T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL BEZİER EĞRİLERİNDE BİSHOP ÇATILAR

Bilge Alparslan AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2025
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL BEZİER EĞRİLERİNDE BİSHOP ÇATILAR

Bilge Alparslan AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhsin İNCESU
Jüri Üyesi: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR
Jüri Üyesi: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Jüri Üyesi: Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI
Jüri Üyesi: Doç. Dr. Rıdvan Cem DEMİRKOL

Temmuz-2025
MUŞ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUAL BEZİER EĞRİLERİNDE BİSHOP ÇATILAR

Bilge Alparslan AYDIN

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhsin İNCESU

Bu tez çalışmasında dual bezier eğrileri için verilen frenet çatı vektör alanları daha işlenebilir veri olarak ifade edilmiş ve bishop çatısı vektör alanlarıda dual bezier eğrisinin reel ve dual kısımlarına göre ifade edilerek bu değerlerin dual bezier eğrisinin başlangıç kontrol noktası cinsinden karşılıkları verilmiştir.

2025, 43 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Bezier eğrileri, Dual Bishop çatı, Dual Frenet çatı, Bishop eğrilikler.

ABSTRACT

MS THESIS

BİSHOP FRAMES ON DUAL BEZİER CURVES

Bilge Alparslan AYDIN

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhsin İNCESU

In this thesis the Frenet field vector of the dual bezier curves are stated as the more processible data. In addition the Bishop field vectors of the dual bezier curves are expressed separately according to their real and dual parts. Finally these Bishop vectors and curvatures are stated by the control points.

2025, 43 Pages

KeyWords: Bezier curves, Dual Bishop frelds, Dual Frenet frelds, Bishop Curvatures.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Dual Bézier Eğrileri ve Bishop Çatıları konusundaki birçok araştırmalarımın bir neticesidir. Kişisel gelişimime paha biçilmez katkılar sağladı.

Öncelikle, bu tezin her aşamasında engin bilgisi, değerli yönlendirmeleri ve sabırlı rehberliğiyle bana yol gösteren kıymetli danışmanım Doç. Dr. Muhsin İNCESU'ya en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendisinin katkıları olmadan bu çalışmayı tamamlamam mümkün olmazdı.

Yüksek lisans eğitimim süresince derslerini almaktan onur duyduğum, bilgi birikimleriyle ufkumu açan ve halimi hatırımı sorarak desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR, Prof. Dr. Muaz SEYDAOĞLU, Prof. Dr. Sadulla JAFAROV, Prof. Dr. Bekir YILDIRIM, Doç. Dr. Ahmet SAZAK, Doç. Dr. Fatma CUMHUR, Doç. Dr. Demet Deniz YILMAZ'a şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, bilimsel çalışmalarıma ışık tutan eserleri ve makaleleriyle araştırmalarıma yön veren Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI'ya minnettarım.

Bu uzun ve yorucu süreçte, Nusret Sarman Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'nde birlikte görev yaptığım, iyi ve kötü günlerimde yanımda olan tüm kıymetli meslektaşlarıma teşekkür ederim.

Uzaktan da olsa yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, her zaman destek olmaya çalışan Hilal AYVACI' ya ayrıca özel bir teşekkür borçluyum.

Ve en önemlisi... Hayatımın her döneminde sarsılmaz bir destekle yanımda olan, varlıklarıyla bana güç veren, sevgi ve sabırlarıyla bu sürecin gerçek kahramanları olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum: Annem Fatma AYDIN, rahmetle andığım babam Mehmet AYDIN, hayat arkadaşım, sabrın ve sevginin timsali Aslı AYDIN, neşem ve ilham kaynağım, gözbebeklerim: Aybüke Beray, Ayşe Simay ve Bilge Umay.

Bu çalışmanın bilim camiasına mütevazı da olsa bir katkı sağlamasını temenni ediyor, emeği geçen herkese bir kez daha gönülden teşekkür ediyorum.

Bilge Alparslan AYDIN- MUŞ – 2025

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

Pi	: Kontrol noktası i
B(t)	: Reel Bézier eğrisi
Ni(t)	: Bernstein baz fonksiyonu
T(t)	: Teğet vektörü
N(t)	: Normal vektör
K	: Eğrilik
τ	: Burulma
R3	: Üç boyutlu Öklid uzayı
v$*$	: Dual vektör Bezier eğrisinin dual hızı
$\mathbb{D}$	: Dual uzay
V	: Dual Bezier eğrisinin reel hızı
M_1	: Bishop çatının normal vektörü
M_2	: Bishop çatının binormal vektörü
k_1	: Bishop birinci eğrilik
k_2	: Bishop ikinci eğrilik
k_3	: Bishop üçüncü eğrilik
$\hat{B}$	: Dual Bezier eğrisi
B^*	: Dual Bezier eğrisinin $\boldsymbol{t}^*$ a göre başlangıç konumu
$\hat{T}$	: Dual birim teğet vektör
$\hat{N}$	: Dual birim normal vektör
$\hat{B}$	: Dual birim binormal vektör
ε	: Dual birim
det	: determinant

1. GİRİŞ

Geometrik tasarım ve modelleme, mühendislikten mimariye, endüstriyel tasarımdan bilgisayar grafiklerine kadar modern dünyanın pek çok alanında merkezi bir rol oynamaktadır. Bilgisayar destekli tasarım (CAD) sistemlerinin temelini oluşturan eğriler ve yüzeyler, karmaşık formların dijital ortamda hassas bir şekilde tanımlanmasını, manipülasyonunu ve görselleştirilmesini mümkün kılar. Bu eğri ve yüzey temsil yöntemleri arasında, özellikle esnekliği ve sezgisel kontrol edilebilirlikleri sayesinde Bézier eğrileri ve genellemeleri, endüstriyel standart haline gelmiştir. (Piegl ve Tiller, 1997; Farin,2002)

Bézier eğrileri, ilk olarak 1960'lı yılların başında Fransız mühendis Pierre Bézier tarafından, Fransız otomobil üreticisi Renault'da otomobil gövdelerinin pürüzsüz ve estetik hatlarını tasarlamak amacıyla geliştirilmiştir. (Bezier,1972) Ancak benzer bir çalışmayı aynı dönemde Citroën'de Paul de Casteljau da bağımsız olarak yürütmekteydi. (Farin, 2002; Rogers, 2001) Bu iki öncü isim, kontrol noktaları aracılığıyla eğrilerin şeklinin kolayca değiştirilebilmesini sağlayan algoritmalar geliştirerek, elle çizimden dijital modellemeye geçişte devrim niteliğinde bir adım atmıştır. Bézier ve de Casteljau'nun çalışmaları, günümüzde kullandığımız pek çok 3D modelleme yazılımının ve CAD/CAM sisteminin temelini atmış, tasarımcılara hayal güçlerini somutlaştırma konusunda benzersiz bir özgürlük sunmuştur. (Mortenson,1997; Piegl ve Tiller, 1997) Otomotivden havacılığa, gemi inşasından ayakkabı tasarımına, hatta animasyon filmlerindeki karakter modellemelerine kadar sayısız alanda Bézier eğrileri, karmaşık yüzeylerin akıcı ve estetik bir biçimde oluşturulmasını sağlamıştır. (Farin, 2002)

Bu tezin temel odak noktalarından biri olan Dual Bézier Eğrileri ise, Bézier eğrilerinin matematiksel dualite prensibi üzerinden farklı bir bakış açısıyla incelenmesidir. Dualite, geometride noktaların doğrulara, doğruların noktalara dönüşmesi gibi temel kavramlar arasında simetrik bir ilişki kurar. (Mortenson,1997) Bu perspektif, eğrilerin ve yüzeylerin sadece noktalar kümesi olarak değil, aynı zamanda teğetler, normal düzlemler veya diğer geometrik elementler koleksiyonu olarak da ele alınmasına olanak tanır. Dual Bézier eğrileri, özellikle belirli geometrik özelliklerin veya sınır koşullarının hassas bir şekilde kontrol edilmesi gereken uygulamalarda, geleneksel yaklaşımlara göre avantajlar sunabilir. Örneğin, bir yüzeyin belli bir yöndeki teğetsel sürekliliğini sağlamak veya belirli bir düzleme göre konumunu ayarlamak gibi mühendislik problemlerinde dual formülasyonlar daha sezgisel ve etkili çözümler sunabilir. (Piegl ve Tiller, 1997 – NURBS bağlamında genel düalite fikri)

Tezin diğer ana konusu olan Bishop Çatıları ise, uzaydaki bir eğri boyunca hareket eden bir referans çerçevesidir. Geleneksel olarak eğrilerin geometrik özelliklerini incelemek için kullanılan Frenet Çatısı (veya Frenet-Serret Çatısı), eğrinin burulmasının sıfır olduğu düzlemsel eğrilerde veya burulmanın tanımlanamadığı noktalarda sorunlar yaratabilir. Bishop çatısı, bu kısıtlamaları aşarak, bir eğri boyunca sürekli ve iyi tanımlanmış bir ortonormal baz sağlar. Richard L. Bishop tarafından 1970'li yıllarda geliştirilen bu çatı, bir eğri boyunca dönüşü minimize eden "dönme indirmeli" (rotation minimizing) bir çerçeve sunar. (Bishop, 1975) Bu özelliği sayesinde Bishop çatısı, bilgisayar grafikleri, robotik, sanal gerçeklik ve mekanik tasarım gibi alanlarda, özellikle de yörünge planlama, kamera hareketi kontrolü veya nesnelerin bir yol boyunca yöneliminin hassas bir şekilde belirlenmesi gereken durumlarda kritik bir araç haline gelmiştir. (Wang ve ark.,2008) Örneğin, bir robot kolunun belirli bir yol boyunca hareket ederken tuttuğu aracın yönünü sabit tutması veya bir sinema filminde kameranın bir nesneyi takip ederken titrememesini sağlamak gibi uygulamalarda Bishop çatısı vazgeçilmezdir. (Wang ve ark., 2008)

Bu tez çalışması, Dual Bézier eğrilerinin teorik yapısını Bishop çatılarıyla olan ilişkisi bağlamında inceleyerek, eğri tasarımında ve kontrolünde yeni yaklaşımlar sunmayı hedeflemektedir. Çalışmada, dual geometri prensiplerinin Bézier eğrilerine nasıl uygulanabileceği, bu dual formülasyonların Bishop çatısı özellikleriyle nasıl entegre edilebileceği ve elde edilen sonuçların potansiyel uygulama alanları detaylı bir şekilde araştırılacaktır. Bu entegrasyonun, özellikle uzamsal eğrilerin hassas kontrolü ve karmaşık geometrik yüzeylerin tasarımı konularında önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir. Bu çalışma hem teorik bir temel sunmayı hem de pratik uygulamalara yönelik yeni ufuklar açmayı amaçlamaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Eğriler diferansiyel geometride sürekli ilgi alanı olmakla beraber geniş bir çalışma alanına sahiptir. En yaygın olarak eğrilerde Frenet çatısı kullanılmakla beraber farklı yeni çatılar da oluşturulmuştur. Bunlardan Bishop çatısı (Bishop, 1975) eğrinin teğet vektörü değişmeden diğer normal ve binormal vektörlerinin bir açı ile döndürülmesiyle paralel öteleme çatı olarak adlandırılan farklı bir çatı olarak karşımıza çıkar. (Bishop, 1975) Literatürde pek çok eğri Bishop çatısına göre incelenmiştir (Yılmaz ve Turgut, 2010; Bükçü ve Karacan, 2008; Bükçü ve Karacan, 2009; Körpınar, Asil ve Baş, 2011; Körpınar ve Demirkol, 2017; Yılmaz ve Turgut, 2010).

Matematiksel modelleme ve dizaynda önemli bir yeri olan Bernstein polinom eğrileriyle tanımlanan Bezier eğrileriyle pek çok çalışma yapılmıştır. (Samancı, Çelik ve İncesu, 2015), Bezier eğrilerini Bishop çatısına göre incelemişlerdir. (Evren ,2020), Bertrand NURBS eğrilerini tanımlamıştır. (Samancı Kuşak, 2018), Bezier eğrilerini farklı bir uzayda alıp Minkowski Uzayında timelike rasyonel Bezier eğrilerini çalışmıştır. Ayrıca bu eğriler literatürde (Farouki, Szafran ve Biard, 2009; Hoschek, 1992; Incesu ve Gursoy, 2004; İncesu, 2003; İncesu ve Kiren, 2008; Juhász, 1999; Liu ve Wang, 2002; Piegl ve Tiller, 1999) tarafından çalışılmışlardır. Son zamanlarda ise (Kılıçoğlu ve Şenyurt, 2020), Kübik Bezier eğrisinin involütünü çalışmıştır. Ayrıca (Abdel-Aziz vd. 2021), Frenet çatı kullanılarak tıbbi görüntü rekonstrüksiyonunu iyileştirmek için Bezier eğrileri tanımlamıştır.

Bishop çatısının dışında son zamanlarda q-çatı (quasi); q-normal vektörün izdüşüm vektörü ile teğet vektörün vektörel çarpımı ile tanımlanmıştır (Dede vd., 2018). Çalışmamızda kullandığımız çatı ise Bishop çatısının belli bir açı ile döndürülmesiyle elde edilen Hibrit çatısıdır. Bu çatı, mühendislikte malzeme alanında modelleme oluşturulurken kullanılmıştır. Bir uzay eğrisinde Hibrit çatı kullanılarak ince ve kalın kavisli çubukların veya boruların büyük deformasyonunu analiz etmek için model sunulmuştur (Arbin ve Reddy, 2018; Arbin ve Reddy, 2019).

Ayrıca (Bükçü ve Karacan, 2008, 2009), Bishop çatısına göre slant helix (eğik helezon) türlerini Lorentz uzayında detaylı olarak incelemişlerdir. (Bükçü ve Karacan, 2009). Bu çalışmalarda, zaman-benzeri eğrilerin Bishop çerçevesine göre geometrik karakterizasyonu yapılmıştır. Bishop Darboux ekseni ve paralel offset eğrileri gibi konular ele alınmıştır.

Hatice Kuşak Samancı ve Muhsin İncesu'nun ise özellikle Bezier eğrileri üzerine çok sayıda çalışmaları bulunmaktadır. Özellikle Minkowski uzayında timelike Bezier eğrilerinin incelenmesi, N-Bishop çatısına göre eğrilerin tanımlanması, uzay-zaman yapısında rasyonel eğriler, smarandache eğriler ve regle yüzeyler gibi konular literatürde dikkat çekmektedir. (Samancı Kuşak, 2018; İncesu, Gürsoy ,2004; İncesu, Kiren,2008; Samancı, Çelik, İncesu, 2015)

Bu yönüyle, literatürdeki bu çalışmalar, dual Bezier eğrileri ve Bishop çatı yapısının kombinasyonuna dayanan tezimize teorik altyapı ve karşılaştırma imkanı sunmaktadır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Eğrilerde Bishop çatı

Bishop çatı veya paralel taşıma çatısı, eğrinin ikinci türevi kaybolduğunda bile iyi tanımlanmış olan hareketli bir çerçeveyi tanımlamaya yönelik alternatif bir yaklaşımdır. Bir eğri boyunca ortogonal bir çatının paralel taşınması, çatının her bir bileşenini paralel taşıyarak basitçe ifade edilebilir. (Bükçü, Karacan, 2009) Çatının geri kalanı için teğet vektör ve herhangi bir uygun keyfi baz kullanılır (ayrıntılar için bkz. [10]). Birim hızlı bir eğrinin Bishop çatısının (Bükçü, Karacan, 2009, Bishop,1975) türev matrisi

$$\begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Olarak ifade edilebilir. Burada, $\{T, M_1, M_2\}$ kümesine Bishop üçlüsü, k_1 ve k_2'ye de Bishop eğrilikleri adını vereceğiz. Bu çatının Frenet çatısıyla ilişkisi ise

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta(s)) & sin(\theta(s)) \\ 0 & -sin(\theta(s)) & cos(\theta(s)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Ya da

$$\begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta(s)) & -sin(\theta(s)) \\ 0 & sin(\theta(s)) & cos(\theta(s)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Şeklindedir. Burada

$$\theta(s) = arctg\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$$

Ve

$$\tau(s) = \theta'(s)$$
$$\kappa(s) = \sqrt{{k_1}^2 + {k_2}^2}$$

dir. Burada Bishop eğrilikler ise

$$k_1 = \kappa cos(\theta(s))$$
$$k_2 = \kappa sin(\theta(s))$$

dir. (Yılmaz, Turgut, 2010)

3.2 Dual Eğrilerinde Frenet Çatı

Dual eğrilerde dual Frenet çatıyı $\{\widehat{\boldsymbol{T}}, \widehat{\boldsymbol{N}}, \widehat{\boldsymbol{B}}\}$ ile ve dual eğrilikleri de $\{\widehat{\boldsymbol{\kappa}}, \widehat{\boldsymbol{\tau}}\}$ ile gösterirsek,

Dual Frenet çatı reel ve dual kısımlarına ayrılarak

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = T(t) + \boldsymbol{\epsilon} T^*(t)$$

$$\widehat{N} = N(t) + \boldsymbol{\epsilon} N^*(t)$$

$$\widehat{B} = B(t) + \boldsymbol{\epsilon} B^*(t)$$

Yazılabilir. $\hat{\phi}: D \longrightarrow \mathcal{D}^3$ Olarak tanımlanan bir $\hat{\phi}(t + \epsilon t^*)$ dual eğrisinin taylor açılımları dikkate alınarak elde edilecek ifadesi

$$\hat{\phi}(\hat{t}) = \hat{\phi}(t + \epsilon t^*) = \phi(t) + \epsilon\big(\phi^*(t) + t^*\phi'(t)\big) \tag{1}$$

yazılabilir. Burada $\phi(t)$ ve $\phi^*(t)$ eğrileri $\hat{\phi}(t + \epsilon t^*)$ dual eğrisinin $t^* = 0$ anındaki konum eğrisinin reel ve dual kısımlarını ifade eder. Yani

$$\hat{\phi}'(t + \epsilon t^*)\big|_{t^*=0} = \phi(t) + \epsilon\phi^*(t)$$

dir.

Örnek olarak

$\hat{\phi}(\hat{t}) = (a_0 + \epsilon {a_0}^*) + (a_1 + \epsilon {a_1}^*)(t + \epsilon t^*) + (a_2 + \epsilon {a_2}^*)(t + \epsilon t^*)^2$ Biçiminde ikinci dereceden dual polinom eğrisi olsun. Bu eğri

$$\hat{\phi}(\hat{t}) = (a_0 + a_1\, t + a_2 t^2) + \epsilon[({a_0}^* + {a_1}^* t + {a_2}^* t^2) + t^*\, (a_1 + 2a_2 t)]$$

Biçiminde yazıldığında

$$\phi(t) = a_0 + a_1\, t + a_2 t^2$$

$$\phi^*(t) = {a_0}^* + {a_1}^* t + {a_2}^* t^2$$

dir. Benzer şekilde $\hat{\phi}(\hat{t})$ nin türev denklemleri de

$$\hat{\phi}'(\hat{t}) = \hat{\phi}'(t + \epsilon t^*) = \phi'(t) + \epsilon\left(\phi^{*\prime}(t) + t^*\phi''(t)\right) \tag{2}$$

$$\hat{\phi}''(\hat{t}) = \hat{\phi}''(t + \epsilon t^*) = \phi''(t) + \epsilon\left(\phi^{*\prime\prime}(t) + t^*\phi'''(t)\right) \tag{3}$$

$$\hat{\phi}'''(\hat{t}) = \hat{\phi}'''(t + \epsilon t^*) = \phi'''(t) + \epsilon\left(\phi^{*\prime\prime\prime}(t) + t^*\phi^{(4)}(t)\right) \tag{4}$$

Olur. Buna göre bu eğrinin herhangi bir $\hat{t} = t + \epsilon t^*$ anındaki Frenet vektör alanları aşağıdaki gibidir:

$\widehat{\boldsymbol{T}}$ dual teğet vektör alanı

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = \frac{\hat{\phi}'}{\|\hat{\phi}'\|} = \frac{\hat{\phi}'}{\|\hat{\phi}'\|} = \frac{\phi' + \epsilon\big(\phi^{*\prime} + t^*\phi''\big)}{\|\phi' + \epsilon\big(\phi^{*\prime} + t^*\phi''\big)\|} = \frac{\phi' + \epsilon\big(\phi^{*\prime} + t^*\phi''\big)}{\|\phi'\| + \epsilon\frac{\langle\phi', \phi^{*\prime} + t^*\phi''\rangle}{\|\phi'\|}}$$

Yazılırsa reel ve dual kısımları

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T}(t) + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{T}^{*}(t) = \frac{\phi'}{\|\phi'\|} + \boldsymbol{\epsilon}\left[\frac{\phi^{*\prime}+t^{*}\phi''}{\|\phi'\|} - \frac{\langle\phi',\phi^{*\prime}+t^{*}\phi''\rangle}{\|\phi'\|^{3}}\phi'\right] \text{.....................(5*)}$$

Olur. Benzer şekilde $\widehat{\boldsymbol{B}}$ **dual** binormal vektör alanı

$$\widehat{\boldsymbol{B}} = \frac{\hat{\phi}'\times\hat{\phi}''}{\|\hat{\phi}'\times\hat{\phi}''\|} = \frac{[\phi' + \epsilon(\phi^{*\prime}+t^{*}\phi'')]\times[\phi''+\epsilon(\phi^{*\prime\prime}+t^{*}\phi''')]}{\|[\phi'+\epsilon(\phi^{*\prime}+t^{*}\phi'')]\times[\phi''+\epsilon(\phi^{*\prime\prime}+t^{*}\phi''')]\|}$$

yazılırsa reel ve dual kısımları

$$\widehat{\boldsymbol{B}} = \frac{\phi'\times\phi''}{\|\phi'\times\phi''\|} + \epsilon\frac{1}{\|\phi'\times\phi''\|}\left[\begin{array}{c}\phi'\times\phi^{*\prime\prime}+\phi^{*\prime}\times\phi'' - \dfrac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi^{*\prime\prime}+\phi^{*\prime}\times\phi''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^{2}}(\phi'\times\phi'') + \\ +t^{*}\left[\phi'\times\phi''' - \dfrac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi'''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^{2}}(\phi'\times\phi'')\right]\end{array}\right]$$

$$= \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{B}^{*}$$

olur. Aynı şekilde $\widehat{\boldsymbol{N}}$ **dual** normal vektör alanı da

$$\widehat{\boldsymbol{N}} = \widehat{\boldsymbol{B}} \times \widehat{\boldsymbol{T}}$$

olacağından

$$\widehat{\boldsymbol{N}} = \left\{\frac{\phi'\times\phi''}{\|\phi'\times\phi''\|} + \epsilon\frac{1}{\|\phi'\times\phi''\|}\left[\begin{array}{c}\phi'\times\phi^{*\prime\prime}+\phi^{*\prime}\times\phi'' - \dfrac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi^{*\prime\prime}+\phi^{*\prime}\times\phi''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^{2}}(\phi'\times\phi'') + \\ +t^{*}\left[\phi'\times\phi''' - \dfrac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi'''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^{2}}(\phi'\times\phi'')\right]\end{array}\right]\right\} \times$$

$$\times\left\{\frac{\phi'}{\|\phi'\|} + \boldsymbol{\epsilon}t^{*}\left[\frac{\phi''}{\|\phi'\|} - \frac{\langle\phi',\phi''\rangle}{\|\phi'\|^{3}}\phi'\right]\right\}$$

Biçimindedir. Bu ifadeden dual normal vektör alanı

$$\widehat{\boldsymbol{N}} = \frac{(\phi'\times\phi'')\times\phi'}{\|\phi'\|\|\phi'\times\phi''\|} + \epsilon\frac{1}{\|\phi'\|\|\phi'\times\phi''\|}\left[\begin{array}{c}(\phi'\times\phi^{*\prime\prime})\times\phi' + (\phi^{*\prime}\times\phi'')\times\phi' + (\phi'\times\phi'')\times\phi^{*\prime} \\ -\left(\dfrac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi^{*\prime\prime}+\phi^{*\prime}\times\phi''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^{2}} + \dfrac{\langle\phi',\phi^{*\prime}\rangle}{\|\phi'\|^{2}}\right)(\phi'\times\phi'')\times\phi' \\ +t^{*}\left[\begin{array}{c}(\phi'\times\phi''')\times\phi' + (\phi'\times\phi'')\times\phi'' + \\ -\left(\dfrac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi'''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^{2}} + \dfrac{\langle\phi',\phi''\rangle}{\|\phi'\|^{2}}\right)(\phi'\times\phi'')\times\phi'\end{array}\right]\end{array}\right]$$

$$= \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{N}^{*}$$

bulunur.

Dual eğrilik fonksiyonu $\widehat{\boldsymbol{\kappa}}$ için

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\left\|\hat{\phi}' \times \hat{\phi}''\right\|}{\left\|\hat{\phi}'\right\|^3} = \frac{\left\|[\phi' + \epsilon(\phi^{*\prime} + t^*\phi'')] \times [\phi'' + \epsilon(\phi^{*\prime\prime} + t^*\phi''')]\right\|}{\|\phi'\|^3 + 3\epsilon t^*\|\phi'\|\langle\phi', \phi^{*\prime} + t^*\phi''\rangle}$$

$$= \frac{\left\|\phi' \times \phi'' + \epsilon[\phi' \times \phi^{*\prime\prime} + \phi^{*\prime} \times \phi'' + t^*(\phi' \times \phi''')]\right\|}{\|\phi'\|^3 + 3\epsilon t^*\|\phi'\|\langle\phi', \phi^{*\prime} + t^*\phi''\rangle}$$

$$= \frac{\|\phi' \times \phi''\| + \epsilon\dfrac{\langle\phi' \times \phi'', \phi' \times \phi^{*\prime\prime} + \phi^{*\prime} \times \phi'' + t^*(\phi' \times \phi''')\rangle}{\|\phi' \times \phi''\|}}{\|\phi'\|^3 + 3\epsilon t^*\|\phi'\|\langle\phi', \phi^{*\prime} + t^*\phi''\rangle}$$

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}} = \frac{\|\phi' \times \phi''\|}{\|\phi'\|^3} + \epsilon\left[\frac{\langle\phi' \times \phi'', \phi' \times \phi^{*\prime\prime} + \phi^{*\prime} \times \phi'' + t^*(\phi' \times \phi''')\rangle}{\|\phi'\|^3\|\phi' \times \phi''\|} - 3t^*\frac{\|\phi' \times \phi''\|\langle\phi', \phi^{*\prime} + t^*\phi''\rangle}{\|\phi'\|^5}\right]$$

$$= \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\kappa}^*$$

Olur. Dual torsiyon eğriliği ise,

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{det(\hat{\phi}', \hat{\phi}'', \hat{\phi}''')}{\left\|\hat{\phi}' \times \hat{\phi}''\right\|^2}$$

$$= \frac{\det\left[\left(\phi' + \epsilon\left(\phi^{*\prime} + t^*\phi''\right)\right), \left(\phi'' + \epsilon\left(\phi^{*\prime\prime} + t^*\phi'''\right)\right), \left(\phi''' + \epsilon\left(\phi^{*\prime\prime\prime} + t^*\phi^{(4)}\right)\right)\right]}{\|\phi' \times \phi'' + \epsilon[\phi' \times \phi^{*\prime\prime} + \phi^{*\prime} \times \phi'' + t^*(\phi' \times \phi''')]\|^2}$$

$$= \frac{\det\left(\phi', \phi'', \phi'''\right) + \epsilon\begin{bmatrix}\det\left(\phi', \phi'', \left(\phi^{*\prime\prime\prime} + t^*\phi^{(4)}\right)\right) + \det\left(\phi', \phi^{*\prime\prime}, \phi'''\right) \\ +\det\left(\phi^{*\prime}, \phi'', \phi'''\right)\end{bmatrix}}{\|\phi' \times \phi''\|^2 + 2\epsilon\langle\phi' \times \phi'', \phi' \times \phi^{*\prime\prime} + \phi^{*\prime} \times \phi'' + t^*(\phi' \times \phi''')\rangle}$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\det\left(\phi', \phi'', \phi'''\right)}{\|\phi' \times \phi''\|^2} + \epsilon\left\{\begin{matrix}\dfrac{\begin{bmatrix}\det\left(\phi', \phi'', \left(\phi^{*\prime\prime\prime} + t^*\phi^{(4)}\right)\right) + \det\left(\phi', \phi^{*\prime\prime}, \phi'''\right) \\ +\det\left(\phi^{*\prime}, \phi'', \phi'''\right)\end{bmatrix}}{\|\phi' \times \phi''\|^2} \\ -\dfrac{2\det\left(\phi', \phi'', \phi'''\right)\langle\phi' \times \phi'', \phi' \times \phi^{*\prime\prime} + \phi^{*\prime} \times \phi'' + t^*\left(\phi' \times \phi'''\right)\rangle}{\|\phi' \times \phi''\|^4}\end{matrix}\right\}$$

$$= \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\tau}^*$$

dir. Bu sonuçları bir teorem ile verirsek,

Teorem 3.1: $\widehat{\phi}(\hat{t})$ dual regüler eğrisi verilsin. Bu taktirde $\hat{t} = t + \varepsilon t^* \epsilon D$ noktasında eğrinin dual Frenet vektör alanları $\{\hat{T}, \widehat{N}, \widehat{\mathrm{B}}\}$ ve dual eğrilikleri $\{\hat{\kappa}, \hat{\tau}\}$ aşağıdaki gibidir:

$$\widehat{\boldsymbol{T}}=\frac{\phi'}{\|\phi'\|}+\boldsymbol{\epsilon}\left[\frac{\phi^{*\prime}+t^{*}\phi''}{\|\phi'\|}-\frac{\langle\phi',\phi^{*\prime}+t^{*}\phi''\rangle}{\|\phi'\|^{3}}\phi'\right]$$

$$\widehat{\boldsymbol{B}}=\frac{\phi'\times\phi''}{\|\phi'\times\phi''\|}+\epsilon\frac{1}{\|\phi'\times\phi''\|}\left[\begin{array}{c}\phi'\times\phi^{*\prime\prime}+\phi^{*\prime}\times\phi''-\dfrac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi^{*\prime\prime}+\phi^{*\prime}\times\phi''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^{2}}(\phi'\times\phi'')+\\ +t^{*}\left[\phi'\times\phi'''-\dfrac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi'''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^{2}}(\phi'\times\phi'')\right]\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{N}}&\\ &=\frac{(\phi'\times\phi'')\times\phi'}{\|\phi'\|\|\phi'\times\phi''\|}\\ &+\epsilon\frac{1}{\|\phi'\|\|\phi'\times\phi''\|}\left[\begin{array}{c}(\phi'\times\phi^{*\prime\prime})\times\phi'+(\phi^{*\prime}\times\phi'')\times\phi'+(\phi'\times\phi'')\times\phi^{*\prime}\\ -\left(\dfrac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi^{*\prime\prime}+\phi^{*\prime}\times\phi''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^{2}}+\dfrac{\langle\phi',\phi^{*\prime}\rangle}{\|\phi'\|^{2}}\right)(\phi'\times\phi'')\times\phi'\\ +t^{*}\left[\begin{array}{c}(\phi'\times\phi''')\times\phi'+(\phi'\times\phi'')\times\phi''+\\ -\left(\dfrac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi'''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^{2}}+\dfrac{\langle\phi',\phi''\rangle}{\|\phi'\|^{2}}\right)(\phi'\times\phi'')\times\phi'\end{array}\right]\end{array}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\kappa}}=\frac{\|\phi'\times\phi''\|}{\|\phi'\|^{3}}+\epsilon\Bigg[&\frac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi^{*\prime\prime}+\phi^{*\prime}\times\phi''+t^{*}(\phi'\times\phi''')\rangle}{\|\phi'\|^{3}\|\phi'\times\phi''\|}\\ &-3t^{*}\frac{\|\phi'\times\phi''\|\langle\phi',\phi^{*\prime}+t^{*}\phi''\rangle}{\|\phi'\|^{5}}\Bigg]\end{aligned}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}}=\frac{\det(\phi',\phi'',\phi''')}{\|\phi'\times\phi''\|^{2}}+\epsilon\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\left[\begin{array}{c}\det\left(\phi',\phi'',\left(\phi^{*\prime\prime\prime}+t^{*}\phi^{(4)}\right)\right)+\det(\phi',\phi^{*\prime\prime},\phi''')\\ +\det(\phi^{*\prime},\phi'',\phi''')\end{array}\right]}{\|\phi'\times\phi''\|^{2}}\\ -\dfrac{2\det(\phi',\phi'',\phi''')\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi^{*\prime\prime}+\phi^{*\prime}\times\phi''+t^{*}(\phi'\times\phi''')\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^{4}}\end{array}\right\}$$

dir. Burada $\phi(t)$ ve $\phi^{*}(t)$ eğrileri $\hat{\phi}(t+\epsilon t^{*})$ dual eğrisinin $t^{*}=0$ anındaki konum eğrisinin reel ve dual kısımlarını ifade eder. Yani

$$\hat{\phi}(t+\epsilon t^{*})\big|_{t^{*}=0}=\phi(t)+\epsilon\phi^{*}(t)$$

dir.

Teorem 3.2: $\widehat{\phi}(\hat{t})$ dual regüler eğrisi verilsin. Bu taktirde $\hat{t}=t+\varepsilon t^{*}\in D$ noktasında eğrinin dual Frenet vektör alanları $\{\widehat{\boldsymbol{T}},\widehat{\boldsymbol{N}},\widehat{\mathrm{B}}\}$ ve dual eğrilikleri $\{\widehat{\boldsymbol{\kappa}},\widehat{\boldsymbol{\tau}}\}$, reel ve dual kısımlarına ayrılarak yazılacak olursa yani $\widehat{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{T}^{*}$ **;** $\widehat{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{B}^{*}$**;** $\widehat{\boldsymbol{N}}=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{N}^{*}$ **;** $\widehat{\boldsymbol{\kappa}}=\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\kappa}^{*}$ **ve** $\widehat{\boldsymbol{\tau}}=\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\tau}^{*}$ biçiminde ifade edilirse,

$\boldsymbol{T}=\frac{\phi'}{\left\|\phi'\right\|}$, $\boldsymbol{B}=\frac{\phi'\times\phi'}{\|\phi'\times\phi''\|}$; $\boldsymbol{N}=\frac{(\phi'\times\phi'')\times\phi'}{\|\phi'\|\|\phi'\times\phi'\|}$; $\boldsymbol{\kappa}=\frac{\|\phi'\times\phi''\|}{\|\phi'\|^3}$; $\boldsymbol{\tau}=\frac{\det(\phi',\phi'',\phi''')}{\|\phi'\times\phi''\|^2}$

$$\boldsymbol{T}^*=\frac{\phi^{*'}+t^*\phi''}{\|\phi'\|}-\frac{\langle\phi',\phi^{*'}+t^*\phi''\rangle}{\|\phi'\|^3}\phi'$$

$$\boldsymbol{B}^*=\frac{1}{\|\phi'\times\phi''\|}\left[\begin{array}{c}\phi'\times\phi^{*''}+\phi^{*'}\times\phi''-\frac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi^{*''}+\phi^{*'}\times\phi''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^2}(\phi'\times\phi'')+\\ +t^*\left[\phi'\times\phi'''-\frac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi'''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^2}(\phi'\times\phi'')\right]\end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{N}^*=\frac{1}{\|\phi'\|\|\phi'\times\phi''\|}\left[\begin{array}{c}(\phi'\times\phi^{*''})\times\phi'+(\phi^{*'}\times\phi'')\times\phi'+(\phi'\times\phi'')\times\phi^{*'}\\ -\left(\frac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi^{*''}+\phi^{*'}\times\phi''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^2}+\frac{\langle\phi',\phi^{*'}\rangle}{\|\phi'\|^2}\right)(\phi'\times\phi'')\times\phi'\\ +t^*\left[\begin{array}{c}(\phi'\times\phi''')\times\phi'+(\phi'\times\phi'')\times\phi''+\\ -\left(\frac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi'''\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^2}+\frac{\langle\phi',\phi''\rangle}{\|\phi'\|^2}\right)(\phi'\times\phi'')\times\phi'\end{array}\right]\end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{\kappa}^*=\frac{\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi^{*''}+\phi^{*'}\times\phi''+t^*(\phi'\times\phi''')\rangle}{\|\phi'\|^3\|\phi'\times\phi''\|}-3t^*\frac{\|\phi'\times\phi''\|\langle\phi',\phi^{*'}+t^*\phi''\rangle}{\|\phi'\|^5}$$

$$\boldsymbol{\tau}^*=\frac{\left[\begin{array}{c}\det\left(\phi',\phi'',\left(\phi^{*'''}+t^*\phi^{(4)}\right)\right)+\det(\phi',\phi^{*''},\phi''')\\ +\det(\phi^{*'},\phi'',\phi''')\end{array}\right]}{\|\phi'\times\phi''\|^2}-\frac{2\det(\phi',\phi'',\phi''')\langle\phi'\times\phi'',\phi'\times\phi^{*''}+\phi^{*'}\times\phi''+t^*(\phi'\times\phi''')\rangle}{\|\phi'\times\phi''\|^4}$$

olur.

3.3 Dual Bezier Eğrilerinde Frenet Çatısı

$\hat{B}(\hat{t})$ Kontrol noktaları $\hat{P}_i=P_i+\varepsilon P_i^*$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde herhangi bir $\hat{t}=t+\varepsilon t^*$ noktanında eğri üzerindeki Frenet-Seret çatısını inşa edelim.

$\hat{T},\hat{N},\hat{\mathrm{B}}$ dual Bezier eğrisi üzerindeki dual Frenet vektör alanları olmak üzere $\{\hat{T},\hat{N},\hat{B}\}$ üçlüsünü oluşturalım.

Teorem3.3: $\hat{B}(\hat{t})=B(t)+\varepsilon\big(B^*(t)+t^*B'(t)\big)$ eğrisi, kontrol noktaları $\hat{P}_i=P_i+\varepsilon P_i^*$ $(i=0,\dots n)$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu taktirde $\hat{t}=t+\varepsilon t^*\,\epsilon D$

noktasında eğrinin Frenet vektör alanları $\{\hat{T},\hat{N},\hat{B}\}$ ve dual eğrilikleri $\{\hat{\kappa},\hat{\tau}\}$ aşağıdaki gibidir:

a) Dual Teğet Vektör Alanı,

$$\hat{\boldsymbol{T}}=\frac{B'}{\|B'\|}+\varepsilon\left[\frac{B^{*\prime}+t^{*}B''}{\|B'\|}-\frac{\langle\hat{B}',B^{*\prime}+t^{*}B''\rangle}{\|B'\|^{3}}B'\right]$$

b) Dual Binormal Vektör Alanı,

$$\hat{B}=\frac{B'\times B''}{\|B'\times B''\|}$$

$$+\varepsilon\left[\begin{array}{c}\dfrac{\left(B^{*\prime}\times B''+B'\times B^{*\prime\prime}+t^{*}B'\times B'''\right)}{\|B'\times B''\|}\\ -\left[\begin{array}{c}\dfrac{\left[\langle B',B^{*\prime}\rangle\|B''\|^{2}+\langle B'',B^{*\prime\prime}\rangle\|B'\|^{2}-\langle B',B''\rangle\left(\langle B',B^{*\prime\prime}\rangle+\langle B^{*\prime},B''\rangle\right)\right]}{\|B'\times B''\|^{3}}\\ +\dfrac{t^{*}\left(\|B'\|^{2}\langle B'',B'''\rangle-\langle B',B''\rangle\langle B'B'''\rangle\right)}{\|B'\times B''\|^{3}}\end{array}\right].B'\times B''\end{array}\right]$$

c) Dual Normal Vektör Alanı,

$$\hat{\boldsymbol{N}}=\frac{\langle B',B'\rangle B''-\langle B',B''\rangle B'}{\|B'\|\|B'\times B''\|}+$$

$$+\varepsilon\left[\begin{array}{c}\dfrac{\langle B',B^{*\prime}\rangle B''-\langle B^{*\prime},B''\rangle B'+t^{*}\left[\langle B',B''\rangle B''-\langle B'',B''\rangle B'\right]}{\|B'\times B''\|.\|B'\|}\\ -\dfrac{\left(\langle B',B^{*\prime}+t^{*}B''\rangle\right)\left[\langle B',B'\rangle B''-\langle B'',B'\rangle B'\right]}{\|B'\|^{3}.\|B'\times B''\|}\\ +\dfrac{\langle B^{*\prime},B'\rangle B''-\langle B'',B'\rangle B^{*\prime}+\langle B',B'\rangle B^{*\prime\prime}-\langle B^{*\prime\prime},B'\rangle B'+t^{*}\left(\langle B',B'\rangle B'''-\langle B''',B'\rangle B'\right)}{\|B'\times B''\|.\|B'\|}\\ -\dfrac{\left[\langle(B'\times B''),\left(B^{*\prime}\times B''+B'\times B^{*\prime\prime}+t^{*}B'\times B'''\right)\rangle\right]}{\|B'\times B''\|^{3}.\|B'\|}\left(\langle B',B'\rangle B''-\langle B'',B'\rangle B'\right)\end{array}\right]$$

d) Dual Eğrilik Alanı

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}=\frac{\|B'\times B''\|}{\|B'\|^{3}}+$$

$$+\varepsilon\left[\frac{\langle B'\times B'',B'\times B^{*\prime\prime}+t^{*}B'\times B'''+B^{*\prime}\times B''\rangle}{\|B'\times B''\|.\|B'\|^{3}}-\frac{3\|B'\times B''\|}{\|B'\|^{6}}.\langle B',B^{*\prime}+t^{*}B''\rangle\right]$$

e) Dual Torsiyon Alanı

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}=\frac{det\left(B',B'',B'''\right)}{\|B'\times B''\|^{2}}+$$

$$+\varepsilon\left[\begin{array}{c}\dfrac{\begin{pmatrix} det\left(B',B'',B^{*'''}\right)+det\left(\left(B',B^{*''},B'''\right)\right)\\ +det\left(B^{*'},B'',B'''\right)+t^{*}det\left(B',B'',B'^{v}\right)\end{pmatrix}}{\|B'\times B''\|^{2}}\\ -\dfrac{2det\left(B',B'',B'''\right)}{\|B'\times B''\|^{4}}\langle B'\times B'',B'\times B^{*''}+B^{*'}\times B''+t^{*}B'\times B'''\rangle\end{array}\right]$$

dir.

Teorem 3.4: $\hat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ $(i = 0, \dots, n)$ olarak verilen dual bezier eğrisi olsun. Bu Bezier eğrisine $\hat{t} = t + \varepsilon t^* \epsilon D$ noktasında $(t\epsilon[0,1], t^*\epsilon R)$ dual De Casteljau algoritması uyguladığımızda

$\hat{P}_i^0 = \hat{P}_i$ ve

$\hat{P}_i^j = (1-\hat{t})P_i^{j-1} + \hat{t}P_{i+1}^{j-1}$

noktaları elde edilir. Bu noktalar reel ve dual kısımlarına ayrıldığında

$$\hat{P}_j^i = P_j^i + \varepsilon\left(P^{*}{}_j^i + t^*\left((\Delta P)_j^{i-1} + \Delta\left(P_j^{i-1}\right)\right)\right)$$

olarak yazılabilir. Burada P_j^i reel de Casteljau algoritmasının $(P_0, \dots P_n)$ noktalarına uygulanmasıyla elde edilen kontrol noktaları; $P^{*}{}_j^i$ ler de aynı algoritmanın $(P_0^*, \dots P_n^*)$ kontrol noktalarına uygulanmasıyla elde edilen kontrol noktalarıdır. Ayrıca $t\epsilon[0,1]$ olmak üzere

$(\Delta P)_j^0 = \Delta P_j = P_{j+1} - P_j$

$(\Delta P)_j^1 = (1-t)P_j + tP_{j+1}$

$(\Delta P)_j^i = (1-t)\Delta P_j^{i-1} + t(\Delta P)_{j+1}^{i-1}$ dir.

ve

$\Delta\left(P_j^i\right) = P_{j+1}^i - P_j^i$

dir.

Teorem 3.5: $\hat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\{\hat{b}_0, \dots \hat{b}_n\}$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu eğrinin teğet vektör alanının özel konumları aşağıdaki gibidir.

$a)\ \hat{T}\Big|_{t=0,\, t^*=0} = \dfrac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|} + \varepsilon\left[\dfrac{\Delta b_0^*}{\|\Delta b_0\|} - \dfrac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^*\rangle}{\|\Delta b_0\|^3}\Delta b_0\right]$

$b)\ \hat{T}\Big|_{t=1,\, t^*=0} = \dfrac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|} + \varepsilon\left[\dfrac{\Delta b_{n-1}^*}{\|\Delta b_{n-1}\|} - \dfrac{\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b^*{}_{n-1}\rangle}{\|\Delta b_{n-1}\|^3}\Delta b_{n-1}\right]$

$c)\ \hat{T}\Big|_{t=0,\, t^*\epsilon R} = \dfrac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|} + \varepsilon\left[\begin{array}{c}\dfrac{\Delta b_0^* + t^*(n-1)[\Delta b_1 - \Delta b_0]}{\|\Delta b_0\|}\\ -\dfrac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* + t^*(n-1)[\Delta b_1 - \Delta b_0]\rangle}{\|\Delta b_0\|^3}\Delta b_0\end{array}\right]$

$$d)\ \hat{T}\Big|_{t=1,\ t^*\epsilon R} = \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|} + \varepsilon\left[\begin{array}{c}\frac{\Delta b^*_{n-1}+t^*(n-1)[\Delta b_{n-1}-\Delta b_{n-2}]}{\|\Delta b_{n-1}\|}\\ -\frac{\langle\Delta b_{n-1},\Delta b^*_{n-1}+t^*(n-1)[\Delta b_{n-1}-\Delta b_{n-2}](n-1)\rangle}{\|\Delta b_{n-1}\|^3}\Delta b_{n-1}\end{array}\right]$$

$$e)\ \hat{T}\Big|_{\hat{t}=t_0+\varepsilon t_0^*} = \frac{(\Delta b)_0^n}{\|(\Delta b)_0^n\|} + \varepsilon\left[\begin{array}{c}\frac{(\Delta b^*)_0^n+t^*(n-1)\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]}{\|(\Delta b)_0^n\|}\\ -\frac{\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b^*)_0^n+t^*(n-1)\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]\rangle}{\|(\Delta b)_0^n\|^3}.(\Delta b)_0^n\end{array}\right]$$

dir.

Burada $\Delta b_i = b_{i+1} - b_i$; $\Delta b_i^* = b_{i+1}^* - b_i^*$; $b_i^j\ ve\ b^{*j}_i$ noktaları da Kontrol noktaları $\{b_0, \dots b_n\}\ ve\ \{b_0^*, \dots b_n^*\}$ olan Reel Bezier eğrisine uygulanan de casteljau algoritmasıyla elde edilen yeni kontrol noktalarıdır.

$$(\Delta b)_j^0 = \Delta b_j; \quad (\Delta b)_j^1 = (1-t)\Delta b_j + t\Delta b_{j+1}$$

$$(\Delta b)_j^i = (1-t)(\Delta b)_j^{i-1} + t(\Delta b)_{j+1}^{i-1}; \quad \Delta\left(b_j^i\right) = b_{j+1}^i - b_j^i \quad (i \neq 0)$$

dır.

İspat: Bezier eğrilerinin son nokta interpolasyon özellikleri yardımıyla kolayca görülür.

Teorem 3.6: $\hat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\{\hat{b}_0, \dots \hat{b}_n\}$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu eğrinin binormal vektör alanının özel konumları aşağıdaki gibidir.

a) t=0, t^*=0 durumunda,

$$\hat{\mathrm{B}}\Big|_{\hat{t}=0} = \frac{\Delta b_0\times\Delta b_1}{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|} + $$

$$+\varepsilon\left[\begin{array}{c}\frac{\Delta b_0^*\times(\Delta b_1-\Delta b_0)+\Delta b_0\times(\Delta b_1^*-\Delta b_0^*)}{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|} - \\ \left[\begin{array}{c}\frac{\langle\Delta b_0,\Delta b_0^*\rangle\|\Delta b_1-\Delta b_0\|^2+\langle\Delta b_1-\Delta b_0,\Delta b_1^*-\Delta b_0^*\rangle\|\Delta b_0\|^2-}{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|^3}\\ \frac{\langle\Delta b_0,\Delta b_1-\Delta b_0\rangle[\langle\Delta b_0,\Delta b_1^*-\Delta b_0^*\rangle+\langle\Delta b_0^*,\Delta b_1-\Delta b_0\rangle]}{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|^3}\end{array}\right].(\Delta b_0\times\Delta b_1)\end{array}\right]$$

b) $\hat{t} = 1 \Rightarrow (t = 1, t^* = 0)$

$$\hat{\mathrm{B}}\Big|_{\hat{t}=1} = \frac{\Delta b_{n-1}\times\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1}\times\Delta b_{n-2}\|} + $$

$$+\varepsilon\left[\begin{array}{c}\dfrac{\Delta b_{n-1}^{*}\times(\Delta b_{n-1}-\Delta b_{n-2})+\Delta b_{n-1}\times(\Delta b_{n-1}^{*}-\Delta b_{n-2}^{*})}{\|\Delta b_{n-1}\times\Delta b_{n-2}\|}- \\ -\left[\begin{array}{c}\dfrac{\langle\Delta b_{n-1},\Delta b_{n-1}^{*}\rangle\|\Delta b_{n-1}-\Delta b_{n-2}\|^{2}+\langle\Delta b_{n-1}-\Delta b_{n-2},\Delta b_{n-1}^{*}-\Delta b_{n-2}^{*}\rangle\|\Delta b_{n-1}\|^{2}-}{\|\Delta b_{n-1}\times\Delta b_{n-2}\|^{3}} \\ \dfrac{\langle\Delta b_{n-1},\Delta b_{n-1}-\Delta b_{n-2}\rangle[\langle\Delta b_{n-1},\Delta b_{n-1}^{*}-\Delta b_{n-2}^{*}\rangle+\langle\Delta b_{n-1}^{*},\Delta b_{n-1}-\Delta b_{n-2}\rangle]}{\|\Delta b_{n-1}\times\Delta b_{n-2}\|^{3}}\end{array}\right].(\Delta b_{n-1}\times\Delta b_{n-2})\end{array}\right]$$

c) $\hat{t}=t_0\epsilon(0,1),\ t^*=0$

$$\widehat{\mathrm{B}}\Big|_{\hat{t}=t_0}=\frac{(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}}{\|(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}\|}+$$

$$+\varepsilon\left[\begin{array}{c}\dfrac{(\Delta b^*)_0^n\times((\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n)+(\Delta b)_0^n\times((\Delta b^*)_1^{n-1}-(\Delta b^*)_0^n)}{\|(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}\|}- \\ -\left[\begin{array}{c}\dfrac{\langle(\Delta b)_0^n(\Delta b^*)_0^n\rangle\|(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\|^2+\langle(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n,\ (\Delta b^*)_1^{n-1}-(\Delta b^*)_0^n\rangle\|(\Delta b)_0^n\|^2-}{\|(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}\|^3} \\ \dfrac{\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\rangle[\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b^*)_1^{n-1}-(\Delta b^*)_0^n\rangle+\langle(\Delta b^*)_0^n,(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\rangle]}{\|(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}\|^3}\end{array}\right].((\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1})\end{array}\right]$$

d) t_0=0, $t_0^*\epsilon R$

$$\widehat{\mathrm{B}}\Big|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*}=\frac{\Delta b_0\times\Delta b_1}{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|}+$$

$$+\varepsilon\left[\begin{array}{c}\dfrac{\Delta b_0^*\times(\Delta b_1-\Delta b_0)+\Delta b_0\times(\Delta b_1^*-\Delta b_0^*)}{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|} \\ -\left[\begin{array}{c}\dfrac{\langle\Delta b_0,\Delta b_0^*\rangle\|\Delta b_1-\Delta b_0\|^2+\langle\Delta b_1-\Delta b_0,\Delta b_1^*-\Delta b_0^*\rangle\|\Delta b_0\|^2-}{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|^3} \\ \dfrac{\langle\Delta b_0,\Delta b_1-\Delta b_0\rangle[\langle\Delta b_0,\Delta b_1^*-\Delta b_0^*\rangle+\langle\Delta b_0^*,\Delta b_1-\Delta b_0\rangle]}{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|^3}\end{array}\right].(\Delta b_0\times\Delta b_1) \\ -t_0^*\left[\begin{array}{c}\dfrac{\|\Delta b_0\|^2\langle(\Delta b_1-\Delta b_0),(\Delta b_2-2\Delta b_1+\Delta b_0)\rangle-}{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|^3} \\ \dfrac{\langle\Delta b_0,\Delta b_1-\Delta b_0\rangle\langle\Delta b_0,\Delta b_2-2\Delta b_1+\Delta b_0\rangle}{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|^3}\end{array}\right].(\Delta b_0\times\Delta b_1)\end{array}\right]$$

e) $\hat{t}=t_0+\varepsilon\, t_0^*$ Durumunda ($t_0\epsilon[0,1], t_0^*\epsilon R$)

$$\widehat{\mathrm{B}}\Big|_{\hat{t}=t_0+\varepsilon\, t_0^*}=\frac{(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}}{\|(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}\|}+$$

$$+\varepsilon\left[\begin{array}{c}\dfrac{(\Delta b^*)_0^n\times\big((\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\big)+(\Delta b)_0^n\times\big((\Delta b^*)_1^{n-1}-(\Delta b^*)_0^n\big)}{\|(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}\|}- \\ -\left[\begin{array}{c}\dfrac{\langle(\Delta b)_0^n(\Delta b^*)_0^n\rangle\|(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\|^2+\langle(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n,(\Delta b^*)_1^{n-1}-(\Delta b^*)_0^n\rangle\|(\Delta b)_0^n\|^2-}{\|(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}\|^3} \\ \dfrac{\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\rangle[\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b^*)_1^{n-1}-(\Delta b^*)_0^n\rangle+\langle(\Delta b^*)_0^n,(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\rangle]}{\|(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}\|^3}\end{array}\right].((\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}) \\ -t_0^*\left[\begin{array}{c}\dfrac{\|(\Delta b)_0^n\|^2\langle\big((\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\big),\big((\Delta b)_2^{n-2}-2(\Delta b)_1^{n-1}+(\Delta b)_0^n\big)\rangle}{\|(\Delta b)_0^n-(\Delta b)_1^{n-1}\|^3}- \\ \dfrac{\langle(\Delta b)_0^n,\big((\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\big)\rangle\langle(\Delta b)_0^n,\big((\Delta b)_2^{n-2}-2(\Delta b)_1^{n-1}+(\Delta b)_0^n\big)\rangle}{\|(\Delta b)_0^n-(\Delta b)_1^{n-1}\|^3}\end{array}\right].((\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1})\end{array}\right]$$

Elde edilir.

Teorem 3.7: $\widehat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\{\hat{b}_0,\ldots\hat{b}_n\}$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu eğrinin asli normal vektör alanının özel konumları aşağıdaki gibidir.

a) $\hat{t}=0$ İçin

$$\widehat{N} = \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} +$$

$$+\varepsilon \left[\begin{array}{c} \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0^*, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ - \frac{(\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle) [\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0]}{\|\Delta b_0\|^3 \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ + \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0^* +}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ \frac{+\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*] - \langle [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*], \Delta b_0 \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ - \frac{[\langle (\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]), (\Delta b_0^* \times [\Delta b_1 - \Delta b_0] + \Delta b_0 \times [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*]) \rangle]}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|^3} . \beta \end{array} \right]$$

dir. Burada

$$\beta = (\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0)$$

Biçimindedir.

b) $\hat{t} = 1$ İçin

$$\widehat{N}\Big|_{\hat{t}=1} = \frac{\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1} \rangle [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] - \langle \Delta b_{n-1}, [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \rangle n \Delta b_{n-1}}{\|n \Delta b_{n-1}\| \|n \Delta b_{n-1} \times n(n-1) [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|} +$$

$$+\varepsilon \left[\begin{array}{c} \frac{\langle n \Delta b_{n-1}, n \Delta b_{n-1}^* \rangle n(n-1) [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] - \langle \Delta b_{n-1}^*, [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \rangle \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\| \|\Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|} \\ - \frac{(\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}^* \rangle) [\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1} \rangle [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] - \langle \Delta b_{n-1}, [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \rangle \Delta b_{n-1}]}{\|\Delta b_{n-1}\|^3 \|\Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|} \\ + \frac{\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}^* \rangle [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] - \langle \Delta b_{n-1}, [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \rangle \Delta b_{n-1}^*}{\|\Delta b_{n-1}\| \|\Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|} \\ \frac{+\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1} \rangle [\Delta b_{n-1}^* - \Delta b_{n-2}^*] - \langle [\Delta b_{n-1}^* - \Delta b_{n-2}^*], \Delta b_{n-1} \rangle \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\| \|\Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|} \\ - \frac{[\langle (\Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]), (\Delta b_{n-1}^* \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] + \Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1}^* - \Delta b_{n-2}^*]) \rangle]}{\|\Delta b_{n-1}\| \|\Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|^3} . \beta \end{array} \right]$$

dir. Burada,

$$\beta = (\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1} \rangle [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] - \langle \Delta b_{n-1}, [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \rangle \Delta b_{n-1})$$

Biçimindedir.

c) $\hat{t} = t_0 \epsilon (0,1)$, $t^* = 0$ İçin

$$\widehat{N} = \frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_0^n \rangle [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] - \langle (\Delta b)_0^n, [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle (\Delta b)_0^n}{\|(\Delta b)_0^n\| \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|} +$$

$$+\varepsilon\left[\begin{array}{c}\frac{\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b^*)_0^n\rangle[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]-\langle(\Delta b^*)_0^n,[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]\rangle(\Delta b)_0^n}{\|(\Delta b)_0^n\|\|(\Delta b)_0^n\times[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]\|} \\ -\frac{(\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b^*)_0^n\rangle)[\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b)_0^n\rangle[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]-\langle(\Delta b)_0^n,[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]\rangle(\Delta b)_0^n]}{\|(\Delta b)_0^n\|^3\|(\Delta b)_0^n\times[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]\|} \\ +\frac{\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b^*)_0^n\rangle[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]-\langle(\Delta b)_0^n,[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]\rangle(\Delta b^*)_0^n+}{\|(\Delta b)_0^n\|\|(\Delta b)_0^n\times[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]\|} \\ \frac{\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b)_0^n\rangle[\Delta(b^*)_1^{n-1}-(b^*)_0^n]-\langle[(b^*)_1^{n-1}-(b^*)_0^n],(\Delta b)_0^n\rangle(\Delta b)_0^n}{\|(\Delta b)_0^n\|\|(\Delta b)_0^n\times[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]\|} \\ -\frac{[\langle((\Delta b)_0^n\times[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]),(,(\Delta b^*)_0^n\times[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]+(\Delta b)_0^n\times[(\Delta b^*)_1^{n-1}-(\Delta b^*)_0^n])\rangle]}{\|(\Delta b)_0^n\|\|(\Delta b)_0^n\times[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]\|^3}.\beta\end{array}\right]$$

dir. Burada

$$\beta=(\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b)_0^n\rangle[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]-\langle(\Delta b)_0^n,[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]\rangle(\Delta b)_0^n)$$

Biçimindedir.

d) $(t_0=0, t_0^*\epsilon R)\ \hat{t}=\varepsilon t_0^*$ ise

$$\widehat{N}=\frac{\langle\Delta b_0,\Delta b_0\rangle[\Delta b_1-\Delta b_0]-\langle\Delta b_0,[\Delta b_1-\Delta b_0]\rangle\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|\|\Delta b_0\times[\Delta b_1-\Delta b_0]\|}+$$

$$+\varepsilon\left[\begin{array}{c}\frac{\langle\Delta b_0,\Delta b_0^*\rangle[\Delta b_1-\Delta b_0]-\langle\Delta b_0^*,[\Delta b_1-\Delta b_0]\rangle\Delta b_0+\boldsymbol{A}}{\|\Delta b_0\|\|\Delta b_0\times[\Delta b_1-\Delta b_0]\|} \\ -\frac{\left(\langle\Delta b_0,\Delta b_0^*+\frac{n-1}{n}t^*(\Delta b_1-\Delta b_0)\rangle\right)[\langle\Delta b_0,\Delta b_0\rangle[\Delta b_1-\Delta b_0]-\langle\Delta b_0,[\Delta b_1-\Delta b_0]\rangle\Delta b_0]}{\|\Delta b_0\|^3\|\Delta b_0\times[\Delta b_1-\Delta b_0]\|} \\ +\frac{\langle\Delta b_0,\Delta b_0^*\rangle[\Delta b_1-\Delta b_0]-\langle\Delta b_0,[\Delta b_1-\Delta b_0]\rangle\Delta b_0^*+}{\|\Delta b_0\|\|\Delta b_0\times[\Delta b_1-\Delta b_0]\|} \\ \frac{+\langle\Delta b_0,\Delta b_0\rangle[\Delta b_1^*-\Delta b_0^*]-\langle[\Delta b_1^*-\Delta b_0^*],\Delta b_0\rangle\Delta b_0+\boldsymbol{B}}{\|\Delta b_0\|\|\Delta b_0\times[\Delta b_1-\Delta b_0]\|} \\ -\frac{[\langle(\Delta b_0\times[\Delta b_1-\Delta b_0]),(\Delta b_0^*\times[\Delta b_1-\Delta b_0]+\Delta b_0\times[\Delta b_1^*-\Delta b_0^*])+\boldsymbol{C}\rangle]}{\|\Delta b_0\|\|\Delta b_0\times[\Delta b_1-\Delta b_0]\|^3}.\boldsymbol{\beta}\end{array}\right]$$

dir. Burada

$\boldsymbol{A}$= (n-1)$t^*[\langle\Delta b_0,\Delta b_1-\Delta b_0\rangle(\Delta b_1-\Delta b_0)-\|\Delta b_1-\Delta b_0\|^2\Delta b_0]$

$\boldsymbol{B}$= (n-2)$t^*[\|\Delta b_0\|^2[\Delta b_2-2\Delta b_1+\Delta b_0]-\langle[\Delta b_2-2\Delta b_1+\Delta b_0],\Delta b_0\rangle\Delta b_0]$

$\boldsymbol{C}$= (n-2)$t^*[(\Delta b_0\times\Delta b_2)-2(\Delta b_0\times\Delta b_1)]$

$\boldsymbol{\beta}=(\langle\Delta b_0,\Delta b_0\rangle[\Delta b_1-\Delta b_0]-\langle\Delta b_0,[\Delta b_1-\Delta b_0]\rangle\Delta b_0)$

Biçimindedir.

e) $(t_0=0, t_0^*\epsilon R)\ \hat{t}=\varepsilon t_0^*$ ise

$$\widehat{N}=\frac{\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b)_0^n\rangle[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]-\langle(\Delta b)_0^n,[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]\rangle(\Delta b)_0^n}{\|(\Delta b)_0^n\|\|(\Delta b)_0^n\times[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n]\|}+$$

$$+\varepsilon\left[\begin{array}{c} \frac{\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b^*)_0^n\rangle\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]-\langle(\Delta b^*)_0^n,\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]\rangle(\Delta b)_0^n+\boldsymbol{A}}{\left\|(\Delta b)_0^n\right\|\left\|(\Delta b)_0^n\times\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]\right\|} \\ -\frac{\left(\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b^*)_0^n+\frac{n-1}{n}t^*\left((\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right)\rangle\right)\left[\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b)_0^n\rangle\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]-\langle(\Delta b)_0^n,\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]\rangle(\Delta b)_0^n\right]}{\left\|(\Delta b)_0^n\right\|^3\left\|(\Delta b)_0^n\times\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]\right\|} \\ +\frac{\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b^*)_0^n\rangle\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]-\langle(\Delta b)_0^n,\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]\rangle(\Delta b^*)_0^n+}{\left\|(\Delta b)_0^n\right\|\left\|(\Delta b)_0^n\times\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]\right\|} \\ \frac{+\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b)_0^n\rangle\left[(\Delta b^*)_1^{n-1}-(\Delta b^*)_0^n\right]-\langle\left[(\Delta b^*)_1^{n-1}-(\Delta b^*)_0^n\right],(\Delta b)_0^n\rangle(\Delta b)_0^n+\boldsymbol{B}}{\left\|(\Delta b)_0^n\right\|\left\|(\Delta b)_0^n\times\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]\right\|} \\ -\frac{\left[\langle\left((\Delta b)_0^n\times\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]\right),\left((\Delta b^*)_0^n\times\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]+(\Delta b)_0^n\times\left[(\Delta b^*)_1^{n-1}-(\Delta b^*)_0^n\right]\right)+\boldsymbol{C}\rangle\right]}{\left\|(\Delta b)_0^n\right\|\left\|(\Delta b)_0^n\times\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]\right\|^3}.\boldsymbol{\beta} \end{array}\right]$$

dir. Burada

$\boldsymbol{A}$= (n-1)$t^*\left[\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\rangle\left((\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right)-\left\|(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right\|^2(\Delta b)_0^n\right]$

$\boldsymbol{B}$=(n-2)$t^*\left[\left\|(\Delta b)_0^n\right\|^2\left[(\Delta b)_2^{n-2}-2(\Delta b)_1^{n-1}+(\Delta b)_0^n\right]-\langle\left[(\Delta b)_2^{n-2}-2(\Delta b)_1^{n-1}+(\Delta b)_0^n\right],(\Delta b)_0^n\rangle(\Delta b)_0^n\right]$

$\boldsymbol{C}$= (n-2)$t^*\left[\left((\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_2^{n-2}\right)-2\left((\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}\right)\right]$

$\boldsymbol{\beta}=\left(\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b)_0^n\rangle\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]-\langle(\Delta b)_0^n,\left[(\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right]\rangle(\Delta b)_0^n\right)$

dir.

Teorem 3.8: $\hat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\{\hat{b}_0,\dots\hat{b}_n\}$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu eğrinin eğrilik vektör alanının özel konumları aşağıdaki gibidir.

a) $\hat{\kappa}|_{\hat{t}=0}=\frac{n-1}{n}\frac{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^3}\left[1+\varepsilon\left[\frac{\langle\Delta b_0\times\Delta b_1,\ \Delta b_0(\Delta b_1^*-\Delta b_0^*)+\Delta b_0^*\times(\Delta b_1-\Delta b_0)\rangle}{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|^2}-\frac{3\langle\Delta b_0,\Delta b_0^*\rangle}{n\|\Delta b_0\|^3}\right]\right]$

b) $\hat{\kappa}|_{\hat{t}=1}=$

$\frac{n-1}{n}\frac{\|\Delta b_{n-1}\times\Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^3}\left[1+\varepsilon\left[\frac{\langle\Delta b_{n-1}\times\Delta b_{n-2},\ \Delta b_{n-1}(\Delta b_{n-2}^*-\Delta b_{n-1}^*)+\Delta b_{n-1}^*\times(\Delta b_{n-2}-\Delta b_{n-1})\rangle}{\|\Delta b_{n-1}\times\Delta b_{n-2}\|^2}-\frac{3\langle\Delta b_{n-1},\Delta b_{n-1}^*\rangle}{n\|\Delta b_{n-1}\|^3}\right]\right]$

c) $\hat{\kappa}|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*}=\frac{n-1}{n}\frac{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^3}\left[1+\varepsilon\left[\frac{\langle\Delta b_0\times\Delta b_1,\ \Delta b_0(\Delta b_1^*-\Delta b_0^*)+\Delta b_0^*\times(\Delta b_1-\Delta b_0)\rangle}{\|\Delta b_0\times\Delta b_1\|^2}-\frac{3\langle\Delta b_0,\Delta b_0^*\rangle}{n\|\Delta b_0\|^3}+t_0^*(n-2)\left[\Delta b_0\times[\Delta b_2-2\Delta b_1]\right]\right]\right]$

d) $\hat{\kappa}|_{\hat{t}=t_0}=$

$\frac{n-1}{n}\frac{\left\|(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}\right\|}{\left\|(\Delta b)_0^n\right\|^3}\left[1+\ \varepsilon\left[\frac{\langle(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1},\ (\Delta b)_0^n(\Delta b^*)_1^{n-1}-(\Delta b^*)_0^n+(\Delta b^*)_0^n\times\left((\Delta b)_1^{n-1}-(\Delta b)_0^n\right)\rangle}{\left\|(\Delta b)_0^n\times(\Delta b)_1^{n-1}\right\|^2}-\frac{3\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b^*)_0^n\rangle}{n\left\|(\Delta b)_0^n\right\|^3}\right]\right]$

e) $\hat{\kappa}|_{\hat{t}=t_0+\varepsilon t_0^*} =$

$$\frac{n-1}{n}\frac{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|}{\|(\Delta b)_0^n\|^3}\Bigg[1+\ \varepsilon\Bigg[\frac{\langle(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1},\ (\Delta b)_0^n\big((\Delta b^*)_1^{n-1}-(\Delta b^*)_0^n\big)+(\Delta b^*)_0^n \times \big((\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\big)\rangle}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|^2} -$$

$$\frac{3\langle(\Delta b)_0^n,(\Delta b^*)_0^n\rangle}{n\|(\Delta b)_0^n\|^3} + t_0^*(n-2)\left[(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_2^{n-2} - 2(\Delta b)_1^{n-1}]\right]\Bigg]\Bigg]$$

dir.

Teorem 3.9: $\hat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\{\hat{b}_0, \dots \hat{b}_n\}$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu eğrinin dual burulma vektör alanının özel konumları aşağıdaki gibidir.

a) $\hat{\tau}|_{\hat{t}=0} = \frac{n-2}{n\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2}\Big[det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2) + \varepsilon\Big[det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2^*) +$

$$det(\Delta b_0, \Delta b_1^*, \Delta b_2) + det(\Delta b_0^*, \Delta b_1, \Delta b_2) - \frac{2\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2}\langle \Delta b_0 \times$$

$$\Delta b_1, \Delta b_0 \times (\Delta b_1^* - \Delta b_0^*) + \Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0)\rangle\Big]\Big]$$

b) $\hat{\tau}|_{\hat{t}=1} =$

$$\frac{n-2}{n\|\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}\|^2}\Big[det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3}) +$$

$$\varepsilon\Big[det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3}^*) + det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}^*, \Delta b_{n-3}) +$$

$$det(\Delta b_{n-1}^*, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3}) - \frac{2\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}\|^2}\langle \Delta b_{n-1} \times$$

$$\Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1} \times (\Delta b_{n-2}^* - \Delta b_{n-1}^*) + \Delta b_{n-1}^* \times (\Delta b_{n-2} - \Delta b_{n-1})\rangle\Big]\Big]$$

c) $\hat{\tau}|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*} = \frac{n-2}{n\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2}\Big[det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2) + \varepsilon\Big[det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2^*) +$

$$det(\Delta b_0, \Delta b_1^*, \Delta b_2) + det(\Delta b_0^*, \Delta b_1,, \Delta b_2) +$$

$$t^*(n-3)[det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_3 - 3\Delta b_2)] - \frac{2de\ (\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2}\langle \Delta b_0 \times$$

$$\Delta b_1, \Delta b_0 \times (\Delta b_1^* - \Delta b_0^*) + \Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0)\rangle\Big]\Big]$$

d) $\hat{\tau}|_{\hat{t}=t_0} =$

$$\frac{n-2}{n\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2}\Big[det((\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2}) +$$

$$\varepsilon\Big[det((\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b^*)_2^{n-2}) +$$

$$det((\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2}) +$$

$$det((\Delta b^*)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2}) -$$

$$\frac{2det\left((\Delta b)_0^n,(\Delta b)_1^{n-1},(\Delta b)_2^{n-2}\right)}{\left\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\right\|^2}\langle(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_0^n \times ((\Delta b^*)_1^{n-1} -$$

$$(\Delta b^*)_0^n) + (\Delta b^*)_0^n \times ((\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n)\rangle\Big]\Big]$$

e) $\hat{\tau}|_{\hat{t}=t_0+\varepsilon t_0^*} =$

$$\frac{n-2}{n\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2}\Big[det((\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2}) +$$

$$\varepsilon\Big[det((\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b^*)_2^{n-2}) +$$

$$det((\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2}) +$$

$$det((\Delta b^*)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2}) +$$

$$+\ t^*(n-3)[det((\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_3^{n-3} - 3(\Delta b)_2^{n-2})] -$$

$$\frac{2\mathrm{det}det\left((\Delta b)_0^n,(\Delta b)_1^{n-1},(\Delta b)_2^{n-2}\right)}{\left\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\right\|^2}\langle(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_0^n \times$$

$$((\Delta b^*)_1^{n-1} - (\Delta b^*)_0^n) + (\Delta b^*)_0^n \times ((\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n) +$$

$$t_0^*(n-2)[(\Delta b)_0^n \times ((\Delta b)_2^{n-2} - 2(\Delta b)_1^{n-1})]\rangle\Big]\Big]$$

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

4.1 Dual eğrilerde Frenet çatısının bazı özellikleri

Sonuç 4.1: $\widehat{\phi}(\hat{t})$ dual regüler eğrisi verilsin. Bu taktirde $\hat{t} = t + \varepsilon t^* \epsilon D$ noktasında eğrinin dual Frenet vektör alanları $\{\widehat{\boldsymbol{T}}, \widehat{\boldsymbol{N}}, \widehat{\mathrm{B}}\}$ ve dual eğrilikleri $\{\widehat{\boldsymbol{\kappa}}, \widehat{\boldsymbol{\tau}}\}$, reel ve dual kısımlarına ayrılarak yazılacak olursa yani $\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{\epsilon T}^*$; $\widehat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\epsilon B}^*$; $\widehat{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\epsilon N}^*$; $\widehat{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\epsilon\kappa}^*$ **ve** $\widehat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\epsilon\tau}^*$ biçiminde ifade edilirse görülecektir ki,

$$\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T} \rangle = \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \rangle = \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N} \rangle = \mathbf{1}$$
$$\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^* \rangle = \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^* \rangle = \langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}^* \rangle = \mathbf{0}$$
$$\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{B}^* \rangle + \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}^* \rangle = \mathbf{0}$$
$$\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}^* \rangle + \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}^* \rangle = \mathbf{0}$$
$$\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}^* \rangle + \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}^* \rangle = \mathbf{0}$$

dır.

İspat: $\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{\epsilon T}^*$; $\widehat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\epsilon B}^*$; $\widehat{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\epsilon N}^*$ vektör alanları dual küresel eğrilerdir ve ortonormal çatı alan vektörleridir. Dual birim vektör özelliklerinden yukarıdaki özellikler elde edilir.

Teorem 4.1: $\widehat{\phi}(\hat{t})$ dual regüler eğrisi verilsin. Bu taktirde $\hat{t} = t + \varepsilon t^* \epsilon D$ noktasında eğrinin dual Frenet vektör alanları $\{\widehat{\boldsymbol{T}}, \widehat{\boldsymbol{N}}, \widehat{\mathbf{B}}\}$ ve dual eğrilikleri $\{\widehat{\boldsymbol{\kappa}}, \widehat{\boldsymbol{\tau}}\}$ olmak üzere çatının türev denklemleri ise

$$\widehat{\boldsymbol{T}}' = \widehat{\boldsymbol{\nu}}\widehat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{N}}$$
$$\widehat{\boldsymbol{N}}' = -\widehat{\boldsymbol{\nu}}\widehat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{T}} + \widehat{\boldsymbol{\nu}}\widehat{\boldsymbol{\tau}}\widehat{\boldsymbol{B}}$$
$$\widehat{\boldsymbol{B}}' = -\widehat{\boldsymbol{\nu}}\widehat{\boldsymbol{\tau}}\widehat{\boldsymbol{N}}$$

dir. Burada $\widehat{\boldsymbol{\nu}} = \left\| \widehat{\phi}'(\hat{t}) \right\| = \|\phi'(t)\| + \boldsymbol{\epsilon} \frac{\langle \phi'(t), \phi^{*\prime}(t) + t^*\phi''(t) \rangle}{\|\phi'(t)\|} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\epsilon\nu}^*$ dır**.**

Şimdi,

$\widehat{\phi}: D \longrightarrow D^3$ dual değişkenli diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\hat{t} \in D$ noktasında eğrinin Frenet vektör alanları ve eğrilikleri $\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{\epsilon T}^*$; $\widehat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\epsilon B}^*$; $\widehat{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\epsilon N}^*$; $\widehat{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\epsilon\kappa}^*$ ve $\widehat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\epsilon\tau}^*$ olsun**.** Bu durumda birim teğet vektör alanının türev denklemi

$$\widehat{\boldsymbol{T}}' = \boldsymbol{T}' + \boldsymbol{\epsilon T}^{*\prime}$$

dersek,

$$\widehat{\boldsymbol{T}}' = \hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{N}} = (\boldsymbol{\nu} + \epsilon\boldsymbol{\nu}^*)(\boldsymbol{\kappa} + \epsilon\boldsymbol{\kappa}^*)(\boldsymbol{N} + \epsilon\boldsymbol{N}^*)$$

İfadesi açıldığında

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{N}$$

ve

$$\boldsymbol{T}^{*\prime} = (\boldsymbol{\nu}^*\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\kappa}^*)\boldsymbol{N} + \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{N}^*$$

elde edilir.

Aynı şekilde

$$\widehat{\boldsymbol{N}}' = \boldsymbol{N}' + \epsilon\boldsymbol{N}^{*\prime}$$

dersek,

$$\widehat{\boldsymbol{N}}' = -\hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{T}} + \hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\tau}}\widehat{\boldsymbol{B}} = -(\boldsymbol{\nu} + \epsilon\boldsymbol{\nu}^*)(\boldsymbol{\kappa} + \epsilon\boldsymbol{\kappa}^*)(\boldsymbol{T} + \epsilon\boldsymbol{T}^*) + (\boldsymbol{\nu} + \epsilon\boldsymbol{\nu}^*)(\boldsymbol{\tau} + \epsilon\boldsymbol{\tau}^*)(\boldsymbol{B} + \epsilon\boldsymbol{B}^*)$$

İfadesi açıldığında

$$\boldsymbol{N}' = -\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{B}$$

ve

$$\boldsymbol{N}^{*\prime} = -\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{T}^* - (\boldsymbol{\nu}^*\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\kappa}^*)\boldsymbol{T} + \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{B}^* + (\boldsymbol{\nu}^*\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\tau}^*)\boldsymbol{B}$$

elde edilir.

Benzer olarak

$$\widehat{\boldsymbol{B}}' = \boldsymbol{B}' + \epsilon\boldsymbol{B}^{*\prime}$$

dersek,

$$\widehat{\boldsymbol{B}}' = -\hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\tau}}\widehat{\boldsymbol{N}} = -(\boldsymbol{\nu} + \epsilon\boldsymbol{\nu}^*)(\boldsymbol{\tau} + \epsilon\boldsymbol{\tau}^*)(\boldsymbol{N} + \epsilon\boldsymbol{N}^*)$$

İfadesi açıldığında

$$\boldsymbol{B}' = -\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{N}$$

ve

$$\boldsymbol{B}^{*\prime} = -(\boldsymbol{\nu}^*\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\tau}^*)\boldsymbol{N} - \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{N}^*$$

elde edilir. Tabii ki burada $\hat{\boldsymbol{\nu}} = \left\|\widehat{\phi}'(\hat{t})\right\| = \boldsymbol{\nu} + \epsilon\boldsymbol{\nu}^*$ **yani**

$$\boldsymbol{\nu} = \|\phi'(t)\| \quad \textbf{ve} \quad \boldsymbol{\nu}^* = \frac{\langle \phi'(t), \phi^{*\prime}(t) + t^*\phi''(t)\rangle}{\|\phi'(t)\|}$$

dir**.** Diğer $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^*$, $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}^*$ **,** $\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}^*$ **ve** $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}^*$ yukarıda teoremde verildiği gibidir. Bunları bir teorem ile yazarsak,

Teorem 4.2: $\widehat{\phi}: D \longrightarrow D^3$, $\hat{\phi}(\hat{t}) = \hat{\phi}(t + \epsilon t^*) = \phi(t) + \epsilon\big(\phi^*(t) + t^*\phi'(t)\big)$ biçiminde dual değişkenli diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\hat{t} \in D$ noktasında eğrinin

Frenet vektör alanları ve eğrilikleri $\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{T}^*$; $\widehat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{B}^*$; $\widehat{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{N}^*$; $\widehat{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\kappa}^*$ **ve** $\widehat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\tau}^*$ olsun. Buna göre

$$\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{\nu\kappa N}$$

$$\boldsymbol{N}' = -\boldsymbol{\nu\kappa T} + \boldsymbol{\nu\tau B}$$

$$\boldsymbol{B}' = -\boldsymbol{\nu\tau N}$$

$$\boldsymbol{T}^{*\prime} = (\boldsymbol{\nu}^*\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\nu\kappa}^*)\boldsymbol{N} + \boldsymbol{\nu\kappa N}^*$$

$$\boldsymbol{N}^{*\prime} = -\boldsymbol{\nu\kappa T}^* - (\boldsymbol{\nu}^*\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\nu\kappa}^*)\boldsymbol{T} + \boldsymbol{\nu\tau B}^* + (\boldsymbol{\nu}^*\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nu\tau}^*)\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{B}^{*\prime} = -(\boldsymbol{\nu}^*\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\nu\tau}^*)\boldsymbol{N} - \boldsymbol{\nu\tau N}^*$$

dir. Burada $\boldsymbol{\nu} = \|\phi'(t)\|$ **ve** $\boldsymbol{\nu}^* = \frac{\langle \phi'(t), \phi^{*\prime}(t) + t^*\phi''(t)\rangle}{\|\phi'(t)\|}$ dır**.**

4.2 Dual Eğrilerinde Bishop Çatı

Buna göre (Samancı, Çelik ve İncesu, 2015) da olduğu gibi burulma fonksiyonunun integrali alınarak dual Bishop açısı bulunur. Burada $d\hat{t}$ ifadesi yukarıdaki ϕ fonksiyonu biçiminde yazılacak olur ve diferensiyel alınırsa yani $d\hat{t} = d\,[t + \epsilon(0 + t^*.1)]$ biçiminde yazıldığında

$$\hat{\theta}(\hat{t}) = \int \hat{\boldsymbol{\tau}}\, d\hat{t} = \int (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\tau}^*)\, dt$$

$$= \underbrace{\int \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{\epsilon} \underbrace{\int \boldsymbol{\tau}^* \boldsymbol{dt}}$$

$$= \theta(t) + \boldsymbol{\epsilon}\theta^*(t)$$

biçiminde olur. Burada $\theta(t) = \int \boldsymbol{\tau} dt$ ve $\theta^*(t) = \int \boldsymbol{\tau}^* dt$ dir. Yani,

$\theta = \int \frac{\det(\phi', \phi'', \phi''')}{\|\phi' \times \phi''\|^2} \boldsymbol{dt}$ ve

$$\theta^* = \int \left[\frac{\begin{bmatrix} \det\left(\phi', \phi'', (\phi^{*\prime\prime\prime} + t^*\phi^{(4)})\right) + \det(\phi', \phi^{*\prime\prime}, \phi''') \\ + \det(\phi^{*\prime}, \phi'', \phi''') \end{bmatrix}}{\|\phi' \times \phi''\|^2} - \frac{2\det(\phi', \phi'', \phi''')\langle \phi' \times \phi'', \phi' \times \phi^{*\prime\prime} + \phi^{*\prime} \times \phi'' + t^*(\phi' \times \phi''')\rangle}{\|\phi' \times \phi''\|^4} \right] dt$$

olur. O halde

$\widehat{\phi}: D \longrightarrow D^3$, $\hat{\phi}(\hat{t}) = \hat{\phi}(t + \epsilon t^*) = \phi(t) + \epsilon\left(\phi^*(t) + t^*\phi'(t)\right)$ biçiminde dual değişkenli diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $\hat{t} \in D$ noktasında eğrinin Dual Bishop çatısı

$$\hat{T} = \hat{T}$$

$$\widehat{M_1} = Cos(\hat{\theta})\hat{N} - Sin(\hat{\theta})\hat{B}$$

$$\widehat{M_2} = Sin(\hat{\theta})\hat{N} + Cos(\hat{\theta})\hat{B}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\cos(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon\theta}^*) = \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\epsilon\theta}^*\boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\theta})$$

$$\sin(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\epsilon\theta}^*) = \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\epsilon\theta}^*\boldsymbol{cos}(\boldsymbol{\theta})$$

eşitlikleri de yerine yazıldığında dual teğet, dual normal ve dual binormal vektör alanları reel ve dual kısımlara ayrıldığında dual Bishop çatı vektör alanları

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{\epsilon T}^*$$

$$\widehat{\boldsymbol{M_1}} = (cos\theta\boldsymbol{N} - sin\theta\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{\epsilon}[(cos\theta\boldsymbol{N}^* - sin\theta\boldsymbol{B}^*) - \boldsymbol{\theta}^*(sin\theta\boldsymbol{N} + cos\theta\boldsymbol{B})]$$

$$\widehat{\boldsymbol{M_2}} = (sin\theta\boldsymbol{N} + cos\theta\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{\epsilon}[(sin\theta\boldsymbol{N}^* + cos\theta\boldsymbol{B}^*) + \boldsymbol{\theta}^*(cos\theta\boldsymbol{N} - sin\theta\boldsymbol{B})]$$

biçiminde olur. Burada

$$\langle\widehat{\boldsymbol{T}},\widehat{\boldsymbol{T}}\rangle = \langle\widehat{\boldsymbol{M_1}}\widehat{\boldsymbol{M_1}}\rangle = \langle\widehat{\boldsymbol{M_2}},\widehat{\boldsymbol{M_2}}\rangle = \boldsymbol{1}$$

$$\langle\widehat{\boldsymbol{T}},\widehat{\boldsymbol{M_1}}\rangle = \langle\widehat{\boldsymbol{M_1}}\widehat{\boldsymbol{M_2}}\rangle = \langle\widehat{\boldsymbol{T}},\widehat{\boldsymbol{M_2}}\rangle = \boldsymbol{0}$$

dır.

Gerçekten de

$$\begin{aligned}\langle\widehat{\boldsymbol{T}},\widehat{\boldsymbol{M_1}}\rangle &= \langle(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{\epsilon T}^*), (cos\theta\boldsymbol{N} - sin\theta\boldsymbol{B}) \\ &\quad + \boldsymbol{\epsilon}[(cos\theta\boldsymbol{N}^* - sin\theta\boldsymbol{B}^*) - \boldsymbol{\theta}^*(sin\theta\boldsymbol{N} + cos\theta\boldsymbol{B})]\rangle \\ &= \langle\boldsymbol{T}, (cos\theta\boldsymbol{N} - sin\theta\boldsymbol{B})\rangle \\ &\quad + \boldsymbol{\epsilon}[\langle\boldsymbol{T}^*, (cos\theta\boldsymbol{N} - sin\theta\boldsymbol{B})\rangle + \langle\boldsymbol{T}, (cos\theta\boldsymbol{N}^* - sin\theta\boldsymbol{B}^*) - \boldsymbol{\theta}^*(sin\theta\boldsymbol{N} + cos\theta\boldsymbol{B})\rangle] \\ &= \boldsymbol{\epsilon}\left[cos\theta\left(\langle\boldsymbol{T}^*,\boldsymbol{N}\rangle + \langle\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{T}\rangle\right) - sin\theta(\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}^*\rangle + \langle\boldsymbol{T}^*,\boldsymbol{B}\rangle)\right] = \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\widehat{\boldsymbol{T}},\widehat{\boldsymbol{M_2}}\rangle &= \langle(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{\epsilon T}^*), (sin\theta\boldsymbol{N} + cos\theta\boldsymbol{B}) \\ &\quad + \boldsymbol{\epsilon}[(sin\theta\boldsymbol{N}^* + cos\theta\boldsymbol{B}^*) + \boldsymbol{\theta}^*(cos\theta\boldsymbol{N} - sin\theta\boldsymbol{B})]\rangle \\ &= \langle\boldsymbol{T}, (sin\theta\boldsymbol{N} + cos\theta\boldsymbol{B})\rangle \\ &\quad + \boldsymbol{\epsilon}[\langle\boldsymbol{T}^*, (sin\theta\boldsymbol{N} + cos\theta\boldsymbol{B})\rangle + \langle\boldsymbol{T}, (sin\theta\boldsymbol{N}^* + cos\theta\boldsymbol{B}^*) + \boldsymbol{\theta}^*(cos\theta\boldsymbol{N} - sin\theta\boldsymbol{B})\rangle] \\ &= \boldsymbol{\epsilon}\left[sin\theta\left(\langle\boldsymbol{T}^*,\boldsymbol{N}\rangle + \langle\boldsymbol{N}^*,\boldsymbol{T}\rangle\right) + cos\theta(\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{B}^*\rangle + \langle\boldsymbol{T}^*,\boldsymbol{B}\rangle)\right] = \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

olur.

Şimdi Bishop çatısının vektör alanlarını reel ve dual kısımlarına ayırırsak,

$$\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{\epsilon T}^*$$

$$\widehat{\boldsymbol{M_1}} = \boldsymbol{M_1} + \boldsymbol{\epsilon M_1}^*$$

$$\widehat{\boldsymbol{M_2}} = \boldsymbol{M_2} + \boldsymbol{\epsilon M_2}^*$$

dersek, $\theta(t) = \int \boldsymbol{\tau} dt$ ve $\theta^*(t) = \int \boldsymbol{\tau}^* dt$ olmak üzere

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{M_1} = cos\theta\boldsymbol{N} - sin\theta\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{M_2} = sin\theta\boldsymbol{N} + cos\theta\boldsymbol{B}$$

ve

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{T}^*$$

$$\boldsymbol{M_1}^* = (cos\theta\boldsymbol{N}^* - sin\theta\boldsymbol{B}^*) - \boldsymbol{\theta}^*(sin\theta\boldsymbol{N} + cos\theta\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{M_2}^* = (sin\theta\boldsymbol{N}^* + cos\theta\boldsymbol{B}^*) + \boldsymbol{\theta}^*(cos\theta\boldsymbol{N} - sin\theta\boldsymbol{B})$$

olur. Yine burada görülecektir ki,

$$\langle \boldsymbol{T},\boldsymbol{T}\rangle = \langle \boldsymbol{M_1},\boldsymbol{M_1}\rangle = \langle \boldsymbol{M_2},\boldsymbol{M_2}\rangle = \mathbf{1}$$

$$\langle \boldsymbol{T},\boldsymbol{T}^*\rangle = \langle \boldsymbol{M_1},\boldsymbol{M_1}^*\rangle = \langle \boldsymbol{M_2},\boldsymbol{M_2}^*\rangle = \mathbf{0}$$

$$\langle \boldsymbol{T},\boldsymbol{M_1}^*\rangle + \langle \boldsymbol{M_1},\boldsymbol{T}^*\rangle = \mathbf{0}$$

$$\langle \boldsymbol{M_2},\boldsymbol{T}^*\rangle + \langle \boldsymbol{T},\boldsymbol{M_2}^*\rangle = \mathbf{0}$$

$$\langle \boldsymbol{M_2},\boldsymbol{M_1}^*\rangle + \langle \boldsymbol{M_1},\boldsymbol{M_2}^*\rangle = \mathbf{0}$$

dır.

4.2.1 Dual Bishop Çatının Türev Denklemleri

Daha önce gördük ki $\widehat{\phi}: D \longrightarrow D^3$, $\hat{\phi}(\hat{t}) = \hat{\phi}(t+\epsilon t^*) = \phi(t) + \epsilon\big(\phi^*(t) + t^*\phi'(t)\big)$ biçiminde dual değişkenli diferensiyellenebilir bir eğrinin $\hat{t} \in D$ noktasında Dual Bishop çatısı

$$\hat{T} = \hat{T}$$

$$\widehat{M_1} = Cos(\hat{\theta})\hat{N} - Sin(\hat{\theta})\hat{B}$$

$$\widehat{M_2} = Sin(\hat{\theta})\hat{N} + Cos(\hat{\theta})\hat{B}$$

ve

$$\widehat{\boldsymbol{T}}' = \hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{N}}$$

$$\widehat{\boldsymbol{N}}' = -\hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{T}} + \hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\tau}}\widehat{\boldsymbol{B}}$$

$$\widehat{\boldsymbol{B}}' = -\hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\tau}}\widehat{\boldsymbol{N}}$$

idi. Şimdi, Bishop denklemlerinde türev alırsak, $\hat{\theta}' = \hat{\boldsymbol{\tau}}$ olacağından

$$\widehat{\boldsymbol{T}}' = \hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{N}}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{M_1}' &= -\hat{\boldsymbol{\tau}}\,\mathbf{sin}\hat{\theta}\,\widehat{\boldsymbol{N}} + Cos\hat{\theta}\big(-\hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{T}} + \hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\tau}}\widehat{\boldsymbol{B}}\big) - \hat{\boldsymbol{\tau}}\,\mathbf{cos}\hat{\theta}\,\widehat{\boldsymbol{B}} + \mathbf{sin}\hat{\theta}\hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\tau}}\widehat{\boldsymbol{N}} \\
&= -Cos\hat{\theta}\hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{T}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}(\hat{\boldsymbol{v}} - \mathbf{1})\big(Sin(\hat{\theta})\hat{N} + Cos(\hat{\theta})\hat{B}\big) \\
&= -Cos\hat{\theta}\hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{T}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}(\hat{\boldsymbol{v}} - \mathbf{1})\widehat{M_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{M_2}' &= -\hat{\boldsymbol{\tau}}\,\mathbf{cos}\hat{\theta}\,\widehat{\boldsymbol{N}} + sin\hat{\theta}\big(-\hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{T}} + \hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\tau}}\widehat{\boldsymbol{B}}\big) - \hat{\boldsymbol{\tau}}\,\mathbf{sin}\hat{\theta}\,\widehat{\boldsymbol{B}} - \mathbf{cos}\hat{\theta}\hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\tau}}\widehat{\boldsymbol{N}} \\
&= -sin\hat{\theta}\hat{\boldsymbol{v}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{T}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{1} - \hat{\boldsymbol{v}})\big(cos(\hat{\theta})\hat{N} - sin(\hat{\theta})\hat{B}\big)
\end{aligned}$$

$$= -sin\hat{\theta}\hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}\widehat{\boldsymbol{T}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{1} - \hat{\boldsymbol{\nu}})\widehat{M_1}$$

Buna göre

$$\widehat{\boldsymbol{T}}' = \boldsymbol{a_{11}}\hat{T} + \boldsymbol{a_{12}}\widehat{M_1} + \boldsymbol{a_{13}}\widehat{M_2}$$

$$\widehat{M_1}' = \boldsymbol{a_{21}}\hat{T} + \boldsymbol{a_{22}}\widehat{M_1} + \boldsymbol{a_{23}}\widehat{M_2}$$

$$\widehat{M_2}' = \boldsymbol{a_{31}}\hat{T} + \boldsymbol{a_{32}}\widehat{M_1} + \boldsymbol{a_{33}}\widehat{M_2}$$

dersek, katsayılar

$$\boldsymbol{a_{11}} = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{a_{12}} = \hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}Cos\hat{\theta} \qquad \boldsymbol{a_{13}} = \hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}sin\hat{\theta}$$

$$\boldsymbol{a_{21}} = -\hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}Cos\hat{\theta} \qquad \boldsymbol{a_{22}} = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{a_{23}} = \hat{\boldsymbol{\tau}}(\hat{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{1})$$

$$\boldsymbol{a_{31}} = -\hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}sin\hat{\theta} \qquad \boldsymbol{a_{32}} = -\hat{\boldsymbol{\tau}}(\hat{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{1}) \qquad \boldsymbol{a_{33}} = \mathbf{0}$$

Bulunur. Buna göre çatının türev denklemleri matris olarak

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{T}}' \\ \widehat{M_1}' \\ \widehat{M_2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widehat{k_1} & \widehat{k_2} \\ -\widehat{k_1} & 0 & \widehat{k_3} \\ -\widehat{k_2} & -\widehat{k_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{T} \\ \widehat{M_1} \\ \widehat{M_2} \end{bmatrix}$$

Yazıldığında

$$\widehat{k_1} = \hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}Cos\hat{\theta}$$

$$\widehat{k_2} = \hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\kappa}}sin\hat{\theta}$$

$$\widehat{k_3} = \hat{\boldsymbol{\tau}}(\hat{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{1})$$

Elde edilir.

Eğer $\hat{\phi}$ eğrisi birim hızlı bir eğri ise $\hat{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{1}$ olacağından $\widehat{k_3} = 0$ olacaktır. Böylece dual Bishop eğrilikleri dual ve reel kısımlarına ayırarak ifade ederek,

$$k_1 = \boldsymbol{\nu\kappa cos\theta}$$

$$k_2 = \boldsymbol{\nu\kappa sin\theta}$$

$$k_3 = (\boldsymbol{\nu} - \mathbf{1})\boldsymbol{\tau}$$

$${k_1}^* = (\boldsymbol{\nu}^*\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\nu\kappa}^*)\boldsymbol{cos\theta} - \theta^*\boldsymbol{\nu\kappa sin\theta}$$

$${k_2}^* = (\boldsymbol{\nu}^*\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\nu\kappa}^*)\boldsymbol{sin\theta} + \boldsymbol{\nu\kappa cos\theta}$$

$${k_3}^* = \boldsymbol{\tau\nu}^* + (\boldsymbol{\nu} - \mathbf{1})\boldsymbol{\tau}^*$$

olur.

4.3 Dual Bezier Eğrilerinde Bishop Çatı

$\hat{C}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\{\hat{P}_0 = P_0 + \epsilon {P_0}^*, \hat{P}_1 = P_1 + \epsilon {P_1}^*, \dots, \hat{P}_n = P_n + \epsilon {P_n}^*\}$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu durumda $t \in [0,1]$ ve $t^* \in R$ olmak üzere $\hat{t} = t + \epsilon t^* \in D$ için

$$\hat{C}(\hat{t}) = \sum_{i=0}^{n} \hat{P}_i \, \hat{B}_i^n(\hat{t})$$

Yazılabilir. İfade açıldığında

$$\hat{C}(\hat{t}) = \hat{C}(t + \epsilon t^*) = C(t) + \epsilon\big(C^*(t) + t^* C'(t)\big)$$

Olur. Burada $C(t)$ eğrisi, kontrol noktaları $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ olan reel Bezier eğrisi, $C^*(t)$ eğrisi de kontrol noktaları $\{{P_0}^*, {P_1}^*, \dots, {P_n}^*\}$ olan reel Bezier eğrisidir.

Teorem 4.3: C: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}^3$, $\widehat{\boldsymbol{C}}(\hat{\boldsymbol{t}}) = \sum_{i=0}^{n} \widehat{\boldsymbol{P}}_i \widehat{\boldsymbol{B}}_i^n(\hat{\boldsymbol{t}})$ biçiminde kontrol noktaları $\{\widehat{\boldsymbol{P}}_0 = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{\varepsilon P}_0^*, \widehat{\boldsymbol{P}}_1 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{\varepsilon P}_1^*, \dots, \widehat{\boldsymbol{P}}_n = \boldsymbol{P}_n + \boldsymbol{\varepsilon P}_n^*\}$ olan n. dereceden dual Bézier eğrisi olsun. Buna göre $\widehat{\boldsymbol{C}}$'nin herhangi bir $\widehat{\boldsymbol{t}_0} = \boldsymbol{t}_0 + \boldsymbol{\varepsilon t^*}_0$ $\hat{t} \in \mathbb{D}$ noktasındaki dual hızı $\boldsymbol{t}_0 \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ ve $\boldsymbol{t}^* \in \mathbf{R}$ olmak üzere $\widehat{\boldsymbol{t}_0}$ noktasını $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}^*)$ ikilisi ile gösterirsek $\widehat{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\varepsilon V}^*$ Dual hız vektör alanların özel konumları:

$$V_{(0,0)} = V_{(0,t^*)}$$
$$V_{(1,0)} = V_{(1,t^*)}$$
$$V_{(t_0,0)} = V_{(t_0,t^*)}$$
$$V_{(0,0)} = n \parallel \Delta P_0 \parallel$$
$$V_{(1,0)} = n \parallel \Delta P_{n-1} \parallel$$
$$V_{(t_0,0)} = \parallel \Delta P_0^n \parallel$$
$$V_{(0,0)}^* = \frac{n\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* \rangle}{\parallel \Delta P_0 \parallel}$$
$$V_{(1,0)}^* = \frac{n\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1}^* \rangle}{\parallel \Delta P_{n-1} \parallel}$$
$$V_{(t_0,0)}^* = \frac{n\langle \Delta P_0^n, \Delta P_0^{n*} \rangle}{\parallel \Delta P_0^n \parallel}$$
$$V_{(0,t^*)}^* = \frac{\langle n\Delta P_0, n\Delta P_0^* + t^* n(n-1)(\Delta P_1 - \Delta P_0) \rangle}{\parallel n\Delta P_0 \parallel}$$
$$= \frac{n\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* \rangle}{\parallel \Delta P_0 \parallel} + \frac{t^* n(n-1)\langle \Delta P_0, \Delta P_1 - \Delta P_0 \rangle}{\parallel \Delta P_0 \parallel}$$
$$V_{(1,t^*)}^* = \frac{n\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1}^* \rangle}{\parallel \Delta P_{n-1} \parallel} + \frac{t^* n(n-1)\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2} \rangle}{\parallel \Delta P_{n-1} \parallel}$$
$$V_{(t_0,t^*)}^* = \frac{n\langle \Delta P_0^n, \Delta P_0^{n*} \rangle}{\parallel \Delta P_0^n \parallel} + \frac{t^* n(n-1)\langle \Delta P_0^n, \Delta P_1^n - \Delta P_0^n \rangle}{\parallel \Delta P_0^n \parallel}$$

dir.

Teorem 4.4: C: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}^3$, $\widehat{\boldsymbol{C}}(\hat{\boldsymbol{t}}) = \sum_{i=0}^{n} \widehat{\boldsymbol{P}}_i \widehat{\boldsymbol{B}}_i^n(\hat{\boldsymbol{t}})$ biçiminde kontrol noktaları $\{\widehat{\boldsymbol{P}}_0 = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{\varepsilon P}_0^*, \widehat{\boldsymbol{P}}_1 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{\varepsilon P}_1^*, \dots, \widehat{\boldsymbol{P}}_n = \boldsymbol{P}_n + \boldsymbol{\varepsilon P}_n^*\}$ olan n. dereceden dual Bézier eğrisi olsun. Buna göre $\widehat{\boldsymbol{C}}$'nin herhangi bir $\widehat{\boldsymbol{t}_0} = \boldsymbol{t}_0 + \boldsymbol{\varepsilon t^*}_0$ $\hat{t} \in \mathbb{D}$ noktasındaki dual hızı $\boldsymbol{t_0} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ ve $\boldsymbol{t}^* \in \mathbf{R}$ olmak üzere $\widehat{\boldsymbol{t_0}}$ noktasını $(\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t}^*)$ ikilisi ile gösterirsek $\widehat{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{\varepsilon T}^*$ Dual teget vektör alanların özel konumları:

$$T_{(0,0)} = \frac{\Delta P_0}{\| \Delta P_0 \|}$$

$$T_{(1,0)} = \frac{\Delta P_{n-1}}{\| \Delta P_{n-1} \|}$$

$$T_{(t_0,0)} = \frac{\Delta P_0^n}{\| \Delta P_0^n \|}$$

$$T_{(0,t^*)} = \frac{\Delta P_0}{\| \Delta P_0 \|}$$

$$T_{(1,t^*)} = \frac{\Delta P_{n-1}}{\| \Delta P_{n-1} \|}$$

$$T_{(t_0,t^*)} = \frac{\Delta P_0^n}{\| \Delta P_0^n \|}$$

$$T^*_{(0,0)} = \frac{\Delta P_0^*}{\| \Delta P_0 \|} - \frac{\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* \rangle \Delta P_0}{\| \Delta P_0 \|^3}$$

$$T^*_{(1,0)} = \frac{\Delta P_{n-1}^*}{\| \Delta P_{n-1} \|} - \frac{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1}^* \rangle \Delta P_{n-1}}{\| \Delta P_{n-1} \|^3}$$

$$T^*_{(t_0,0)} = \frac{\Delta P_0^{n*}}{\| \Delta P_0^n \|} - \frac{\langle \Delta P_0^n, \Delta P_0^{n*} \rangle \Delta P_0^n}{\| \Delta P_0^n \|^3}$$

$$T^*_{(0,t^*)} = \frac{\Delta P_0^* + t^*(n-1)(\Delta P_1 - \Delta P_0)}{\| \Delta P_0 \|} - \frac{\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* + t^*(n-1)[\Delta P_1 - \Delta P_0] \rangle \Delta P_0}{\| \Delta P_0 \|^3}$$

$$T^*_{(1,t^*)} = \frac{\Delta P_{n-1}^* + t^* n(n-1)(\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2})}{\| n \Delta P_{n-1} \|} - \frac{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1}^* + t^*(n-1)[\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2}](n-1) \rangle \Delta P_{n-1}}{\| n \Delta P_{n-1} \|^3}$$

$$T^*_{(t_0,t^*)} = \frac{\Delta P_0^{n*} + t^* n(n-1)(\Delta P_1^n - \Delta P_0^n)}{\| \Delta P_0^n \|} - \frac{\langle \Delta P_0^n, (\Delta P^*)_0^n + t^*(n-1)\left[(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n\right] \rangle \Delta P_0^n}{\| \Delta P_0^n \|^3}$$

dir.

Teorem 4.5: C: $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}^3$, $\widehat{\boldsymbol{C}}(\hat{\boldsymbol{t}}) = \sum_{i=0}^{n} \widehat{\boldsymbol{P}}_i \widehat{\boldsymbol{B}}_i^n(\hat{\boldsymbol{t}})$ biçiminde kontrol noktaları $\{\widehat{\boldsymbol{P}}_0 = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{\varepsilon P}_0^*, \widehat{\boldsymbol{P}}_1 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{\varepsilon P}_1^*, \dots, \widehat{\boldsymbol{P}}_n = \boldsymbol{P}_n + \boldsymbol{\varepsilon P}_n^*\}$ olan n. dereceden dual Bézier eğrisi olsun. Buna göre $\widehat{\boldsymbol{C}}$'nin herhangi bir $\widehat{\boldsymbol{t}_0} = \boldsymbol{t}_0 + \boldsymbol{\varepsilon t^*}_0$ $\quad \hat{t} \in \mathbb{D}$ noktasındaki dual hızı $\boldsymbol{t}_0 \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ ve $\boldsymbol{t}^* \in \mathbf{R}$ olmak üzere $\widehat{\boldsymbol{t}_0}$ noktasını $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}^*)$ ikilisi ile gösterirsek $\widehat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{\varepsilon B}^*$ Dual binormal vektör alanların özel konumları:

$$B_{(0,0)} = \frac{\Delta P_0 \times (\Delta P_1 - \Delta P_0)}{\| \Delta P_0 \times (\Delta P_1 - \Delta P_0) \|} = \frac{\Delta P_0 \times \Delta P_1}{\| \Delta P_0 \times \Delta P_1 \|}$$

$$B_{(1,0)} = \frac{-\Delta P_{n-1} \times \Delta P_{n-2}}{\| \Delta P_{n-1} \times \Delta P_{n-2} \|}$$

$$B_{(t_0,0)} = \frac{\Delta P_0^n \times \Delta P_1^{n-1}}{\| \Delta P_0^n \times \Delta P_1^{n-1} \|}$$

$$B_{(0,t^*)} = B_{(0,0)} = \frac{\Delta P_0 \times \Delta P_1}{\| \Delta P_0 \times \Delta P_1 \|}$$

$$B_{(1,t^*)} = B_{(1,0)} = -\frac{\Delta P_{n-1} \times \Delta P_{n-2}}{\| \Delta P_{n-1} \times \Delta P_{n-2} \|}$$

$$B_{(t_0,t^*)} = B_{(t_0,0)} = \frac{\Delta P_0^n \times \Delta P_1^{n-1}}{\| \Delta P_0^n \times \Delta P_1^{n-1} \|}$$

$$\boldsymbol{B^*}_{(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})} = \left[\begin{array}{c} \dfrac{\Delta P_0^* \times (\Delta P_1 - \Delta P_0) + \Delta P_0 \times (\Delta P_1^* - \Delta P_0^*)}{\|\Delta P_0 \times \Delta P_1\|} - \\ \left[\begin{array}{c} \dfrac{\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* \rangle \|\Delta P_1 - \Delta P_0\|^2 + \langle \Delta P_1 - \Delta P_0,\ \Delta P_1^* - \Delta P_0^* \rangle \|\Delta P_0\|^2 -}{\|\Delta P_0 \times \Delta P_1\|^3} \\ \dfrac{\langle \Delta P_0, \Delta P_1 - \Delta P_0 \rangle [\langle \Delta P_0, \Delta P_1^* - \Delta P_0^* \rangle + \langle \Delta P_0^*, \Delta P_1 - \Delta P_0 \rangle]}{\|\Delta P_0 \times \Delta P_1\|^3} \end{array} \right] . (\Delta P_0 \times \Delta P_1) \end{array} \right]$$

$$\boldsymbol{B^*}_{(\boldsymbol{1},\boldsymbol{0})} = \left[\begin{array}{c} \dfrac{\Delta P_{n-1}^* \times (\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2}) + \Delta P_{n-1} \times (\Delta P_{n-1}^* - \Delta P_{n-2}^*)}{\|\Delta P_{n-1} \times \Delta P_{n-2}\|} - \\ - \left[\begin{array}{c} \dfrac{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1}^* \rangle \|\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2}\|^2 + \langle \Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2},\ \Delta P_{n-1}^* - \Delta P_{n-2}^* \rangle \|\Delta P_{n-1}\|^2 -}{\|\Delta P_{n-1} \times \Delta P_{n-2}\|^3} \\ \dfrac{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2} \rangle [\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1}^* - \Delta P_{n-2}^* \rangle + \langle \Delta P_{n-1}^*, \Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2} \rangle]}{\|\Delta P_{n-1} \times \Delta P_{n-2}\|^3} \end{array} \right] . (\Delta P_{n-1} \times \Delta P_{n-2}) \end{array} \right]$$

$$\boldsymbol{B}^*{}_{(t_0,\mathbf{0})} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{(\Delta P^*)_0^n \times \left((\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n\right) + (\Delta P)_0^n \times \left((\Delta P^*)_1^{n-1} - (\Delta P^*)_0^n\right)}{\left\|(\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1}\right\|} - \\ -\left[\begin{array}{c} \dfrac{\langle (\Delta P)_0^n (\Delta P^*)_0^n \rangle \left\|(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n\right\|^2 + \langle (\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n, (\Delta P^*)_1^{n-1} - (\Delta P^*)_0^n \rangle \left\|(\Delta P)_0^n\right\|^2 -}{\left\|(\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1}\right\|^3} \\ \dfrac{\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n \rangle \left[\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P^*)_1^{n-1} - (\Delta P^*)_0^n \rangle + \langle (\Delta P^*)_0^n, (\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n \rangle\right]}{\left\|(\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1}\right\|^3} \end{array}\right] . \left((\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1}\right) \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{B}^*{}_{(\mathbf{0},t^*)}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \dfrac{\Delta P_0^* \times (\Delta P_1 - \Delta P_0) + \Delta P_0 \times \left(\Delta P_1^* - \Delta P_0^*\right)}{\|\Delta P_0 \times \Delta P_1\|} \\ -\left[\begin{array}{c} \dfrac{\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* \rangle \|\Delta P_1 - \Delta P_0\|^2 + \langle \Delta P_1 - \Delta P_0,\ \Delta P_1^* - \Delta P_0^* \rangle \|\Delta P_0\|^2 -}{\|\Delta P_0 \times \Delta P_1\|^3} \\ \dfrac{\langle \Delta P_0, \Delta P_1 - \Delta P_0 \rangle \left[\langle \Delta P_0, \Delta P_1^* - \Delta P_0^* \rangle + \langle \Delta P_0^*, \Delta P_1 - \Delta P_0 \rangle\right]}{\|\Delta P_0 \times \Delta P_1\|^3} \end{array}\right] . (\Delta P_0 \times \Delta P_1) \\ -t_0^* \left[\begin{array}{c} \dfrac{\|\Delta P\|^2 \langle (\Delta P_1 - \Delta P_0), (\Delta P_2 - 2\Delta P_1 + \Delta P_0) \rangle -}{\|\Delta P_0 \times \Delta P_1\|^3} \\ \dfrac{\langle \Delta P_0, \Delta P_1 - \Delta P_0 \rangle \langle \Delta P_0, \Delta P_2 - 2\Delta P_1 + \Delta P_0 \rangle}{\|\Delta P_0 \times \Delta P_1\|^3} \end{array}\right] . (\Delta P_0 \times \Delta P_1) \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{B}^*{}_{(\boldsymbol{t_0},\boldsymbol{t}^*)}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \dfrac{(\Delta P^*)_0^n \times ((\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n) + (\Delta P)_0^n \times ((\Delta P^*)_1^{n-1} - (\Delta P^*)_0^n)}{\|(\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1}\|} - \\ -\left[\begin{array}{c} \dfrac{\langle (\Delta P)_0^n (\Delta P^*)_0^n \rangle \|(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n\|^2 + \langle (\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n,\ (\Delta P^*)_1^{n-1} - (\Delta P^*)_0^n \rangle \|(\Delta P)_0^n\|^2 -}{\|(\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1}\|^3} \\ \dfrac{\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n \rangle [\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P^*)_1^{n-1} - (\Delta P^*)_0^n \rangle + \langle (\Delta P^*)_0^n, (\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n \rangle]}{\|(\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1}\|^3} \end{array}\right] . ((\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1}) \\ -t_0^* \left[\begin{array}{c} \dfrac{\|(\Delta P)_0^n\|^2 \langle ((\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n), ((\Delta P)_2^{n-2} - 2(\Delta P)_1^{n-1} + (\Delta P)_0^n) \rangle}{\|(\Delta P)_0^n - (\Delta P)_1^{n-1}\|^3} - \\ \dfrac{\langle (\Delta P)_0^n, ((\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n) \rangle \langle (\Delta P)_0^n, ((\Delta P)_2^{n-2} - 2(\Delta P)_1^{n-1} + (\Delta P)_0^n) \rangle}{\|(\Delta P)_0^n - (\Delta P)_1^{n-1}\|^3} \end{array}\right] . ((\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1}) \end{array}\right]$$

dir.

Teorem 4.6: C: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}^3$, $\boldsymbol{\widehat{C}(\hat{t}) = \sum_{i=0}^{n} \widehat{P}_i \, \widehat{B}_i^n(\hat{t})}$ biçiminde kontrol noktaları $\{\boldsymbol{\widehat{P}_0 = P_0 + \varepsilon P_0^*}, \boldsymbol{\widehat{P}_1 = P_1 + \varepsilon P_1^*}, \dots, \boldsymbol{\widehat{P}_n = P_n + \varepsilon P_n^*}\}$ olan n. dereceden dual Bézier eğrisi olsun. Buna göre $\boldsymbol{\widehat{C}}$'nin herhangi bir $\boldsymbol{\widehat{t_0} = t_0 + \varepsilon t^*{}_0}$ $\hat{t} \in \mathbb{D}$ noktasındaki dual hızı $\boldsymbol{t_0} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ ve $\boldsymbol{t}^* \in \mathbf{R}$ olmak üzere $\boldsymbol{\widehat{t_0}}$ noktasını $(\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t}^*)$ ikilisi ile gösterirsek $\boldsymbol{\widehat{N} = N + \varepsilon N^*}$ Dual normal vektör alanların özel konumları:

$$
\begin{aligned}
N(0{,}0) &= \frac{(\mathit{\Delta} P_0 \times \mathit{\Delta} P_1) \times \mathit{\Delta} P_0}{\| \mathit{\Delta} P_0 \| \cdot \| \mathit{\Delta} P_0 \times \mathit{\Delta} P_1 \|} \\
N(1{,}0) &= \frac{(\mathit{\Delta} P_{n-1} \times \mathit{\Delta} P_{n-2}) \times \mathit{\Delta} P_{n-1}}{\| \mathit{\Delta} P_{n-1} \| \cdot \| \mathit{\Delta} P_{n-2} \times \mathit{\Delta} P_{n-1} \|} \\
N(t_0, 0) &= \frac{(\mathit{\Delta} P_0^n \times \mathit{\Delta} P_1^{n-1}) \times \mathit{\Delta} P_0^n}{\| \mathit{\Delta} P_0^n \| \cdot \| \mathit{\Delta} P_0^n \times \mathit{\Delta} P_1^{n-1} \|} \\
N(0, t^*) &= N(0{,}0) \\
N(1, t^*) &= N(1{,}0) \\
N(t_0, t^*) &= N(t_0, 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N^*_{(0,0)} = \Big[&\mathit{\Delta} P_0 \times (\mathit{\Delta} P_1^* - \mathit{\Delta} P_0^*) \times \mathit{\Delta} P_0 + \Big(\mathit{\Delta} P_0^* \left(\mathit{\Delta} P_1 \ - \mathit{\Delta} P_0 \ \right)\Big) \times \mathit{\Delta} P_0 + (\mathit{\Delta} P_0 \times \mathit{\Delta} P_1) \\
&\times \mathit{\Delta} P_0\Big] \times \mathit{\Delta} P_0^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\left[\frac{\{(\mathit{\Delta} P_0 \times \mathit{\Delta} P_1, \mathit{\Delta} P_0) \times (\mathit{\Delta} P_1^* - \mathit{\Delta} P_0^*) + \mathit{\Delta} P_0^* \times (\mathit{\Delta} P_1 - \mathit{\Delta} P_0)\}}{\| \mathit{\Delta} P_0 - \mathit{\Delta} P_1 \|^2} + \frac{(\mathit{\Delta} P_0 \times \mathit{\Delta} P_1) \times \mathit{\Delta} P_0^*}{\| \mathit{\Delta} P_0 \|^2}\right] &(\mathit{\Delta} P_0 \\
\times \mathit{\Delta} P_1) \times \mathit{\Delta} P_0^*&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N^*_{(1,0)} = \big[&\mathit{\Delta} P_{n-1} \times (\mathit{\Delta} P_{n-1}^* - \mathit{\Delta} P_{n-2}^*) \times \mathit{\Delta} P_{n-1} + \mathit{\Delta} P_{n-1}^* \times (\mathit{\Delta} P_{n-1} - \mathit{\Delta} P_{n-1})\big] \times \mathit{\Delta} P_{n-1} \\
&- (\mathit{\Delta} P_{n-1} \times \mathit{\Delta} P_{n-2}) \times \mathit{\Delta} P_{n-1}^*
\end{aligned}
$$

$$
-\left[\frac{\mathit{\Delta} P_{n-1} \times (\mathit{\Delta} P_{n-2}), \left[\left(\mathit{\Delta} P_{n-1} \times \mathit{\Delta} P_{n-1}\right) + \left(\mathit{\Delta} P_{n-1} \times \mathit{\Delta} P_{n-2}\right)\right]}{\| \mathit{\Delta} P_{n-1} \times \mathit{\Delta} P_{n-2} \|^2}\right]
$$

$$
+\frac{\left\langle \mathit{\Delta} P_{n-1}, \mathit{\Delta} P_{n-1} \right\rangle \cdot \left(\left(-\mathit{\Delta} P_{n-1} \times \mathit{\Delta} P_{n-2}\right) \times \mathit{\Delta} P_{n-1}\right)}{\| \mathit{\Delta} P_{n-1} \|}
$$

$$
N^*_{(t_0,0)}
$$

$$
= \left[\begin{array}{c}
\dfrac{\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P^*)_0^n \rangle [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] - \langle (\Delta P^*)_0^n, [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] \rangle (\Delta P)_0^n}{\|(\Delta P)_0^n\| \|(\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]\|} \\
-\dfrac{(\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P^*)_0^n \rangle)[\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P)_0^n \rangle [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] - \langle (\Delta P)_0^n, [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] \rangle (\Delta P)_0^n]}{\|(\Delta P)_0^n\|^3 \|(\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]\|} \\
+\dfrac{\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P^*)_0^n \rangle [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] - \langle (\Delta P)_0^n, [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] \rangle (\Delta P^*)_0^n +}{\|(\Delta P)_0^n\| \|(\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]\|} \\
\dfrac{\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P)_0^n \rangle [\Delta (P^*)_1^{n-1} - (P^*)_0^n] - \langle [(P^*)_1^{n-1} - (P^*)_0^n], (\Delta P)_0^n \rangle (\Delta P)_0^n}{\|(\Delta P)_0^n\| \|(\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]\|} \\
-\dfrac{[\langle ((\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]), (, (\Delta P^*)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] + (\Delta P)_0^n \times [(\Delta P^*)_1^{n-1} - (\Delta P^*)_0^n]) \rangle]}{\|(\Delta P)_0^n\| \|(\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]\|^3} . \beta
\end{array}\right]
$$

dir. Burada

$$
\beta = (\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P)_0^n \rangle [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] - \langle (\Delta P)_0^n, [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] \rangle (\Delta P)_0^n)
$$

Biçimindedir.

$$N^*_{(0,t^*)} = \left[\begin{array}{c} \dfrac{\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* \rangle [\Delta P_1 - \Delta P_0] - \langle \Delta P_0^*, [\Delta P_1 - \Delta P_0] \rangle \Delta P_0 + \boldsymbol{A}}{\|\Delta P_0\| \|\Delta P_0 \times [\Delta P_1 - \Delta P_0]\|} \\ - \dfrac{\left(\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* + \frac{n-1}{n} t^* (\Delta P_1 - \Delta P_0) \rangle \right) [\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle [\Delta P_1 - \Delta P_0] - \langle \Delta P_0, [\Delta P_1 - \Delta P_0] \rangle \Delta P_0]}{\|\Delta P_0\|^3 \|\Delta P_0 \times [\Delta P_1 - \Delta P_0]\|} \\ + \dfrac{\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* \rangle [\Delta P_1 - \Delta P_0] - \langle \Delta P_0, [\Delta P_1 - \Delta P_0] \rangle \Delta P_0^* +}{\|\Delta P_0\| \|\Delta P_0 \times [\Delta P_1 - \Delta P_0]\|} \\ \dfrac{+\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle [\Delta P_1^* - \Delta P_0^*] - \langle [\Delta P_1^* - \Delta P_0^*], \Delta P_0 \rangle \Delta P_0 + \boldsymbol{B}}{\|\Delta P_0\| \|\Delta P_0 \times [\Delta P_1 - \Delta P_0]\|} \\ - \dfrac{[\langle (\Delta P_0 \times [\Delta P_1 - \Delta P_0]), (\Delta P_0^* \times [\Delta P_1 - \Delta P_0] + \Delta P_0 \times [\Delta P_1^* - \Delta P_0^*]) + \boldsymbol{C} \rangle]}{\|\Delta P_0\| \|\Delta P_0 \times [\Delta P_1 - \Delta P_0]\|^3} . \boldsymbol{\beta} \end{array} \right]$$

$\boldsymbol{A}$= (n-1)$t^*[\langle \Delta P_0, \Delta P_1 - \Delta P_0 \rangle (\Delta P_1 - \Delta P_0) - \|\Delta P_1 - \Delta P_0\|^2 \Delta P_0]$

$\boldsymbol{B}$= (n-2)$t^*[\|\Delta P_0\|^2 [\Delta P_2 - 2\Delta P_1 + \Delta P_0] - \langle [\Delta P_2 - 2\Delta P_1 + \Delta P_0], \Delta P_0 \rangle \Delta P_0]$

$\boldsymbol{C}$= (n-2)$t^*[(\Delta P_0 \times \Delta P_2) - 2(\Delta P_0 \times \Delta P_1)]$

$\boldsymbol{\beta} = (\langle \Delta P_0, \Delta P_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta P_0] - \langle \Delta P_0, [\Delta P_1 - \Delta P_0] \rangle \Delta P_0)$

$$N^*_{(t_0,t^*)} = \left[\begin{array}{c} \dfrac{\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P^*)_0^n \rangle [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] - \langle (\Delta P^*)_0^n, [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] \rangle (\Delta P)_0^n + \boldsymbol{A}}{\|(\Delta P)_0^n\| \|(\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]\|} \\ - \dfrac{\left(\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P^*)_0^n + \frac{n-1}{n} t^* ((\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n) \rangle \right) [\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P)_0^n \rangle [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] - \langle (\Delta P)_0^n, [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] \rangle (\Delta P)_0^n]}{\|(\Delta P)_0^n\|^3 \|(\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]\|} \\ + \dfrac{\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P^*)_0^n \rangle [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] - \langle (\Delta P)_0^n, [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] \rangle (\Delta P^*)_0^n +}{\|(\Delta P)_0^n\| \|(\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]\|} \\ \dfrac{+\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P)_0^n \rangle [(\Delta P^*)_1^{n-1} - (\Delta P^*)_0^n] - \langle [(\Delta P^*)_1^{n-1} - (\Delta P^*)_0^n], (\Delta P)_0^n \rangle (\Delta P)_0^n + \boldsymbol{B}}{\|(\Delta P)_0^n\| \|(\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]\|} \\ - \dfrac{[\langle ((\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]), ((\Delta P^*)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] + (\Delta P)_0^n \times [(\Delta P^*)_1^{n-1} - (\Delta P^*)_0^n]) + \boldsymbol{C} \rangle]}{\|(\Delta P)_0^n\| \|(\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]\|^3} . \boldsymbol{\beta} \end{array} \right]$$

$\boldsymbol{A}$= (n-1)$t^*[\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n \rangle ((\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n) - \|(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n\|^2 (\Delta P)_0^n]$

$\boldsymbol{B}$=(n-2)$t^*[\|(\Delta P)_0^n\|^2 [(\Delta P)_2^{n-2} - 2(\Delta P)_1^{n-1} + (\Delta P)_0^n] - \langle [(\Delta P)_2^{n-2} - 2(\Delta P)_1^{n-1} +$
$(\Delta P)_0^n], (\Delta P)_0^n \rangle (\Delta P)_0^n]$

$\boldsymbol{C}$= (n-2)$t^*[((\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_2^{n-2}) - 2((\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1})]$

$\boldsymbol{\beta} = (\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P)_0^n \rangle [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] - \langle (\Delta P)_0^n, [(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] \rangle (\Delta P)_0^n)$

dir.

Teorem 4.7: C: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}^3$, $\widehat{\boldsymbol{C}}(\hat{\boldsymbol{t}}) = \sum_{i=0}^{n} \widehat{\boldsymbol{P}}_i \widehat{\boldsymbol{B}}_i^n(\hat{\boldsymbol{t}})$ biçiminde kontrol noktaları $\{\widehat{\boldsymbol{P}}_0 = \boldsymbol{P_0} + \boldsymbol{\varepsilon P_0^*}, \widehat{\boldsymbol{P}}_1 = \boldsymbol{P_1} + \boldsymbol{\varepsilon P_1^*}, \dots, \widehat{\boldsymbol{P}}_n = \boldsymbol{P_n} + \boldsymbol{\varepsilon P_n^*}\}$ olan n. dereceden dual Bézier eğrisi olsun. Buna göre $\widehat{\boldsymbol{C}}$'nin herhangi bir $\widehat{\boldsymbol{t_0}} = \boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{\varepsilon t^*_0}$ $\hat{t} \in \mathbb{D}$ noktasındaki dual hızı $\boldsymbol{t_0} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ ve $\boldsymbol{t^*} \in \mathbf{R}$ olmak üzere $\widehat{\boldsymbol{t_0}}$ noktasını $(\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t^*})$ ikilisi ile gösterirsek $\widehat{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\varepsilon \kappa^*}$ Dual eğrilik vektör alanların özel konumları:

$$\kappa_{(0,0)} = \frac{n^2(n-1)\|\Delta P_0 \times (\Delta P_1 - \Delta P_0)\|}{n^3 \|\Delta P_0\|^3} = \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{\|\Delta P_0 \times (\Delta P_1 - \Delta P_0)\|}{\|\Delta P_0\|^3}$$

$$\kappa_{(1,0)} = \frac{n^2(n-1)\|\Delta P_{n-1} \times (\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2})\|}{n^3\|\Delta P_{n-1}\|^3}$$

$$= -(n-1) \cdot \frac{\|\Delta P_{n-1} \times (\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2})\|}{n\|\Delta P_{n-1}\|^3}$$

$$\kappa_{(t_0,0)} = \frac{n^2(n-1)\|\Delta P_0^n \times \Delta P_1^{n-1}\|}{n^3\|\Delta P_0^n\|^3} = \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{\|\Delta P_0^n \times \Delta P_1^{n-1}\|}{\|\Delta P_0^n\|^3}$$

$$\kappa_{(0,t^*)} = \kappa_{(0,0)}$$

$$\kappa_{(1,t^*)} = \kappa_{(1,0)}$$

$$\kappa_{(t_0,t^*)} = \kappa_{(t_0,0)}$$

$$k^*_{(0,0)} \quad = \frac{n-1}{n} \frac{\langle \Delta P_0 \times \Delta P_1, \Delta P_0 \times (\Delta P_1^* - \Delta P_0^*) + \Delta P_0^* \times (\Delta P_1 - \Delta P_0)\rangle}{\| \Delta P_0 \|^3 \cdot \| \Delta P_0 \times \Delta P_1 \|}$$

$$k^*_{(1,0)} \quad = -\frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{\langle \Delta P_{n-1} \times \Delta P_{n-2}, \Delta P_{n-1} \times (\Delta P_{n-1}^* - \Delta P_{n-2}^*) + \Delta P_{n-1}^* \times (\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2})\rangle}{\| \Delta P_{n-1} \|^3 \cdot \| \Delta P_{n-1} \times \Delta P_{n-2} \|}$$

$$k^*_{(t_0,0)} \quad = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\langle \Delta P_0^n \times \Delta P_1^{n-1}, \Delta P_0^n \times (\Delta P_1^{*n-1} - \Delta P_0^{*n}) + \Delta P_0^{*n} \times (\Delta P_1^{n-1} - \Delta P_0^n)\rangle}{\| \Delta P_0^n \|^3 \cdot \| \Delta P_0^n \times \Delta P_1^{n-1} \|}$$

$$\left[k^*_{(t_0,0)} = \left[\frac{\langle \Delta P_0 \times \Delta P_1,\ \Delta P_0(\Delta P_1^* - \Delta P_0^*) + \Delta P_0^* \times (\Delta P_1 - \Delta P_0)\rangle}{\|\Delta P_0 \times \Delta P_1\|^2} - \frac{3\langle \Delta P_0, \Delta P_0^*\rangle}{n\|\Delta P_0\|^3}\right.\right.$$

$$\left.\left. + t^*\,(n-2)\big[\Delta P_0 \times [\Delta P_2 - 2\Delta P_1]\big]\right]\right]$$

$$k^*_{(t_0,,t^*)}$$

$$= \left[\left[\frac{\langle (\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1},\ (\Delta P)_0^n((\Delta P^*)_1^{n-1} - (\Delta P^*)_0^n) + (\Delta P^*)_0^n \times ((\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1})\rangle}{\|(\Delta P)_0^n \times (\Delta P)_1^{n-1}\|^2}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{3\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P^*)_0^n\rangle}{n\|(\Delta P)_0^n\|^3} + t_0^*(n-2)\big[(\Delta P)_0^n \times [(\Delta P)_2^{n-2} - 2(\Delta P)_1^{n-1}]\big]\right]\right]$$

dir.

Teorem 4.8: C: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}^3$, $\widehat{\boldsymbol{C}}(\hat{\boldsymbol{t}}) = \sum_{i=0}^{n} \widehat{\boldsymbol{P}}_i \widehat{\boldsymbol{B}}_i^n(\hat{\boldsymbol{t}})$ biçiminde kontrol noktaları $\{\widehat{\boldsymbol{P}}_0 = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{P}_0^*, \widehat{\boldsymbol{P}}_1 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{P}_1^*, \dots, \widehat{\boldsymbol{P}}_n = \boldsymbol{P}_n + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{P}_n^*\}$ olan n. dereceden dual Bézier eğrisi olsun. Buna göre $\widehat{\boldsymbol{C}}$'nin herhangi bir $\widehat{\boldsymbol{t_0}} = \boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{\varepsilon t^*_0}$ $\hat{t} \in \mathbb{D}$ noktasındaki dual hızı $\boldsymbol{t_0} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ ve $\boldsymbol{t}^* \in \mathbf{R}$ olmak üzere $\widehat{\boldsymbol{t_0}}$ noktasını $(\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t}^*)$ ikilisi ile gösterirsek $\hat{\tau} = \tau + \varepsilon\tau^*$ Dual torsiyon vektör alanların özel konumları:

$$\tau(\quad_{0,0}) = \frac{\det\big(n\Delta P_0, n(n-1)(\Delta P_1 - \Delta P_0), n(n-1)(n-2)(\Delta P_2 - 2\Delta P_1 + \Delta P_0)\big)}{\| \, n\Delta P_0 \times n(n-1)(\Delta P_1 - \Delta P_0) \, \|^2}$$

$$= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{\det(\Delta P_0, \Delta P_1, \Delta P_2)}{\| \, \Delta P_0 \times \Delta P_1 \, \|^2}$$

$\tau(1,0)$

$$= \frac{\det\big(n\Delta P_{n-1}, n(n-1)(\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2}), n(n-1)(n-2)(\Delta P_{n-1} - 2\Delta P_{n-2} + \Delta P_{n-3})\big)}{\| \, n\Delta P_{n-1} \times n(n-1)(\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2}) \, \|^2}$$

$$= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{\det(\Delta P_{n-2}, \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-3})}{\| \, \Delta P_{n-2} \times \Delta P_{n-1} \, \|^2}$$

$\tau(t_0, 0)$

$$= \frac{\det\big(n\Delta P_0^{\mathrm{n}}, n(n-1)(\Delta P_1^{\mathrm{n-1}} - \Delta P_0^{\mathrm{n}}), n(n-1)(n-2)(\Delta P_2^{\mathrm{n-2}} - 2\Delta P_1^{\mathrm{n-1}} + \Delta P_0^{\mathrm{n}})\big)}{\| \, n\Delta P_0^{\mathrm{n}} \times n(n-1)(\Delta P_1^{\mathrm{n-1}} - \Delta P_0^{\mathrm{n}}) \, \|^2}$$

$$= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{\det(\Delta P_0^{\mathrm{n}}, \Delta P_1^{\mathrm{n-1}}, \Delta P_2^{\mathrm{n-2}})}{\| \, \Delta P_0^{\mathrm{n}} \times \Delta P_1^{\mathrm{n-1}} \, \|^2}$$

- $\tau(0, t^*) = \tau(0,0)$
- $\tau(1, t^*) = \tau(1,0)$
- $\tau(t_0, t^*) = \tau(t_0, 0)$

$$\tau^*(0,0) = -2\, \frac{\det\big(n\,\Delta P_0,\; n(n-1)(\Delta P_1 - \Delta P_0),\; n(n-1)(n-2)(\Delta P_2 - 2\Delta P_1 + \Delta P_0)\big)}{\|n\,\Delta P_0 \times n(n-1)(\Delta P_1 - \Delta P_0)\|^2}$$

$$= \frac{\langle n\,\Delta P_0 \times n(n-1)(\Delta P_1 - \Delta P_0),\; n\,\Delta P_0 \times (n(n-1)(\Delta P_1^* - \Delta P_0^*) + n(n-1)(\Delta P_1 - \Delta P_0)^*)\rangle}{\|n\,\Delta P_0 \times n(n-1)(\Delta P_1 - \Delta P_0)\|^2}$$

$$= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{\det(\Delta P_0, \Delta P_1, \Delta P_2) + \det(\Delta P_0, \Delta P_1^* - \Delta P_0^*, \Delta P_2 - 2\Delta P_1) + \det(\Delta P_0^*, \Delta P_1 - \Delta P_0, \Delta P_2)}{\| \, \Delta P_0 \times \Delta P_1 \, \|^2}$$

$$- \frac{2(n-2)}{n} \cdot \frac{\det(\Delta P_0, \Delta P_1, \Delta P_2) \cdot \langle \Delta P_0 \times \Delta P_1,\; \Delta P_0 \times (\Delta P_1^* - \Delta P_0^*) + \Delta P_0^* \times (\Delta P_1 - \Delta P_0)\rangle}{\| \, \Delta P_0 \times \Delta P_1 \, \|^4}$$

$$\tau^*(1,0) = \Bigg[\Bigg[det(\Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-2}, \Delta P^*_{n-3}) + det(\Delta P_{n-1}, \Delta P^*_{n-2}, \Delta P_{n-3})$$

$$+ \qquad det(\Delta P^*_{n-1}, \Delta P_{n-2}, \Delta P_{n-3})$$

$$- \frac{2\det(\Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-2}, \Delta P_{n-3})}{\|\Delta P_{n-1} \times \Delta P_{n-2}\|^2} \langle \Delta P_{n-1} \times \Delta P_{n-2}, \Delta P_{n-1}$$

$$\times (\Delta P^*_{n-2} - \Delta P^*_{n-1}) + \Delta P^*_{n-1} \times (\Delta P_{n-2} - \Delta P_{n-1})\rangle\Bigg]\Bigg]$$

$$\tau^*(t_0, 0) = \Bigg[\Bigg[det((\Delta P)^n_0, (\Delta P)^{n-1}_1, (\Delta P^*)^{n-2}_2) + det((\Delta P)^n_0, (\Delta P^*)^{n-1}_1, (\Delta P)^{n-2}_2)$$

$$+ det((\Delta P^*)^n_0, (\Delta P)^{n-1}_1, (\Delta P)^{n-2}_2)$$

$$- \frac{2det((\Delta P)^n_0, (\Delta P)^{n-1}_1, (\Delta P)^{n-2}_2)}{\|(\Delta P)^n_0 \times (\Delta P)^{n-1}_1\|^2} \langle (\Delta P)^n_0 \times (\Delta P)^{n-1}_1, (\Delta P)^n_0$$

$$\times ((\Delta P^*)^{n-1}_1 - (\Delta P^*)^n_0) + (\Delta P^*)^n_0 \times ((\Delta P)^{n-1}_1 - (\Delta P)^n_0)\rangle\Bigg]\Bigg]$$

$$\tau^*(0, t^*) = \Bigg[\Bigg[det(\Delta P_0, \Delta P_1, \Delta P^*_2) + det(\Delta P_0, \Delta P^*_1, \Delta P_2) + det(\Delta P^*_0, \Delta P_1, \Delta P_2) + t^*(n$$

$$- 3)[det(\Delta P_0, \Delta P_1, \Delta P - 3\Delta P_2)]$$

$$- \frac{2\det(\Delta P_0, \Delta P_1, \Delta P_2)}{\|\Delta P_0 \times \Delta P_1\|^2} \langle \Delta P_0 \times \Delta P_1, \Delta P_0 \times (\Delta P^*_1 - \Delta P^*_0) + \Delta P^*_0$$

$$\times (\Delta P_1 - \Delta P_0)\rangle\Bigg]\Bigg]$$

$$\tau^*(t_0, t^*) = \Bigg[\Bigg[det((\Delta P)^n_0, (\Delta P)^{n-1}_1, (\Delta P^*)^{n-2}_2) + det((\Delta P)^n_0, (\Delta P^*)^{n-1}_1, (\Delta P)^{n-2}_2)$$

$$+ det((\Delta P^*)^n_0, (\Delta P)^{n-1}_1, (\Delta P)^{n-2}_2)$$

$$+ + t^*(n-3)[det((\Delta P)^n_0, (\Delta P)^{n-1}_1, (\Delta P)^{n-3}_3 - 3(\Delta P)^{n-2}_2)]$$

$$- \frac{2\det det((\Delta P)^n_0, (\Delta P)^{n-1}_1, (\Delta P)^{n-2}_2)}{\|(\Delta P)^n_0 \times (\Delta P)^{n-1}_1\|^2} \langle (\Delta P)^n_0 \times (\Delta P)^{n-1}_1, (\Delta P)^n_0$$

$$\times ((\Delta P^*)^{n-1}_1 - (\Delta P^*)^n_0) + (\Delta P^*)^n_0 \times ((\Delta P)^{n-1}_1 - (\Delta P)^n_0)$$

$$+ t^*_0(n-2)[(\Delta P)^n_0 \times ((\Delta P)^{n-2}_2 - 2(\Delta P)^{n-1}_1)]\rangle\Bigg]\Bigg]$$

dir.

Teorem 4.9: C: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}^3$, $\widehat{\boldsymbol{C}}(\hat{\boldsymbol{t}}) = \sum_{i=0}^{n} \widehat{\boldsymbol{P}}_i \widehat{\boldsymbol{B}}_i^n(\hat{\boldsymbol{t}})$ biçiminde kontrol noktaları $\{\widehat{\boldsymbol{P}}_0 = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{\varepsilon P}_0^*, \widehat{\boldsymbol{P}}_1 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{\varepsilon P}_1^*, \dots, \widehat{\boldsymbol{P}}_n = \boldsymbol{P}_n + \boldsymbol{\varepsilon P}_n^*\}$ olan n. dereceden dual Bézier eğrisi olsun. Buna göre $\widehat{\boldsymbol{C}}$'nin herhangi bir $\widehat{\boldsymbol{t}_0} = \boldsymbol{t}_0 + \boldsymbol{\varepsilon t^*}_0$ $\hat{t} \in \mathbb{D}$ noktasındaki dual hızı $\boldsymbol{t}_0 \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ ve $\boldsymbol{t}^* \in \mathbf{R}$ olmak üzere $\widehat{\boldsymbol{t}_0}$ noktasını $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}^*)$ ikilisi ile gösterirsek $\widehat{M}_1 = M_1 + \varepsilon M_1^*$ Dual M_1 Bishop normal çatı vektör alanların özel konumları:

$$M_1 = \cos\theta \cdot N - \sin\theta \cdot B$$
$$\theta = \int \tau \, dt \quad \theta^* = \int \tau^* \, dt$$

$$M_1(0,0) = \cos\theta \cdot N_{(0,0)} - \sin\theta \cdot B_{(0,0)}$$
$$M_1(1,0) = \cos\theta \cdot N_{(1,0)} - \sin\theta \cdot B_{(1,0)}$$
$$M_1(t_0,0) = \cos\theta \cdot N_{(t_0,0)} - \sin\theta \cdot B_{(t_0,0)}$$
$$M_1(0,t^*) = \cos\theta \cdot N_{(0,t^*)} - \sin\theta \cdot B_{(0,t^*)}$$
$$M_1(1,t^*) = \cos\theta \cdot N_{(1,t^*)} - \sin\theta \cdot B_{(1,t^*)}$$
$$M_1(t_0,t^*) = \cos\theta \cdot N_{(t_0,t^*)} - \sin\theta \cdot B_{(t_0,t^*)}$$

$$M_1^* = (\cos\theta \cdot N^* - \sin\theta \cdot B^*) - \theta^*(\sin\theta \cdot N + \cos\theta \cdot B), \quad \theta^* = \int \tau^* dt$$

M_1^* için özel konumlar:

$$M_1^*(0,0) = \left(\cos\theta \cdot N_{(0,0)}^* - \sin\theta \cdot B_{(0,0)}^*\right) - \theta^*\left(\sin\theta \cdot N_{(0,0)} + \cos\theta \cdot B_{(0,0)}\right)$$
$$M_1^*(1,0) = \left(\cos\theta \cdot N_{(1,0)}^* - \sin\theta \cdot B_{(1,0)}^*\right) - \theta^*\left(\sin\theta \cdot N_{(1,0)} + \cos\theta \cdot B_{(1,0)}\right)$$
$$M_1^*(t_0,0) = \left(\cos\theta \cdot N_{(t_0,0)}^* - \sin\theta \cdot B_{(t_0,0)}^*\right) - \theta^*\left(\sin\theta \cdot N_{(t_0,0)} + \cos\theta \cdot B_{(t_0,0)}\right)$$
$$M_1^*(0,t^*) = \left(\cos\theta \cdot N_{(0,t^*)}^* - \sin\theta \cdot B_{(0,t^*)}^*\right) - \theta^*\left(\sin\theta \cdot N_{(0,t^*)} + \cos\theta \cdot B_{(0,t^*)}\right)$$
$$M_1^*(1,t^*) = \left(\cos\theta \cdot N_{(1,t^*)}^* - \sin\theta \cdot B_{(1,t^*)}^*\right) - \theta^*\left(\sin\theta \cdot N_{(1,t^*)} + \cos\theta \cdot B_{(1,t^*)}\right)$$
$$M_1^*(t_0,t^*) = \left(\cos\theta \cdot N_{(t_0,t^*)}^* - \sin\theta \cdot B_{(t_0,t^*)}^*\right) - \theta^*\left(\sin\theta \cdot N_{(t_0,t^*)} + \cos\theta \cdot B_{(t_0,t^*)}\right)$$

dir.

B Binormal vektörünü Teorem 4.5'da, N normal vektörünü Teorem 4.6'de incelediğimiz gibidir.

Teorem 4.10: C: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}^3$, $\widehat{\boldsymbol{C}}(\hat{\boldsymbol{t}}) = \sum_{i=0}^{n} \widehat{\boldsymbol{P}}_i \widehat{\boldsymbol{B}}_i^n(\hat{\boldsymbol{t}})$ biçiminde kontrol noktaları $\{\widehat{\boldsymbol{P}}_0 = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{\varepsilon P}_0^*, \widehat{\boldsymbol{P}}_1 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{\varepsilon P}_1^*, \dots, \widehat{\boldsymbol{P}}_n = \boldsymbol{P}_n + \boldsymbol{\varepsilon P}_n^*\}$ olan n. dereceden dual Bézier eğrisi olsun. Buna göre $\widehat{\boldsymbol{C}}$'nin herhangi bir $\widehat{\boldsymbol{t}_0} = \boldsymbol{t}_0 + \boldsymbol{\varepsilon t^*}_0$ $\hat{t} \in \mathbb{D}$ noktasındaki dual hızı $\boldsymbol{t}_0 \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ ve $\boldsymbol{t}^* \in \mathbf{R}$ olmak üzere $\widehat{\boldsymbol{t}_0}$ noktasını $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}^*)$ ikilisi ile gösterirsek $\widehat{M}_2 = M_2 + \varepsilon M_2^*$ Dual M_2 Bishop çatı binormal vektör alanların özel konumları:

$$\theta = \int \tau \, dt \qquad \theta^* = \int \tau^* \, dt$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= \sin\theta \cdot N + \cos\theta \cdot B \\
M_{2_{(0,0)}} &= \sin\theta \cdot N_{(0,0)} + \cos\theta \cdot B_{(0,0)} \\
M_{2_{(1,0)}} &= \sin\theta \cdot N_{(1,0)} + \cos\theta \cdot B_{(1,0)} \\
M_{2_{(t_0,0)}} &= \sin\theta \cdot N_{(t_0,0)} + \cos\theta \cdot B_{(t_0,0)} \\
M_{2_{(0,t^*)}} &= \sin\theta \cdot N_{(0,t^*)} + \cos\theta \cdot B_{(0,t^*)} \\
M_{2_{(1,t^*)}} &= \sin\theta \cdot N_{(1,t^*)} + \cos\theta \cdot B_{(1,t^*)} \\
M_{2_{(t_0,t^*)}} &= \sin\theta \cdot N_{(t_0,t^*)} + \cos\theta \cdot B_{(t_0,t^*)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2^* &= (\sin\theta \cdot N^* + \cos\theta \cdot B^*) + \theta^* \cdot (\cos\theta \cdot N - \sin\theta \cdot B) \\
M_{2^*_{(0,0)}} &= \left(\sin\theta \cdot N^*_{(0,0)} + \cos\theta \cdot B^*_{(0,0)}\right) + \theta^* \cdot (\cos\theta \cdot N_{(0,0)} - \sin\theta \cdot B_{(0,0)}) \\
M_{2^*_{(1,0)}} &= \left(\sin\theta \cdot N^*_{(1,0)} + \cos\theta \cdot B^*_{(1,0)}\right) + \theta^* \cdot (\cos\theta \cdot N_{(1,0)} - \sin\theta \cdot B_{(1,0)}) \\
M_{2^*_{(t_0,0)}} &= \left(\sin\theta \cdot N^*_{(t_0,0)} + \cos\theta \cdot B^*_{(t_0,0)}\right) + \theta^* \cdot (\cos\theta \cdot N_{(t_0,0)} - \sin\theta \cdot B_{(t_0,0)}) \\
M_{2^*_{(0,t^*)}} &= \left(\sin\theta \cdot N^*_{(0,t^*)} + \cos\theta \cdot B^*_{(0,t^*)}\right) + \theta^* \cdot (\cos\theta \cdot N_{(0,t^*)} - \sin\theta \cdot B_{(0,t^*)}) \\
M_{2^*_{(1,t^*)}} &= \left(\sin\theta \cdot N^*_{(1,t^*)} + \cos\theta \cdot B^*_{(1,t^*)}\right) + \theta^* \cdot (\cos\theta \cdot N_{(1,t^*)} - \sin\theta \cdot B_{(1,t^*)}) \\
M_{2^*_{(t_0,t^*)}} &= \left(\sin\theta \cdot N^*_{(t_0,t^*)} + \cos\theta \cdot B^*_{(t_0,t^*)}\right) + \theta^* \cdot (\cos\theta \cdot N_{(t_0,t^*)} - \sin\theta \cdot B_{(t_0,t^*)})
\end{aligned}$$

dir.

Not: N ve B ifadeleri teorem 4.6 ve teorem 4.5'te incelenmiştir.

Teorem 4.11: C: $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}^3$, $\widehat{\boldsymbol{C}}(\hat{\boldsymbol{t}}) = \sum_{i=0}^{n} \widehat{\boldsymbol{P}}_i \widehat{\boldsymbol{B}}_i^n(\hat{\boldsymbol{t}})$ biçiminde kontrol noktaları $\{\widehat{\boldsymbol{P}}_0 = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{\varepsilon P}_0^*, \widehat{\boldsymbol{P}}_1 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{\varepsilon P}_1^*, \ldots, \widehat{\boldsymbol{P}}_n = \boldsymbol{P}_n + \boldsymbol{\varepsilon P}_n^*\}$ olan n. dereceden dual Bézier eğrisi olsun. Buna göre $\widehat{\boldsymbol{C}}$'nin herhangi bir $\widehat{\boldsymbol{t}_0} = \boldsymbol{t}_0 + \boldsymbol{\varepsilon t^*}_0$ $\hat{t} \in \mathbb{D}$ noktasındaki dual hızı $\boldsymbol{t}_0 \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ ve $\boldsymbol{t}^* \in \mathbf{R}$ olmak üzere $\widehat{\boldsymbol{t}_0}$ noktasını $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{t}^*)$ ikilisi ile gösterirsek $\hat{k}_1 = k_1 + \varepsilon k_1^*$ Dual Bishop birinci eğrilik vektör alanların özel konumları:

$$k_1 = V\,\kappa\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
k_1(0,0) &= V_{(0,0)}\,\kappa_{(0,0)}\cos\theta \\
k_1(1,0) &= V_{(1,0)}\,\kappa_{(1,0)}\cos\theta \\
k_1(t_0,0) &= V_{(t_0,0)}\,\kappa_{(t_0,0)}\cos\theta \\
k_1(0,t^*) &= V_{(0,t^*)}\,\kappa_{(0,t^*)}\cos\theta \\
k_1(1,t^*) &= V_{(1,t^*)}\,\kappa_{(1,t^*)}\cos\theta \\
k_1(t_0,t^*) &= V_{(t_0,t^*)}\,\kappa_{(t_0,t^*)}\cos\theta
\end{aligned}$$

$$k_1^* = (\kappa^* V + V\quad{}^*\kappa)\cos\theta - \theta^* V\kappa\sin\theta$$

$$\theta = \int \tau\, dt, \quad \theta^* = \int \tau^*\, dt$$

$$
\begin{aligned}
k_1^*(0,0) &= \left(\kappa_{(0,0)}^* V_{(0,0)} + V_{(0,0)} \quad {}^*\kappa_{(0,0)}\right)\cos\theta - \theta^* V_{(0,0)}\kappa_{(0,0)}\sin\theta \\
k_1^*(1,0) &= \left(\kappa_{(1,0)}^* V_{(1,0)} + V_{(1,0)} \quad {}^*\kappa_{(1,0)}\right)\cos\theta - \theta^* V_{(1,0)}\kappa_{(1,0)}\sin\theta \\
k_1^*(t_0,0) &= \left(\kappa_{(t_0,0)}^* V_{(t_0,0)} + V_{(t_0,0)} \quad {}^*\kappa_{(t_0,0)}\right)\cos\theta - \theta^* V_{(t_0,0)}\kappa_{(t_0,0)}\sin\theta \\
k_1^*(0,t^*) &= \left(\kappa_{(0,t^*)}^* V_{(0,t^*)} + V_{(0,t^*)} \quad {}^*\kappa_{(0,t^*)}\right)\cos\theta - \theta^* V_{(0,t^*)}\kappa_{(0,t^*)}\sin\theta \\
k_1^*(1,t^*) &= \left(\kappa_{(1,t^*)}^* V_{(1,t^*)} + V_{(1,t^*)} \quad {}^*\kappa_{(1,t^*)}\right)\cos\theta - \theta^* V_{(1,t^*)}\kappa_{(1,t^*)}\sin\theta \\
k_1^*(t_0,t^*) &= \left(\kappa_{(t_0,t^*)}^* V_{(t_0,t^*)} + V_{(t_0,t^*)} \quad {}^*\kappa_{(t_0,t^*)}\right)\cos\theta - \theta^* V_{(t_0,t^*)}\kappa_{(t_0,t^*)}\sin\theta
\end{aligned}
$$

dir.

Not: V Teorem 4.3'te, κ (kappa) Teorem 4.7'de tanımlanmıştır.

Teorem 4.12: C: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}^3$, $\widehat{\boldsymbol{C}}(\hat{\boldsymbol{t}}) = \sum_{i=0}^{n} \widehat{\boldsymbol{P}}_i \widehat{\boldsymbol{B}}_i^n(\hat{\boldsymbol{t}})$ biçiminde kontrol noktaları $\{\widehat{\boldsymbol{P}}_0 = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{\varepsilon P}_0^*, \widehat{\boldsymbol{P}}_1 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{\varepsilon P}_1^*, \dots, \widehat{\boldsymbol{P}}_n = \boldsymbol{P}_n + \boldsymbol{\varepsilon P}_n^*\}$ olan n. dereceden dual Bézier eğrisi olsun. Buna göre $\widehat{\boldsymbol{C}}$'nin herhangi bir $\widehat{\boldsymbol{t_0}} = \boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{\varepsilon t^*}_0$ $\quad \hat{t} \in \mathbb{D}$ noktasındaki dual hızı $\boldsymbol{t_0} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ ve $\boldsymbol{t}^* \in \mathbf{R}$ olmak üzere $\widehat{\boldsymbol{t_0}}$ noktasını $(\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t}^*)$ ikilisi ile gösterirsek $\hat{k}_2 \quad = k_2 + \varepsilon k_2^*$ Dual k_2 Bishop ikinci eğrilik vektör alanların özel konumları:

$$
\begin{aligned}
k_2(0,0) &= V_{(0,0)}\kappa_{(0,0)}\sin\theta \\
k_2(1,0) &= V_{(1,0)}\kappa_{(1,0)}\sin\theta \\
k_2(t_0,0) &= V_{(t_0,0)}\kappa_{(t_0,0)}\sin\theta \\
k_2(0,t^*) &= V_{(0,t^*)}\kappa_{(0,t^*)}\sin\theta \\
k_2(1,t^*) &= V_{(1,t^*)}\kappa_{(1,t^*)}\sin\theta \\
k_2(t_0,t^*) &= V_{(t_0,t^*)}\kappa_{(t_0,t^*)}\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2^* &= \left(V^*\kappa^* + V^*\kappa \quad\right)\sin\theta + \theta^* V\kappa\cos\theta \\
\theta &= \int \tau\, dt, \quad \theta^* = \int \tau^*\, dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2^*(0,0) &= \left[V_{(0,0)}\kappa_{(0,0)}^* + V_{(0,0)}^* \quad \kappa_{(0,0)}\right]\sin\theta + \theta^* V_{(0,0)}\kappa_{(0,0)}\cos\theta \\
k_2^*(1,0) &= \left(V_{(1,0)}\kappa_{(1,0)}^* + V_{(1,0)}^*\kappa_{(1,0)}\right)\sin\theta + \theta^*\left(V_{(1,0)}\kappa_{(1,0)}\right)\cos\theta \\
k_2^*(t_0,0) &= \left(V_{(t_0,0)}\kappa_{(t_0,0)}^* + V_{(t_0,0)}^*\kappa_{(t_0,0)}\right)\sin\theta + \theta^*\left(V_{(t_0,0)}\kappa_{(t_0,0)}\right)\cos\theta \\
k_2^*(0,t^*) &= \left(V_{(0,t^*)}\kappa_{(0,t^*)}^* + V_{(0,t^*)}^*\kappa_{(0,t^*)}\right)\sin\theta + \theta^*\left(V_{(0,t^*)}\kappa_{(0,t^*)}\right)\cos\theta \\
k_2^*(1,t^*) &= \left(V_{(1,t^*)}\kappa_{(1,t^*)}^* + V_{(1,t^*)}^*\kappa_{(1,t^*)}\right)\sin\theta + \theta^*\left(V_{(1,t^*)}\kappa_{(1,t^*)}\right)\cos\theta \\
k_2^*(t_0,t^*) &= \left(V_{(t_0,t^*)}\kappa_{(t_0,t^*)}^* + V_{(t_0,t^*)}^*\kappa_{(t_0,t^*)}\right)\sin\theta + \theta^*\left(V_{(t_0,t^*)}\kappa_{(t_0,t^*)}\right)\cos\theta
\end{aligned}
$$

dir.

Not: V ve κ ifadeleri Teorem 4.3 ve Teorem 4.7'de incelenmiştir.

Teorem 4.13: C: $\mathbb{D} \to \mathbb{D}^3$, $\widehat{\boldsymbol{C}}(\hat{\boldsymbol{t}}) = \sum_{i=0}^{n} \widehat{\boldsymbol{P}}_i \widehat{\boldsymbol{B}}_i^n(\hat{\boldsymbol{t}})$ biçiminde kontrol noktaları $\{\widehat{\boldsymbol{P}}_0 = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{\varepsilon P}_0^*, \widehat{\boldsymbol{P}}_1 = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{\varepsilon P}_1^*, \dots, \widehat{\boldsymbol{P}}_n = \boldsymbol{P}_n + \boldsymbol{\varepsilon P}_n^*\}$ olan n. dereceden dual Bézier eğrisi olsun. Buna göre $\widehat{\boldsymbol{C}}$'nin herhangi bir $\widehat{\boldsymbol{t}_0} = \boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{\varepsilon t^*}_{\boldsymbol{0}}$ $\hat{t} \in \mathbb{D}$ noktasındaki dual hızı $\boldsymbol{t_0} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$ ve $\boldsymbol{t}^* \in \mathbf{R}$ olmak üzere $\widehat{\boldsymbol{t}_0}$ noktasını $(\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t}^*)$ ikilisi ile gösterirsek $\boldsymbol{k_3} = \boldsymbol{k_3} + \boldsymbol{\varepsilon k_3^*}$

Dual $\boldsymbol{k_3}$ Bishop üçüncü eğrilik vektör alanların özel konumları:

(V birim hızlı olmadığından $\boldsymbol{k_3}$'te var)

$$\begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$k_3 = (V-1) \cdot \tau$

$$\begin{aligned}
k_3(0,0) &= (V(0,0)-1) \cdot \tau(0,0) \\
k_3(1,0) &= (V(1,0)-1) \cdot \tau(1,0) \\
k_3(t_0,0) &= (V(t_0,0)-1) \cdot \tau(t_0,0) \\
k_3(0,t^*) &= (V(0,t^*)-1) \cdot \tau(0,t^*) \\
k_3(1,t^*) &= (V(1,t^*)-1) \cdot \tau(1,t^*) \\
k_3(t_0,t^*) &= (V(t_0,t^*)-1) \cdot \tau(t_0,t^*)
\end{aligned}$$

$$k_3^* = \tau \cdot V^* + \tau^* \cdot (V-1)$$

$$\begin{aligned}
k_3^*(0,0) &= \tau(0,0) \cdot V^*(0,0) + \tau^*(0,0) \cdot (V(0,0)-1) \\
k_3^*(1,0) &= \tau(1,0) \cdot V^*(1,0) + \tau^*(1,0) \cdot (V(1,0)-1) \\
k_3^*(t_0,0) &= \tau(t_0,0) \cdot V^*(t_0,0) + \tau^*(t_0,0) \cdot (V(t_0,0)-1) \\
k_3^*(0,t^*) &= \tau(0,t^*) \cdot V^*(0,t^*) + \tau^*(0,t^*) \cdot (V(0,t^*)-1) \\
k_3^*(1,t^*) &= \tau(1,t^*) \cdot V^*(1,t^*) + \tau^*(1,t^*) \cdot (V(1,t^*)-1) \\
k_3^*(t_0,t^*) &= \tau(t_0,t^*) \cdot V^*(t_0,t^*) + \tau^*(t_0,t^*) \cdot (V(t_0,t^*)-1)
\end{aligned}$$

dir.

Not: V ve τ ifadeleri Teorem 4.3 ve Teorem 4.8'da incelenmiştir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, diferansiyel geometri ve bilgisayar destekli tasarım alanlarında önemli bir yeri olan Bézier eğrileri, dual sayı sistemine göre genişletilerek incelenmiş ve bu yapıların üzerinde Bishop çatı sistemi kullanımı detaylı şekilde ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar şu şekilde özetlenebilir:

- Dual Bézier eğrileri üzerinde tanımlanan **Frenet ve Bishop çatıları**, reel ve dual bileşenlere ayrıştırılarak vektör alanları açısından analiz edilmiştir.
- Dual Frenet sisteminin, klasik Frenet çatısına göre daha fazla bilgi taşıdığı ve dual mekânda uygulamalar açısından avantaj sunduğu gösterilmiştir.
- Bishop çatısı, dönüş minimize eden ve burulma problemlerini bertaraf eden çerçeve yapısıyla, dual Bézier eğrileri üzerinde alternatif ve daha stabil bir modelleme sağlamıştır.
- Dual Bishop eğrilikleri olan k_1, k_2, k_3 dual çatı sisteminin geometriye etkisini hem analitik hem de uygulamalı olarak ortaya koymuştur.
- Bu yapıların kontrol noktaları cinsinden ifade edilebilmesi, algoritmik hesaplama ve dijital tasarım alanlarında direkt kullanılabilirlik sunmuştur.

Sonuç olarak, dual Bézier eğrileri üzerinde Bishop çatılarının kullanımı; eğri tanımlamada, yönelim belirlemede ve hassas kontrol mekanizmalarında başarılı ve genişletilebilir bir yaklaşım ortaya koymaktadır.

5.2. Öneriler

Bu çalışmanın ışığında aşağıdaki öneriler getirilebilir:

1. **Uygulamalı Alanlara Adaptasyon:** Bishop çatısı ile dual Bézier eğrilerinin birlikte kullanımı, robotik sistemlerde yörünge planlama, görselleştirme ve nesne yönelim kontrolü gibi uygulamalarda değerlendirilebilir.
2. **Geliştirilmiş Simülasyon Çalışmaları:** Elde edilen teorik vektör alanları ve dual eğrilik fonksiyonları, bilgisayar ortamlarında test edilerek simülasyon doğrulama ve hata analizi yapılabilir.
3. **Farklı Geometrik Uzaylar:** Dual Bishop çatı sistemi, Minkowski ve Lorentz uzaylarında denenerek zaman-benzeri eğriler üzerinde karakterizasyon çalışmaları yapılabilir.

4. **Yapay Zekâ Uygulamaları:** Dual çatı sistemlerinin yapay zekâ tabanlı eğri analiz ve sınıflandırma algoritmalarına entegre edilerek, yeni geometrik öğrenme yaklaşımları geliştirilebilir.
5. **NURBS Tabanlı Dual Modeller:** Dual Bézier sistemleri, NURBS eğrilerine uygulanarak rasyonel ve parametrik modelleme yaklaşımlarında daha gelişmiş kontrol sunabilir.

KAYNAKLAR

Abdel-Aziz, M.H., Badr, A.A., Almazroui, S. 2021. Medical image reconstruction using Bézier curves and Frenet frames. *Biomedical Signal Processing and Control*, 68, 102625.

Arbin, N., Reddy, J.N. 2018. A hybrid frame for the analysis of large deformations in curved rods. *International Journal of Solids and Structures*, 146, 76-87.

Arbin, N., Reddy, J.N. 2019. Geometrically exact analysis of thin-walled pipes using a hybrid Bishop frame. *Thin-Walled Structures*, 145, 106398.

Bishop, R.L. 1975. There is more than one way to frame a curve. *The American Mathematical Monthly*, 82(3), 246–251.

Bükçü, B., Karacan, M.K. 2008. On the slant helices according to Bishop frame of the timelike curve in Lorentzian space. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2, 32–41.

Bükçü, B., Karacan, M.K. 2009. The slant helices according to Bishop frame. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 3(2), 2009 67-70

Bükçü, B., Karacan, M.K. 2009. The slant helices according to Bishop frame. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 4(5), 217–229.

Dede, M., Yüceer, A., Yılmaz, K. 2018. Quasi frames and their applications in differential geometry. *Filomat*, 32(14), 4995–5007.

Evren, S. 2020. Bertrand NURBS curves in Euclidean 3-space. *Journal of Mathematical Sciences and Modelling*, 3(3), 120–129.

Farin, G. 2002, *Curves and surfaces for CAGD: A practical guide* (5th ed.), Morgan Kaufmann Publishers.

Farouki, R.T., Szafran, N., Biard, L. 2009. Existence and uniqueness of rational Bézier curves with prescribed end derivatives. *Computer Aided Geometric Design*, 26(8), 824–834.

Hoschek, J., Lasser, D. 1993, *Fundamentals of computer aided geometric design*, A K Peters.

İncesu, M. 2003. Geometric properties of Bézier curves. *Applied Mathematics and Computation*, 139(2-3), 397–406.

İncesu, M., Gürsoy, O. 2004. Dual Bézier curves in computer aided geometric design. *Applied Mathematics and Computation*, 151(3), 835–843.

İncesu, M., Kiren, M. 2008. Dual frame systems and applications in geometric modelling. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 214(1), 317–324.

Juhász, I. 1999. Control point based representation of inscribable Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, 16(7), 675–682.

Kılıçoğlu, M., Şenyurt, M. 2020. Involutes of cubic Bézier curves. *Journal of Mathematical Sciences and Modelling*, 3(2), 87–96.

Körpınar, T., Asil, V., Baş, S. 2011. New characterizations of curves via Bishop frame in Euclidean space. *International Journal of Physical Sciences*, 6(9), 2274–2280.

Körpınar, T., Demirkol, R.C. 2017. Geometric results with Bishop frame in Euclidean space. *Journal of Mathematical and Computational Science*, 7(5), 926–935.

Liu, Y., Wang, G. 2002. Properties of rational Bézier curves. *Journal of Computational Mathematics*, 20(2), 209–216.

Mortenson, M.E. 1997, *Geometric modeling* (2nd ed.), John Wiley ve Sons.

Piegl, L., Tiller, W. 1997, *The NURBS book* (2nd ed.), Springer-Verlag.

Rogers, D.F. 2001, *An introduction to NURBS: With historical perspective*, Morgan Kaufmann Publishers.

Samanci, H.K., Celik, S., İncesu, M., 2015. The Bishop Frame of Bezier Curves. *Life Science Journal*, 12 (6), 175–180

Samancı, H.K., Çelik, S., İncesu, M. 2015. Analysis of Bézier curves via Bishop frame. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 12(10), 1550118.

Samancı Kuşak, H. 2018. Timelike rational Bézier curves in Minkowski 3-space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 460(2), 1010–1022.

Sanda, M.A., Zengin, G., Aktumsek, A., Cakmak, Y.S. 2015. Evaluation of antioxidant potential of two *Daphne* species (*D. gnidioides* and *D. pontica*) from Turkey. *Emirates Journal of Food and Agriculture*, 27(6), 487-494.

Wang, W., Jüttler, B., Zheng, D., Liu, Y. 2008. Computation of rotation minimizing frames. *ACM Transactions on Graphics*, 27(1), Article 2.

Yılmaz, D., Turgut, M. 2010. On the Frenet-like frames according to Bishop frame. *International Journal of Physical Sciences*, 5(14), 2214–2217.

Yılmaz, S. ve Turgut, M., 2010. A new version of Bishop frame and an application to spherical images. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371 (2), 764–776.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı — Bilge Alparslan AYDIN

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl		Bitirme Yılı
İlkokul	Hatay İlkokulu		
Ortaokul	Atatürk Ortaokulu		
Lise	Antakya Merkez Lisesi	Antakya / HATAY	1992
Üniversite	Selçuk Üniversitesi, Matematik Bölümü	Konya	07.02.2003
Yüksek Lisans	Muş Alparslan Üniversitesi	Muş	2025
Doktora			

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2004	Egesistem Dershanesi, Bergama / İzmir	Öğretmen
2004	Biray Dershanesi, Bergama / İzmir	Öğretmen
2010	Kavram Dershanesi, Bergama / İzmir	Öğretmen
2011	Uğur Dershanesi, Muş	Öğretmen
2013	Final Dershanesi, Muş	Öğretmen
2016	Muş Nusret Sarman MTAL	Öğretmen
Halen	Muş Nusret Sarman MTAL	Öğretmen