T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARANORMLU UZAYLARDA α. DERECEDEN DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Haşmet KAPŞİGAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Eylül-2021
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARANORMLU UZAYLARDA α. DERECEDEN DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Haşmet KAPŞİGAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

Eylül-2021
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Haşmet KAPŞİGAY tarafından hazırlanan "**Paranormlu Uzaylarda α. Dereceden Deferred İstatistiksel Yakınsaklık**" adlı tez çalışması 02/09/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Prof. Dr. Yavuz ALTIN ……………………..
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Danışman
Doç. Dr. Muhammed ÇINAR ……………………
Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

Üye
Doç. Dr. Abdullah AYDIN ……………………
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Haşmet KAPŞİGAY

Tarih : 02/09/2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PARANORMLU UZAYLARDA α. DERECEDEN DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Haşmet KAPŞİGAY

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, literatürde günümüze dek yapılan araştırmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, konunun kapsamı ve amacı hakkında açıklamalar yapılmıştır. Üçüncü bölümde, çalışmamızın temelini oluşturan tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, yoğunluk fonksiyonu, istatistiksel yakınsaklık ve deferred istatistiksel yakınsaklık ile ilgili bulgular verilmiştir. Son bölümde, bu çalışmada elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2021, 31 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Cesáro ortalaması, deferred Cesaro ortalaması, istatistiksel yakınsaklık, deferred istatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

MS THESIS

DEFERRED STATISTICAL CONVERGENCES OF ORDER α IN PARANORMED SPACE

Haşmet KAPŞİGAY

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science Institute
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammed ÇINAR

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the research refers to the studies carried out in this field up to now. In the second chapter, the purpose and the context of the study are given. In the third chapter, the definitions and the theorems underlying our study take part. In the fourth chapter, the results releated to the density function, statistical convergence and deferred statistical convergence are included. In the last chapter, the results optained at this study are given.

2021, 31 Pages

Keywords: Cesáro mean, deferred Cesáro mean, statistical convergence, deferred statistical convergence.

ÖNSÖZ

Hem yüksek lisans ders dönemlerinde hem tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisiyle aydınlandığım, her türlü çalışmamda desteğini esirgemeyen, ilgili çalışmalarımda sorularımı sabır, güler yüzlü bir şekilde yanıtlayan ve ufkumu açan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Muhammed ÇINAR'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca desteklerini bir an bile benden esirgemeyen eşim Necibe NEHİR KAPŞİGAY'a ve insan olabilme faziletine ulaşma yolunda yetiştiren aileme canıgönülden teşekkür ederim.

Haşmet KAPŞİGAY

MUŞ-2021

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

D	: Deferred Cesáro yakınsak dizilerin uzayı
S	: İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
DS	: Deferred istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
C_1	: Cesáro yakınsaklık
$\mathbb{C}$	: Komplex vektör uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
l_∞	: Sınırlı diziler uzayı
c	: Yakınsak diziler uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsak diziler uzayı

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık fikri, 1935'te Varşova'da yayınlanan Zygmund'un monografisinin ilk baskısında verildi (Zygmund, 1979). İstatistiksel yakınsama kavramı, Steinhaus ve Fast tarafından kısa bir not olarak verildi ve daha sonra bağımsız olarak Schoenberg istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak inceledi (Steinhaus, 1951; Fast, 1951; Schoenberg, 1959). İstatistiksel yakınsaklık konusu günümüze kadar birçok matematikçinin üzerine çalışmalar yaptığı ve ilgi odağı olan bir konu haline gelmiştir. İstatistiksel yakınsaklık kavramının Cesáro matrisiyle olan ilişkisi bu kavramın regüler matrisler aracılığıyla genelleştirilmesine imkân sağlamıştır. İstatistiksel yakınsaklık, analizin üzerinde çok çalıştığı konulardan biridir. Yıllar boyunca ve farklı isimler altında Fourier analizi teorisinde, Ergodik teoride, Sayı teorisinde, Ölçü teorisinde, Trigonometrik serilerde, Turnpike teorisinde ve Banach uzaylarında istatistiksel yakınsama tartışılmış daha sonra Dizi uzayları ve Toplanabilme teorisinde uygulanmıştır.

İstatistiksel yakınsaklık, yaklaşık elli yıldan fazla bir süre önce tanıtılsa da son zamanlarda aktif bir araştırma haline geldi. Farklı matematikçiler istatistiksel yakınsaklığın özelliklerini incelediler ve bu kavramı ölçüm teorisi, trigonometrik seri, yaklaşım teorisi, lokal dışbükey uzaylar, sonlu toplumsal küme fonksiyonları, Banach uzaylarında ve doğal sayı kümesinin Stone-Chech kompaktlaştırmasının alt kümeleri gibi çeşitli alanlarda uyguladılar.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

İstatistiksel yakınsaklık fikri Zygmund (Zygmund, 1979) tarafından ortaya atıldıktan sonra bağımsız olarak çalışan Fast (Fast, 1951) ve Schonberg (Schoenberg, 1959) tarafından doğal yoğunluğa bağlı olarak bir (x_k) dizisinin istatistiksel yakınsaklığı

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{\mathrm{k}\leq \mathrm{n}: |x_k-l|\geq \varepsilon\}|=0$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu çalışmaları takip eden sürede (Mursaleen, 2000) λ −istatistiksel yakınsaklığı λ_n pozitif tamsayıların azalmayan bir dizisi

$$\lambda_{n+1}<\lambda_n+1 \quad ; \ \lambda_n\to\infty$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}|\{\mathrm{k}\epsilon I_n: |x_k-l|\geq \varepsilon\}|=0$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Salat (Salat, 1980) reel sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını incelemiştir. Connor (Connor, 1988) istatistiksel yakınsaklık ile Cesaro toplanabilme arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Fridy (Fridy, 1985) istatistiksel Cauchy tanımını verip istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel Cauchy arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Rath ve Tripathy (Rath ve Tripathy, 1994) çalışmasında topolojik vektör uzayları üzerinde istatistiksel yakınsaklık yapısını incelemiştir. Topolojik gruplarda istatistiksel yakınsaklık kavramları Çakallı (Çakallı, 1995) tarafından incelenmiştir. Topolojik gruplarda istatistiksel yakınsaklık kavramları Çakallı (Çakallı, 1996) tarafından incelenmiştir. Fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ise (Et ve Nuray, 2001) tarafından çalışılmıştır. Fonksiyon dizileri üzerinde μ −istatistiksel yakınsaklık kavramı (Duman, 2004) tarafından tanımlanmış olup fonksiyon dizilerinin noktasal ve düzgün μ −istatistiksel yakınsaklığı çalışılmıştır. Fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı da (Nuray ve Savaş, 1995) tarafından çalışılmıştır.

Fridy ve Orhan tarafından lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmiştir. Lacunary istatistiksel yakınsaklık

$\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $h_r = k_r - k_{r-1}$ olmak üzere

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k\epsilon I_r : |x_k - l| \geq \varepsilon\}|$$

şeklinde tanımlanmıştır (Fridy ve Orhan, 1993).

Deferred Cesaro ortalaması (Agnew, 1932) tarafından tanımlanmıştır. Deferred Cesaro ortalamasından faydalanarak deferred istatistiksel yakınsaklık (Küçükaslan ve Yılmaztürk, 2016) tarafından tanımlanıp istatistiksel yakınsaklık ile ilişkileri incelenmiştir.

α. dereceden istatistiksel yakınsaklık (Çolak, 2010) tarafından tanımlanmıştır. 2011 yılında α. dereceden $\lambda -$istatistiksel yakınsaklık (Çolak ve Bektaş, 2011) tarafından tanımlandı.

İstatistiksel yakınsaklık kavramını Paranormlu uzaylarda Alotaibi ve Alroqi (Alotaibi ve Alroqi, 2012) tanımlamıştır. Paranormlu uzaylarda $\lambda -$istatistiksel yakınsaklık Alghamdi ve Mursaleen (Alghamdi ve Mursaleen, 2013*)* tarafından çalışılmıştır. Paranormlu uzaylarda lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı Altundağ ve Başarır (Altundağ ve Başarır, 2012) tarafından çalışılmıştır. Daha sonraki yıllarda paranormlu uzaylarda α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaklık (Ercan, 2018) tarafından çalışılmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Tanım 3.1. X boş olmayan bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun

$$+: X \times X \to X \qquad \cdot: K \times X \to X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlarsa X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir. $\forall\ x, y, z \in X$ ve $\forall\ a, b\ \in K$ için

1) $x + y = y + x$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

3) $\forall\, x \in X$ için $x + \theta = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \in X$ vardır.

4) $\forall\, x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır.

5) $1.x = x$

6) $a(x + y) = ax + ay$

7) $(a + b)x = ax + bx$

8) $a(bx) = (ab)x$

dir (Maddox, 1970).

Bu uzayın elemanlarına da vektör ya da nokta adı verilir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa X'e bir reel vektör uzayı, $K = \mathbb{C}$ alınırsa $X'e$ kompleks vektör uzayı adı verilir (Maddox, 1970).

Tanım 3.2. X bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve $M \subset X$ olmak üzere; $\forall\, x, y\ \in M$ ve $\forall\, c \in K$ için; $x + y\ \in M, c.x\ \in M$ oluyorsa X' in bir M alt cümlesine alt vektör uzayı denir (Maddox, 1970).

Tanım 3.3. X boş olmayan bir cümle olsun. Her $x, y, z\ \in X$ için

M1) $d(x, x) = 0$

M2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

M3) $d(x, y) = d(y, x)$

M4) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerine sahip $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir. M1, M3, M4 şartlarını sağlayan d fonksiyonuna bir yarı metrik ve (X, d) ikilisine de yarı metrik uzay denir (Maddox, 1970).

Tanım 3.4. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall\, x, y \in X$ ve $\forall\, \alpha \in K$ için;

N1) $\|x\| \geq 0$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir.

Eğer N2 yerine N2* $x = \theta \Longrightarrow \|x\| = 0$ şartı alınırsa yarı norm elde edilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 3.5. Tanım cümlesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesi olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer cümlelerine göre çeşitli isimler alırlar. Eğer dizinin değer cümlesi $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi ise diziye reel terimli dizi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cümlesi ise rasyonel terimli dizi adı verilir (Balcı, 1997).

Tanım 3.6. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_k)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\forall\, m, k > k_0$ iken $\|x_m - x_k\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 3.7. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_k)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\forall\, k > k_0$ iken $\|x_k - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi x' e yakınsaktır denir. $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ veya $(k \longrightarrow \infty)$ $x_k \longrightarrow x$ şeklinde yazılır (Kreyszig, 1978).

Tanım 3.8. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir (Kreyszig, 1978).

Teorem 3.1. Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart; Y uzayının X uzayında kapalı olmasıdır (Kreyszig, 1978).

Tanım 3.9. w, bütün reel ve kompleks terimli $x = (x_k)$ dizilerin uzayıdır. Bu uzaydaki metrik

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

şeklindedir (Kreyszig, 1978).

Tanım 3.10. l_∞ ile bütün $x = (x_k)$ sınırlı dizilerinin uzayı gösterilir. Yani

$$l_\infty = \left\{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\right\}$$

dir. Bu uzaydaki metrik $d(x,y) = \sup_k |x_k - y_k|$ şeklindedir (Maddox, 1970).

Tanım 3.11. c ile bütün $x = (x_k)$ yakınsak dizilerinin uzayı gösterilir. Yani

$$\mathrm{c} = \left\{x = (x_k) : \exists l \in \mathrm{c} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} |x_k - l| = 0\right\}$$

dir. c dizi uzayı $d(x,y) = \sup_k |x_k - y_k|$ metriği ile birlikte bir metrik uzaydır (Maddox, 1970).

Tanım 3.12. c_0 uzayı, sıfıra yakınsak dizilerin uzayıdır. Yani

$$\mathrm{c}_0 = \left\{x = (x_k) : \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\}$$

dir. Bu uzaydaki metrik $d(x,y) = \max|x_k - y_k|$ şeklinde alınabilir. Çünkü her sıfır dizisinin bir maksimum elemanı vardır (Maddox, 1970).

Tanım 3.13. $p = (p_k)$ pozitif sayıların sınırlı bir dizisi ve $0 < p_k \leq \sup p_k = H < \infty$ olmak üzere $l(p)$ uzayı

$$l(p) = \left\{x = (x_k): \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaydaki metrik $M = Max\{1, \mathrm{H}\}$ olmak üzere

$$d(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_k-y_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

şeklindedir (Maddox, 1970).

Teorem 3.14. l_∞, c ve c_0 uzayları; $\|x\|_\infty=\sup_k|x_k|$ normu ile ve l_p uzayı $p\geq 1$ için

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzayıdır (Kreyszig, 1978).

Tanım 3.15. X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $g: X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa g' ye bir paranorm denir, (X,g) ikilisine de paranormlu uzay denir.

P1) $g(\theta)=0$,

P2) $g(x)=g(-x)$,

P3) $g(x+y)\leq g(x)+\ g(y)$,

P4) (λ_k) skalerlerin bir dizisi ve $\lambda_k\to\lambda_0$ $(k\to\infty)$ olsun. $x_k,\alpha\in X$ için $x_k\to\alpha$ $(k\to\infty)$ iken $g(x_k-\alpha)\to 0$ ve $\lambda_k x_k\to\lambda_0\alpha$ $(k\to\infty)$, $g(\lambda_k\text{k}\to\lambda_0\alpha)\to 0$ $(k\to\infty)$ (Wilansky, 1984).

Tanım 3.16. Eğer $g(x)=0$ iken $x=\theta$ oluyorsa g' ye total paranorm denir (Maddox ve Willey, 1974).

Tanım 3.17. Her yarınorm bir paranormdur. Bu teoremin karşıtı doğru değildir (Maddox ve Willey, 1974).

Tanım 3.18. $A\subset\mathbb{R}, f: A\longrightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a\in A$ olsun. $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir (Balcı, 1997).

Tanım 3.19. $A,B\subset R, f: A\longrightarrow B$ olmak üzere $\forall\, x\in A$ için $|f(x)|\leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna sınırlıdır denir (Balcı, 1997).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Yoğunluk Fonksiyonu

$\delta : K \subset \mathbb{N} \to [0,1]$ K kümesi doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun.

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K(n)|}{n}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona K kümesinin yoğunluğu denir. $K(n) := \{k \leq n : k \in K\}$ olarak tanımlanır ve $|K(n)|$ ifadesine K kümesinin kardinalitesi yani eleman sayısı denir (Niven ve ark.,1991).

$K = \{k \in \mathbb{N} : k = m^2\}$ alınırsa $|K(n)| \leq \sqrt{n}$ olur ve $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$ olur ki buda $\delta(K) = 0$ elde edilir.

$K = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ ve $K = \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ kümeleri içinde $\delta(K) = 1/2$ olur.

4.2. İstatistiksel Yakınsaklık

x=(x_k) bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{k \epsilon \mathbb{N} \mid |x_k - l| \geq \varepsilon\}) = 0$ olacak şekilde bir l sayısı varsa x dizisi l sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim_{x\to\infty} x_k = l$ ile gösterilir.

Teorem 4.1. Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $x_k \to x$ olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ iken $|x_k - x| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Demek ki ancak $k \leq k_0$ için $|x_k - x| \geq \varepsilon$ olur. Halbuki

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} k_0 = 0$$

dır. Fakat bu iddianın tersi doğru değildir. Sınırlı bir dizi de istatistiksel yakınsak olmayabilir. Gerçekten

$$\boldsymbol{x_k} = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases} \qquad m = 1,2,3, \ldots$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - limx = 1\ dır$, ancak $x \notin l_\infty$ ve bu nedenle x yakınsak değildir.
dizisi sınırlıdır fakat istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 4.1. $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - l) = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına C_1-yakınsaktır denir.
C_1-yakınsak olan dizilerin kümesi C_1 sembolü ile gösterilir.

$$(C,1) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = l, \exists l \in C \right\}$$

Tanım 4.2. Tüm pozitif reel sayıların azalmayan, sonsuza giden ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 1$$

koşulu sağlayan $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümelerini Λ sembolü ile göstereceğiz (Mursaleen, 2000).

Tanım 4.3. $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, pozitif reel sayıların azalmayan, sonsuza giden ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 1$$

$$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$$

koşulu sağlayan bir dizi olsun. Genelleştirilmiş De la Valle-Poussin ortalaması

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j \in I_n}^{\infty} x_j$$

şeklinde tanımlanır. n→ ∞ iken $t_n(x) \to l$'ye gidiyorsa $x = (x_k)$ dizisi l'ye $(V, \lambda) -$ toplanabilirdir denir ve

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_k) \colon \exists L \in \mathbb{R}, \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j \in I_n}^{\infty} \left| x_j - l \right| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Mursaleen, 2000).

Tanım 4.4. $K \subset \mathbb{N}$ olsun ve K'nın $\lambda -$yoğunluğu

$$\delta_\lambda(K) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \epsilon I_n \colon k \epsilon K\}|$$

olarak tanımlanır. Burada $\lambda_n = n$ olması durumunda K'nın $\lambda -$yoğunluğu $\delta_\lambda(K)$, K'nın doğal yoğunluğuna dönüşür. Her $K \subset \mathbb{N}$ için $(\lambda_n/n) \leq 1$ ise $\delta(K) \leq \delta_\lambda(K)$ olur (Mursaleen, 2000).

Tanım 4.5. $\mathrm{x} = (x_k)$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \epsilon I_n \colon |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $\mathrm{x} = (x_k)$ dizisi l'ye $\lambda -$istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\lambda - \lim_{k \to \infty} x_k = l$ şeklinde gösterilir. Tüm $\lambda -$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini S_λ ile göstereceğiz (Mursaleen, 2000).

1932 yılında Agnew (Agnew, 1932)'in Cesaro alt metodunun bir genellemesi olan deferred Cesaro metodunu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\mathrm{p(n)} < \mathrm{q(n)} \text{ ve } \lim_{n \to \infty} q(n) = \infty \tag{4.1}$$

koşulu sağlayan dizileri olmak üzere $\mathrm{x} = (x_k)$ reel terimli dizisinin deferred Cesaro ortalaması

$$\left(D_{p.q},X\right)_n = \frac{1}{\mathrm{q(n)} - \mathrm{p(n)}} \sum_{k=\mathrm{p(n)}+1}^{\mathrm{q(n)}} \mathrm{x_k}\,, n = 1,2,3, \ldots \tag{4.2}$$

biçimindedir.

$(D_{p.q},X)_n$ dönüşümüne $\mathrm{x} = (x_k)$ dizisinin deferred Cesaro ortalaması denir. (4.2)'de verilen $D_{p.q}$ metodu regüler olmasının yanı sıra başka önemli özellikleri de sağladığı Agnew (Agnew, 1932) tarafından ifade edilmiştir.

Ayrıca, K⊂ ℕ olmak üzere

$$\delta^*{}_{D_{p,q}} = \lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\mathrm{q(n)} - \mathrm{p(n)}} |\{p(n) < k \leq q(n): k \in K\}|$$

biçiminde tanımlanan ifadeye K kümesinin deferred istatistiksel üst yoğunluğu denir (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

$\delta^*{}_{D_{p,q}}$ fonksiyonu; ∀ K,L ⊆ ℕ için

I) $\delta_{D_{p,q}}$(K) mevcut ise $\delta_{D_{p,q}}$(K)= $\delta^*{}_{D_{p,q}}(K)$

II) $\delta_{D_{p,q}}$(K) $\neq 0$ olması için gerek ve yeter şart $\delta^*{}_{D_{p,q}}(K) > 0$

III) $\delta^*{}_{D_{p,q}}$ fonksiyonu monoton artandır.

özelliklerini sağlar (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

Tanım 4.6. $\mathrm{x} = (x_k)$ reel ya da karmaşık terimli bir dizi $p = \{p(n)\}_{n\in N}$ ve $q = \{q(n)\}_{n\in N}$ (4.1) koşulunu sağlayan pozitif tam sayıların dizileri olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{q(n)-p(n)}} |\{\, p(n) < k \leq q(n): |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

sağlanır ise $\mathrm{x} = (x_k)$ dizisi l sayısına deferred istatistiksel yakınsaktır denir ve $\lim_{k\to\infty} x_k = \ l(\mathrm{DS[p,q]})$ biçiminde gösterilir (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

Teorem 4.2. $p = \{p(n)\}_{n\in N}$ ve $q = \{q(n)\}_{n\in N}$ pozitif tam

sayıların (4.1) koşullarını sağlayan dizileri olsun. Bu durumda $x_k \to l(\mathrm{D[p,q]})$ $x_k \to l(\mathrm{DS[p,q]})$ 'dur (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

İspat: $p=\{p(n)\}_{n\in N}$ ve $q=\{q(n)\}_{n\in N}$ pozitif tam sayıların (4.1) koşullarını sağlayan pozitif tamsayıların dizileri olmak üzer $x_k \rightarrow \ l(\mathrm{D[p,q]})$ olsun. Bu durumda keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\frac{1}{\mathrm{q(n)-p(n)}} \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_k-l|\geq\varepsilon}}^{\mathrm{q(n)}} |x_k - l|$$

$$\geq \frac{1}{\mathrm{q(n)-p(n)}} |\{\, p(n) < k \leq q(n) : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer, yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafında n→∞ iken limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{q(n)-p(n)}} |\{\, p(n) < k \leq q(n) : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu ise x $=(x_k)$ dizisinin l sayısına deferred istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1. Eğer,

$$x_k \rightarrow \ l(\mathrm{k} \rightarrow \infty)\ ise\ x_k \rightarrow \ l(\mathrm{DS[p,q]})$$

dır (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

Uyarı 4.1. Teorem 4.2**.**'nin ve sonuç 4.1.'in tersleri her zaman doğru değildir. Şimdi bunu bir örnek ile gösterelim:

Örnek 4.1. q(n) pozitif tam sayıların monoton artan bir dizisi ve $m_0 \neq 0$ tespit edilmiş doğal sayı olsun. x =(x_k) dizisi n=1,2,... için

$$x_k := \begin{cases} k^2, & [\![\sqrt{\mathrm{q(n)}}]\!] - m_0 < k \leq [\![\sqrt{\mathrm{q(n)}}]\!] \\ 0, & diğer\ durum \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Eğer $0 \leq \mathrm{p(n)} \leq [\![\sqrt{\mathrm{q(n)}}]\!] - m_0$ koşulunu sağlayan $p=\{p(n)\}_{n\in N}$ dizisi için (D[p, q]) metodu göz önüne alınırsa keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}|\mathrm{k}:\{\,p(n)<k\le q(n):|x_k-l|\ge\varepsilon\}| = \lim_{n\to\infty}\frac{m_0}{\mathrm{q(n)-p(n)}}=0$$

sağlanır.

Bu ise, $\mathrm{x}=(x_k)$ dizisi verilmiş, $\mathrm{q(n)}$ ve özenle seçilmiş $\mathrm{p(n)}$ için $x_k \to l(\mathrm{DS[p,q]})$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{\mathrm{q(n)}}|x_k-l| \ge \lim_{n\to\infty}\frac{m_0(\llbracket\sqrt{\mathrm{q(n)}}\rrbracket-m_0)^2}{q(n)-p(n)}=m_0,$$

sağlanır.

Bu ise, $m_0\neq 0$ olduğundan $\mathrm{x}=(x_k)$ dizisinin l'ye $\mathrm{D[p,q]}$ yakınsamadığını gösterir.

Aşağıdaki teorem de Teorem 4.2.'nin tersinin ne zaman doğru olacağını ifade eder.

Teorem 4.3. $\mathrm{x}=(x_k)\in l_\infty$ ve $x_k \to l(\mathrm{DS[p,q]})$ olsun. O zaman $x_k \to l(\mathrm{D[p,q]})$ dır (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

İspat: O halde ∃ M > 0 reel sayısı bulunabilir öyle ki ∀ n ∈ ℕ için $|x_k-l| \le \mathrm{M}$ dir. Keyfi $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{\mathrm{q(n)}}|x_k-l|$$

$$=\left(\frac{1}{\mathrm{q(n)-p(n)}}\sum_{\substack{k=p(n)+1\\|x_k-l|\ge\varepsilon}}^{\mathrm{q(n)}}|x_k-l|+\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{\substack{k=p(n)+1\\|x_k-l|<\varepsilon}}^{\mathrm{q(n)}}|x_k-l|\right)$$

$$\le\frac{1}{\mathrm{q(n)-p(n)}}\left(M\sum_{\substack{k=p(n)+1\\|x_k-l|\ge\varepsilon}}^{\mathrm{q(n)}}\mathbf{1}+\boldsymbol{\varepsilon}\sum_{\substack{k=p(n)+1\\|x_k-l|<\varepsilon}}^{\mathrm{q(n)}}|x_k-l|\right)$$

$$\le M\frac{1}{\mathrm{q(n)-p(n)}}|\mathrm{k}:\{\,p(n)<k\le q(n):|x_k-l|\ge\varepsilon\}|$$

$$+\,\varepsilon\frac{1}{\mathrm{q(n)-p(n)}}|\mathrm{k}:\{\,p(n)<k\le q(n):|x_k-l|\ge\varepsilon\}|$$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{q(n)-p(n)}} |\mathrm{k}: \{ p(n) < k \leq q(n): |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0 \text{ ,}$$

olduğu dikkate alınarak (n→∞) iken limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{\mathrm{q(n)}} |x_k - l| = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4.3. S ve DS Metotlarının Kıyaslanması

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık ile deferred istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki (4.1) koşulunu sağlayan $\mathrm{p} = \{\mathrm{p(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\mathrm{q} = \{\mathrm{q(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri üzerine konan koşullar altında incelenecektir.

Teorem 4.4. $\mathrm{x} = (x_k)$ reel terimli bir dizi ve $l \in \mathrm{R}$ olsun. Bu durumda $\left\{\frac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right\}$ sınırlı ve $x_k \to l(\mathrm{S})$ ise $x_k \to l(\mathrm{DS[p,q]})$'dır (Yılmaztürk ve Küçükaslan, 2011).

İspat: $\mathrm{x} = (x_k)$ reel terimli bir dizi ve $l \in \mathrm{R}$ sayısına istatistiksel yakınsak olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{n}} |\{\mathrm{k} \leq \mathrm{n}: |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

sağlanır.

Teoremin ispatını vermeden aşağıdaki sonucu ispatsız olarak verelim: $\{(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{(b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların dizileri olmak üzere $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, a∈ℝ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} a_{b_n} = a'$ dır.

Eğer, $\{(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\frac{1}{\mathrm{n}}|\{\mathrm{k} \leq \mathrm{n}: |(x_k - l| \geq \varepsilon\}| \geq \varepsilon$ ve $\{(b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathrm{q(n)}$ biçiminde seçilirse yukarıdaki ifadeden

$$\left\{\frac{|\{\mathrm{k} \leq \mathrm{q(n)}: |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \geq \varepsilon}{\mathrm{q(n)}}\right\}$$

dizisinin sıfıra yakınsaklığı elde edilir. Yani;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{n}} |\{\mathrm{k} \leq \mathrm{n}: |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

sağlanır. Bu durumda, (4.1) koşullarını sağlayan $\mathrm{q} = \{\mathrm{q(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için

$$\{|\{\ p(n) < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}|\} \subseteq \{\ k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}$$

içermesi ve

$$\{|\{\ p(n) < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}|\} \leq \{\ k \leq \mathrm{q}(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}$$

eşitsizliği sağlanır. Her iki taraftan n→∞ ’ iken limit alınırsa

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} |\{\ p(n) < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{q(n)}{q(n) - p(n)} \frac{1}{q(n)} |\{\ k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{q(n)}{q(n)\left(1 - \frac{\mathrm{p(n)}}{q(n)}\right)} \frac{1}{q(n)} |\{\ k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{q(n)}{\left(1 - \frac{\mathrm{p(n)}}{q(n)}\right)} \frac{1}{q(n)} |\{\ k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}\ |
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{\mathrm{p(n)}}{q(n)}\right)} < \infty$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)} |\{\, k \le q(n), |x_k - l| \ge \varepsilon\}| = 0$$

olduğundan $x_k \ \rightarrow \ l(\mathrm{DS[p,q]})$, $\mathrm{n} \rightarrow \infty$, bulunur.

Sonuç 4.2. Teorem 4.4. koşulları altında $\mathrm{q} = \{\mathrm{q(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların bir dizisi öyle ki $\forall n\epsilon N$ için $\mathrm{q(n)} < n$ sağlansın ve $\left\{\frac{n}{q(n)-p(n)}\right\}$ sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda $x_k \rightarrow l(\mathrm{S})$ ise $x_k \rightarrow l(\mathrm{DS[p,q]})$ 'dır (Yılmaztürk ve Küçükaslan, 2011).

Uyarı 4.2. Eğer $\left\{\frac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right\}$ sınırlı değilse Teorem 4.4.'ün tersi doğru değildir. Bunu görmek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 4.2. $\mathrm{x} = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} \frac{k+1}{2}, & k \ tek \\ -\frac{k}{2}, & k \ çift \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Eğer, $\mathrm{p(n) = 2n}$, $\mathrm{q(n) = 4n}$ biçiminde seçilirse Teorem 4.4.'ün koşullarının sağlandığı açıktır. Ayrıca Teorem 4.4.'ten $x_k \rightarrow 0(\mathrm{DS[2n,4n]})$, olduğunu görürüz. Fakat $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{n}} |\{\mathrm{k} \le \mathrm{n}\colon |(x_k - l| \ge \varepsilon\}| \ne 0$$

dır. Bu da $x_k \nrightarrow 0(\mathrm{S})$ 'dir.

Tanım 4.7. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{\alpha}}|\{\mathrm{k}\leq \mathrm{n}: |x_k-\gamma|\geq \varepsilon\}|=0$$

olacak şekilde bir γ sayısı varsa $x=(x_k)$ dizisi γ sayısına α. dereceden istatistiksel yakınsaktır denir ve $S^{\alpha}-limx=\gamma$ şeklinde gösterilir, (Çolak, 2010)

Tanım 4.8. $\lambda\in\Lambda$ ve $\alpha\in(0,1]$ olsun. $I_n=[n-\lambda_n+1,n]$ ve ${\lambda_n}^{\alpha}$, λ_n in α. kuvveti yani $\lambda_n=({\lambda_n}^{\alpha})=({\lambda_1}^{\alpha},{\lambda_2}^{\alpha},{\lambda_3}^{\alpha},\dots,{\lambda_n}^{\alpha},\dots)$ olmak üzere $\forall\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}|\{\mathrm{k}\leq\in\ I_n\ : |x_k-\gamma|\geq \varepsilon\}|=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi γ ye α. dereceden $\lambda-$istatistiksel yakınsaktır veya γ ye ${S_\lambda}^{\alpha}$ yakınsaktır denir (Çolak ve Bektaş, 2011). Bu durumda ${S_\lambda}^{\alpha}-limx=\gamma$ veya $x_k\to\gamma({S_\lambda}^{\alpha})$ yazılır. $\lambda_n=n$ özel halinde ${S_\lambda}^{\alpha}$ ile S^{α} uzayları birbirine denk olur.

Teorem 4.5. Her $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$ için $\mathrm{q(n)=n}$ olmak üzere $\mathrm{p}=\{\mathrm{p(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin. $x_k\to l(\mathrm{DS[p,q]})$ olması için gerek ve yeter koşul $x_k\to l(\mathrm{S})$‘dir (Yılmaztürk ve Küçükaslan, 2011).

Tanım 4.9. (X,g) bir paranormlu uzay olsun. Bir $x=(x_k)$ dizisine $\forall\varepsilon>0$ için $k\geq k_0$ iken $g(x_k-\varsigma)<\varepsilon$ olacak şekilde bir pozitif k_0 tam sayısı mevcut ise ς sayısına yakınsak veya $g-$ yakınsak denir. $g-limx=\varsigma$ şeklinde gösterilir (Alotaibi ve Alroqi, 2012).

Tanım 4.10. (X,g) bir paranormlu uzay olsun. Bir $x=(x_k)$ dizisine $\forall\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n: g(x_k-\varsigma)\geq\varepsilon\}|=0$$

ise (x_k) dizisine, ς sayısına istatistiksel yakınsak veya $g(S)-$yakınsak denir. $g(S)-limx=\varsigma$ şeklinde gösterilir (Alotaibi ve Alroqi, 2012).

Tanım 4.11. (X,g) bir paranormlu uzay olsun. Bir $x=(x_k)$ dizisine $\forall\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}|\{\mathrm{k}\in I_n: g(x_k-\varsigma)\geq \varepsilon\}|=0$$

ise (x_k) dizisine, ς sayısına λ- istatistiksel yakınsak veya $g(S_\lambda)$ −yakınsak denir. $g(S_\lambda)-\ limx=\varsigma$ şeklinde gösterilir (Alghamdi ve Mursaleen, 2013).

Tanım 4.12. (X,g) bir paranormlu uzay ve $\alpha\in(0,1]$ olsun. Bir $x=(x_k)$ dizisine $\forall\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}|\{\mathrm{k}\leq \mathrm{n}: g(x_k-\varsigma)\geq \varepsilon\}|=0$$

ise (x_k) dizisine, ς sayısına $\alpha.$ dereceden istatistiksel yakınsak veya $g(S)^\alpha$ −yakınsak denir. $g(S)^\alpha-\ limx=\varsigma$ şeklinde gösterilir (Ercan, 2018).

5. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde paranormlu uzaylarda α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaklık, deferred istatistiksel Cauchy ve deferred Cesaro toplanabilme kavramları tanımlanıp bunlar arasındaki ilişki incelenecektir.

ℕ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesinin α. dereceden deferred yoğunluğunu

$$\delta_{p,q}^{\alpha}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(q(n)-p(n))^{\alpha}} |\{\ p(n) < k \le q(n), \mathrm{k} \in \mathrm{A}\}|$$

şeklinde tanımlayacağız.

Tanım 5.1. $\mathrm{x} = (x_k)$ **,** (X, g) paranormlu uzayında bir dizi ve {p(n)} ve {q(n)} negatif olmayan tamsayıların (4.1)'deki şartları sağlayan iki dizi ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(q(n)-p(n))^{\alpha}} |\{\ p(n) < k \le q(n) \colon g(x_k - l) \ge \varepsilon\}| = 0$$

ise $\mathrm{x} = (\mathrm{x_k})$ dizisine (X, g) paranormlu uzayında l sayısına α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır denir.

$\mathrm{x} = (x_k)$ dizisi paranormlu uzayda l sayısına α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak ise $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p,q}]) - \lim x_k = l$ şeklinde gösterilir. Bu şekilde yakınsayan tüm dizilerin kümesini $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p,q}]$) ile göstereceğiz.

i) Bu tanımda $\mathrm{q(n)} = n$, $\mathrm{p(n)} = 0$ ve $\alpha = 1$ seçilirse paranormlu uzayda α. dereceden istatistiksel yakınsaklık Tanım 4.10.'daki (Alotaibi ve Alroqi, 2012) paranormlu uzaylardaki istatistiksel yakınsaklık tanımına indirgenir.

ii) Bu tanımda $\mathrm{q(n)} = \lambda_n$, $\mathrm{p(n)} = 0$ ve $\alpha = 1$ seçilirse Tanım 4.11.' deki (Alghamdi ve Mursaleen, 2013) paranormlu uzaylarda λ-istatistiksel yakınsaklık tanımına indirgenir.

iii) Bu tanımda $\mathrm{q(n)} = n$, $\mathrm{p(n)} = 0$ seçilirse Tanım 4.12.'deki (Ercan, 2018) paranormlu uzaylarda α. dreceden istatistiksel yakınsaklık tanımına indirgenir.

(X, g) paranormlu uzayda tanımlı α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaklık $\alpha \in (0,1]$ için iyi tanımlı fakat $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir.

$x = (x_k)$ dizisini;

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2m \\ 0, & k \neq 2m \end{cases}$$

şeklinde seçelim. Bu takdirde $q(n) = n^2$, $p(n) = n$, $g(x) = |x|$ ve $\alpha > 1$ seçilirse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n^2-n)^\alpha} |\{n < k \leq n^2 : g(x_k - 1) \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2(n^2-n)^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n^2-n)^\alpha} |\{n < k \leq n^2 : g(x_k - 0) \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2(n^2-n)^\alpha} = 0$$

elde edilir ki bu mümkün değildir.

Tanım 5.2. $x = (x_k)$, (X, g) paranormlu uzayında bir dizi, $\{p(n)\}$ ve $\{q(n)\}$ pozitif tamsayıların (4.1)'deki şartları sağlayan iki dizisi $\alpha \in (0,1]$ olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(q(n)-p(n))^\alpha} |\{\ p(n) < k \leq q(n) : g(x_k - x_N) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $\mathbb{N} = \mathbb{N}(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine (X, g) paranormlu uzayında α. dereceden deferred istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Tanım 5.3. $x = (x_k)$, (X, g) paranormlu uzayında bir dizi, $\{p(n)\}$ ve $\{q(n)\}$ pozitif tamsayıların (4.1)'deki şartları sağlayan iki dizisi ve

$\alpha \in (0,1]$, $m \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(q(n)-p(n))^\alpha} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |g(x_k - l)|^m = 0$$

olacak şekilde bir l sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine α. dereceden kuvvetli deferred m-Cesaro yakınsaktır denir ve $DW_m^\alpha(g) - lim x_k = l$ ile gösterilir.

Teorem 5.1. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ herhangi iki dizi ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu takdirde;

i) $c \in \mathbb{R}$ ve (x_k) dizisi (X, g) total paranormlu uzayında l sayısına α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak ise (cx_k) dizisi cl'ye α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

ii) (X, g) total paranormlu uzayında (x_k) dizisi l_1'e ve (y_k) dizisi l_2'ye α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak iseler $(x_k + y_k)$ dizisi $(l_1 + l_2)'ye$ α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 5.2. (X, g) total paranormlu uzayında (x_k) dizisi α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir.

İspat: Farz edelim ki $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}, \mathrm{q}]) - lim x_k = l_1$ ve $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}, \mathrm{q}]) - lim x_k = l_2$ olsun ve $\varepsilon > 0$ için $A_1(\varepsilon)$ ve $A_2(\varepsilon)$ kümelerini

$$A_1(\varepsilon) = \left\{\mathrm{p(n)} < \mathrm{k} \leq \mathrm{q(n)} : g(x_k - l_1) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$A_2(\varepsilon) = \left\{\mathrm{p(n)} < \mathrm{k} \leq \mathrm{q(n)} : g(x_k - l_2) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

şeklinde tanımlayalım ve $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}, \mathrm{q}]) - lim x_k = l_1$ olduğundan $\delta\big(A_1(\varepsilon)\big) = 0$ dır. Benzer şekilde $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}, \mathrm{q}]) - lim x_k = l_2$ olduğundan $\delta\big(A_2(\varepsilon)\big) = 0$ dır.

$A(\varepsilon) = A_1(\varepsilon) \cup A_2(\varepsilon)$ olduğundan $\delta\big(A(\varepsilon)\big) = 0$ ve $\delta\big(A^c(\varepsilon)\big) = 1$ dir. Şimdi $k \in \mathbb{N} \setminus A(\varepsilon)$ olsun. Bu takdirde $g(l_1 - l_2) \leq: g(x_k - l_1) + g(x_k - l_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ olur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $g(l_1 - l_2) = 0$ elde ederiz ki buradan $l_1 = l_2$ elde edilir.

Teorem 5.3. (X, g) paranormlu uzayında $x = (x_k)$ dizisi l'ye $g - yakınsak$ ise (x_k) dizisi l'ye α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır fakat bunun tersi doğru değildir.

İspat: Farz edelim ki (x_k) dizisi l'ye $g - yakınsak$ olsun. O zaman $\forall\, \varepsilon > 0$ için $N \in N^+$ vardır öyle ki $\forall k \geq \mathbb{N}$ için $g(\mathrm{x_k} - l) < \varepsilon$ yazabiliriz.

$A(\varepsilon) = \{k \in N: g(\mathrm{x_k} - l) \geq \varepsilon\} \subset \{1,2, \dots, k\}$ olduğundan $\delta\big(A(\varepsilon)\big) = 0$ dır. Bu nedenle $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}, \mathrm{q}]) - lim x_k = l$ olur.

Teoremin tersinin doğru olmadığını göstermek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 5.1. $X = \ell\left(\frac{1}{k}\right) = \left\{x = (x_k) \colon \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{\frac{1}{k}} < \infty\right\}, g(X) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|)^{\frac{1}{k}}\right)$ paranormu ile bir paranormlu uzay olsun. (x_k) dizisini

$$\boldsymbol{x_k} = \begin{cases} k, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan

$$A(\varepsilon) = \{k \leq n \colon g(x_k) \geq \varepsilon\}$$

kümesini ele alalım. Buradan

$$g(x_k) = \begin{cases} k^{\frac{1}{k}}, & k = n^2\ ise \\ 0, & k \neq n^2\ ise \end{cases}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{k \to \infty} g(x_k) = \begin{cases} 1, & k = n^2 ise \\ 0, & k \neq n^2\ ise \end{cases}$$

elde edilir. Bu da bize (x_k) dizisinin $g - limitinin$ olmadığını gösterir. Diğer taraftan $\alpha > \frac{1}{2}$ için $\delta_{\mathrm{p,q}}^{\alpha}(\mathrm{A}(\varepsilon)) = 0$ elde edilir. Bu da $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p,q}]) - lim x_k = 0$ olduğunu verir.

Teorem 5.4. $x = (x_k)$ dizisinin (X, g) tam paranormlu uzayında α. dereceden deferred istatistiksel Cauchy olması için gerek ve yeter şart α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak olmasıdır.

İspat: Farz edelim ki (x_k) dizisi $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p,q}]) - Cauchy$ fakat $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p,q}])$ yakınsak olmasıdır. O zaman $\mathrm{F}(\varepsilon) = \{\mathrm{k} \in \mathbb{N} : g(x_k - x_m) \geq \varepsilon\}$ olmak üzere $\delta_{\mathrm{p,q}}^{\alpha}(\mathrm{F}(\varepsilon)) = 0$ elde ederiz. Aynı şekilde $\mathrm{H}(\varepsilon) = \left\{\mathrm{k} \in \mathbb{N} : g(x_k - l) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ olmak üzere $\delta^{\alpha}_{\mathrm{p,q}}(\mathrm{H}(\varepsilon)) = 0$ yani $\delta^{\alpha}_{\mathrm{p,q}}(H^c(\varepsilon)) = 1$ elde ederiz. $g(x_k - l) < \frac{\varepsilon}{2}$ ise o zaman

$g(x_k - x_m) < 2g(x_k - l) < \varepsilon$ elde ederiz. Dahası $\delta^{\alpha}_{\mathrm{p,q}}(F^c(\varepsilon)) = 0$ yani $\delta^{\alpha}_{\mathrm{p,q}}(\mathrm{F}(\varepsilon)) = 1$ elde edilir ki (x_k) dizisi $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p,q}]) - Cauchy$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu nedenle $x = (x_k)$ dizisi $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p,q}])$ yakınsak olmalıdır.
Tersine farz edelim ki $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p,q}]) - lim x_k = l$ olsun o zaman

$$\mathrm{A}(\varepsilon) = \left\{\mathrm{k} \in \mathbb{N} : g(x_k - l) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olmak üzere $\delta\big(A(\varepsilon)\big) = 0$ elde ederiz. Bu da
$\delta\big(N \setminus A(\varepsilon)\big) = \delta\left(\left\{\mathrm{k} \in \mathbb{N} : g(x_k - l) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 1$ olduğu anlamına gelir. $m, k \notin A(\varepsilon)$ olsun o zaman $g(x_m - x_k) < \varepsilon$ dur.

Sabit $m \notin A(\varepsilon)$ için $B(\varepsilon) = \{\mathrm{k} \in \mathbb{N} : g(x_m - x_k) < \varepsilon\}$ olsun. O zaman $\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon) \subset B(\varepsilon)$ dur. Bundan dolayı

$$1 = \delta(\mathbb{N}/A(\varepsilon)) \leq \delta(B(\varepsilon)) \leq 1.$$

$$N \setminus B(\varepsilon) = \{\mathrm{k} \in \mathbb{N} : g(x_k - x_m) \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere $\delta(\mathbb{N} \setminus B(\varepsilon)) = 0$ anlamına gelir ki buda (x_k) dizisinin (X, g) paranormlu uazayında α. dereceden deferred istatistiksel Cauchy olduğu anlamına gelir.

Teorem 5.5. (X, g) paranormlu uzayında (x_k) dizisi l'ye α. dereceden kuvvetli deferred -Cesaro yakınsak ise $(\mathrm{x_k})$ dizisi l'ye α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

İspat: (x_k) dizisi l'ye α. dereceden kuvvetli deferred -Cesaro yakınsak olsun $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\big(q(n) - p(n)\big)^{\alpha}} \sum_{k=p(n)+1}^{\mathrm{q(n)}} |g(x_k - l)|$$

$$= \frac{1}{\left(q(n)-p(n)\right)^{\alpha}}\left[\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ g(x_k-L)\geq\varepsilon}}^{\mathrm{q(n)}}|g(x_k-l)| + \sum_{\substack{k=p(n)+1\\ g(x_k-L)<\varepsilon}}^{\mathrm{q(n)}}|g(x_k-l)|\right]$$

$$\geq \frac{1}{\left(q(n)-p(n)\right)^{\alpha}}\left[\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ g(x_k-L)\geq\varepsilon}}^{\mathrm{q(n)}}|g(x_k-l)|\right]$$

$$\geq \boldsymbol{\varepsilon}.\frac{1}{(q(n)-p(n))^{\alpha}}\left|\{\,p(n)<k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}\right|$$

elde ederiz. $n\to\infty$ için her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(q(n)-p(n))^{\alpha}}\left|\{\,p(n)<k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}\right| = 0$$

bu da bize (x_k) dizisinin α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak olduğunu verir.

Teorem 5.6. (X,g) paranormlu uzayında (x_k) dizisi sınırlı ve α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak ise (x_k) dizisi α. dereceden Cesaro yakınsaktır.

İspat: (x_k) sınırlı ve α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak olsun. $.A(\varepsilon) = \{k\in\mathbb{N}: g(\mathrm{x_k}-l)\geq\varepsilon\}$ kümesini tanımlayalım. $\varepsilon>0$ için $\delta^{\alpha}_{\mathrm{p,q}}(A(\varepsilon))=0$ elde ederiz. (x_k) sınırlı olduğundan $g(x_k-l)\leq M$ olacak şekilde $M>0$ sayısı vardır.

$$S_1(n) = \frac{1}{\left(\mathrm{q(n)}-\mathrm{p(n)}\right)^{\alpha}}\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ k\notin A(\varepsilon)}}^{\mathrm{q(n)}} g(x_k-l)$$

ve

$$S_2(n) = \frac{1}{\left(\mathrm{q(n)}-\mathrm{p(n)}\right)^{\alpha}}\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ k\epsilon A(\varepsilon)}}^{\mathrm{q(n)}} g(x_k-l)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{\left(\mathrm{q(n)}-\mathrm{p(n)}\right)^{\alpha}}\sum_{k=p(n)+1}^{\mathrm{q(n)}} g(x_k-l)$$

$$=\frac{1}{\left(\mathrm{q(n)}-\mathrm{p(n)}\right)^{\alpha}}\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ k\notin A(\varepsilon)}}^{\mathrm{q(n)}} g(x_k-l)+\frac{1}{\left(\mathrm{q(n)}-\mathrm{p(n)}\right)^{\alpha}}\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ k\in A(\varepsilon)}}^{\mathrm{q(n)}} g(x_k-l)$$

$$=S_1(n)+S_2(n)$$

dır.

$k \notin A(\varepsilon)$ ise $S_1(n) < \varepsilon$ dur. $k \in A(\varepsilon)$ için olduğundan

$$S_2(n) \leq (supg(x_k-l))\frac{|A(\varepsilon)|}{\left(\mathrm{q(n)}-\mathrm{p(n)}\right)^{\alpha}} \leq M\frac{|A(\varepsilon)|}{\left(\mathrm{q(n)}-\mathrm{p(n)}\right)^{\alpha}}$$

$n \to \infty$ için limit alınırsa $S_2(n) = 0$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.7. (X, g) paranormlu uzayında (x_k) dizisi α. dereceden istatistiksel yakınsak ve $\left(\frac{\mathrm{p(n)}}{\mathrm{p(n)}-\mathrm{q(n)}}\right)^{\alpha}$ sınırlı bir dizi olsun. Bu takdirde (x_k) dizisi α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

İspat: (x_k) dizisi (X, g) paranormlu uzayında α. dereceden istatistiksel yakınsak olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}|\{k \leq q(n): g(x_k-l) \geq \varepsilon\}| = 0$$

yazabiliriz. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\{k \leq q(n): g(x_k-l) \geq \varepsilon\}|}{(q(n))^{\alpha}} = 0$$

yazabiliriz. Buradan

$$\{\ p(n) < k \leq q(n): g(x_k-l) \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n: g(x_k-l) \geq \varepsilon\}$$

olduğundan

$$|\{\ p(n) < k \leq q(n) \colon g(x_k - l) \geq \varepsilon\}| \leq |\{\ p(n) < k \leq q(n) \colon g(x_k - l) \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz.

$$\frac{1}{(q(n) - p(n))^{\alpha}} |\{\ p(n) < k \leq q(n) \colon g(x_k - l) \geq \varepsilon\}|$$
$$\leq \left(1 + \frac{p(n)}{q(n) - p(n)}\right)^{\alpha} \frac{1}{(q(n))^{\alpha}} |\{k \leq q(n) \colon g(x_k - l) \geq \varepsilon\}|$$

Buradan (x_k) dizisinin α. dereceden deferred istatistiksel yakınsak olduğunu elde ederiz.

Sonuç 5.1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $q(n) < n$ ve $\left(\frac{n}{q(n)-p(n)}\right)^{\alpha}$ sınırlı bir dizi olsun. Bu takdirde (X, g) paranormlu uzayında bir dizi α. dereceden istatistiksel yakınsak ise α. dereceden deferred istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 5.8. $\{p(n)\}$, $\{q(n)\}$, $\{p'(n)\}$ ve $\{q'(n)\}$, dizileri her $n \in N$ için

$$p(n) \leq p'(n) < q'(n) \leq q(n)$$

eşitsizliğini sağlayan diziler ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{q(n) - p(n)}{q'(n) - p'(n)}\right)^{\alpha} > 0$$

ise (X, g) paranormlu uzayında $x = (x_k)$ dizisi $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}, \mathrm{q}])$ yakınsak ise $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}', \mathrm{q}'])$ yakınsaktır.

İspat:

$$\{k \colon p'(n) < k \leq q'(n) \colon g(x_k - l) \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \colon p(n) + 1 \leq k \leq q(n) \colon g(x_k - l) \geq \varepsilon\}$$

kapsamasını yazabiliriz. Buradan hareketle

$$|\{k: p'(n) < k \leq q'(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}| \leq |\{k: p(n) + 1 \leq k \leq q(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}|$$

bu eşitsizlikten faydalanarak

$$\frac{1}{(q'(n) - p'(n))^{\alpha}} |\{\text{k}: p'(n) < k \leq q'(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}|$$
$$\leq \left(\frac{q(n) - p(n)}{q'(n) - p'(n)}\right)^{\alpha} \frac{1}{(q(n) - p(n))^{\alpha}} |\{\text{k}: p(n) + 1 < k \leq q(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}|$$

yazarız. $n \to \infty$ için eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(q(n) - p(n))^{\alpha}} |\{ p(n) < k \leq q(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu da $x \in\ g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}', \mathrm{q}'])$ olması demektir.

Teorem 5.9. $\{p(n)\}$, $\{q(n)\}$, $\{p'(n)\}$ ve $\{q'(n)\}$, dizileri her $n \in N$ için

$$p(n) \leq p'(n) < q'(n) \leq q(n)$$

eşitsizliğini sağlayan diziler ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{k: p(n) < k \leq p'(n)\}$ ve $\{k: q'(n) < k \leq q(n)\}$ sonlu kümeler olsun. Bu takdirde (X, g) paranormlu uzayında (x_k) dizisi α. dereceden $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}', \mathrm{q}'])$ yakınsak ise α. dereceden $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}, \mathrm{q}])$ yakınsaktır.

İspat: $x = (x_k)$ dizisi l'ye $g(DS^{\alpha}[\mathrm{p}', \mathrm{q}'])$ yakınsak olsun. Bu takdirde $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}\{p(n) < k \leq q(n): g(x_k - l)\} \geq \varepsilon \\ &= \{p(n) < k \leq p'(n): g(x_k - l)\} \\ &\cup \{p'(n) < k \leq q'(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\} \\ &\cup \{q'(n) < k \leq q(n): g(x_k - l) \geq \varepsilon\}\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{(q(n)-p(n))^{\alpha}}|\{\ p(n)<k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|$$

$$\leq\frac{1}{(q'(n)-p'(n))^{\alpha}}|\{\ p(n)<k\leq p'(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|$$

$$+\frac{1}{(q'(n)-p'(n))^{\alpha}}|\{p'(n)<k\leq q'(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|$$

$$\frac{1}{(q'(n)-p'(n))^{\alpha}}|\{p'(n)<k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|,$$

eşitsizliğini yazabiliriz. $n\to\infty$ eşitsizliğinde limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(q(n)-p(n))^{\alpha}}|\{\ p(n)<k\leq q(n): g(x_k-l)\geq\varepsilon\}|=0$$

elde ederiz. Bu da $x\in g(DS^{\alpha}[\mathrm{p},\mathrm{q}])$ olması demektir.

KAYNAKÇA

Agnew, R. P. 1932. On deferred Cesàro means. *Ann. of Math. (2) 33no. 3, 413--421.*

Alghamdi, M. A. and Mursaleen, M., 2013. λ-statistical convergence in paranormed space, *Abstr. Appl. Anal., Art. ID 264520. 1-5.*

Alotaibi, A. and Alroqi, A. M., 2012, Statistical convergence in a paranormed space, *J. Inequal. Appl., 39. 1-6.*

Altundağ, S. and Başarır M., 2012, Lacunary Statistical convergence in a paranormed space, *AIP Conference Proceedings 1479, 929.*

Balcı, M. 1997. Matematik Analiz II. *Ankara: Ertem Basın Yayın Dağıtım ltd. Şti.*

Connor, J., 1988. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, *Analysis, 8 (1-2), 47-64.*

Çakallı, H. 1995. Lacunary statistical convergence in topological groups, *Indian J. Pure Appl. Math. 26, 113 – 119.*

Çakallı, H. 1996. On statistical convergence in topological groups, *Pure Appl. Math. Sci. 43, 27 – 31*

Çolak, R., 2010. Statistical convergence of order α, *Modern Methods in Analysis and its Applications, New Delhi, İndia: Anamaya Pub,121-129.*

Çolak, R. ve Bektaş, Ç. A., 2011. λ-statistical convergence of order α*, Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed)., 31 (3) 953-959.*

Duman, O. ve Orhan, C., 2004. μ-statistically convergent function sequences, *Czechoslovak Mathematical Journal, 54 (2), 413-422.*

Ercan, S., 2018. On the statistical convergence of order α in paranormed space, *Symmetry, 10, 483.*

Et, M. ve Nuray, F., 2001. Δ^m statistical convergence, *Indian J. Pure Appl. Math., 32(6), 961-969.*

Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique, *Colloquium Math. , vol.2 , 241- 244.*

Fridy, J. A., 1985. On statistical convergence, *Analysis, 5 (4), 301-314.*

Fridy, J. A., and C. Orhan, 1993. "Lacunary statistical convergence," *Pacific Journal of Mathematics, vol. 160, no. 1. 43–51.*

Kreyszig, E. 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. *John Willey. New York-London-Sydney.*

Küçükaslan, M. ve Yılmaztürk, M. 2016. On deferred statistical convergence of sequences. *Kyungpook Math. J. 56 , no. 2, 357--366.*

Maddox, I. 1970. Elements of Functional Analysis. *Cambiridge Üniv. press.*

Maddox, I. J. and Willey M. A. L. *1974.* Continuous operators on paranormed spaces and matris transformations. *Pasific J.Math. 217-228,.*

Mursaleen M, 2000. λ-statistically convergence. *Math. Slovaca, 50 (1): 111-115.*

Niven, I., Zucherman, H. S. and Montgomery H. L., 1991. An Introduction to The Theory of Numbers. *Fifth Ed., John Wiley, New York.*

Nuray, F. ve Savaş, E., 1995. Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers, *Mathematica Slovaca, 45(3), 269-273.*

Rath, D. and Tripathy, B. C., 1994. On statistically convergent and statistically Cauchy sequences, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 25, 381-381.*

Salat, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica Slovaca, 30 (2), 139-150.*

Schoenberg, I. J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods II, *The American Mathematical Monthly, 66 (7), 562-563.*

Steinhaus, H., 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloquium Math., vol.2 ,73-74.*

Yilmazturk, M. ve Kucukaslan, M. 2011. On strongly deferred Cesaro summability and deferred statistical convergence of the sequences, *Bitlis Eren Univ. J. Sci. Technol., 3, 22–25.*

Wilansky, A. 1984. Summability Through Functional Analysis. *North Holland.*

Zygmund, A. 1979. Trigonometric Series, *Cambridge Univ. Press, Cambridge.*

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Haşmet KAPŞİGAY
Uyruğu : T. C.

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Muş Anadolu Öğretmen Lisesi	2009
Üniversite	:	Gaziantep Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2014
Yüksek Lisans	:	Muş Alparslan Üniversitesi	2021

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2015-2021	MEB	İlköğretim Matematik Öğretmenliği