)$ elde edilir. $v_n \downarrow \theta$ olduğu için, özellikle $v_n \downarrow^{st_0} \theta$ sağlanmalıdır; yani yoğunluğu 1 olan bir $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi üzerinde v_n sıfıra azalmalıdır. $M \cap K$ kümesinin yoğunluğu da 1'dir ve bu kümedeki her n için hem $1 \leq v_n(n)$ hem de $v_n(n) \rightarrow 0$ olması gerekir ki bu imkânsızdır. Çelişki, (e_n) 'in istatistiksel sıra yakınsak olmadığını gösterir.

Teorem 4.5 E , sıra sürekli duali $E_c^\sim$ ayırıcı olan bir Riesz uzayı olsun. Eğer (w_n) , E_+ içinde bir dizi ise ve $w_n \xrightarrow{w-st_0} w$ ise, o zaman $w \in E_+$ dır.

İspat. Öncelikle, her pozitif $g \in E_c^\sim$ fonksiyoneli için $g(w) \geq 0$ olduğunu gösterelim. $g \in E_c^\sim$, $g \geq \theta$ olsun. $w_n \in E_+$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $g(w_n) \geq 0$ 'dır. $w_n \xrightarrow{w-st_0} w$ olduğu için $g(w_n) \xrightarrow{st} g(w)$ 'dir. Reel sayı dizilerinde, istatistiksel limit pozitif bir dizinin terimleriyle sınırlanmışsa pozitifdir (veya en azından negatif değildir). Daha kesin olarak, eğer bir (x_n) dizisi x 'e istatistiksel yakınsıyorsa ve her n için $x_n \geq 0$ ise, o zaman $x \geq 0$ 'dır. Dolayısıyla $g(w) \geq 0$ elde ederiz.

Şimdi $w \geq \theta$ olduğunu göstermek istiyoruz. $w = w^+ - w^-$ şeklindeki ayrışımını göz önüne alalım. $w^- = \theta$ olduğunu göstermek yeterlidir. $g \in E_c^\sim$, $g \geq \theta$ keyfi bir pozitif

fonksiyonel olsun. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, Thm. 1.23)'ye göre,

$$g(w^-) = \sup\{-h(w) : \theta \leq h \leq g\}.$$

$E_c^\sim$ 'in, sıra dual $E^\sim$ içinde bir bant (dolayısıyla bir ideal) olduğu bilinmektedir (bkz. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, Thm. 1.73)). Bu nedenle, eğer $\theta \leq h \leq g$ ise, $h \in E_c^\sim$ 'dir. İspatın ilk kısmında her pozitif $h \in E_c^\sim$ için $h(w) \geq 0$ olduğunu göstermiştik. Dolayısıyla, $-h(w) \leq 0$ 'dır. Bu, yukarıdaki supremumun alındığı kümenin her elemanının sıfırdan küçük veya eşit olduğu anlamına gelir; yani

$$g(w^-) = \sup\{-h(w) : \theta \leq h \leq g\} \leq 0.$$

Öte yandan g ve w^- pozitif olduğundan $g(w^-) \geq 0$ 'dır. O halde $g(w^-) = 0$ olmalıdır. Bu eşitlik $E_c^\sim$ 'daki her pozitif g fonksiyoneli için doğrudur. $E_c^\sim$ 'ın E 'yi ayırdığını varsaydıgımızdan, $w^- = \theta$ sonucuna varırız. Böylece $w = w^+ \in E_+$ olur. $\square$

Teorem 4.6 $w_n \xrightarrow{w\text{-}st_0} w$ ve $v_n \xrightarrow{w\text{-}st_0} v$ iki dizi olsun ve $E_c^\sim$ uzayı E 'nin noktalarını ayırsın. Eğer her n için $w_n \perp v_n$ ise ve mutlak değer işlemi zayıf istatistiksel sıra yakınsaklığı koruyorsa (yani $w_n \xrightarrow{w\text{-}st_0} w$ iken $|w_n| \xrightarrow{w\text{-}st_0} |w|$), o zaman $w \perp v$ olur.

İspat. Her n için $w_n \perp v_n$, yani $|w_n| \wedge |v_n| = \theta$ olsun. Mutlak değer işleminin sürekliliği hipotezi ile $w_n \xrightarrow{w\text{-}st_0} w$ ve $v_n \xrightarrow{w\text{-}st_0} v$ 'den $|w_n| \xrightarrow{w\text{-}st_0} |w|$ ve $|v_n| \xrightarrow{w\text{-}st_0} |v|$ elde edilir. Kafes işlemlerinin (özellikle infimumun) zayıf istatistiksel sıra yakınsaklığı koruduğunu varsayarsak (veya bu, pozitif diziler için Teorem 4.3 gereği doğrudur; ancak burada $|w_n|$ ve $|v_n|$ pozitif olduğundan aynı argüman uygulanabilir), o zaman

$$\theta = |w_n| \wedge |v_n| \xrightarrow{w\text{-}st_0} |w| \wedge |v|.$$

Zayıf istatistiksel sıra limiti tek olduğundan (Teorem 4.1(ii) ve $E_c^\sim$ 'in ayırma özelliği sayesinde) $|w| \wedge |v| = \theta$, yani $w \perp v$ sonucu çıkar. $\square$

Teorem 4.7 ℓ_1 uzayındaki bir (w_n) dizisi istatistiksel norm yakınsak ise, o zaman zayıf istatistiksel sıra yakınsaktır.

İspat. $E := \ell_1$ üzerinde $\|w_n\| \xrightarrow{st} 0$ olduğunu varsayalım. ℓ_1 sıra sürekli norma sahip bir Banach latissidir (bkz. (Schaefer, 1974, s. 92)). Dolayısıyla norm duali, sıra duali ve σ -sıra sürekli duali çıkar: $E^* = E^\sim = E_c^\sim = \ell_\infty$ (bkz. (Meyer-Nieberg, 1991, Thm. 2.4.2(i-

vii)) ve (Abramovich ve Aliprantis, 2002a, Thm. 1.33)). $w_n \xrightarrow{w\text{-st}_0} \theta$ olduğunu, yani her $g \in E_c^\sim = \ell_\infty$ için $g(w_n) \xrightarrow{\text{st}} 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$g \in \ell_\infty$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Her n için

$$|g(w_n)| \leq \|g\|_\infty \|w_n\|$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik,

$$\{n \in \mathbb{N} : |g(w_n)| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \|w_n\| \geq \frac{\varepsilon}{\|g\|_\infty}\right\}$$

küme kapsamasını verir. Hipoteze göre $\|w_n\| \xrightarrow{\text{st}} 0$ olduğundan, sağ taraftaki kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır. Dolayısıyla sol taraftaki kümenin de doğal yoğunluğu sıfırdır. Bu, her $g \in \ell_\infty$ için $g(w_n) \xrightarrow{\text{st}} 0$ demektir; yani $w_n \xrightarrow{w\text{-st}_0} \theta$. $\square$

Sonuç 4.4 ℓ_1 uzayı Schur özelliğine sahiptir; başka bir deyişle, bu uzaydaki zayıf yakınsak her dizi norm anlamında da yakınsaktır (bkz. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, Thm. 4.32)). Bu durum, istatistiksel yakınsaklık bağlamında benzer bir özelliğin olup olmadığı sorusunu akla getirmektedir: Acaba ℓ_1 ’de zayıf istatistiksel sıra yakınsak her dizi istatistiksel norm yakınsak mıdır? (Beattie ve Butzmann, 2013, Theorem 2.3(iii)) çalışmasında da belirtildiği üzere, bu tür bir çıkarım yalnızca sonlu boyutlu uzaylarda geçerlidir. ℓ_1 uzayı sonsuz boyutlu olduğundan, zayıf istatistiksel sıra yakınsaklık istatistiksel norm yakınsaklığı gerektirmez. Dolayısıyla, Teorem 4.7 ile verilen istatistiksel norm yakınsaklıktan zayıf istatistiksel sıra yakınsaklığa olan implikasyonun tersi genel olarak doğru değildir.

Tanım 4.2 Bir (w_n) dizisi, her $g \in E_c^\sim$ için $(g(w_n))$ reel dizisi istatistiksel Cauchy ise, (w_n) dizisine *zayıf istatistiksel sıra Cauchy dizisi* denir.

Teorem 4.8 Her zayıf istatistiksel sıra yakınsak dizi, aynı zamanda zayıf istatistiksel sıra Cauchy’dir.

İspat. (w_n) dizisinin w ’ye zayıf istatistiksel sıra yakınsak olduğunu varsayalım. O halde, her $g \in E_c^\sim$ için $g(w_n) \xrightarrow{\text{st}} g(w)$ ’dir. Reel sayı dizilerinde istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy olmayı gerektirdiğinden (bkz. (Fridy, 1985, Thm. 1)), her $g \in E_c^\sim$ için $(g(w_n))$ dizisi istatistiksel Cauchy’dir. Bu da (w_n) ’in zayıf istatistiksel sıra Cauchy olduğu anlamına gelir. $\square$

Aşağıdaki örnek, zayıf istatistiksel sıra Cauchy olmanın, zayıf istatistiksel sıra yakınsak olmayı gerektirmediğini göstermektedir.

Örnek 4.3 $E := c_0$ Riesz uzayını ele alalım. Bilindiği gibi (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, s.59), c_0 'ın σ -sıra sürekli duali $E_c^\sim$, norm duali ℓ_1 ile çakışır. c_0 içindeki (w_n) dizisini

$$w_n := (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ tane}}, 0, 0, \dots)$$

olarak tanımlayalım.

İlk olarak (w_n) 'in zayıf istatistiksel sıra Cauchy olduğunu gösterelim. $g = (a_k) \in \ell_1$ keyfi bir fonksiyonel olsun. O zaman $g(w_n) = \sum_{k=1}^n a_k$ olur. $g \in \ell_1$ olduğundan, $\sum_{k=1}^\infty a_k$ mutlak yakınsaktır ve bir $L \in \mathbb{R}$ limitine sahiptir. Dolayısıyla $g(w_n)$ olağan anlamda L 'ye yakınsar; bu nedenle $(g(w_n))$ dizisi istatistiksel Cauchy'dir (bkz. (Fridy, 1985, Thm. 1)). g keyfi seçildiğinden, (w_n) zayıf istatistiksel sıra Cauchy'dir.

Şimdi (w_n) 'in zayıf istatistiksel sıra yakınsak olmadığını kanıtlayalım. Çelişki için, (w_n) 'in bir $w \in c_0$ 'a zayıf istatistiksel sıra yakınsak olduğunu varsayalım. O zaman, her $g \in \ell_1$ için $(g(w_n))$ dizisi $g(w)$ 'ye istatistiksel yakınsamalıdır. Yukarıdaki hesaplara $g(w_n) \rightarrow \sum_{k=1}^\infty a_k$ olduğundan, her $g \in \ell_1$ için $g(w) = \sum_{k=1}^\infty a_k$ olmalıdır. Özel olarak, her $j \in \mathbb{N}$ için $e_j \in \ell_1$ koordinat fonksiyoneli alalım. Her j için, $n \geq j$ iken $e_j(w_n) = 1$ olduğundan, $e_j(w_n) \rightarrow 1$ 'dir. Bu, $w = (1, 1, 1, \dots)$ anlamına gelir; ancak bu dizi c_0 'da değildir. Dolayısıyla c_0 içinde böyle bir w limiti olamaz ve (w_n) zayıf istatistiksel sıra yakınsak değildir.

E 'deki bir dizi, eğer bir $e \in E$ vektörü ve doğal yoğunluğu 1 olan bir $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi varsa ve her $n \in K$ için $|w_n| \leq e$ ise, *istatistiksel sıra sınırlı* olarak adlandırılır (Sencimen ve Pehlivan, 2012, Tanım 8). Normlu uzaylarda, her zayıf istatistiksel Cauchy dizisi istatistiksel norm sınırlıdır (Beattie ve Butzmann, 2013, Lem. 2.8). Ancak, aşağıdaki örnek, zayıf istatistiksel sıra Cauchy dizilerinin istatistiksel sıra sınırlı olması gerekmediğini ortaya koymaktadır.

Örnek 4.4 $E = c_0$ uzayını ve (e_n) 'yi c_0 içindeki standart birim vektörler dizisi olarak alalım. Herhangi bir $g = (a_k) \in E_c^\sim = \ell_1$ fonksiyoneli için $g(e_n) = a_n$ 'dir. $\sum_{k=1}^\infty |a_k| < \infty$ olduğundan $a_n \rightarrow 0$ olur; dolayısıyla $(g(e_n))$ dizisi olağan anlamda sıfıra yakınsar ve bu nedenle istatistiksel olarak da sıfıra yakınsar. Böylece (e_n) zayıf istatistiksel sıra yakınsaktır ve dolayısıyla zayıf istatistiksel sıra Cauchy'dir.

Şimdi (e_n) dizisinin istatistiksel sıra sınırlı olmadığını gösterelim. Varsayalım ki (e_n) istatistiksel sıra sınırlı olsun. O zaman bir $e = (c_1, c_2, \dots) \in c_0$ vektörü ve doğal

yoğunluğu $\delta(K) = 1$ olan bir $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi vardır öyle ki her $n \in K$ için $|e_n| \leq e$ sağlanır. $|e_n| = e_n$ olduğundan, bu her $n \in K$ için $1 \leq c_n$ demektir. Ancak $e \in c_0$ olduğundan $c_n \rightarrow 0$ 'dır; bu da yeterince büyük n değerleri için $c_n < 1$ olmasını gerektirir. Bu durumda $\{n \in \mathbb{N} : |e_n| \leq e\}$ kümesi sonludur ve dolayısıyla doğal yoğunluğu sıfırdır, ki bu $\delta(K) = 1$ ile çelişir. Sonuç olarak (e_n) dizisi zayıf istatistiksel sıra Cauchy'dir fakat istatistiksel sıra sınırlı değildir. Bu da zayıf istatistiksel sıra Cauchy olmanın istatistiksel sıra sınırlılık gerektirmediğini göstermektedir.

Teorem 4.9 σ -sıra sürekli norma sahip bir Banach latisindeki her zayıf istatistiksel sıra Cauchy dizisi, istatistiksel norm sınırlıdır.

İspat. E , σ -sıra sürekli norma sahip bir Banach latis ve (w_n) , E 'de zayıf istatistiksel sıra Cauchy bir dizi olsun. Normun σ -sıra sürekli olması nedeniyle $E^* = E_c^\sim$ eşitliği geçerlidir (bkz. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003, Exer. 5(b), s. 204)). Tanım gereği, her $g \in E_c^\sim$ için $(g(w_n))$ dizisi istatistiksel Cauchy'dir. $E^* = E_c^\sim$ olduğundan bu, her $g \in E^*$ için $(g(w_n))$ 'nin istatistiksel Cauchy olduğu anlamına gelir. (Beattie ve Butzmann, 2013, Lem. 2.8)'ye göre, bir normlu uzaydaki bir dizi eğer her sürekli lineer fonksiyonel altında istatistiksel Cauchy ise istatistiksel norm sınırlıdır. Dolayısıyla (w_n) istatistiksel norm sınırlıdır. $\square$

Sonuç 4.5 σ -sıra sürekli norma sahip bir Banach latisindeki her zayıf istatistiksel sıra yakınsak dizi, istatistiksel norm sınırlıdır.

KAYNAKLAR

- Abramovich, Y., Sirotkin, G. 2005. On order convergence of nets, *Positivity*, 9 (3), 287.
- Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D., 2002a, An invitation to operator theory, volume 50, *American Mathematical Society Providence*.
- Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D., 2002b, Problems in operator theory, volume 2, *American Mathematical Soc.*
- Albayrak, H., Pehlivan, S. 2012. Statistical convergence and statistical continuity on locally solid Riesz spaces, *Topology and its Applications*, 159 (7), 1887–1893.
- Aliprantis, C.D., Border, K.C., 2006, Infinite Dimensional Analysis, *Springer*, 3rd edition.
- Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 2003, Locally solid Riesz spaces with applications to economics, 105, *American Mathematical Soc.*
- Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 2006, Positive operators, volume 119, *Springer Science and Business Media*.
- Aydın, A. 2020. The statistically unbounded τ -convergence on locally solid Riesz spaces,, *Turkish Journal of Mathematics*, 44 (3), 949–956.
- Aydın, A. 2022. Statistical unbounded order convergence in Riesz spaces, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 585–593.
- Aydın, A. 2024. Statistically order compact operators on Riesz spaces, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 53 (3), 628–636.
- Aydın, A., Emelyanov, E., Gorokhova, S. 2021b. Full lattice convergence on Riesz spaces, *Indagationes Mathematicae*, 32 (3), 658–690.
- Beattie, R., Butzmann, H.P., 2013, Convergence structures and applications to functional analysis, *Springer Science & Business Media*.
- Bhardwaj, V.K., Bala, I., ve ark. 2007. On weak statistical convergence, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2007.
- Buck, R.C. 1953. Generalized asymptotic density, *American journal of mathematics*, 75 (2), 335–346.
- Ercan, S., Altın, Y., Et, M., Bhardwaj, V.K. 2020. On deferred weak statistical convergence, *The Journal of Analysis*, 28, 913–922.
- Ercan, Z. 2009. A characterization of u-uniformly completeness of Riesz spaces in terms of statistical u-uniformly pre-completeness, *Demonstratio Mathematica*, 42 (2), 381–386.
- Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, *Colloquium mathematicae*, 241–244.
- Fekete, A. 1953. Tauberian theorems for ordinary and statistical convergence, statistical limit.
- Fridy, J., Orhan, C. 1997. Statistical limit superior and limit inferior, *Proceedings of the American mathematical society*, 125 (12), 3625–3631.
- Fridy, J.A. 1985. On statistical convergence, *Analysis*, 5 (4), 301–314.
- Gorokhova, S. 1996. Intrinsic characterization of the space $c_0(A)$ in the class of Banach lattices, *Mathematical Notes*, 60, 330–333.
- Gutman, A. 1996. Disjointness preserving operators. in: *Vector Lattices and Integral Operators*, Springer, pp. 359–454.
- Huijsmans, C.: 1991, Lattice-ordered algebras and f-algebras: a survey, Positive operators, Riesz spaces, and economics (Pasadena, CA, 1990) 151-169.
- Hyland, J. 1979. Filter spaces and continuous functionals, *Annals of mathematical logic*, 16 (2), 101–143.
- Kantorovitch, L. 1937. Lineare halbgeordnete Raume, *Mathematical collection*, 2 (1),

- 121–168.
- Lowdenslager, O. 1957. Duality in vector lattices, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8 (3), 476–483.
- Luxemburg, W., Zaanen, A.: 1971, Riesz Spaces. Vol. I. North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London.
- Meyer-Nieberg, P., 1991, Banach Lattices, Universitext, *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg.
- Nakano, H., 1950, Modern spektral teori, volume 2, *Maruzen Company*.
- Niven, I., Zuckerman, H.S., Montgomery, H.L., 1991, An introduction to the theory of numbers, *John Wiley and Sons*.
- Nuray, F. 2011. Lacunary weak statistical convergence, *Mathematica Bohemica*, 136 (3), 259–268.
- Ordman, E. 1966. Convergence almost everywhere is not topological, *Amer Math Monthly*, 73 (2), 182–183.
- Pehlivan, S., Mamedov, M.A. 2000. Statistical cluster points and turnpike, *Optimization*, 48 (1), 91–106.
- Riesz, F., 1928, Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, 1928, 143–148.
- Schaefer, H.H., 1974, Banach Lattices and Positive Operators, *Springer*, Berlin.
- Schoenberg, I.J. 1959. The integrability of certain functions and related summability methods, *The American mathematical monthly*, 66 (5), 361–775.
- Sencimen, C., Pehlivan, S. 2012. Statistical order convergence in Riesz spaces, *Mathematica Slovaca*, 62 (2), 257–270.
- Steinhaus, H., 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloq. math*, 73–74.
- Tripathy, B. 1997. On statistically convergent and statistically bounded sequences, *Bull Malays Math Soc*, 20 (1), 31–33.
- Tripathy, B.C., 1998, On statistical convergence, *Proceeding-Estonian Academy Of Sciences Physics Mathematics*, 299–303.
- Vulikh, B. 1967. Introduction to the theory of partially ordered spaces, Walters-Noordoff Sci, *Publication*, Groningen.
- Wickstead, A. 2001. Kusraev, AG Dominated operators (Mathematics and its Applications, vol. 519, Kluwer, 2000), xiii+ 446 pp., 0 792 36485 6 (hardback), £ 120, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 44 (3), 665–666.
- Wnuk, W., 1999, Banach Lattices with Order Continuous Norms, *Polish Scientific Publishers*.
- Zaanen, A.C., 1983, Riesz spaces II, *Amsterdam*.
- Zaanen, A.C., 1997, Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces, *Springer-Verlag*, Berlin.