T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MİNKOWSKİ UZAYINDA MANYETİK EĞRİLERİN FERMİ-WALKER TÜREVİ

Ummahan Büşra KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2022
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MİNKOWSKİ UZAYINDA MANYETİK EĞRİLERİN FERMİ-WALKER TÜREVİ

Ummahan Büşra KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

Ağustos-2022
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Ummahan Büşra KAYA tarafından hazırlanan "Minkowski Uzayında Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevi" adlı tez çalışması 19/07/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU	…………………..
Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik	
Danışman	
Prof. Dr. Talat KÖRPINAR	…………………..
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik	
Üye	
Dr. Öğretim Üyesi Rıdvan Cem DEMİRKOL	…………………..
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik	

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 28/07/2022 Tarih ve 23/VIII nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Ummahan Büşra KAYA

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MİNKOWSKİ UZAYINDA MANYETİK EĞRİLERİN FERMİ-WALKER TÜREVİ

Ummahan Büşra KAYA

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

Bu tez çalışmasında, Minkowski uzayında Bishop çatısına göre $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ manyetik eğrilerin Fermi Walker türevleri hesaplanmıştır. Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışmanın giriş kısmı verilmiştir. İkinci bölümde, konu hakkında kaynak araştırması yapılmış bilinmesi gereken temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, konu ile ilgili ifade edilen temel tanım ve kavramlar kullanılarak Minkowski uzayı ve Bishop çatısı tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde Minkowski uzayında manyetik eğrilerin Loretz kuvvetleri ile Bishop çatısı arasındaki ilişki verilerek yapılan çalışmalarla ilgili sonuçların analizi verilmiştir. Beşinci bölümde elde edilen manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevleri hesaplanmıştır. Altıncı bölümde ise sonuç kısmı verilmiş, tez genel olarak değerlendirilmiştir.

2022, 72 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Bishop Çatısı, Fermi-Walker Türevi, Lorentz Kuvveti, Manyetik Alan, Manyetik Eğriler, Minkowski Uzayı, Öklid Uzayı.

ABSTRACT

MSTHESIS

FERMI-WALKER DERIVATIVE OF MAGNETIC CURVES IN MINKOWSKI SPACE

Ummahan Büşra KAYA

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science Institute
Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

In this thesis, Fermi-Walker derivatives of $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ magnetic curves are calculated according to the Bishop frame Work in Minkowski space. This study consists of six a parts. In the first chapter, there is the introduction part of the study. In the second part, there are basic definitions and theorems that should be known about the subject. In the third chapter, Minkowski space and Bishop frame work are introduced by using the basic definitions and concepts related to the subject. In the fourth chapter, the relationship between Loretz forces of magnetic curves in Minkowski space and Bishop frame is given and also the analysis of the study results is given. In the fifth chapter, Fermi-Walker derivatives of magnetic curves are calculated. In the six chapter, the conclusion part is given and the thesis is evaluated in general.

2022, 72 Pages

Keywords: Bishop Frame, Fermi-Walker Derivative, Euclidean Space, Lorentz Force, Magnetic Field, Magnetic Curves, Minkowski Space, Euclidean Space.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, çalışmamın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayıran saygıdeğer hocam Prof. Dr. Talat KÖRPINAR'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu süreç boyunca her daim yanımda olan aileme ve değerli eşim Aykut KAYA’ya teşekkür ederim.

Ummahan Büşra KAYA
MUŞ-2022

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$k(s)$	: Eğrilik
R^3	: Üç boyutlu Öklid uzay
(M, g)	: RiemannManifoldu
ϕ	: Lorentz kuvveti
F	: Manyetik alan
$\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}\}$	: Frenet Çatı
$\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}\}$	: Bishop Çatı
$\widetilde{\nabla}_T \boldsymbol{X}$	: Fermi Türev
$C^\infty(M, R)$	: Diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi

1. GİRİŞ

Geometrinin başlangıcı 4000 yıl önceye kadar dayanır. İlk zamanlar geometriden sadece fiziksel ihtiyaçların karşılanması için yararlanılırken, eski Yunanlılar zamanında matematiksel gerçekler üzerinde tartışmalar başlar ve geometri, matematiksel bir sistem olarak geliştirilir. Yunan matematikçilerden Öklid M.Ö. 300'lü yıllarda bugün yakından bildiğimiz geometriyi aksiyomatik bir sistem olarak inşa eder.

Öklid geometrik kavramları oluştururken ilk olarak uzaklık kavramını tanımlamıştır. Matematikte en basit düzeyde uzaklık ölçme, mutlak değer fonksiyonu ile yapılır. Norm, uzunluk kavramının genelleştirilmiş halidir. Örneğin 5'in uzunluğu, 5 sayısının 0'a olan uzaklığı olarak tanımlanır. Bu kavramı genele yaymak için norm kavramı kullanılır ve en genel haliyle; $(X, \langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayı ve x, y bu uzayın elemanları olmak üzere $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ile gösterilir. Metrik ise kelime anlamıyla ölçü demektir ve bir küme üzerinde herhangi bir ölçü tanımlar. Böylece ölçme kavramını genişletir. Metrik fonksiyonunun tanımı incelendiğinde bir kümenin iki elemanı arasındaki mesafe kavramını açıkladığı görülür. $d(x, y) = \|x - y\|$ biçiminde tanımlanan d fonksiyonu, R^n uzayında bir metriktir. Bu metrik ile R^n bir metrik uzay olur. Bu uzaya Öklid Uzay denir ve E^n ile gösterilir. Öklid uzayındaki metrik özelliği oluşturan iç çarpım, bu kümenin kartezyen çarpımının bir fonksiyonudur.

Öklid geometrisi düzlemlerde ve eğikliğin göz ardı edilebileceği küçük ölçeklerde doğru işlesede gerçek hayatta karşılaşılan geometrik problemlerde yetersiz kalmıştır. Buradan hareketle ortaya çıkan Öklid dışı geometriler yüzyılımızda matematikte görülen büyük ilerlemenin önemli faktörlerindendir. Öklid ve Öklid dışı geometrilerin temel farkı paralel doğruları anlayış biçimleridir. Öklid dışı geometrilerin çıkış noktası Öklid'in "Elementler" adlı 13 ciltlik eserinde kullandığı 5 postulattan beşincisi olan paralellik postulatına (Bir doğrunun dışındaki bir noktadan kendisine ancak bir paralel çizilebilir) dayanmaktadır. Küresel geometri "bir doğruya dışındaki bir noktadan hiçbir paralel çizilemez" aksiyomunu kullanırken, hiperbolik geometri "bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel çizilebilir" aksiyomunu kullanmaktadır. Ayrıca Öklid metriği dışında tanımlanan metrikler yardımıyla da yeni geometriler geliştirilmiştir. Bu geometrilerden sık karşılaştığımız Lorentz ve Minkowski geometrileridir (Can, 2018).

Lorentz ve Minkowski üç boyutlu uzaydaki elemanları uzaysal, zamansal, ışıksal olmak üzere üç kategoriye ayırmaya çalışmışlar ve buna uygun

$$\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$$

şeklinde bir metrik tanımlamışlardır. Bu metriğin Öklid iç çarpımından tek farkı üçüncü bileşendeki eksi işaretidir. Bu işaret uzaydaki vektörleri üç farklı çeşide ayırır. Buna göre;

$\langle u, u\rangle > 0$ ise u elemanı uzaysaldır,

$\langle u, u\rangle < 0$ ise u elemanı zamansaldır,

$u \neq 0$ iken $\langle u, u\rangle = 0$ ise u elemanı ışıksaldır.

Burada verilen üç farklı eleman çeşidi Lorentz-Minkowski Uzayını üç bağımsız bölgeye ayırmamıza olanak verir. Ancak bu üç bölgede uygulanan geometri birbirinden tamamen farklıdır. Örneğin ışıksal elemanlar arasında açı kavramı bulunamazken zamansal ve uzaysal bölgelerde elemanlar arasındaki açı hiperbolik fonksiyonlar ile belirlenir. Minkowski uzayının çalışma prensibi bir mega evren içerisinde birbirinden farklı üç paralel evrenin çalışmasına benzetilebilir.

Einstein bu uzayı kullanarak içinde yaşadığımız bu uzayda da 3 farklı eleman olduğunu (ışıksal, zamansal, uzaysal) düşünmüştür ve zaman boyutunu da ekleyerek 3 uzaysal boyut ve zamansal boyut kavramını ortaya atmıştır. Albert Einstein tarafından geliştirilen genel görelilik kuramı aslında bir kütleçekim kuramıdır. Genel görelilik kuramına göre kütle, içinde bulunduğu uzayın bükülmesine neden olur ve iki nokta arasında hareket eden serbest cisimler aradaki en kısa yolu takip eder. Bu kuramın Newton'un kütleçekim kuramından temel farkı, kütle çekimini cisimlerin kütlelerinden kaynaklanan bir kuvvet ile değil uzayın eğriliği ile açıklamasıdır.

16.yy'da Gilbert Dünya'nın dev bir mıknatıs olduğunu keşfetmiş ve o pusulalar ile deneyler yaparak Dünya'nın elektrik-manyetik alan haritasını çıkaran ilk kişi olmuştur. Manyetik alan, hareket eden elektrik yükleri tarafından, zamanla değişen elektrik alanlardan veya temel parçacıklar tarafından içsel olarak üretilir. Manyetik alan vektörel bir büyüklüktür yani yöne ve bir büyüklüğe sahiptir. Bu yön ve büyüklüğe göre manyetik alan tanımlanır. Manyetik alan birçok yerde karşımıza çıkar. Örneğin, dünya kendi manyetik alanını üretir ve bu manyetik alan pusulanın temel çalışma prensibini oluşturur. Bunun yanı sıra dönen manyetik alan, elektrik motorlarında ve jeneratörlerde kullanılır. Buna benzer daha birçok kullanım alanları mevcuttur.

Bir yüklü parçacık V manyetik alanına girdiği zaman bu parçacığın Serret-Frenet vektörleri bu alandan etkilenirler ve bu etkiyle Lorentz kuvveti denilen bir kuvvet açığa çıkar. Lorentz kuvveti, fizikte özellikle elektromanyetizmada; elektromanyetik alanların oluşturduğu noktasal yük üzerindeki elektrik ve manyetik kuvvetlerin bileşkesidir. Ancak bu elektro manyetik kuvvetler bütün resmi kapsamamaktadır. Yüklü parçacıklar, yer çekimi ve nükleer kuvvetler gibi diğer kuvvetlerle de muhtemelen eşleşmişlerdir. Gerçek malzemelerde Lorentz kuvveti yüklü parçacıkların davranışını tanımlamakta hem prensip olarak hem de hesaplama olarak yetersiz kalmaktadır. Karmaşık taşınım denklemleri yüklerin zaman ve uzaydaki tepkilerini belirlemek için çözülmelidir.

Manyetik alandaki yüklü parçacık bu alan içerisinde bir yörünge izlemeye başlar. Bu yörüngeye manyetik eğri adı verilir. Serret–Frenet çatısı eğrilerin analizi için kullanışlı olmasına rağmen, bu çatı eğrinin ikinci türevinin sıfıra eşit olduğu noktalarda tanımlanamamaktadır. Bu yüzden, yeni bir çatıya ihtiyaç duyulmaktadır. Bishop çatısı bu özellikteki noktalarda da tanımlanabilmekte, dolayısıyla herhangi bir uzay eğrisinin analiz edilmesine olanak sağlamaktadır (Bishop, 1975). Bishop çatısı, onu faydalı kılan pek çok özelliğe sahiptir. Bishop çatısının bilgisayar grafikleri ve biyolojide birçok uygulaması vardır. Örneğin, Bishop çatısı ile DNA dizilimlerinin şekli hakkında tahminde bulunulabilir.

Diferansiyel geometride kullanılan ve önemli uygulama alanları olan bir türev çeşidi Fermi-Walker türevi olarak bilinir. Fermi-Walker türevi, genel görelilikte bir koordinat sistemi veya referans çatısı tanımlamak için kullanılan bir süreçtir. Bu yeni türevin geometride ve özellikle paralel vektör alanlarının hareketlerinde önemli bir uygulaması mevcuttur.

Bu tez çalışmasında materyal ve yöntemler başlığı altında gerekli tanımlar verilip Minkowski Uzayında Bishop çatısı tanıtılmıştır. Timelike ve Spacelike manyetik eğrilerin Lorentz kuvvetleri elde edilerek bunların Fermi-Walker türevleri hesaplanmıştır.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

Tanım 2.1 A boş olmayan bir cümle ve K cismi üzerindeki vektör uzayı $\boldsymbol{V}$olsun. Aşağıda verilen önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \to \boldsymbol{V}$$

fonksiyonu varsa, A'ya $\boldsymbol{V}$ ile birleşen bir **afin uzay** denir.

i) $\forall\, P, Q, R \in A$ için

$$f(P,Q) + f(Q,R) = F(P,R)$$

ii) $\forall\, P, Q, R \in A$ ve $\alpha \in \boldsymbol{V}$ için

$$f(P,Q) = \alpha$$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2 R reel sayılar cismini göstermek üzere, $R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in R\}$ vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlanan ,

$$\langle , \rangle : R^n \times R^n \to R$$

$$(x, y) \to \langle x, y \rangle \tag{2.1}$$

fonksiyonu, R^n uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, R^n uzayında **doğal iç çarpım** ya da **Öklid iç çarpım** denir.

$x \in R^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ olmak üzere} \tag{2.2}$$

$$\|,\| = R^n \to R$$

$$x \to \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

fonksiyonu, R^n uzayında bir normdur. Buna göre R^n uzayına normlu vektör uzay denir.

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanan, $d: R^n \times R^n \to R$ fonksiyonu, R^n uzayında bir metriktir. Bu metrik ile R^n bir metrik uzay olur. Bu uzaya **Öklid uzay** denir ve E^n ile de gösterilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.3 I , R'nin bir açık aralığı olmak üzere,

$\alpha: I \subset R \to R^n$ biçiminde diferansiyellenebilir bir α dönüşümüne, R^n uzayı içinde bir **eğri** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.4 $\alpha: I \subset R \to R^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α' nın $\alpha(t)$ nokta vektörüne,

$$\alpha(t) = \frac{d_\alpha}{d_t}|_t = (\frac{d_{\alpha_1}}{d_t}(t), \dots, \frac{d_{\alpha_n}}{d_t}(t)) \tag{2.4}$$

α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **hız vektörü** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.5 $\alpha: I \subset R \to R^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α'nın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise, α eğrisine **regüler bir eğri** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.6 Bir $\alpha: I \subset R \to R^n$ ve $s \to \alpha(s)$ eğrisi için, $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine **birim hızlı eğri** denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.7 R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \to R^n$ eğrisi için,

$$\boldsymbol{T}(s) = \alpha'(s) \tag{2.5}$$

eşitliğiyle belirli $\boldsymbol{T}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir. ***T*** vektör alanına, α eğrisinin **teğet vektör alanı** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.8. R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \to R^3$ eğrisi için, $k: I \to R$ olmak üzere,

$$k(s) = \|T'(s)\| \tag{2.6}$$

fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $k(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.9 R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \to R^3$ eğrisi için ,

$$\boldsymbol{N}(s) = \frac{1}{k(s)} \boldsymbol{T}'(s) \tag{2.7}$$

eşitliği ile belirli $\boldsymbol{N}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birinci dik vektörü (asli normali)** denir. $\boldsymbol{N}$ vektör alanına, α eğrisinin **birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı)** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.10 R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \to R^3$ eğrisi için ,

$$\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s) \tag{2.8}$$

eşitliği ile tanımlı $\boldsymbol{B}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **ikinci dik vektörü (binormali)** denir. $\boldsymbol{B}$ vektör alanına, α eğrisinin **ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı)** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.11 $\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)$ vektörlerine, $\alpha: I \subset R \to R^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Serret-Frenet vektörleri** denir. $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)\}$ kümesine, α eğrisinin α(s) noktasındaki **Frenet çatısı** denir ve ***T*, *N*, *B*** vektör alanlarına, α eğrisi üzerinde **Frenet vektör alanları** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.12 R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \to R^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları ***T*, *N*, *B*** ve $\tau : I \to R$ olmak üzere,

$$\tau(s) = \langle \boldsymbol{B}(s), \boldsymbol{N}(s) \rangle \tag{2.9}$$

fonksiyonuna, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **torsiyonu** (burulması) denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Teorem 2.13 R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \to R^3$ eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları ***T*, *N*, *B*** ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla k ve τ olmak üzere

$$\boldsymbol{T}' = k\boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{N}' = -k\boldsymbol{T} + \tau\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{B}' = -\tau\boldsymbol{N} \tag{2.10}$$

dır (Sabuncuoğlu, 2001).

Teorem 2.14 Birim hızlı olmayan,

$$\alpha: I \subset R \to R^3$$

$$u \to \alpha(u)$$

eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları ***T, N, B*** ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla k ve τ olmak üzere,

$$\boldsymbol{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

$$k = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.15 M diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$g: X(M) \times X(M) \to C^\infty(M, R)$

dönüşümü verilsin,

i) g simetrik yani her $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \epsilon X(M)$ için $g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = g(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$

ii) g bilineer yani her $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \subset X(M)$ ve her $f, h \subset C^\infty(M, R)$ için

$g(f\boldsymbol{X} + h\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) = fg(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}) + hg(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$

iii) g dönüşümü pozitif tanımlı yani her $\boldsymbol{X} \in X(M)$ için $g(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) \geq 0$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme M üzerinde **Riemann metriği** veya **Metrik tensör** ve üzerinde Riemann metriği tanımlanmış manifolda **Riemann manifoldu** denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 2.16 M bir C^∞ manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\boldsymbol{X}(M)$ ve C^∞ fonksiyonların cebiri de $C^\infty(M, R)$ olmak üzere;

$\langle , \rangle: \boldsymbol{X}(M) \times \boldsymbol{X}(M) \to C^\infty(M,R)$

operatörü aşağıdaki özellikleri sağlarsa, M ye bir **yarı-Riemann manifoldu** denir (Hacısalihoğlu, 2002).

i) $\langle , \rangle$ dönüşümü 2-lineerdir,

ii) $\langle , \rangle$ dönüşümü simetriktir,

iii) $\forall Y \in X(M)$ için $\langle X, Y \rangle = 0$ ise $X = 0$

Tanım 2.17 M, n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\boldsymbol{X}(M)$ olmak üzere;

$$\nabla : \boldsymbol{X}(M) \times \boldsymbol{X}(M) \rightarrow \boldsymbol{X}(M)$$

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \rightarrow \nabla(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \nabla_X \boldsymbol{Y}$$

dönüşümü, $\forall X, Y, Z \in X(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, R)$ için,

i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f(\nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z)$

iii) $\nabla_X(fY) = f(\nabla_X Y) + X(f)Y$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya *M* üzerinde bir **Afin Koneksiyon** veya **kovaryant türev** adı verilir (Hacısalihoğlu, 2002).

Tanım 2.18 *(M,g)* *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇'ya *M* üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olmak üzere $\forall X, Y, Z \in X(M)$ için

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

ii) $X_g(Y, Z) = g(\nabla_x Y, Z) + g(Y, \nabla_x Z)$

şartları sağlandığında ∇'ya *M* üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyonu veya *M*'nin **Levi-Civita koneksiyonu** denir (Hacısalihoğlu, 2002).

Tanım 2.19 *(M,g)* *n* -boyutlu semi-Riemann manifoldu olsun. *M* üzerinde *F* kapalı *2*-formu manyetik alandır ve *(M,g)* manifoldu üzerindeki *F* manyetik alanın **Lorentz kuvveti** ϕ herhangi $X = \frac{d_x}{d_t} = 0$ vektör alanları için,

$$g(\phi(X), Y) = F(X, Y) \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir (Kazan ve Karadağ, 2017).

Tanım 2.20 Bir *(M,g)* Riemann manifoldu üzerindeki manyetik eğriler, *F* manyetik alanın etkisi altında *M* üzerinde hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Yani *F*'nin manyetik yörüngeleri, Lorentz denklemindeki *M*'nin eğrileridir. Buradan,

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = \phi(\alpha') \tag{2.12}$$

olur.

M nin geodeziklerinden elde edilen genelleştirilmiş Lorentz denklemi de,

$\nabla_{\alpha'}\alpha' = 0$'dır. (2.13)

Tanım 2.21 3-boyutlu semi-Riemann manifoldunda sapma içermeyen bir vektör alanı, manyetik alan tanımlar. $V \epsilon X(M^n)$'nin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart,

$$L_V g = 0 \quad (2.14)$$

olmasıdır ya da eş değer olarak tüm $p\epsilon M^n$ noktalarında ters-simetrik bir operatördür.

Üç boyutta manyetik alanlar; sapma içermeyen vektör alanları kullanılarak tanımlanabilir. Killing vektör alanlarının sıfır sapması olduğu için, Killing manyetik alan adı verilen özel bir manyetik alan sınıfı tanımlanabilir (Barros vd., 2007).

F_V 'nin Lorentz kuvveti;

$$\phi(X) = V \times V \quad (2.15)$$

dir. (2.12) ve (2.15) denklemlerinden,

$$\nabla_{\alpha'}\alpha' = V \times \alpha' \quad (2.16)$$

elde edilir (Munteanu, 2013; Özdemir vd., 2015).

Tanım 2.22 n-boyutlu Öklid uzayı E^n'de $\vec{x}$ parametre eğrisi boyunca bir $\boldsymbol{X}$ vektör alanı için Öklid türev $\frac{d_x}{d_t}$ olmak üzere,

$$\boldsymbol{X} = \frac{d_x}{d_t} = 0 \quad (2.17)$$

ise X vektör alanına α eğrisi boyunca **Öklid anlamında paraleldir** denir (Hacısalihoğlu, 2002).

Tanım 2.23 V bir reel vektör uzayı olsun. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in V$ için

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise bu dönüşüme V vektör uzayı üzerinde bir **simetrik bilineer formdur** denir.

1. $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X} \rangle$
2. $\langle a\boldsymbol{X} + b\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \rangle = a\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z} \rangle + b\langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \rangle$

$\langle \boldsymbol{X}, a\boldsymbol{Y} + b\boldsymbol{Z} \rangle = a\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle + b\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z} \rangle$

Tanım 2.24 $\langle , \rangle$, V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.

i.) Eğer $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ oluyorsa $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna **pozitif tanımlı,**

ii.) Eğer $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ oluyorsa $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna **negatif tanımlı,**

iii.) Eğer $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ oluyorsa $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna **pozitif yarı tanımlı,**

iv.) Eğer $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ oluyorsa $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna **negatif yarı tanımlı,**

v.) $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ oluyorsa $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna **nondejeneredir**denir.

Tanım 2.25 V bir reel vektör uzayı ve $\langle , \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ bir simetrik bilineer form olsun.

$\langle , \rangle | W \times W \to \mathbb{R}$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu Walt uzayının boyutuna $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formunun **indeksi** denir.

Tanım 2.26 Bir $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı üzerinde Öklid iç çarpımı yerine indeksi 1 olan

$\langle , \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n=1} x_i\, y_i - x_n y_n$$

Lorentz iç çarpımı tanımlanırsa, $\mathbb{R}^n$ uzayına **Lorentz vektör uzayı** denir ve $\mathbb{R}^n_1$ ile gösterilir.

Özel olarak n=3 için bu uzay **Minkowski 3-uzayı** olarak isimlendirilir ve genellikle E^3_1 ile gösterilir.

Tanım 2.27 $\boldsymbol{X}$, $\mathbb{R}^n_1$'de bir vektör olmak üzere $\boldsymbol{X}$, vektörüne,

i.) $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle > 0$ veya $\boldsymbol{X}$=0 ise **spacelike,**

ii.) $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle$ <0 ise **timelike,**

iii.) $\boldsymbol{X} \neq 0$ olmak üzere $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle = 0$ ise **lightlike** veya **null vektör** denir.

Timelike ve null vektörlere **causal vektörler** denir.

Ayrıca, $\boldsymbol{X}$ vektörünün tipi, onun **causal karakteri** olarak adlandırılır.

Tanım 2.28 $\boldsymbol{X}$, s yay parametreli $\alpha: I \subset R \to E^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere

$\widetilde{\nabla}_T \boldsymbol{X} = \nabla_T \boldsymbol{X} - \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{X} \rangle A + \langle A, \boldsymbol{X} \rangle \boldsymbol{T}$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}_T \boldsymbol{X}$ türevine $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **Fermi Walker türevi** denir (Benn ve Tucker, 1989).

Burada $\boldsymbol{T} = \frac{d_\alpha}{d_s}$ ve $A = \frac{d_T}{d_s}$ dir.

Tanım 2.29 $\boldsymbol{X}$, s yay parametreli $\alpha: I \subset R \to E^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere eğri boyunca vektör alanının Fermi Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T \boldsymbol{X} = 0$

ise *X* **vektör alanına** $\alpha(s)$ **uzay eğrisi boyunca** Fermi Walker anlamında paraleldir **denir** (Benn ve Tucker, 1989).

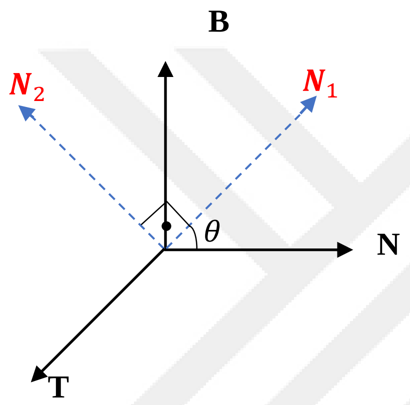
Tanım 2.30 E^3 Öklid uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \to E^3$ eğrisinin teğet vektör alanı $\boldsymbol{T}$ olsun. Eğri boyunca

$\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle = 0$

şartını sağlayan vektör alanları $\boldsymbol{N_1}$ ve $\boldsymbol{N_2} = \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N_1} \rangle$ olmak üzere $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N_1}, \boldsymbol{N_2}$ vektör alanları hareketli $\boldsymbol{\alpha}$ eğrisi boyunca ortonormal bir çatı oluşturur. Bu $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N_1}, \boldsymbol{N_{2,}}\}$ çatısına Bishop Çatısı denir (Bishop, 1975).

3.MINKOWSKI UZAYINDA BISHOP ÇATISI

Bishop, 1975'de eğri boyunca Frenet Çatısına alternatif hareketli bir çatı tanımlamıştır. Alternatif çatıyı tanımlamak için E^3'de Bishop Çatısını, eğri boyunca ortanormal çatının herbir bileşenine götürmüştür. Bu çatı, eğrideki 2. eğriliği yok etmektedir. Çatıda eğrinin $\boldsymbol{T}$ tanjant vektörü ve herhangi uygun keyfi temel $\{\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}\}$ taşıma vektörleri vardır. Burada $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}\}$'e Bishop 3-lüsü ya da Bishop Çatısı (paralel taşıma çatısı) denirken k_1 ve k_2' ye α eğrisinin Bishop eğrilikleri denir (Kazan ve Karadağ, 2017).



Bishop Çatısının türev formülleri,

$\nabla_T \boldsymbol{T} = k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$

$\nabla_T \boldsymbol{N}_1 = -k_1 \boldsymbol{T}$

$\nabla_T \boldsymbol{N}_2 = -k_2 \boldsymbol{T}$

olarak bulunur.

Bishop Çatısı ile Frenet Çatısı arasındaki bağıntı ise,

$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}$

$\boldsymbol{N} = \cos\theta(t)\boldsymbol{N}_1 + \sin\theta(t)\boldsymbol{N}_2$

$\boldsymbol{B} = -\sin\theta(t)\boldsymbol{N}_1 + \cos\theta(t)\boldsymbol{N}_2$

olarak elde edilir.

Burada $\theta(t) = \arctan\frac{k_2}{k_1}$ olarak verilirken, Frenet Çatısına göre eğrinin burulması ve eğriliği sırasıyla

$\tau(t) = \theta'(t)$ ve $\kappa(t) = \sqrt{(k_1)^2 + (k_2)^2}$'dir.

Ayrıca Bishop Eğrilikleri

$k_1 = \kappa cos\theta(t)$

$k_2 = \kappa sin\theta(t)$

ile tanımlanır.

E^3, $\boldsymbol{X}$ vektörlerinden oluşan,

$g(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$

şeklinde Minkowski metrik g'ye karşılık gelen doğrusal bir ∇ bağlantısına sahip olsun. Burada normal üç boyutlu vektör uzay olarak tanımlanan E^3'e 3- boyutlu **Minkowski Uzayı** denir.

Minkowski uzayında üç vektör alanı kategorisi vardır. Şöyle ki;

$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle > 0$ veya $\boldsymbol{X}$=0 ise **spacelike**,
$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle < 0$ ise **timelike,**
$\boldsymbol{X} \neq 0$ olmak üzere $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle = 0$ ise **lightlike** veya **null vektör** denir.
Timelike ve null vektörlere **causal vektörler** denir.
Ayrıca $\boldsymbol{X}$ vektörünün tipi, onun **causal karakteri** olarak adlandırılır (Kazan ve Karadağ, 2017).
Üç boyutlu Minkowski uzayı içinde timelike ve spacelike eğrilerin Bishop çatısı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Eğri timelike ise Bishop Çatısının türev formülleri,

$\nabla_T \boldsymbol{T} = k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$

$\nabla_T \boldsymbol{N}_1 = k_1 \boldsymbol{T}$

$\nabla_T \boldsymbol{N}_2 = k_2 \boldsymbol{T}$

dir.

$\boldsymbol{T}$, eğrinin timelike tanjant vektörü ve $\{\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\}$ Minkowski-3 uzayında çatının geri kalanı için herhangi uygun keyfi temel vektörleridir. $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\}$ eğrinin paralel taşıma üç yüzlüsü ve $\{k_1, k_2\}$ taşıma eğrilikleri olarak adlandırılır (Kazan ve Karadağ, 2017).

Eğri timelike olduğunda Frenet çatısı ile Bishop çatısı arasındaki bağıntı,

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{N} = \cos\theta(t)\boldsymbol{N}_1 + \sin\theta(t)\boldsymbol{N}_2$$

$$\boldsymbol{B} = -\sin\theta(t)\boldsymbol{N}_1 + \cos\theta(t)\boldsymbol{N}_2$$

şeklindedir.

Eğri spacelike ise Bishop Çatsının türev formülleri,

$$\nabla_T \boldsymbol{T} = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$$

$$\nabla_T \boldsymbol{N}_1 = -\epsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T}$$

$$\nabla_T \boldsymbol{N}_2 = -\epsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T}$$

dir.

$\boldsymbol{T}$, eğrinin spacelike tanjant vektörü ve $\{\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\}$ Minkowski-3 uzayında çatının geri kalanı için herhangi uygun keyfi temel vektörleridir. $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\}$ eğrinin paralel taşıma üç yüzlüsü ve $\{k_1, k_2\}$ taşıma eğrilikleri ve $\epsilon_x = g(x, x)$ olarak adlandırılır (Kazan ve Karadağ, 2017).

Eğri spacelike olduğunda Frenet çatısı ile Bishop Çatısı arasındaki bağıntı

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{N} = cos\,h\theta(t)\boldsymbol{N}_1 + sinh\,\theta(t)\boldsymbol{N}_2$$

$$\boldsymbol{B} = sinh\,\theta(t)\boldsymbol{N}_1 + cosh\,\theta(t)\boldsymbol{N}_2$$

şeklindedir.

Ayrıca $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\}$'nin pozitif yönelimli olduğu kabul edildiğinde bu vektörlerin çarpım vektörü ürünleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}_1 = \epsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2$$

$$\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_2 = \epsilon_T \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{T} = \epsilon_{N_1}\boldsymbol{N}_1$$

4.MINKOWSKI-3 UZAYINDA BISHOP ÇATISINA GÖRE MANYETİK EĞRİLER

4.1 Timelike Manyetik Eğriler

4.1.1 $\boldsymbol{T}$ Manyetik Timelike Eğriler

Teorem 4.1 α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında bir $\boldsymbol{T}$ manyetik timelike eğrisi, bu eğrinin Bishop elemanları $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_{2,},k_1,k_2\}$ ve $g(\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{N}_2)=\rho$ diferansiyellenebilen belirli bir fonksiyon olsun. Bu durumda Lorentz kuvveti ve Bishop vektörleri arasındaki ilişki sırasıyla:

$$\phi(\boldsymbol{T})=k_1\boldsymbol{N}_1+k_2\boldsymbol{N}_2$$

$$\phi(\boldsymbol{N}_1)=k_1\boldsymbol{T}+\rho\boldsymbol{N}_2$$

$$\phi(\boldsymbol{N}_2)=k_2\boldsymbol{T}-\rho\boldsymbol{N}_1$$

dir (Kazan ve Karadağ, 2017).

İspat:

İlk olarak $\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_{2,},k_1,k_2\}$ eğrinin Bishop elemanları ile $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz formülleri

$$\phi(\boldsymbol{N}_1)=a_1\boldsymbol{T}+a_2\boldsymbol{N}_1+a_3\boldsymbol{N}_2$$

ve

$$\phi(\boldsymbol{N}_2)=b_1\boldsymbol{T}+b_2\boldsymbol{N}_1+b_3\boldsymbol{N}_2$$

şeklinde yazılsın. Burada a_1 , a_2 , a_3 değerlerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ifadesi $\boldsymbol{T}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T})=a_1\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle+a_2\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}\rangle+a_3\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle$$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T})=-1$ olduğundan

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T})=-a_1$$

veya

$$g\big(\boldsymbol{N}_1,\phi(\boldsymbol{T})\big)=a_1$$

yazılır. $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ eşitliğini yerine yazarsak

$$g(\boldsymbol{N}_1, k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2) = a_1$$

bulunur. Burada iç çarpımın lineerliğinden

$$k_1 g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) + k_2 g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2) = a_1$$

elde edilir. Burada $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) = 1$ ve $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2) = 0$ olduğundan

$$k_1.1 + k_2.0 = a_1$$

ve

$$a_1 = k_1$$

bulunur. Benzer şekilde a_2 değerinini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_1$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_1) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle$$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) = 1$ olduğundan

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_1) = a_2$$

ve

$$a_2 = 0$$

bulunur. Benzer şekilde a_3 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_2$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_2) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle$$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2) = 1$ olduğundan

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_2) = a_3$$

olur. $\boldsymbol{T}$ manyetik alanda $g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_2) = \rho$ belirli fonksiyon olduğundan

$$a_3 = \rho$$

elde edilir. Bulunan a_1, a_2 ve a_3 değerleri $\phi(\boldsymbol{N}_1) = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_2$'de yerine yazılırsa

$$\phi(\boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{N}_2$$

bulunur.

Son olarak b_1 , b_2 , b_3 değerlerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ ifadesi $\boldsymbol{T}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{T}) = b_1\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle + b_2\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}\rangle + b_3\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle$$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}) = -1$ olduğundan

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{T}) = -b_1$$

veya

$$g\big(\boldsymbol{N}_2,\phi(\boldsymbol{T})\big) = b_1$$

yazılır. $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ eşitliğini yerine yazarsak

$$b_1 = g(\boldsymbol{N}_2, k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

bulunur. Burada iç çarpımın lineerliğinden

$$b_1 = k_1 g(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2) + k_2 g(\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_2)$$

elde edilir. Burada $g(\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_2) = 1$ ve $g(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2) = 0$ olduğundan

$$b_1 = k_2$$

bulunur. Benzer şekilde b_2 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_1$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{N}_1) = b_1\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{N}_1\rangle + b_2\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_1\rangle + b_3\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_1\rangle$$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_1) = 1$ olduğundan

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{N}_1) = b_2$$

veya

$$-g\big(\boldsymbol{N}_2,\phi(\boldsymbol{N}_1)\big) = b_2$$

olur. $\boldsymbol{T}$ manyetik alanda $g(\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{N}_2) = \rho$ belirli fonksiyon olduğundan

$$b_2 = -\rho$$

bulunur. Benzer şekilde b_3 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_2$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_2) = b_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2) = 1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_2) = b_3$

ve

$b_3 = 0$

elde edilir. Bulunan b_1, b_2 , b_3 değerleri $\phi(N_2) = b_1\boldsymbol{T} + b_2\boldsymbol{N}_1 + b_3\boldsymbol{N}_2$'de yerine yazılırsa

$\phi(\boldsymbol{N}_2) = k_2\boldsymbol{T} - \rho\boldsymbol{N}_1$

bulunur.

Önerme 4.1 Birim hızlı manyetik timelike α eğrisi, *V* manyetik alanının yörüngesidir gerek ve yeter şart *V* manyetik alan eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$V = \rho\boldsymbol{T} - k_2\boldsymbol{N}_1 + k_1\boldsymbol{N}_2$

İspat:

α manyetik timelike eğrisi ve *V* manyetik vektör alanının yörüngesi

$V = a\boldsymbol{T} + b\boldsymbol{N}_1 + c\boldsymbol{N}_2$

olsun. $V \times \boldsymbol{T} = \phi(\boldsymbol{T})$ olduğundan

$a(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}) + b(\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{T}) + c(\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$

elde edilir. $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T} = 0$, $\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{T} = -\boldsymbol{N}_2$ ve $\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{T} = \boldsymbol{N}_1$ olduğundan

$a(0) + b(-\boldsymbol{N}_2) + c(\boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında

$c\boldsymbol{N}_1 - b\boldsymbol{N}_2 = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$

bulunur. Buradan $b = -k_2$ ve $c = k_1$ elde edilir.

Bulduğumuz katsayıları yerine koyduğumuzda $V = a\boldsymbol{T} - k_2\boldsymbol{N}_1 + k_1\boldsymbol{N}_2$ olur. a'nn eşitini bulmak içinse $\phi(V) = V \times V = 0$ eşitliğini kullanalım.

$\phi(V) = 0$

olduğunda burada $V = a\boldsymbol{T} - k_2\boldsymbol{N}_1 + k_1\boldsymbol{N}_2$ yazılırsa

$\phi(a\boldsymbol{T} - k_2\boldsymbol{N}_1 + k_1\boldsymbol{N}_2) = 0$

ya da

$a\phi(\boldsymbol{T}) - k_2\phi(\boldsymbol{N}_1) + k_1\phi(\boldsymbol{N}_2) = 0$

yazılır. Denklemde $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ değerleri yerine yazılırsa

$a(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2) - k_2(k_1\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{N}_2) + k_1(k_2\boldsymbol{T} - \rho\boldsymbol{N}_1) = 0$

bulunur. $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}_1$ ve $\boldsymbol{N}_2$ değerleri denklemde düzenlenirse

$(-k_1k_2 + k_1k_2)\boldsymbol{T} + (ak_1 - \rho k_1)\boldsymbol{N}_1 + (ak_2 - \rho k_2)\boldsymbol{N}_2 = 0$

veya

$(0)\boldsymbol{T} + (ak_1 - \rho k_1)\boldsymbol{N}_1 + (ak_2 - \rho k_2)\boldsymbol{N}_2 = 0$

elde edilir. Bulduğumuz eşitliğe göre $\boldsymbol{N}_1$ ve $\boldsymbol{N}_2$ değerlerinin sıfıra eşit olması için katsayılarını sıfıra eşitleyelim. İlk olarak $\boldsymbol{N}_1$ değerinin kat sayısını sıfıra eşitlersek

$ak_1 - \rho k_1 = 0$

veya

$ak_1 = \rho k_1$

olur. k_1’ler eşit olduğundan

$a = \rho$

bulunur. $\boldsymbol{N}_2$ değerinin katsayısı içinde gerekli işlemler yapıldığında $a = \rho$ bulunacağından elde edilen $a = \rho$, $b = -k_2$ ve $c = k_1$ katsayıları yerine yazıldığında

$V = \rho\boldsymbol{T} - k_2\boldsymbol{N}_1 + k_1\boldsymbol{N}_2$

elde edilir.

4.1.2 N_1 Manyetik Timelike Eğriler

Teorem 4.2 α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında bir $\boldsymbol{N}_1$ manyetik timelike eğrisi, bu eğrinin Bishop elemanları $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}, k_1, k_2\}$ ve $g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = \mu$ diferansiyellenebilen belirli bir fonksiyon olsun. Bu durumda Lorentz kuvveti ve Bishop vektörleri arasındaki ilişki sırasıyla

$\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + \mu\boldsymbol{N}_2$

$\phi(\boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{T}$

$\phi(\boldsymbol{N}_2) = \mu\boldsymbol{T}$

dir (Kazan ve Karadağ, 2017).

İspat:

İlk olarak $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}, k_1, k_2\}$ eğrinin Bishop elemanları ile $\phi(\boldsymbol{T})$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz formülleri

$\phi(\boldsymbol{T}) = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_2$

ve

$\phi(\boldsymbol{N}_2) = b_1\boldsymbol{T} + b_2\boldsymbol{N}_1 + b_3\boldsymbol{N}_2$

şeklinde yazılsın. Burada a_1 , a_2 , a_3 değerlerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{T})$ ifadesi $\boldsymbol{T}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = -1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}) = -a_1$

ve

$a_1 = 0$

bulunur. Benzer şekilde a_2 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{T})$ ifadesi $\boldsymbol{N}_1$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) = 1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = a_2$

veya

$-g\big(\boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1)\big) = a_2$

yazılır. $\phi(\boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{T}$ eşitliğini yerine yazarsak

$-g(\boldsymbol{T}, k_1\boldsymbol{T}) = a_2$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$-k_1 g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = a_2$

bulunur. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = -1$ olduğundan

$a_2 = k_1$

elde edilir. Benzer şekilde a_3 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{T})$ ifadesi $\boldsymbol{N}_2$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2) = 1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = a_3$

olur. $\boldsymbol{N}_1$ manyetik alanda $g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = \mu$ belirli fonksiyon olduğundan

$a_3 = \mu$

elde edilir. Bulunan a_1 , a_2 , a_3 değerleri $\phi(\boldsymbol{T}) = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_2$'de yerine yazılırsa

$\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + \mu\boldsymbol{N}_2$

bulunur.

Son olarak b_1 , b_2 , b_3 değerlerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ ifadesi $\boldsymbol{T}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}) = b_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = -1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}) = -b_1$

veya

$g\big(\boldsymbol{N}_2, \phi(\boldsymbol{T})\big) = b_1$

olur. $\boldsymbol{N}_1$ manyetik alanda $g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = \mu$ belirli fonksiyon olduğundan

$b_1 = \mu$

bulunur. Benzer şekilde b_2 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_1$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_1) = b_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) = 1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_1) = b_2$

veya

$-g\big(\boldsymbol{N}_2, \phi(\boldsymbol{N}_1)\big) = b_2$

yazılır. $\phi(\boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{T}$ eşitliğini yerine yazarsak

$-g(\boldsymbol{N}_2, k_1\boldsymbol{T}) = b_2$

olur.

İç çarpımın lineerliğinden

$-k_1 g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}) = b_2$

yazılır. Buradan $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}) = 0$ olduğundan

$b_2 = 0$

bulunur. Benzer şekilde b_3 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_2$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_2) = b_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2) = 1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_2) = b_3$

ya da

$b_3 = 0$

bulunur. Bulunan b_1, b_2, b_3 değerleri $\phi(\boldsymbol{N}_2) = b_1\boldsymbol{T} + b_2\boldsymbol{N}_1 + b_3\boldsymbol{N}_2$ 'de yerine yazılırsa

$\phi(\boldsymbol{N}_2) = \mu\boldsymbol{T}$

olarak hesaplanır.

Önerme 4.2 Birim hızlı manyetik timelike α eğrisi, V manyetik alanının yörüngesidir gerek ve yeter şart V manyetik alan eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$V = -\mu \boldsymbol{N}_1 + k_1 \boldsymbol{N}_2$

İspat:

α manyetik timelike eğrisi ve V manyetik vektör alanının yörüngesi

$V = a\boldsymbol{T} + b\boldsymbol{N}_1 + c\boldsymbol{N}_2$

olsun. $V \times \boldsymbol{N}_1 = \phi(\boldsymbol{N}_1)$ olduğundan

$a(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}_1) + b(\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_1) + c(\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{T}$

elde edilir. $\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_1 = 0$, $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}_1 = -\boldsymbol{N}_2$ ve $\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{T}$ olduğundan

$a(-\boldsymbol{N}_2) + b(0) + c(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{T}$

$c\boldsymbol{T} - a\boldsymbol{N}_2 = k_1\boldsymbol{T}$

bulunur. Buradan $c = k_1$ ve $a = 0$ elde edilir. Bulduğumuz katsayıları yerine koyduğumuzda $V = 0\boldsymbol{T} + b\boldsymbol{N}_1 + k_1\boldsymbol{N}_2$ olur b'nin eşitini bulmak içinse $\phi(V) = V \times V = 0$ eşitliğini kullanalım.

$\phi(V) = 0$

Burada $V = b\boldsymbol{N}_1 + k_1\boldsymbol{N}_2$ olduğundan

$\phi(b\boldsymbol{N}_1 + k_1\boldsymbol{N}_2) = 0$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$b\phi(\boldsymbol{N}_1) + k_1\phi(\boldsymbol{N}_2) = 0$

yazılır. Burada $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ değerleri yerine yazılırsa

$b(k_1\boldsymbol{T}) + k_1(\mu\boldsymbol{T}) = 0$

bulunur. Denklemi $\boldsymbol{T}$ ortak çarpan parantezine alınırsa

$(bk_1 + k_1\mu)\boldsymbol{T} = 0$

elde edilir. Bulduğumuz eşitliğe göre $\boldsymbol{T}$ değerinin sıfıra eşit olması için katsayısını sıfıra eşitleyelim.

$bk_1 + k_1\,\mu = 0$

ve

$b = -\mu$

bulunur. Elde edilen $a = 0$, $b = -\mu$ ve $c = k_1$ katsayıları yerine yazıldığında

$V = -\mu\boldsymbol{N}_1 + k_1\boldsymbol{N}_2$

elde edilir.

4.1.3 N_2 Manyetik Timelike Eğriler

Teorem 4.3 α eğrisi, 3-boyutlu Minkowski Uzayında birim hızlı bir $\boldsymbol{N}_2$ manyetik timelike eğrisi, bu eğrinin Bishop elemanları $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}, k_1, k_2\}$ ve $g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = \gamma$ diferansiyellenebilen belirli fonksiyon olsun. Bu durumda Lorentz kuvveti ve Bishop vektörleri arasındaki ilişki sırasıyla

$\phi(\boldsymbol{T}) = \gamma\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$

$\phi(\boldsymbol{N}_1) = \gamma\boldsymbol{T}$

$\phi(\boldsymbol{N}_2) = k_2\boldsymbol{T}$

dir (Kazan ve Karadağ, 2017).

İspat:

İlk olarak $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}, k_1, k_2\}$ Bishop elemanları ile $\phi(\boldsymbol{T})$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ Lorentz formüllerini

$\phi(\boldsymbol{T}) = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_2$

ve

$\phi(\boldsymbol{N}_1) = b_1\boldsymbol{T} + b_2\boldsymbol{N}_1 + b_3\boldsymbol{N}_2$

yazabiliriz. Şimdi a_1 , a_2 , a_3 değerlerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{T})$ ifadesi $\boldsymbol{T}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}) = a_1\langle\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle + a_2\langle\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle + a_3\langle\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = -1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}) = -a_1$

veya

$-g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}) = a_1$

ve

$a_1 = 0$

bulunur. Benzer şekilde a_2 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{T})$ ifadesi $\boldsymbol{N}_1$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) = 1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = a_2$

olur. $\boldsymbol{N}_2$ manyetik alanda $g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = \gamma$ belirli fonksiyon olduğundan

$a_2 = \gamma$

bulunur. Benzer şekilde a_3 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{T})$ ifadesi $\boldsymbol{N}_2$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2) = 1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = a_3$

veya

$-g(\boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)) = a_3$

yazılır. $\phi(\boldsymbol{N}_2) = k_2\boldsymbol{T}$ eşitliğini yerine yazarsak

$-g(\boldsymbol{T}, k_2\boldsymbol{T}) = a_3$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$-k_2 g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = a_3$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = -1$ olduğundan

$a_3 = k_2$

bulunur. Bulunan a_1 , a_2 , a_3 değerleri $\phi(\boldsymbol{T}) = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_2$'de yerine yazılırsa

$\phi(\boldsymbol{T}) = \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$

bulunur.

Son olarak b_1 , b_2 , b_3 değerlerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ifadesi $\boldsymbol{T}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}) = b_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = -1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}) = -b_1$

veya

$g(\boldsymbol{N}_1, \phi(\boldsymbol{T})) = b_1$

olur. $\boldsymbol{N}_2$ manyetik alanda $g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = \gamma$ belirli fonksiyon olduğundan

$b_1 = \gamma$

bulunur. Benzer şekilde b_2 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_1$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_1) = b_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) = 1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_1) = b_2$

ve

$b_2 = 0$

bulunur. Benzer şekilde b_3 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_2$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_2) = b_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2) = 1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_2) = b_3$

veya

$-g(\boldsymbol{N}_1, \phi(\boldsymbol{N}_2)) = b_3$

yazılır. $\phi(\boldsymbol{N}_2) = k_2\boldsymbol{T}$ eşitliğini yerine yazarsak

$-g(\boldsymbol{N}_1, k_2\boldsymbol{T}) = b_3$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$-k_2 g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}) = b_3$

olur. Buradan $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}) = 0$ olduğundan

$b_3 = 0$

bulunur. Bulunan b_1 , b_2 , b_3 değerleri $\phi(\boldsymbol{N}_1) = b_1\boldsymbol{T} + b_2\boldsymbol{N}_1 + b_3\boldsymbol{N}_2$'de yerine yazılırsa

$\phi(\boldsymbol{N}_1) = \gamma\boldsymbol{T}$

bulunur.

Önerme 4.3 Birim hızlı manyetik timelike α eğrisi, *V* manyetik alanının yörüngesidir gerek ve yeter şart *V* manyetik alan eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$V = -k_2\boldsymbol{N}_1 + \gamma\boldsymbol{N}_2$

İspat:

α manyetik timelike eğrisi ve *V* manyetik vektör alanının yörüngesi

$V = a\boldsymbol{T} + b\boldsymbol{N}_1 + c\boldsymbol{N}_2$

olsun. $V \times \boldsymbol{N}_2 = \phi(\boldsymbol{N}_2)$ olduğundan

$a(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}_2) + b(\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_2) + c(\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{N}_2) = k_2\boldsymbol{T}$

elde edilir. $\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{N}_2 = 0$, $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{N}_1$ ve $\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_2 = -\boldsymbol{T}$ olduğundan

$a(\boldsymbol{N}_1) + b(-\boldsymbol{T}) + c(0) = k_2\boldsymbol{T}$

ya da

$-b\boldsymbol{T} + a\boldsymbol{N}_1 = k_2\boldsymbol{T}$

bulunur. Buradan $b = -k_2$ ve $a = 0$ elde edilir. Bulduğumuz katsayıları yerine koyduğumuzda $V = 0\boldsymbol{T} - k_2\boldsymbol{N}_1 + c\boldsymbol{N}_2$ olur c'nin eşitini bulmak içinse $\phi(V) = V \times V = 0$ eşitliğini kullanalım. Burada $V = -k_2\boldsymbol{N}_1 + c\boldsymbol{N}_2$ olduğundan

$\phi(-k_2\boldsymbol{N}_1 + c\boldsymbol{N}_2) = 0$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$-k_2\phi(\boldsymbol{N}_1) + c\phi(\boldsymbol{N}_2) = 0$

yazılır. Denklemde $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ yerine yazılırsa

$-k_2(\gamma\boldsymbol{T}) + c(k_2\boldsymbol{T}) = 0$

bulunur. Denklem $\boldsymbol{T}$ ortak parantezine alınırsa

$(-\gamma k_2 + ck_2)\boldsymbol{T} = 0$

elde edilir. Bulduğumuz eşitliğe göre $\boldsymbol{T}$ değerinin sıfıra eşit olması için katsayısını sıfıra eşitleyelim.

$(-\gamma k_2 + ck_2) = 0$

ve

$c = \gamma$

bulunur. Elde edilen $a = 0$, $b = -k_2$ ve $c = \gamma$ katsayıları yerine yazıldığında

$V = -k_2\boldsymbol{N}_1 + \gamma\boldsymbol{N}_2$

elde edilir.

4.2 Spacelike Manyetik Eğriler

4.2.1 *T* Manyetik Spacelike Eğriler

Teorem 4.4 α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında bir $\boldsymbol{T}$ manyetik spacelike eğrisi, bu eğrinin Bishop elemanları $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}, k_1, k_2\}$ ve $g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_2) = \rho$ diferansiyellenebilen belirli bir fonksiyon olsun. Bu durumda Lorentz kuvveti ve Bishop vektörleri arasındaki ilişki sırasıyla

$\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$

$\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2}\rho\boldsymbol{N}_2$

$\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1}\rho\boldsymbol{N}_1$

dir (Kazan ve Karadağ, 2017).

İspat:

İlk olarak $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}, k_1, k_2\}$ Bishop elemanları ile $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz formüllerini

$$\phi(\boldsymbol{N}_1) = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_2$$

ve

$$\phi(\boldsymbol{N}_2) = b_1\boldsymbol{T} + b_2\boldsymbol{N}_1 + b_3\boldsymbol{N}_2$$

yazabiliriz. Şimdi a_1 , a_2 , a_3 değerlerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ifadesi $\boldsymbol{T}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle$$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = 1$ olduğundan

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}) = a_1$$

veya

$$-g(\boldsymbol{N}_1, \phi(\boldsymbol{T})) = a_1$$

yazılır. $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ eşitliğini yerine yazarsak

$$-g(\boldsymbol{N}_1, k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2) = a_1$$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$$-k_1 g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) - k_2 g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1) = a_1$$

elde edilir. Buradan $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) = \varepsilon_{N_1}$ ve $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1) = 0$ olduğundan

$$-k_1\varepsilon_{N_1} - k_2.0 = a_1$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$a_1 = -\varepsilon_{N_1}k_1$$

bulunur. Benzer şekilde a_2 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_1$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_1) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle$$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) = \varepsilon_{N_1}$ olduğundan

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_1) = a_2\varepsilon_{N_1}$$

veya

$\varepsilon_{N_1} g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_1) = a_2$

olur. $g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_1) = 0$ olduğundan

$a_2 = 0$

bulunur. Benzer şekilde a_3 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_2$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_2) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2) = \varepsilon_{N_2}$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_2) = a_3\varepsilon_{N_2}$

veya

$\varepsilon_{N_2} g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_2) = a_3$

olur. $\boldsymbol{T}$ manyetik alanda $g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_2) = \rho$ belirli fonksiyon olduğundan

$a_3 = \varepsilon_{N_2}\rho$

elde edilir. Bulunan a_1 , a_2 , a_3 değerleri $\phi(\boldsymbol{N}_1) = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_2$'de yerine yazılırsa

$\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2}\rho\boldsymbol{N}_2$

bulunur.

Son olarak b_1 , b_2 , b_3 değerlerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ ifadesi $\boldsymbol{T}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}) = b_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = 1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}) = b_1$

veya

$-g\big(\boldsymbol{N}_2, \phi(\boldsymbol{T})\big) = b_1$

yazılır. $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ eşitliğini yerine yazarsak

$-g(\boldsymbol{N}_2, k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2) = b_1$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$-k_1 g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2) - k_2 g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2) = b_1$

Buradan $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2) = 0$ ve $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2) = \varepsilon_{N_2}$ olduğundan

$b_1 = -\varepsilon_{N_2} k_2$

bulunur. Benzer şekilde b_2 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_1$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_1) = b_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) = \varepsilon_{N_1}$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_1) = \varepsilon_{N_1} b_2$

veya

$\varepsilon_{N_1} g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_1) = b_2$

olur. Buradan

$-\varepsilon_{N_1} g\big(\boldsymbol{N}_2, \phi(\boldsymbol{N}_1)\big) = b_2$

elde edilir. ***T*** manyetik alanda $g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{N}_2) = \rho$ belirli fonksiyon olduğundan

$b_2 = -\varepsilon_{N_1}\, \rho$

bulunur. Benzer şekilde b_3 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_2$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_2) = b_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2) = \varepsilon_{N_2}$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_2) = \varepsilon_{N_2} b_3$

ya da

$\varepsilon_{N_2} g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_2) = b_3$

ve

$b_3 = 0$

elde edilir. Bulunan b_1 , b_2 , b_3 değerleri $\phi(\boldsymbol{N}_2) = b_1\boldsymbol{T} + b_2\boldsymbol{N}_1 + b_3\boldsymbol{N}_2$'de yerine yazılırsa

$$\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1}\rho\boldsymbol{N}_1$$

bulunur.

Önerme 4.4 Birim hızlı manyetik spacelike α eğrisi, *V* manyetik alanının yörüngesidir gerek ve yeter şart *V* manyetik alan eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V = \rho\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{N}_2$$

İspat:

α manyetik spacelike eğrisi ve *V* manyetik vektör alanının yörüngesi

$$V = a\boldsymbol{T} + b\boldsymbol{N}_1 + c\boldsymbol{N}_2$$

olsun. $V \times \boldsymbol{T} = \phi(\boldsymbol{T})$ olduğundan

$$a(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}) + b(\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{T}) + c(\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T} = 0$, $\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{T} = -\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2$ ve $\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{T} = \varepsilon_{N_1}\boldsymbol{N}_1$ olduğundan

$$a(0) + b\left(-\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2\right) + c\left(\varepsilon_{N_1}\boldsymbol{N}_1\right) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$$

veya

$$c\varepsilon_{N_1}\boldsymbol{N}_1 - b\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2 = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$$

bulunur. Buradan $b = -\varepsilon_{N_2}k_2$ ve $c = \varepsilon_{N_1}k_1$ elde edilir. Bulduğumuz katsayıları yerine koyduğumuzda $V = a\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_1 k_1\boldsymbol{N}_2$ olur. a'nn eşitini bulmak için $V \times \boldsymbol{N}_1 = \phi(\boldsymbol{N}_1)$ eşitliğini kullanalım.

$$a(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}_1) + b(\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_1) + c(\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2}\rho\boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}_1 = \varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2$, $\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_1 = 0$ ve $\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{N}_1 = -\boldsymbol{T}$ olduğundan

$$a\left(\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2\right) + b(0) + c(-\boldsymbol{T}) = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2}\rho\boldsymbol{N}_2$$

ve

$$-c\boldsymbol{T} + a\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2 = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2}\rho\boldsymbol{N}_2$$

bulunur. Buradan $a = \rho$ ve $c = \varepsilon_{N_1} k_1$ elde edilir.

O halde elde edilen $a = \rho$, $b = -\varepsilon_{N_2} k_2$ ve $c = \varepsilon_{N_1} k_1$ kat sayıları $V = a\boldsymbol{T} + b\boldsymbol{N}_1 + c\boldsymbol{N}_2$ denkleminde yerine yazıldığında

$$V = \rho\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{N}_2$$

bulunur.

4.2.2 N_1 Manyetik Spacelike Eğriler

Teorem 4.5 α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında bir $\boldsymbol{N}_1$ manyetik spacelike eğrisi, bu eğrinin Bishop elemanları $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}, k_1, k_2\}$ ve $g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = \mu$ diferansiyellenebilen belirli bir fonksiyon olsun. Bu durumda Lorentz kuvveti ve Bishop vektörleri arasındaki ilişki sırasıyla

$$\phi(\boldsymbol{T}) = k_1 \boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2} \mu \boldsymbol{N}_2$$

$$\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T}$$

$$\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\mu \boldsymbol{T}$$

dir (Kazan ve Karadağ, 2017).

İspat:

İlk olarak $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}, k_1, k_2\}$ Bishop elemanları ile $\phi(\boldsymbol{T})$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz formüllerini

$$\phi(\boldsymbol{T}) = a_1 \boldsymbol{T} + a_2 \boldsymbol{N}_1 + a_3 \boldsymbol{N}_2$$

ve

$$\phi(\boldsymbol{N}_2) = b_1 \boldsymbol{T} + b_2 \boldsymbol{N}_1 + b_3 \boldsymbol{N}_2$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi a_1 , a_2 , a_3 değerlerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{T})$ ifadesi $\boldsymbol{T}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}) = a_1 \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle + a_2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle + a_3 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle$$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = 1$ olduğundan

$$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}) = a_1$$

ve

$a_1 = 0$

bulunur. Benzer şekilde a_2 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{T})$ ifadesi $\boldsymbol{N}_1$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) = \varepsilon_{N_1}$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = \varepsilon_{N_1} a_2$

ya da

$\varepsilon_{N_1} g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = a_2$

olur. Buradan

$-\varepsilon_{N_1} g(\boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1)) = a_2$

yazılır. $\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T}$ eşitliğini yerine yazarsak

$-\varepsilon_{N_1} g\left(\boldsymbol{T}, -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T}\right) = a_2$

olur. İç çarpımın özellğinden

$k_1 g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = a_2$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = 1$ olduğundan

$a_2 = k_1$

bulunur. Benzer şekilde a_3 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{T})$ ifadesi $\boldsymbol{N}_2$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2) = \varepsilon_{N_2}$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = \varepsilon_{N_2} a_3$

veya

$\varepsilon_{N_2} g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = a_3$

olur. $\boldsymbol{N}_1$manyetik alanda $g(\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{N}_2)=\mu$ belirli fonksiyon olduğundan

$a_3=\varepsilon_{N_2}\mu$

elde edilir. Bulunan a_1 , a_2 , a_3 değerleri $\phi(\boldsymbol{T})=a_1\boldsymbol{T}+a_2\boldsymbol{N}_1+a_3\boldsymbol{N}_2$'de yerine yazılırsa

$\phi(\boldsymbol{T})=k_1\boldsymbol{N}_1+\varepsilon_{N_2}\mu\boldsymbol{N}_2$

bulunur. Son olarak b_1 , b_2 , b_3 değerlerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ ifadesi $\boldsymbol{T}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{T})=b_1\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle+b_2\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}\rangle+b_3\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T})=1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{T})\ =b_1$

veya

$-g(\boldsymbol{N}_2,\phi(\boldsymbol{T}))\ =b_1$

olur. $\boldsymbol{N}_1$ manyetik alanda $g(\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{N}_2)=\mu$ belirli fonksiyon olduğundan

$b_1=-\mu$

bulunur. Benzer şekilde b_2 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_1$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{N}_1)=b_1\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{N}_1\rangle+b_2\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_1\rangle+b_3\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_1\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_1)=\varepsilon_{N_1}$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{N}_1)=\varepsilon_{N_1}b_2$

veya

$\varepsilon_{N_1}g(\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{N}_1)=b_2$

bulunur. Buradan

$-\varepsilon_{N_1}g\big(\boldsymbol{N}_2,\phi(\boldsymbol{N}_1)\big)=b_2$

yazılır. $\phi(\boldsymbol{N}_1)=-\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T}$ eşitliğini yerine yazarsak

$-\varepsilon_{N_1} g\big(\boldsymbol{N}_2, -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T}\big) = b_2$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$k_1 g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}) \ = b_2$

Buradan $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}) \ = 0$ olduğundan

$b_2 = 0$

bulunur. Benzer şekilde b_3 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_2$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_2) = b_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2) = \varepsilon_{N_2}$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_2) = \varepsilon_{N_2} b_3$

veya

$\varepsilon_{N_2} g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_2) = b_3$

olur. Burada $g(\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{N}_2) = 0$ olduğundan

$b_3 = 0$

elde edilir. Bulunan b_1 , b_2 , b_3 değerleri $\phi(\boldsymbol{N}_2) = b_1\boldsymbol{T} + b_2\boldsymbol{N}_1 + b_3\boldsymbol{N}_2$'de yerine yazılırsa

$\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\mu\boldsymbol{T}$

bulunur.

Önerme 4.5 Birim hızlı manyetik spacelike α eğrisi, *V* manyetik alanının yörüngesidir gerek ve yeter şart *V* manyetik alan eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$V = -\mu\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{N}_2$

İspat:

α manyetik spacelike eğrisi ve *V* manyetik vektör alanının yörüngesi

$V = a\boldsymbol{T} + b\boldsymbol{N}_1 + c\boldsymbol{N}_2$

olsun. $V \times \boldsymbol{T} = \phi(\boldsymbol{T})$ olduğundan

$a(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}) + b(\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{T}) + c(\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2}\mu\boldsymbol{N}_2$

elde edilir. $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T} = 0$, $\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{T} = -\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2$ ve $\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{T} = \varepsilon_{N_1}\boldsymbol{N}_1$ olduğundan

$a(0) + b\left(-\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2\right) + c\left(\varepsilon_{N_1}\boldsymbol{N}_1\right) = k_1\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2}\mu\boldsymbol{N}_2$

ve

$c\varepsilon_{N_1}\boldsymbol{N}_1 - b\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2 = k_1\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2}\mu\boldsymbol{N}_2$

bulunur. Buradan $c = \varepsilon_{N_1}k_1$ ve $b = -\mu$ elde edilir. Bulduğumuz katsayıları yerine koyduğumuzda $V = a\boldsymbol{T} - \mu\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{N}_2$ olur. a'nın eşitini bulmak içinse $V \times \boldsymbol{N}_1 = \phi(\boldsymbol{N}_1)$ eşitliğini kullanalım.

$a(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}_1) + b(\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_1) + c(\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T}$

elde edilir. $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}_1 = \varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2$, $\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_1 = 0$ ve $\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{N}_1 = -\boldsymbol{T}$ olduğundan

$a\left(\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2\right) + b(0) + c(-\boldsymbol{T}) = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T}$

ve

$-c\boldsymbol{T} + a\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2 = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T}$

bulunur. Buradan $a = 0$ ve $c = \varepsilon_{N_1}k_1$ elde edilir. O halde elde edilen $a = 0$, $b = -\mu$ ve $c = \varepsilon_{N_1}k_1$ kat sayıları $V = a\boldsymbol{T} + b\boldsymbol{N}_1 + c\boldsymbol{N}_2$ denkleminde yerine yazıldığında

$V = -\mu\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{N}_2$

bulunur.

4.2.3 $\boldsymbol{N}_2$ Manyetik Spacelike Eğriler

Teorem 4.6 α eğrisi, 3-boyutlu Minkowski Uzayında bir $\boldsymbol{N}_2$ manyetik spacelike eğrisi, bu eğrinin Bishop elemanları $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}, k_1, k_2\}$ ve $g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = \gamma$ diferansiyellenebilen belirli bir fonksiyon olsun. Bu durumda Lorentz kuvveti ve Bishop vektörleri arasındaki ilişki sırasıyla

$\phi(\boldsymbol{T}) = \varepsilon_{N_1}\gamma\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$

$\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\gamma\boldsymbol{T}$

$\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T}$

dir (Kazan ve Karadağ, 2017).

İspat:

İlk olarak $\{\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_{2,}, k_1, k_2\}$ Bishop elemanları ile $\phi(\boldsymbol{T})$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ Lorentz formüllerini

$\phi(\boldsymbol{T}) = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_2$

ve

$\phi(\boldsymbol{N}_1) = b_1\boldsymbol{T} + b_2\boldsymbol{N}_1 + b_3\boldsymbol{N}_2$

yazabiliriz. Şimdi a_1 , a_2 , a_3 değerlerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{T})$ ifadesi $\boldsymbol{T}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = 1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}) = a_1$

olur. Burada $g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}) = 0$ olduğundan

$a_1 = 0$

bulunur. Benzer şekilde a_2 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{T})$ ifadesi $\boldsymbol{N}_1$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_1\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1) = \varepsilon_{N_1}$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = \varepsilon_{N_1} a_2$

veya

$\varepsilon_{N_1}\, g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = a_2$

olur. N_2 manyetik alanda $g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = \gamma$ belirli fonksiyon olduğundan

$a_2 = \varepsilon_{N_1}\gamma$

bulunur. Benzer şekilde a_3 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{T})$ ifadesi $\boldsymbol{N_2}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = a_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}_2\rangle + a_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle + a_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N_2}) = \varepsilon_{N_2}$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = \varepsilon_{N_2} a_3$

veya

$\varepsilon_{N_2} g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_2) = a_3$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$-\varepsilon_{N_2} g(\boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)) = a_3$

yazılır. $\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T}$ eşitliğini yerine yazarsak

$-\varepsilon_{N_2} g(\boldsymbol{T}, -\varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T}) = a_3$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$k_2 g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = a_3$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = 1$ olduğundan

$a_3 = k_2$

bulunur. Bulunan a_1 , a_2 , a_3 değerleri $\phi(\boldsymbol{T}) = a_1\boldsymbol{T} + a_2\boldsymbol{N}_1 + a_3\boldsymbol{N}_2$'de yerine yazılırsa

$\phi(\boldsymbol{T}) = \varepsilon_{N_1}\gamma\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$

bulunur. Son olarak b_1 , b_2 , b_3 değerlerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N_1})$ ifadesi $\boldsymbol{T}$ ile skaler olarak çarpılırsa

$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}) = b_1\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle$

elde edilir. $g(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = 1$ olduğundan

$g(\phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}) = b_1$

ve

$-g(\boldsymbol{N}_1, \phi(\boldsymbol{T})) = b_1$

olur. $\boldsymbol{N}_2$ manyetik alanda $g(\phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{N}_1) = \gamma$ belirli fonksiyon olduğundan

$b_1 = -\gamma$

bulunur. Benzer şekilde b_2 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_1$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{N}_1) = b_1\langle \boldsymbol{T},\boldsymbol{N}_1\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_1\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_1\rangle$$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_1) = \varepsilon_{N_1}$ olduğundan

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{N}_1) = \varepsilon_{N_1} b_2$$

veya

$$\varepsilon_{N_1} g(\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{N}_1) = b_2$$

yazılır. Burada $g(\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{N}_1) = 0$ olduğundan

$$b_2 = 0$$

bulunur. Benzer şekilde b_3 değerini hesaplamak için $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ifadesi $\boldsymbol{N}_2$ ile skaler olarak çarpılırsa

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{N}_2) = b_1\langle \boldsymbol{T},\boldsymbol{N}_2\rangle + b_2\langle \boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2\rangle + b_3\langle \boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_2\rangle$$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_2) = \varepsilon_{N_2}$ olduğundan

$$g(\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{N}_2) = \varepsilon_{N_2} b_3$$

ya da

$$\varepsilon_{N_2} g(\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{N}_2) = b_3$$

olur. Buradan

$$-\varepsilon_{N_2} g(\boldsymbol{N}_1,\phi(\boldsymbol{N}_2)) = b_3$$

yazılır. $\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T}$ eşitliğini yerine yazarsak

$$-\varepsilon_{N_2} g(\boldsymbol{N}_1,-\varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T}) = b_3$$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$$k_2 g(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}) = b_3$$

elde edilir. $g(\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}) = 0$ olduğundan

$$b_3 = 0$$

bulunur. Bulunan b_1 , b_2 , b_3 değerleri $\phi(\boldsymbol{N}_1) = b_1\boldsymbol{T} + b_2\boldsymbol{N}_1 + b_3\boldsymbol{N}_2$'de yerine yazılırsa

$$\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\gamma\boldsymbol{T}$$

bulunur.

Önerme 4.6 Birim hızlı manyetik spacelike α eğrisi, *V* manyetik alanının yörüngesidir gerek ve yeter şart *V* manyetik alan eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V = -\varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{N}_1 + \gamma\boldsymbol{N}_2$$

İspat:

α manyetik spacelike eğrisi ve *V* manyetik vektör alanının yörüngesi

$$V = a\boldsymbol{T} + b\boldsymbol{N}_1 + c\boldsymbol{N}_2$$

olsun. $V \times \boldsymbol{T} = \phi(\boldsymbol{T})$ olduğundan

$$a(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}) + b(\boldsymbol{N_1} \times \boldsymbol{T}) + c(\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{T}) = \varepsilon_{N_1}\gamma\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T} = 0$, $\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{T} = -\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2$ ve $\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{T} = \varepsilon_{N_1}\boldsymbol{N}_1$ olduğundan

$$a(0) + b\big(-\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2\big) + c\big(\varepsilon_{N_1}\boldsymbol{N}_1\big) = \varepsilon_{N_1}\gamma\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$$

ve

$$c\varepsilon_{N_1}\boldsymbol{N}_1 - b\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2 = \varepsilon_{N_1}\gamma\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$$

bulunur. Buradan $c = \gamma$ ve $b = -\varepsilon_{N_2}k_2$ elde edilir. Bulduğumuz katsayıları yerine koyduğumuzda $V = a\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{N}_1 + \gamma\boldsymbol{N}_2$ olur. a'nn eşitini bulmak içinse $V \times \boldsymbol{N}_1 = \phi(\boldsymbol{N}_1)$ eşitliğini kullanalım.

$$a(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}_1) + b(\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_1) + c(\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{N}_1) = -\gamma\boldsymbol{T}$$

elde edilir. $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}_1 = \varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2$, $\boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_1 = 0$ ve $\boldsymbol{N}_2 \times \boldsymbol{N}_1 = -\boldsymbol{T}$ olduğundan

$$a\big(\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2\big) + b(0) + c(-\boldsymbol{T}) = -\gamma\boldsymbol{T}$$

ve

$$-c\boldsymbol{T} + a\varepsilon_{N_2}\boldsymbol{N}_2 = -\gamma\boldsymbol{T}$$

bulunur. Buradan $c = \gamma$ ve $a = 0$ elde edilir.

O halde elde edilen $a = 0$, $b = -\varepsilon_{N_2}k_2$ ve $c = \gamma$ kat sayıları $V = a\boldsymbol{T} + b\boldsymbol{N}_1 + c\boldsymbol{N}_2$

denkleminde yerine yazıldığında

$$V=-\varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{N}_1+\gamma\boldsymbol{N}_2$$

bulunur.

5.MINKOWSKI-3 UZAYINDA MANYETİK EĞRİLERİN BISHOP ÇATISINA GÖRE FERMİ-WALKER TÜREVLERİ

5.1 Timelike Manyetik Eğrilerin Bishop Çatısına Göre Fermi-Walker Türevleri

Bu bölümde Minkowski Uzayında; Bishop çatısına göre $\boldsymbol{T}$-manyetik, $\boldsymbol{N}_1$-manyetik ve $\boldsymbol{N}_2$-manyetik timelike eğrilerin Fermi-Walker türevleri hesaplanacaktır.

5.1.1 $\boldsymbol{T}$ Manyetik Timelike Eğrilerin Fermi-Walker Türevleri

Teorem 5.1 α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{T}$-manyetik timelike eğri olsun. Bu eğrinin $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}'\boldsymbol{N}_1 + {k_2}'\boldsymbol{N}_2$$

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}_1) = {k_1}'\boldsymbol{T} + \rho'\boldsymbol{N}_2$$

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}_2) = {k_2}'\boldsymbol{T} - \rho'\boldsymbol{N}_1$$

dir.

İspat:

α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{T}$- manyetik timelike eğri olsun. Bu eğrinin $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin

$$\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$$

$$\phi(\boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{N}_2$$

$$\phi(\boldsymbol{N}_2) = k_2\boldsymbol{T} - \rho\boldsymbol{N}_1$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\boldsymbol{T})$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) + \langle\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} - \langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{T})\rangle\boldsymbol{T}$$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T\phi(\boldsymbol{T})$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}'\boldsymbol{N}_1 + k_1\nabla_T\boldsymbol{N}_1 + {k_2}'\boldsymbol{N}_2 + k_2\nabla_T\boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Burada $\nabla_T\boldsymbol{N}_1 = k_1\boldsymbol{T}$ ve $\nabla_T\boldsymbol{N}_2 = k_2\boldsymbol{T}$ olduğundan

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}'\boldsymbol{N}_1 + {k_1}^2\boldsymbol{T} + {k_2}'\boldsymbol{N}_2 + {k_2}^2\boldsymbol{T}$$

yazılır. Denklemde $\boldsymbol{T}$'ler ortak çarpan parantezine alındığında

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}'\boldsymbol{N}_1 + {k_2}'\boldsymbol{N}_2 + \left({k_1}^2 + {k_2}^2\right)\boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle (k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = (k_1\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle + k_2\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle)(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

elde edilir. Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ ve $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = 0$$

elde edilir. Son olarak $\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2\, , k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2 \rangle \boldsymbol{T}$$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T} = \left({k_1}^2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1 \rangle + 2k_1k_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle + {k_2}^2\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2 \rangle\right)\boldsymbol{T}$$

Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1 \rangle = 1$, $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2 \rangle = 1$ ve $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T} = \left({k_1}^2 + {k_2}^2\right)\boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_{\mathrm{T}} \phi(\boldsymbol{T}) + \langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} - \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T}$$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}'\boldsymbol{N}_1 + {k_2}'\boldsymbol{N}_2 + \left({k_1}^2 + {k_2}^2\right)\boldsymbol{T} - ({k_1}^2 + {k_2}^2)\boldsymbol{T}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}'\boldsymbol{N}_1 + {k_2}'\boldsymbol{N}_2$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) + \langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} - \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T}$$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1)$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = {k_1}'\boldsymbol{T} + k_1\nabla_T\boldsymbol{T} + \rho'\boldsymbol{N}_2 + \rho\nabla_T\boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Burada $\nabla_T\boldsymbol{T} = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ ve $\nabla_T\boldsymbol{N}_2 = k_2\boldsymbol{T}$ olduğundan

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = {k_1}'\boldsymbol{T} + {k_1}^2\boldsymbol{N}_1 + k_1k_2\boldsymbol{N}_2 + \rho'\boldsymbol{N}_2 + \rho k_2\boldsymbol{T}$$

yazılır. Denklemde $\boldsymbol{T}$'ler ortak çarpan parantezine alındığında

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = ({k_1}' + \rho k_2)\boldsymbol{T} + {k_1}^2\boldsymbol{N}_1 + (k_1k_2 + \rho')\boldsymbol{N}_2$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{T} + \rho N_2, \boldsymbol{T}\rangle(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = (k_1\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle + \rho\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle)(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

Burada $\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle = -1$ ve $\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle = 0$ olduğundan

$$\langle\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = (-k_1)(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

dır. $-k_1$ için dağılma özelliği uygulandığında

$$\langle\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = -{k_1}^2\boldsymbol{N}_1 - k_1k_2\boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Son olarak $\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle\boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2\, , k_1\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{N}_2\rangle\boldsymbol{T}$$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle\boldsymbol{T} = ({k_1}^2\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}\rangle + k_1\,\rho\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2\rangle + k_1k_2\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle + k_2\rho\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_2\rangle)\boldsymbol{T}$$

Burada $\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}\rangle = 0$,$\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_2\rangle = 1$,$\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle = 0$ ve $\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2\rangle = 0$ olduğundan

$$\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle\boldsymbol{T} = k_2\rho\boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}_1) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_1) + \langle\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} - \langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle\boldsymbol{T}$$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}_1) = ({k_1}' + \rho k_2)\boldsymbol{T} + {k_1}^2\boldsymbol{N}_1 + (k_1k_2 + \rho')\boldsymbol{N}_2 - {k_1}^2\boldsymbol{N}_1 - k_1k_2\boldsymbol{N}_2 - k_2\rho\boldsymbol{T}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}_1) = {k_1}'\boldsymbol{T} + \rho'\boldsymbol{N}_2$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}_2) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2) + \langle\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} - \langle\nabla_T\boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle\boldsymbol{T}$$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2)$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = k_2\boldsymbol{T} - \rho\boldsymbol{N}_1$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2) = {k_2}'\boldsymbol{T} + k_2\nabla_T\boldsymbol{T} - \rho'\boldsymbol{N}_1 - \rho\nabla_T\boldsymbol{N}_1$$

elde edilir. Burada $\nabla_T\boldsymbol{T} = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ ve $\nabla_T\boldsymbol{N}_1 = k_1\boldsymbol{T}$ olduğundan

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2) = {k_2}'\boldsymbol{T} + k_1k_2\boldsymbol{N}_1 + {k_2}^2\boldsymbol{N}_2 - \rho'\boldsymbol{N}_1 - \rho k_1\boldsymbol{T}$$

yazılır. Denklemde $\boldsymbol{T}$'ler ve $\boldsymbol{N}_1$'ler ortak çarpan parantezine alındığında

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2) = ({k_2}' - \rho k_1)\boldsymbol{T} + (k_1k_2 - \rho')\boldsymbol{N}_1 + {k_2}^2\boldsymbol{N}_2$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = k_2\boldsymbol{T} - \rho\boldsymbol{N}_1$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = \langle k_2\boldsymbol{T} - \rho\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = (k_2\langle\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle - \rho\langle\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle)(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

Burada $\langle\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle = -1$ ve $\langle\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle = 0$ olduğundan

$$\langle\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = (-k_2)(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

dır. $-k_2$ ile parantezin içine dağılma özelliği uygulandığında

$$\langle\phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = -k_1k_2\boldsymbol{N}_1 - {k_2}^2\boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Son olarak $\langle\nabla_T\boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = k_2\boldsymbol{T} - \rho\boldsymbol{N}_1$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle\nabla_T\boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle\boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2\,, k_2\boldsymbol{T} - \rho\boldsymbol{N}_1\rangle\boldsymbol{T}$$

bulunur. Denklemde dağılma özelliğinden

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T} = (k_1 k_2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle - k_1\, \rho \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle + {k_2}^2 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle - k_2 \rho \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle \boldsymbol{T}$$

elde edilir. Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle = 1$, $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle = 0$ ve $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T} = -k_1 \rho \boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) + \langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} - \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T}$$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = ({k_2}' - \rho k_1)\boldsymbol{T} + (k_1 k_2 - \rho')\boldsymbol{N}_1 + {k_2}^2 \boldsymbol{N}_2 - k_1 k_2 \boldsymbol{N}_1 - {k_2}^2 \boldsymbol{N}_2 + k_1 \rho \boldsymbol{T}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = {k_2}' \boldsymbol{T} - \rho' \boldsymbol{N}_1$$

şeklinde bulunur.

5.1.2 $\boldsymbol{N_1}$ Manyetik Timelike Eğrilerin Fermi-Walker Türevleri

Teorem 5.2 α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{N}_1$-manyetik timelike eğri olsun. Bu eğrinin $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}' \boldsymbol{N}_1 + \mu' \boldsymbol{N}_2$$

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = {k_1}' \boldsymbol{T}$$

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \mu' \boldsymbol{T}$$

dir.

İspat:

α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{N}_1$- manyetik timelike eğri olsun. Bu eğrinin $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin

$$\phi(\boldsymbol{T}) = k_1 \boldsymbol{N}_1 + \mu \boldsymbol{N}_2$$

$$\phi(\boldsymbol{N}_1) = k_1 \boldsymbol{T}$$

$\phi(\boldsymbol{N}_2) = \mu\boldsymbol{T}$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\boldsymbol{T})$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) + \langle\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} - \langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{T})\rangle\boldsymbol{T}$$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T\phi(\boldsymbol{T})$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + \mu\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) = k_1{}'\boldsymbol{N}_1 + k_1\nabla_T\boldsymbol{N}_1 + \mu'\boldsymbol{N}_2 + \mu\nabla_T\boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Burada $\nabla_T\boldsymbol{N}_1 = k_1\boldsymbol{T}$ ve $\nabla_T\boldsymbol{N}_2 = k_2\boldsymbol{T}$ olduğundan

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) = k_1{}'\boldsymbol{N}_1 + k_1{}^2\boldsymbol{T} + \mu'\boldsymbol{N}_2 + \mu k_2\boldsymbol{T}$$

yazılır. Denklemde $\boldsymbol{T}$'ler ortak çarpan parantezine alındığında

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) = k_1{}'\boldsymbol{N}_1 + \mu'\boldsymbol{N}_2 + \left(k_1{}^2 + \mu k_2\right)\boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + \mu\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{N}_1 + \mu\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

elde edilir. Denklemde iç çarpımdan dolayı

$$\langle\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = (k_1\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}\rangle + \mu\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle)(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

bulunur. Burada $\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}\rangle = 0$ ve $\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle = 0$ olduğundan

$$\langle\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = 0$$

elde edilir. Son olarak $\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{T})\rangle\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + \mu\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{T})\rangle\boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2\,, k_1\boldsymbol{N}_1 + \mu\boldsymbol{N}_2\rangle\boldsymbol{T}$$

elde edilir. Denklemde iç çarpımdan dolayı

$$\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{T})\rangle\boldsymbol{T} = (k_1{}^2\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_1\rangle + k_1\mu\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2\rangle + k_2k_1\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_1\rangle + k_2\mu\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_2\rangle)\boldsymbol{T}$$

bulunur. Burada $\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_1\rangle = 1$, $\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_2\rangle = 1$ ve $\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2\rangle = 0$ olduğundan

$$\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{T})\rangle\boldsymbol{T} = \left(k_1{}^2 + k_2\mu\right)\boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) + \langle\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} - \langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{T})\rangle\boldsymbol{T}$$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}'\boldsymbol{N}_1 + \mu'\boldsymbol{N}_2 + \left({k_1}^2 + \mu k_2\right)\boldsymbol{T} - \left({k_1}^2 + k_2\mu\right)\boldsymbol{T}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}'\boldsymbol{N}_1 + \mu'\boldsymbol{N}_2$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}_1) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_1) + \langle\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} - \langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle\boldsymbol{T}$$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_1)$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_1) = {k_1}'\boldsymbol{T} + k_1\nabla_T\boldsymbol{T}$$

elde edilir. Burada $\nabla_T\boldsymbol{T} = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ olduğundan

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_1) = {k_1}'\boldsymbol{T} + {k_1}^2\boldsymbol{N}_1 + k_1k_2\boldsymbol{N}_2$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = (k_1\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle)(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

Burada $\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle = -1$ olduğundan

$$\langle\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = (-k_1)(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

bulunur. Denklemin dağılma özelliğinden

$$\langle\phi(\boldsymbol{N}_1),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = -{k_1}^2\boldsymbol{N}_1 - k_1k_2\boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Son olarak $\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = k_1\boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle\boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2\,, k_1\boldsymbol{T}\rangle\boldsymbol{T}$$

elde edilir. Denklemde iç çarpımdan dolayı

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle \boldsymbol{T} = ({k_1}^2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle + k_1 k_2 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle)\boldsymbol{T}$

bulunur.Burada$\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle = 0$ olduğundan

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle \boldsymbol{T} = 0$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) + \langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} - \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle \boldsymbol{T}$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = {k_1}' \boldsymbol{T} + {k_1}^2 \boldsymbol{N}_1 + k_1 k_2 \boldsymbol{N}_2 - {k_1}^2 \boldsymbol{N}_1 - k_1 k_2 \boldsymbol{N}_2$

ve

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = {k_1}' \boldsymbol{T}$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) + \langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} - \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T}$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2)$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = \mu \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \mu' \boldsymbol{T} + \mu \nabla_T \boldsymbol{T}$

elde edilir. Burada $\nabla_T \boldsymbol{T} = k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ olduğundan

$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \mu' \boldsymbol{T} + k_1 \mu \boldsymbol{N}_1 + k_2 \mu \boldsymbol{N}_2$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = \mu \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \langle \mu \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = (\mu \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

Burada $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle = -1$ olduğundan

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = (-\mu)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

bulunur. Denklemin dağılma özelliğinden

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = -k_1 \mu \boldsymbol{N}_1 - k_2 \mu \boldsymbol{N}_2$

elde edilir. Son olarak $\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = \mu \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2\, , \mu \boldsymbol{T}\rangle \boldsymbol{T}$$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T} = (k_1 \mu \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle + k_2 \mu \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle)\boldsymbol{T}$$

Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle = 0$ ve $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T} = 0$$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) + \langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} - \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T}$$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \mu' \boldsymbol{T} + k_1 \mu \boldsymbol{N}_1 + k_2 \mu \boldsymbol{N}_2 - k_1 \mu \boldsymbol{N}_1 - k_2 \mu \boldsymbol{N}_2$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \mu' \boldsymbol{T}$$

şeklinde bulunur.

5.1.3 $\boldsymbol{N_2}$ Manyetik Timelike Eğrilerin Fermi-Walker Türevleri

Teorem 5.3 α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{N}_2$-manyetik timelike eğri olsun. Bu eğrinin $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \gamma' \boldsymbol{N}_1 + {k_2}' \boldsymbol{N}_2$$

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = \gamma' \boldsymbol{T}$$

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = {k_2}' \boldsymbol{T}$$

dir.

İspat:

α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{N}_2$- manyetik timelike eğri olsun. Bu eğrinin $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin

$\phi(\boldsymbol{T}) = \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$

$\phi(\boldsymbol{N}_1) = \gamma \boldsymbol{T}$

$\phi(\boldsymbol{N}_2) = k_2 \boldsymbol{T}$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\boldsymbol{T})$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) + \langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} - \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T}$$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T \phi(\boldsymbol{T})$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) = \gamma' \boldsymbol{N}_1 + \gamma \nabla_T \boldsymbol{N}_1 + k_2{}' \boldsymbol{N}_2 + k_2 \nabla_T \boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Burada $\nabla_T \boldsymbol{N}_1 = k_1 \boldsymbol{T}$ ve $\nabla_T \boldsymbol{N}_2 = k_2 \boldsymbol{T}$ olduğundan

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) = \gamma' \boldsymbol{N}_1 + k_1 \gamma \boldsymbol{T} + k_2{}' \boldsymbol{N}_2 + k_2{}^2 \boldsymbol{T}$$

yazılır. Denklemde $\boldsymbol{T}$'ler ortak çarpan parantezine alındığında

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) = \gamma' \boldsymbol{N}_1 + k_2{}' \boldsymbol{N}_2 + \left(k_2{}^2 + k_1 \gamma\right) \boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \langle \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

bulunur. Denklemde iç çarpımdan dolayı

$$\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = (\gamma \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle + k_2 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

olur. Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ ve $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = 0$$

elde edilir. Son olarak $\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2 , \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2 \rangle \boldsymbol{T}$$

elde edilir. Denklemde iç çarpımdan dolayı

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T} = \left(k_1 \gamma \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1 \rangle + k_1 k_2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle + k_2 \gamma \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle + k_2{}^2 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2 \rangle\right) \boldsymbol{T}$$

elde edilir. Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1 \rangle = 1$,$\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2 \rangle = 1$ ve $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T})\rangle \boldsymbol{T} = \left({k_2}^2 + k_1\gamma\right)\boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) + \langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} - \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T})\rangle \boldsymbol{T}$$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \gamma' \boldsymbol{N}_1 + {k_2}' \boldsymbol{N}_2 + \left({k_2}^2 + k_1\gamma\right)\boldsymbol{T} - \left({k_2}^2 + k_1\gamma\right)\boldsymbol{T}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \gamma' \boldsymbol{N}_1 + {k_2}' \boldsymbol{N}_2$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) + \langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} - \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle \boldsymbol{T}$$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1)$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = \gamma \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = \gamma' \boldsymbol{T} + \gamma \nabla_T \boldsymbol{T}$$

elde edilir. Burada $\nabla_T \boldsymbol{T} = k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ olduğundan

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = \gamma' \boldsymbol{T} + k_1\gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2\gamma \boldsymbol{N}_2$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = \gamma \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \langle \gamma \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

elde edilir. Denklemde iç çarpımdan dolayı

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = (\gamma \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

Burada $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle = -1$ olduğundan

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = (-\gamma)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

bulunur. Denklemin dağılma özelliğinden

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = -k_1\gamma \boldsymbol{N}_1 - k_2\gamma \boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Son olarak $\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = \gamma \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2\,, \gamma\boldsymbol{T}\rangle \boldsymbol{T}$

olur. Denklemde iç çarpımdan dolayı

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle \boldsymbol{T} = (k_1\gamma\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle + k_2\gamma\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle)\boldsymbol{T}$

bulunur. Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle = 0$ olduğundan

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle \boldsymbol{T} = 0$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}_1) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_1) + \langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T\boldsymbol{T} - \langle \nabla_T\boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle \boldsymbol{T}$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}_1) = \gamma'\boldsymbol{T} + k_1\gamma\boldsymbol{N}_1 + k_2\gamma\boldsymbol{N}_2 - k_1\gamma\boldsymbol{N}_1 - k_2\gamma\boldsymbol{N}_2$

ve

$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}_1) = \gamma'\boldsymbol{T}$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}_2) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2) + \langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T\boldsymbol{T} - \langle \nabla_T\boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T}$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2)$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = k_2\boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2) = {k_2}'\boldsymbol{T} + k_2\nabla_T\boldsymbol{T}$

elde edilir. Burada $\nabla_T\boldsymbol{T} = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ olduğundan

$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2) = {k_2}'\boldsymbol{T} + k_1k_2\boldsymbol{N}_1 + {k_2}^2\boldsymbol{N}_2$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = k_2\boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T\boldsymbol{T} = \langle k_2\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle (k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$

olur. İç çarpımın özelliğinden

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T\boldsymbol{T} = (k_2\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle)(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$

Burada $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}\rangle = -1$ olduğundan

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T\boldsymbol{T} = (-k_2)(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$

bulunur. Dağılma özelliğinden

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = -k_1 k_2 \boldsymbol{N}_1 - {k_2}^2 \boldsymbol{N}_2$

elde edilir. Son olarak $\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T}$için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = k_2 \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2 \, , k_2 \boldsymbol{T}\rangle \boldsymbol{T}$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T} = \left(k_1 k_2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle + {k_2}^2 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle\right) \boldsymbol{T}$

Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle = 0$ olduğundan

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T} = 0$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) + \langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} - \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T}$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = {k_2}' \boldsymbol{T} + k_1 k_2 \boldsymbol{N}_1 + {k_2}^2 \boldsymbol{N}_2 - k_1 k_2 \boldsymbol{N}_1 - {k_2}^2 \boldsymbol{N}_2$

ve

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = {k_2}' \boldsymbol{T}$

şeklinde bulunur.

5.2 Spacelike Manyetik Eğrilerin Bishop Çatısına Göre Fermi-Walker Türevleri

Bu bölümde Minkowski Uzayında; Bishop çatısına göre $\boldsymbol{T}$-manyetik, $\boldsymbol{N}_1$-manyetik ve $\boldsymbol{N}_2$-manyetik spacelike eğrilerin Fermi-Walker türevleri hesaplanacaktır.

5.2.1 *T* Manyetik Spacelike Eğrilerin Fermi-Walker Türevleri

Teorem 5.4 α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{T}$-manyetik spacelike eğri olsun. Bu eğrinin $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi sırasıyla,

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}' \boldsymbol{N}_1 + {k_2}' \boldsymbol{N}_2$

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = \left(-\varepsilon_{\boldsymbol{N}_1} {k_1}'\right) \boldsymbol{T} + \varepsilon_{\boldsymbol{N}_2} \rho' \boldsymbol{N}_2$

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \left(-\varepsilon_{N_2} k_2{}'\right)\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1} \rho' \boldsymbol{N}_1$

dir.

İspat:

α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{T}$- manyetik spacelike eğri olsun. Bu eğrinin $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin

$\phi(\boldsymbol{T}) = k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$

$\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{\boldsymbol{N}_1} k_1 \boldsymbol{T} + \varepsilon_{\boldsymbol{N}_2} \rho \boldsymbol{N}_2$

$\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{\boldsymbol{N}_2} k_2 \boldsymbol{T} - \varepsilon_{\boldsymbol{N}_1} \rho \boldsymbol{N}_1$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\boldsymbol{T})$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) - \langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T}$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T \phi(\boldsymbol{T})$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) = k_1{}' \boldsymbol{N}_1 + k_1 \nabla_T \boldsymbol{N}_1 + k_2{}' \boldsymbol{N}_2 + k_2 \nabla_T \boldsymbol{N}_2$

elde edilir. Burada $\nabla_T \boldsymbol{N}_1 = -\varepsilon_{\boldsymbol{N}_1} k_1 \boldsymbol{T}$ ve $\nabla_T \boldsymbol{N}_2 = -\varepsilon_{\boldsymbol{N}_2} k_2 \boldsymbol{T}$ olduğundan

$\nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) = k_1{}' \boldsymbol{N}_1 - {k_1}^2 \varepsilon_{\boldsymbol{N}_1} \boldsymbol{T} + k_2{}' \boldsymbol{N}_2 - {k_2}^2 \varepsilon_{\boldsymbol{N}_2} \boldsymbol{T}$

bulunur. Burada$\boldsymbol{T}$'leri ortak çarpan parantezine aldığımızda

$\nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) = k_1{}' \boldsymbol{N}_1 + k_2{}' \boldsymbol{N}_2 - \left({k_1}^2 \varepsilon_{\boldsymbol{N}_1} + {k_2}^2 \varepsilon_{\boldsymbol{N}_2}\right)\boldsymbol{T}$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \langle k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

olur. Denklemde iç çarpımdan dolayı

$\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = (k_1 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle + k_2 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ ve $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ olduğundan

$\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = 0$

elde edilir. Son olarak $\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T})\rangle \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T})\rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2\, , \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{N}_2\rangle \boldsymbol{T}$$

olur. Denklemde iç çarpımdan dolayı

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T})\rangle \boldsymbol{T} = \left({k_1}^2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle + 2k_1k_2\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle + {k_2}^2\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle\right)\boldsymbol{T}$$

Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle = \varepsilon_{\boldsymbol{N}_1}$, $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2\rangle = \varepsilon_{\boldsymbol{N}_2}$ ve $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2\rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T})\rangle \boldsymbol{T} = \left({k_1}^2\varepsilon_{N_1} + {k_2}^2\varepsilon_{N_2}\right)\boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$$\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) - \langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T\boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T})\rangle \boldsymbol{T}$$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}'\boldsymbol{N}_1 + {k_2}'\boldsymbol{N}_2 - \left({k_1}^2\varepsilon_{N_1} + {k_2}^2\varepsilon_{N_2}\right)\boldsymbol{T} + \left({k_1}^2\varepsilon_{N_1} + {k_2}^2\varepsilon_{N_2}\right)\boldsymbol{T}$$

bulunur. Burada$\boldsymbol{T}$'leri ortak çarpan parantezine aldığımızda

$$\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = \left({k_1}^2\varepsilon_{N_1} + {k_2}^2\varepsilon_{N_2} - {k_1}^2\varepsilon_{N_1} - {k_2}^2\varepsilon_{N_2}\right)\boldsymbol{T} + {k_1}'\boldsymbol{N}_1 + {k_2}'\boldsymbol{N}_2$$

ve

$$\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}'\boldsymbol{N}_1 + {k_2}'\boldsymbol{N}_2$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N_1}) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{N_1}) - \langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T\boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1)\rangle \boldsymbol{T}$$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_1)$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2}\rho\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1}{k_1}'\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1}k_1\nabla_T\boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2}\rho'\boldsymbol{N}_2 + \varepsilon_{N_2}\rho\nabla_T\boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Burada $\nabla_T\boldsymbol{T} = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ ve $\nabla_T\boldsymbol{N}_2 = -\varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{T}$ olduğundan

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1}{k_1}'\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1}{k_1}^2\boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_1}k_1k_2\boldsymbol{N}_2 + \varepsilon_{N_2}\rho'\boldsymbol{N}_2 - \rho k_2\boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2}\rho\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \langle -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2} \rho \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

olur. Denklemde iç çarpımdan dolayı

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \left(-\varepsilon_{N_1} k_1 \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle + \varepsilon_{N_2} \rho \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle\right)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

Burada $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle = 1$ ve $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \left(-\varepsilon_{N_1} k_1\right)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

bulunur. Dağılma özelliğinden

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \boldsymbol{T} = -\varepsilon_{N_1} {k_1}^2 \boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_1} k_1 k_2 \boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Son olarak $\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2} \rho \boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2 \,, -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2} \rho \boldsymbol{N}_2 \rangle \boldsymbol{T}$$

olur. Denklemde iç çarpımdan dolayı

$$\begin{aligned}\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T} = (&-\varepsilon_{N_1} {k_1}^2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle + \varepsilon_{N_2} k_1 \, \rho \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle - \varepsilon_{N_1} k_1 k_2 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle \\ &+\varepsilon_{N_2} k_2 \rho \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2 \rangle) \boldsymbol{T}\end{aligned}$$

yazılır. Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2 \rangle = \varepsilon_{N_2}$, $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ ve $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T} = k_2 \rho \boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N_1}) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N_1}) - \langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T}$$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N_1}) = &-\varepsilon_{N_1} {k_1}' \boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1} {k_1}^2 \boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_1} k_1 k_2 \boldsymbol{N}_2 + \varepsilon_{N_2} \rho' \boldsymbol{N}_2 - \rho k_2 \boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_1} {k_1}^2 \boldsymbol{N}_1 \\ &+ \varepsilon_{N_1} k_1 k_2 \boldsymbol{N}_2 + k_2 \rho \boldsymbol{T}\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N_1}) = &\left(-\varepsilon_{N_1} {k_1}' - \rho k_2 + k_2 \rho\right) \boldsymbol{T} + \left(-\varepsilon_{N_1} {k_1}^2 + \varepsilon_{N_1} {k_1}^2\right) \boldsymbol{N}_1 + (-\varepsilon_{N_1} k_1 k_2 \\ &+ \varepsilon_{N_2} \rho' + \varepsilon_{N_1} k_1 k_2) \boldsymbol{N}_2\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$'nin katsayıları arasında işlem yapıldığında

$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N_1}) = \left(-\varepsilon_{N_1}{k_1}'\right)\boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2}\rho'\boldsymbol{N}_2$

elde edilir. Benzer şekilde $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{N}_2) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2) - \langle\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} + \langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle\boldsymbol{T}$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2)$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1}\rho\boldsymbol{N}_1$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2}{k_2}'\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_2}k_2\nabla_T\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1}\rho'\boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_1}\rho\nabla_T\boldsymbol{N}_1$

elde edilir. Burada $\nabla_T\boldsymbol{T} = k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2$ ve $\nabla_T\boldsymbol{N}_1 = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T}$ olduğundan

$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2}{k_2}'\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_2}k_1k_2\boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_2}{k_2}^2\boldsymbol{N}_2 - \varepsilon_{N_1}\rho'\boldsymbol{N}_1 + \rho k_1\boldsymbol{T}$

bulunur. Burada $\boldsymbol{T}$'leri ve $\boldsymbol{N}_1$'leri ortak çarpan parantezine aldığımızda

$\nabla_T\phi(\boldsymbol{N}_2) = (-\varepsilon_{N_2}{k_2}' + \rho k_1)\boldsymbol{T} + (-\varepsilon_{N_2}k_1k_2 - \varepsilon_{N_1}\rho')\boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_2}{k_2}^2\boldsymbol{N}_2$

olduğu görülür. Diğer yandan $\langle\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1}\rho\boldsymbol{N}_1$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = \langle-\varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1}\rho\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}\rangle(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$

bulunur. İç çarpımın lineerliğinden

$\langle\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = \left(-\varepsilon_{N_2}k_2\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle - \varepsilon_{N_1}\rho\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}\rangle\right)(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$

elde edilir. Burada $\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle = 1$ ve $\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}\rangle = 0$ olduğundan

$\langle\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = \left(-\varepsilon_{N_2}k_2\right)(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$

olur. Dağılma özellğinden

$\langle\phi(\boldsymbol{N}_2),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = -\varepsilon_{N_2}k_1k_2\boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_2}{k_2}^2\boldsymbol{N}_2$

elde edilir. Son olarak $\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1}\rho\boldsymbol{N}_1$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle\boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2\,, -\varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1}\rho\boldsymbol{N}_1\rangle\boldsymbol{T}$

bulunur.

İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T} = (-\varepsilon_{N_2} k_1 k_2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle - \varepsilon_{N_1} k_1\, \rho \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle - \varepsilon_{N_2} {k_2}^2 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle$$
$$-\varepsilon_{N_1} k_2 \rho \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle)\boldsymbol{T}$$

olur. Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T}\rangle = 0$,$\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1\rangle = \varepsilon_{N_1}$, $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T}\rangle = 0$ ve $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_1\rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T} = -k_1 \rho \boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) - \langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T}\rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2)\rangle \boldsymbol{T}$$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \left(-\varepsilon_{N_2} {k_2}' + \rho k_1\right)\boldsymbol{T} + \left(-\varepsilon_{N_2} k_1 k_2 - \varepsilon_{N_1} \rho'\right)\boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_2} {k_2}^2 \boldsymbol{N}_2 + \varepsilon_{N_2} k_1 k_2 \boldsymbol{N}_1$$
$$+ \varepsilon_{N_2} {k_2}^2 \boldsymbol{N}_2 - k_1 \rho \boldsymbol{T}$$

elde edilir. Ortak çarpan parantezine alındığında

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \left(-\varepsilon_{N_2} {k_2}' + \rho k_1 - k_1 \rho\right)\boldsymbol{T} + \left(-\varepsilon_{N_2} k_1 k_2 - \varepsilon_{N_1} \rho' + \varepsilon_{N_2} k_1 k_2\right)\boldsymbol{N}_1$$
$$+ (-\varepsilon_{N_2} {k_2}^2 + \varepsilon_{N_2} {k_2}^2)\boldsymbol{N}_2$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \left(-\varepsilon_{N_2} {k_2}'\right)\boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1} \rho' \boldsymbol{N}_1$$

şeklinde bulunur.

5.2.2 $\boldsymbol{N_1}$ Manyetik Spacelike Eğrilerin Fermi-Walker Türevleri

Teorem 5.5 α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop çatısına göre $\boldsymbol{N}_1$-birim hızlı manyetik spacelike eğri olsun. Bu eğrinin $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}' \boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2} \mu' \boldsymbol{N}_2$$

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1} {k_1}' \boldsymbol{T}$$

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = -\mu' \boldsymbol{T}$$

dir.

İspat:

α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{N}_1$- manyetik spacelike eğri olsun. Bu eğrinin $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin

$$\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2}\mu\boldsymbol{N}_2$$

$$\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T}$$

$$\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\mu\boldsymbol{T}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\boldsymbol{T})$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T\phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) - \langle\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} + \langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{T})\rangle\boldsymbol{T}$$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T\phi(\boldsymbol{T})$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2}\mu\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) = k_1{}'\boldsymbol{N}_1 + k_1\nabla_T\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2}\mu'\boldsymbol{N}_2 + \varepsilon_{N_2}\mu\nabla_T\boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Burada $\nabla_T\boldsymbol{N}_1 = -\varepsilon_{N_1}k_1\boldsymbol{T}$ ve $\nabla_T\boldsymbol{N}_2 = -\varepsilon_{N_2}k_2\boldsymbol{T}$ olduğundan

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) = k_1{}'\boldsymbol{N}_1 - k_1{}^2\varepsilon_{N_1}\boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_2}\mu'\boldsymbol{N}_2 - \mu k_2\boldsymbol{T}$$

bulunur. Burada $\boldsymbol{T}$'leri ve $\boldsymbol{N}_2$'leri ortak çarpan parantezine aldığımızda

$$\nabla_T\phi(\boldsymbol{T}) = k_1{}'\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2}\mu'\boldsymbol{N}_2 - \left(k_1{}^2\varepsilon_{N_1} + \mu k_2\right)\boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2}\mu\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = \langle k_1\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2}\mu\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = (k_1\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}\rangle + \varepsilon_{N_2}\mu\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle)(k_1\boldsymbol{N}_1 + k_2\boldsymbol{N}_2)$$

elde edilir. Burada $\langle\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{T}\rangle = 0$ ve $\langle\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{T}\rangle = 0$ olduğundan

$$\langle\phi(\boldsymbol{T}),\boldsymbol{T}\rangle\nabla_T\boldsymbol{T} = 0$$

elde edilir. Son olarak $\langle\nabla_T\boldsymbol{T},\phi(\boldsymbol{T})\rangle\boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = k_1\boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2}\mu\boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2 \,, k_1 \boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2} \mu \boldsymbol{N}_2 \rangle \boldsymbol{T}$$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T} = ({k_1}^2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1 \rangle + k_1 \varepsilon_{N_2} \mu \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle + k_1 k_2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle + k_2 \varepsilon_{N_2} \mu \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2 \rangle) \boldsymbol{T}$$

bulunur. Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1 \rangle = \varepsilon_{\boldsymbol{N}_1}$,$\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2 \rangle = \varepsilon_{\boldsymbol{N}_2}$ ve $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T} = \left({k_1}^2 \varepsilon_{\boldsymbol{N}_1} + k_2 \mu \right) \boldsymbol{T}$$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) - \langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T}$$

denklemde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}' \boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2} \mu' \boldsymbol{N}_2 - \left({k_1}^2 \varepsilon_{\boldsymbol{N}_1} + \mu k_2 \right) \boldsymbol{T} + \left({k_1}^2 \varepsilon_{\boldsymbol{N}_1} + k_2 \mu \right) \boldsymbol{T}$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = {k_1}' \boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2} \mu' \boldsymbol{N}_2$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) - \langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T}$$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1)$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1} {k_1}' \boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1} k_1 \nabla_T \boldsymbol{T}$$

elde edilir. Burada $\nabla_T \boldsymbol{T} = k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ olduğundan

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1} {k_1}' \boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1} {k_1}^2 \boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_1} k_1 k_2 \boldsymbol{N}_2$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \langle -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \left(-\varepsilon_{N_1} k_1 \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle \right) (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

Burada $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle = 1$ olduğundan

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \left(-\varepsilon_{N_1} k_1\right)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

bulunur. Dağılma özelliğinden

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \boldsymbol{T} = -\varepsilon_{N_1} {k_1}^2 \boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_1} k_1 k_2 \boldsymbol{N}_2$

elde edilir. Son olarak $\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2 \, , -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T} \rangle \boldsymbol{T}$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T} = (-\varepsilon_{N_1} {k_1}^2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle - \varepsilon_{N_1} k_1 k_2 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle) \boldsymbol{T}$

Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ ve $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ olduğundan

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T} = 0$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) - \langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T}$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1} {k_1}' \boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_1} {k_1}^2 \boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_1} k_1 k_2 \boldsymbol{N}_2 + \varepsilon_{N_1} {k_1}^2 \boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_1} k_1 k_2 \boldsymbol{N}_2$

olur. Ortak çarpan parantezine alındığında

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = \left(-\varepsilon_{N_1} {k_1}'\right) \boldsymbol{T} + \left(-\varepsilon_{N_1} {k_1}^2 + \varepsilon_{N_1} {k_1}^2\right) \boldsymbol{N}_1 + (-\varepsilon_{N_1} k_1 k_2 + \varepsilon_{N_1} k_1 k_2) \boldsymbol{N}_2$

şeklinde bulunur. Burada $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$'nin katsayıları arasında işlem yapıldığında

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = -\varepsilon_{N_1} {k_1}' \boldsymbol{T}$

elde edilir. Benzer şekilde $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) - \langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2) \rangle \boldsymbol{T}$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2)$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\mu \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = -\mu' \boldsymbol{T} - \mu \nabla_T \boldsymbol{T}$

elde edilir. Burada $\nabla_T \boldsymbol{T} = k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ olduğundan

$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = -\mu' \boldsymbol{T} - \mu k_1 \boldsymbol{N}_1 - \mu k_2 \boldsymbol{N}_2$

olduğu görülür. Diğer yandan $\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\mu \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \langle -\mu \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

olur. İç çarpımın lineerliğinden

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = -\mu \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

elde edilir. Burada $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle = 1$ olduğundan

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = (-\mu)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

olur. Dağılma özellğinden

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = -\mu k_1 \boldsymbol{N}_1 - \mu k_2 \boldsymbol{N}_2$

elde edilir. Son olarak $\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2) \rangle \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\mu \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2) \rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2 \, , -\mu \boldsymbol{T} \rangle \boldsymbol{T}$

bulunur. İç çarpımın lineerliğinden

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2) \rangle \boldsymbol{T} = (-k_1 \mu \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle - k_2 \, \mu \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle) \boldsymbol{T}$

olur. Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ olduğundan

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2) \rangle \boldsymbol{T} = 0$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) - \langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2) \rangle \boldsymbol{T}$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = -\mu' \boldsymbol{T} - \mu k_1 \boldsymbol{N}_1 - \mu k_2 \boldsymbol{N}_2 + \mu k_1 \boldsymbol{N}_1 + \mu k_2 \boldsymbol{N}_2$

veya

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = -\mu' \boldsymbol{T}$

şeklinde bulunur.

5.2.3 N_2 Manyetik Spacelike Eğrilerin Fermi-Walker Türevleri

Teorem 5.6 α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop çatısına göre $\boldsymbol{N}_2$-birim hızlı manyetik spacelike eğri olsun. Bu eğrinin $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \varepsilon_{N_1} \gamma' \boldsymbol{N}_1 + k_2{}' \boldsymbol{N}_2$$

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = -\gamma' \boldsymbol{T}$$

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2} k_2{}' \boldsymbol{T}$$

dir.

İspat:

α eğrisi 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{N}_2$- manyetik spacelike eğri olsun. Bu eğrinin $\phi(\boldsymbol{T})$, $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ ve $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin

$$\phi(\boldsymbol{T}) = \varepsilon_{N_1} \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$$

$$\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\gamma \boldsymbol{T}$$

$$\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\boldsymbol{T})$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) - \langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T}$$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T \phi(\boldsymbol{T})$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = \varepsilon_{N_1} \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) = \varepsilon_{N_1} \gamma' \boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_1} \gamma \nabla_T \boldsymbol{N}_1 + k_2{}' \boldsymbol{N}_2 + k_2 \nabla_T \boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Burada $\nabla_T \boldsymbol{N}_1 = -\varepsilon_{N_1} k_1 \boldsymbol{T}$ ve $\nabla_T \boldsymbol{N}_2 = -\varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T}$ olduğundan

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) = \varepsilon_{N_1} \gamma' \boldsymbol{N}_1 - \gamma k_1 \boldsymbol{T} + k_2{}' \boldsymbol{N}_2 - \varepsilon_{N_2} k_2{}^2 \boldsymbol{T}$$

bulunur. Burada $\boldsymbol{T}$'leri ortak çarpan parantezine aldığımızda

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) = \left(-\gamma k_1 - \varepsilon_{N_2} k_2{}^2\right) \boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_1} \gamma' \boldsymbol{N}_1 + k_2{}' \boldsymbol{N}_2$$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = \varepsilon_{N_1} \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \langle \varepsilon_{N_1} \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

olur. İç çarpımın özelliğinden

$\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = (\varepsilon_{N_1} \gamma \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle + k_2 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

bulunur. Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ ve $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ olduğundan

$\langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = 0$

elde edilir. Son olarak $\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{T}) = \varepsilon_{N_1} \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2 \,, \varepsilon_{N_1} \gamma \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2 \rangle \boldsymbol{T}$

bulunur. İç çarpımın lineerliğinden

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T} = (\varepsilon_{N_1} \gamma k_1 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1 \rangle + k_1 k_2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle + \varepsilon_{N_1} \gamma k_2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle + {k_2}^2 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2 \rangle) \boldsymbol{T}$

olur. Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_1 \rangle = \varepsilon_{\boldsymbol{N}_1}$,$\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{N}_2 \rangle = \varepsilon_{\boldsymbol{N}_2}$ ve $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2 \rangle = 0$ olduğundan

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T} = \left(\gamma k_1 + \varepsilon_{\boldsymbol{N}_2} {k_2}^2\right) \boldsymbol{T}$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{T}) - \langle \phi(\boldsymbol{T}), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{T}) \rangle \boldsymbol{T}$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \left(-\gamma k_1 - \varepsilon_{\boldsymbol{N}_2} {k_2}^2\right) \boldsymbol{T} + \varepsilon_{N_1} \gamma' \boldsymbol{N}_1 + {k_2}' \boldsymbol{N}_2 + \left(\gamma k_1 + \varepsilon_{\boldsymbol{N}_2} {k_2}^2\right) \boldsymbol{T}$

ve

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{T}) = \varepsilon_{N_1} \gamma' \boldsymbol{N}_1 + {k_2}' \boldsymbol{N}_2$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $\phi(\boldsymbol{N}_1)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) - \langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T}$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1)$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\gamma \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = -\gamma' \boldsymbol{T} - \gamma \nabla_T \boldsymbol{T}$

elde edilir. Burada $\nabla_T \boldsymbol{T} = k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ olduğundan

$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = -\gamma' \boldsymbol{T} - \gamma k_1 \boldsymbol{N}_1 - \gamma k_2 \boldsymbol{N}_2$

olarak bulunur. Diğer yandan $\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\gamma \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \langle -\gamma \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

bulunur. İç çarpımın lineerliğinden

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = (-\gamma \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

elde edilir. Burada $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle = 1$ olduğundan

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = (-\gamma)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$

bulunur. Dağılma özelliğinden

$\langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \boldsymbol{T} = -\gamma k_1 \boldsymbol{N}_1 - \gamma k_2 \boldsymbol{N}_2$

elde edilir. Son olarak $\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_1) = -\gamma \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2 , -\gamma \boldsymbol{T} \rangle \boldsymbol{T}$

bulunur. İç çarpımın lineerliğinden

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T} = (-\gamma k_1 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle - \gamma k_2 \langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle) \boldsymbol{T}$

Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ ve $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ olduğundan

$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T} = 0$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_1) - \langle \phi(\boldsymbol{N}_1), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_1) \rangle \boldsymbol{T}$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = -\gamma' \boldsymbol{T} - \gamma k_1 \boldsymbol{N}_1 - \gamma k_2 \boldsymbol{N}_2 + \gamma k_1 \boldsymbol{N}_1 + \gamma k_2 \boldsymbol{N}_2$

ve

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_1) = -\gamma' \boldsymbol{T}$

elde edilir. Benzer şekilde $\phi(\boldsymbol{N}_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) - \langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2) \rangle \boldsymbol{T}$

denklemi ile hesaplanır. Buna göre denklemde $\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2)$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2} k_2{}' \boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_2} k_2 \nabla_T \boldsymbol{T}$$

elde edilir. Burada $\nabla_T \boldsymbol{T} = k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2$ olduğundan

$$\nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2} k_2{}' \boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_2} k_1 k_2 \boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_2} {k_2}^2 \boldsymbol{N}_2$$

olduğu görülür. Diğer yandan $\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \langle -\varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

bulunur. İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = -\varepsilon_{N_2} k_2 \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle (k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

elde edilir. Burada $\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle = 1$ olduğundan

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = \left(-\varepsilon_{N_2} k_2\right)(k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2)$$

olur. Dağılma özellğinden

$$\langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} = -\varepsilon_{N_2} k_1 k_2 \boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_2} {k_2}^2 \boldsymbol{N}_2$$

elde edilir. Son olarak $\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2) \rangle \boldsymbol{T}$ için $\phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T}$ yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2) \rangle \boldsymbol{T} = \langle k_1 \boldsymbol{N}_1 + k_2 \boldsymbol{N}_2 \, , -\varepsilon_{N_2} k_2 \boldsymbol{T} \rangle \boldsymbol{T}$$

bulunur. İç çarpımın lineerliğinden

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2) \rangle \boldsymbol{T} = (-\varepsilon_{N_2} k_1 k_2 \langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle - \varepsilon_{N_2} {k_2}^2 \langle \boldsymbol{N}_2, T \rangle) \boldsymbol{T}$$

olur. Burada $\langle \boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{T} \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{N}_2, \boldsymbol{T} \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2) \rangle \boldsymbol{T} = 0$$

olarak bulunur. Bulunan eşitlikler

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = \nabla_T \phi(\boldsymbol{N}_2) - \langle \phi(\boldsymbol{N}_2), \boldsymbol{T} \rangle \nabla_T \boldsymbol{T} + \langle \nabla_T \boldsymbol{T}, \phi(\boldsymbol{N}_2) \rangle \boldsymbol{T}$$

denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2} {k_2}' \boldsymbol{T} - \varepsilon_{N_2} k_1 k_2 \boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_{N_2} {k_2}^2 \boldsymbol{N}_2 + \varepsilon_{N_2} k_1 k_2 \boldsymbol{N}_1 + \varepsilon_{N_2} {k_2}^2 \boldsymbol{N}_2$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_T \phi(\boldsymbol{N}_2) = -\varepsilon_{N_2} {k_2}' \boldsymbol{T}$$

bulunur.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Öklid iç çarpımından farklı bir metrik ile oluşan Minkowski Uzayı ve bu uzayda kurulan Serret-Frenet çatısına alternatif bir çatı olan Bishop çatısı tanıtılarak birim hızlı α manyetik eğrisinin timelike ve spacelike durumlarındaki Lorentz kuvvetleri ve Bishop vektörleri arasındaki ilişki incelenmiştir.

Buradan hareketle birim hızlı manyetik timelike ve spacelike α eğrilerinin V manyetik alanının yörüngesi olduğu ispatlanmıştır. Son olarak bulunan manyetik eğrilerin Fermi-Walker türev hesaplamaları yapılmış ve bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Benn, I. M., Tucker, R. W. 1989. Wave mechanics and inertial guidance, The American Physical Society, 39 (6), 1594-1601.

Barros, M., Cabrerizo, L., Fernandez, M., Romeo, A., 2007. Magnetic Vortex Filament Flows. *J Math Phys*, 48, 1-27.

Bishop, R.L., 1975, There is more than one way to frame a curve, *The Amer. Math. Monthly*, 82(3), 246-251.

Can, S., 2018, Euclid Dışı Geometriler, Çanakkale, Onsekiz Mart Üniversitesi,

http://www.turkmath.org/beta/seminer.php?id_seminer=1854 [Erişim Tarihi: 25 Haziran 2022]

Hacısalihoğlu, H. H., 2002, Diferensiyel Geometri, *Fen Fakültesi Yayınları*, Cilt 1. 269, Ankara.

Hacıfazlıoğlu, H., 2013, *Manyetik Ayırma ile Zenginleştirme.*, İstanbul Üniversitesi Akademi Veri Yönetim Sistemi, İstanbul Üniversitesi, http://zikipedia.herokuapp.com/wiki/Manyetik_kutup (Erişim Tarihi: 01 Ocak 2021).

Karakuş, F., Yaylı, Y., 2012, On the Fermi-Walker derivative and non-rotating frame,*International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 9(8), 1250066.

Kazan, A., Karadağ, H.B., 2017, Magnetic Curves According to Bishop Frame and Type-2 Bishop Frame in Euclidean 3-Space, *British J. Math*., 22(4), 1-18.

Kazan, A., Karadağ, H.B., 2017, Magnetıc Non-Null Curves Accordıng To Parallel Transport Frame In Mınkowskı 3-Space, *Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1*.,147-160.

Körpınar, T., Asil, V., Baş, S. 2010. Characterizing inextensible flows of timelike curves according to Bishop frame in Minkowski space, Journal of Vectorial

Relativity, 4 (5), 18-25.

Körpınar T., V. Asil, M. T. Sarıaydın and M. İncesu. 2015. A characterization for Bishop equations of parallel curves according to Bishop frame in E_3, Boletim da

Sociedade Paranaense de Matemática, 33 (1), 33-39.

Körpınar ,T., Sarıaydın M.T, Turhan E. 2013. curves according to Bishop frame in Euclidean 3-space. Advenced Modelling and Optimization, 15, 713-717.

Körpinar, T., Demirkol, R.C., 2017, A New Apporoach on theEnergy of ElasticaandNon-Elastica in Minkowski Space, *BulletinoftheBrazilian Mathematical Society*, 49, 159-177.

Körpinar, T.2009,H_3Heisenberg Grubunda Eğrilikler, Yüksek Lisans, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ, 7-17.

Körpinar, T.2013,Pseudo-Kompleks Lie Gruplarının Eğrilikleri Üzerine, Doktora, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ, 4-25.

Munteanu, M.I., Nistor, A.I., 2012, The Classification of Killing Magnetic Curves in $S^2 \times \mathbb{R}$,*Journal of Geometry and Physics*, 62, 170-182.

Munteanu, M.I., 2013, Magnetic Curves in a Euclidean Space: One example, Several Applications, *Publications de L'Institut Mathematique*, 94(108), 141-150.

Özdemir, Z., Gök, İ., Yaylı,Y., Ekmekçi, F.N., 2015, Notes on Magnetic Curves in 3D semi-Riemannian Manifolds, *Turk J. Math*., 39, 412-426.

Sabuncuoğlu, A., 2001, Diferensiyel Geometri, *Nobel Yayınları*, 522, Ankara.

Yılmaz, S., Turgut, M., 2010, A new Version of Bishop Frame and an Application to Spherical İmages, *J. Math. Anal. Appl*., 371, 764-776.