



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKSEL SÜREKLİ OPERATÖRLER

Sümevra SOLAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2023
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKSEL SÜREKLİ OPERATÖRLER

Sümevra SOLAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Abdullah AYDIN

Haziran-2023
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

Sümeýra SOLAK tarafından hazırlanan “İstatistiksel Sürekli Operatörler” adlı tez çalışması 26/05/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Muhammed ÇINAR

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Eğitimi ABD

Danışman

Doç. Dr. Abdullah AYDIN

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Mahir Demir

Giresun Üniversitesi, Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu/...../..... Tarih ve/..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

Bu tez çalışması TÜBİTAK tarafından 2210/A nolu Yurt İçi Genel Yüksek Lisans bursu ile desteklenmiştir.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Sümevra SOLAK

Tarih: 26/05/2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİKSEL SÜREKLİ OPERATÖRLER

Sümevra SOLAK

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Abdullah AYDIN

Bu çalışmada, Riesz uzayları üzerinde tanımlanan istatistiksel sıra yakınsaklık kavramını kullanarak istatistiksel sıra süreklilik ve istatistiksel sıra sınırlı operatörleri tanımlanmıştır. Aynı zamanda bu kavramlar ile sıra sürekli ve sıra sınırlı operatörler arasındaki ilişkiler irdelenmiştir.

2023, 21 Sayfa

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel Sıra Sınırlı Operatör, İstatistiksel Sıra Sürekli Operatör, İstatistiksel Sıra Yakınsak Dizi, Riesz Uzayı.

ABSTRACT

MS THESIS

STATISTICALY ORDER CONTINUOUS OPERATORS

Sümeyra SOLAK

**Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics**

Advisor: Assoc. Prof. Abdullah AYDIN

In this study, we introduce the notions of statistical order continuity and statistical order bounded operators by using the concept of statistical order convergence defined over Riesz spaces. We also examine the relationships between these concepts and the sequence continuous and sequence bound operators.

2023, 21 Pages

Keywords: : Riesz Space, Statistical Order Bounded Operators, Statistical Order Continuous Operators, Statistical Order Convergent Sequense.

TEŞEKKÜR

Bu alıőmamın yűrűtűlmesi sűresince benden yardımını esirgemeyen, bilgi ve tecrűbeleriyle yolumu aydınlatan ve her zaman űđrencisi olmaktan onur duyacađım danıőman hocam Sn. Doç. Dr. Abdullah AYDIN'a, "TűBİTAK 2210/A Yurt İçi Genel Lisansűstű Burs Programı" desteđinden dolayı TűBİTAK kurumuna ve eđitim, űđretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan bana her zaman sabır, anlayıő ve iyi niyetle yaklaőan canım aileme sonsuz teőekkűrler.

Sűmeyra SOLAK
MUŞ-2023



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	2
3. TANIM ve TEOREMLER.....	3
3.1 Riesz Uzayları.....	3
3.2 İstatistiksel Yakınsaklık.....	8
4. İSTATİSTİKSEL SÜREKLİ OPERATÖRLER.....	11
KAYNAKLAR	19

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

E^+	:	E 'nin pozitif kısmı
E^-	:	E 'nin negatif kısmı
$x \vee y$:	x ve y 'nin supremumu
$x \wedge y$:	x ve y 'nin infumumu
x^+	:	x ve 0 'ın (vektör uzayının sıfırı) supremumu
x^-	:	x ve 0 'ın infumumu
$ x $:	x ve $-x$ 'nin supremumu
θ	:	E 'nin null elemanı
e	:	E 'nin birimi
A^d	:	A 'nın dik tümleyeni
$L(E, F)$:	E 'den F 'ye tüm operatörlerin uzayı
$L_b(E, F)$:	Sıra sınırlı operatörlerin uzayı
$(x_n) \downarrow x$:	(x_n) aşağı yönlendirilmiş olup infumumu x dir.
$(x_n) \uparrow x$:	(x_n) yukarı yönlendirilmiş olup supremumu x dir.

1. GİRİŞ

Riesz uzaylarının tarihsel gelişimini 1928 yılında Bologna’da yapılan uluslararası matematik kongresine dayandırılır. Riesz uzayları üzerine yapılan ilk çalışma Frigyes Riesz’in tarafından (Riesz, 1928) de yapılan lineer fonksiyonların ayrışımı çalışmasıdır. Yıllar içinde Riesz uzayı kavramı üzerine baya çalışmalar yapılmıştır. Diğer taraftan istatistiksel yakınsaklık ilk olarak (Zygmund, 1935) tarafından ele alınmıştır. İstatistiksel yakınsaklığın uygulamaları ve genelleştirilmeleri hakkında bir çok çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmamızda ilk olarak Riesz uzayının ve istatistiksel yakınsaklığın temel tanım ve özelliklerini hatırlatacağız. Daha sonra, istatistiksel yakınsaklığın Riesz uzaylarındaki temel tanım ve sonuçlarını vererek istatistiksel sıra yakınsaklık kavramını kullanarak Riesz uzayları üzerindeki sıra süreklilik tanımından yola çıkarak istatistiksel sıra süreklilik kavramını tanımlayacağız.

Bir E kümesi üzerinde tanımlanan \leq bağıntısı yansıyan, ters simetrik ve geçişken özelliklerini sağlarsa E kümesine *sıralı küme* denir. Bir E vektör uzayı üzerinde bir \leq sıralama bağıntısı tanımlanmış olsun. Eğer her $x, y \in E$ için;

- 1) $x \leq y$ iken her $z \in E$ için $x + z \leq y + z$,
- 2) $x \leq y$ iken $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \leq \alpha y$

şartları sağlanırsa E uzayına *sıralı vektör uzay* denir.

Eğer, her $x, y \in E$ için $\sup\{x, y\}$ ve $\inf\{x, y\}$ E 'de mevcut ise E sıralı vektör uzayına bu kısmi sıralama bağıntısına göre bir *Riesz uzayı* veya *kafes uzayı* denir. Bir E Riesz uzayında $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n - x| \leq p_n$ olacak şekilde $p_n \downarrow \theta$ şartını sağlayan bir $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi mevcut ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $x \in E$ noktasına *sıra yakınsaktır* denir ve $x_n \xrightarrow{o} x$ sembolüyle gösterilir.

E ve F iki sıralı vektör uzayı olmak üzere bir $T: E \rightarrow F$ doğrusal dönüşümü kısaca E 'den F 'e bir *operatör* olarak adlandırılır. Ayrıca her bir $x \in E^+$ için $0 \leq T(x)$ oluyorsa T operatörüne *pozitif operatör* denir ve $0 \leq T$ şeklinde gösterilir. Bu çalışmamızda ele alacağımız tüm operatörler lineerlik şartını sağladığı kabul edilmektedir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

İstatistiksel yakınsaklık teorisi, reel değerli bir dizinin yakınsaklığının genelleştirilmesi olan aktif bir araştırma alanıdır ve istatistiksel yakınsama fikri ilk olarak (Zygmund, 1935) tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra (Fast, 1951) ve (Steinhaus, 1951) birbirlerinden bağımsız olarak bu fikri geliştirmişlerdir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı, (Buck, 1953) ve (Schoenberg, 1959) tarafından gerçel ve kompleks diziler için; (Maddox, 1988) tarafından ise herhangi bir yerel konveks topolojik vektör uzayındaki diziler için tanımlanmıştır. (Šalát, 1980; Fridy, 1985; Connor, 1988; Maddox, 1988; Fridy, 1993; Rath ve Tripathy, 1994) tarafından istatistiksel yakınsaklık ile toplanabilme arasında ilişki kurulmuş, istatistiksel Cauchy dizileri üzerine de (Fridy, 1985) ve (Rath ve Tripathy, 1994) çalışmalar yapmışlardır. İstatistiksel monotonluk kavramına girişi (Fridy, 1993)'de yapmıştır, fakat istatistiksel yakınsaklık için monoton yakınsaklık teoremi (Tripathy, 1998) tarafından yapılmıştır. Bununla beraber (Fridy, 1985; Connor, 1988; Tripathy, 1997; Tripathy, 1998) ayrışım teoremlerinin farklı ifadelerini vermişlerdir. İstatistiksel limit infimum ve supremum kavramlarını da (Fridy ve Orhan, 1997) tanımlamışlardır. \mathbb{R}^n de istatistiksel yakınsaklık kavramı, (Pehlivan ve Mamedov, 2000) tarafından incelenmiştir. Bir (x_n) dizisinin tüm istatistiksel limit noktalarının kümesi $F\sigma$ -kümesi olarak tanımlanması ise (Kostyrko ve ark., 2001) tarafından yapılmıştır.

İstatistiksel yakınsaklık teorisi üzerine yapılan çalışmaların çoğu belirli bir topolojiye göre ele alınmıştır. Fakat ilk olarak (Ercan, 2009)'de topolojisi olmaksızın Riesz uzayları üzerinde istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Daha sonra Şençimen ve Pehlivan bu kavramı sıra yakınsaklık kavramını kullanarak Riesz uzayları üzerinde daha kapsamlı olarak ele aldılar (Şençimen ve Pehlivan, 2012). Son zamanlarda ise Aydın ve ark., Riesz uzayları, Riesz cebirleri ve yerel olarak katı Riesz uzayları üzerinde istatistiksel yakınsaklık hakkında bazı çalışmalar ortaya koydular (Aydın, 2020; Aydın, 2021; Aydın ve ark., 2021; Aydın ve Temizsu, 2021).

3. TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar ile birlikte bazı teorem ve önermelere yer verilmiştir. Bunun yanında ifade edeceğimiz çeşitli tanım, teorem, sembol ve notasyonlar, kafes uzaylarının temel argümanlarıdır ve bu argümanlar (Vulikh, 1967; De Pagter, 1981; Zaanen, 1983; Huijsmans, 1991; Meyer-Nieberg ve Schaefer, 1995; Gutman, 1996; Wickstead, 2001; Abramovich ve Aliprantis, 2002; Aliprantis ve Burkinshaw, 2003; Aliprantis ve Burkinshaw, 2006; Kusraev ve Kutateladze, 2020; Aydın ve ark., 2021) çalışmalarından alınmıştır.

3.1 Riesz Uzayları

Tanım 3.1 E boştan farklı bir küme ve " \leq ", E 'de bir bağıntı olsun. Eğer bu bağıntı aşağıdaki koşulları sağlıyorsa E 'ye bir *kısmi sıralı küme* veya *kısmi sıralanmış küme* denir ve (E, \leq) ile gösterilir.

- 1) Her $x \in E$ için $x \leq x$;
- 2) Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ iken $x = y$;
- 3) Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ iken $x \leq z$.

Eğer kısmi sıralanmış bir kümenin her eleman çifti, üzerinde tanımlanan bağıntıya göre karşılaştırılabilirse bu kümeye *tam sıralı küme* denir.

Tanım 3.2 E gerçel vektör uzayı ve " \leq ", E 'de bir sıralama bağıntısı olsun. Eğer

- 1) Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ iken $x + z \leq y + z$,
- 2) Her $x, y \in E, 0 \leq \lambda \in R$ için $x \leq y$ iken $\lambda x \leq \lambda y$

şartları sağlanıyorsa (E, \leq) *sıralı vektör uzayı* olarak adlandırılır.

Tanım 3.3 E bir sıralı vektör uzayı, A da bu uzayın herhangi bir alt uzayı olsun. Eğer;

- 1) Her $x \in A$ için $x \leq z$,
- 2) Her $x \in A$ için $x \leq y$ olacak şekildeki her $y \in E$ için $z \leq y$ koşullarını sağlayacak şekilde bir $z \in E$ var,

şartları sağlanırsa z elemanına A kümesinin *supremumu* denir ve $\sup(A) = z$ biçiminde gösterilir. Özel olarak $A = \{x, y\} \subseteq E$ ise $z = \sup\{x, y\} = x \vee y$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde eğer;

- 1) Her $x \in A$ için $z \leq x$,
- 2) Her $x \in A$ için $y \leq x$ olacak şekildeki her $y \in E$ için $y \leq z$ koşullarını sağlayacak şekilde bir $z \in E$ var,

şartları sağlanırsa z elemanına A kümesinin *infimumu* denir ve $\inf(A) = z$ biçiminde gösterilir. Özel olarak $A = \{x, y\} \subseteq E$ ise $z = \inf \{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.4 E sıralı vektör uzayı ve θ , E 'nin sıfır vektörü olsun. $\theta \leq x$ şartını sağlayan E 'nin x elemanına *pozitif eleman* denir. E 'nin tüm pozitif elemanlarının kümesi E_+ ile gösterilir ve

$$E_+ = \{x \in E : \theta \leq x\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.5 E sıralı vektör uzayı ve $V \subseteq E$ alt vektör uzayı olmak üzere E 'den gelen sıralama ile V bir sıralı vektör uzayıdır. Bu durumda V 'ye *sıralı alt vektör uzayı* denir.

Tanım 3.6 E sıralı bir küme olsun. Eğer E üzerindeki sıralamaya göre her x, y elemanın supremumu ve infimumu var ve E 'ye ait ise E uzayına bir *kafes uzayı (örgü)* denir. Ek olarak E vektör uzayı ise E 'ye *vektör örgüsü* veya *Riesz uzayı* veya *kafes uzayı* adı verilir.

Tanım 3.7 E Riesz uzayı ve G , E 'nin bir alt vektör uzayı olsun. Eğer her $x, y \in G$ için $x \vee y \in G$ veya $x \wedge y \in G$ ise G 'ye E 'nin *Riesz alt uzayı* denir.

Örnek 3.1 (Ω, τ) bir topolojik uzay olmak üzere, $C(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ sürekli fonksiyon}\}$ kümesi için alınan her $f, g \in C(\Omega)$ için $f \leq g$ ancak ve ancak $f(x) \leq g(x)$ tüm $x \in \Omega$ elemanları için sağlanır. Bu şekilde tanımlı $C(\Omega)$ noktasal sıralama ile bir Riesz uzayıdır.

Tanım 3.8 (E, \leq) bir Riesz uzayı olsun. Eğer E 'nin en küçük elemanı varsa buna sıfır (*null*) *eleman* denir ve θ ile gösterilir. Eğer E 'nin en büyük elemanı varsa buna *birim (unit) eleman* denir ve e ile gösterilir.

Tanım 3.9 (E, \leq) Riesz uzayı olsun. Eğer her $x, y, z \in E$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ sağlanıyorsa E 'ye *dağılmalı kafes* denir.

Teorem 3.1 E bir Riesz uzayı ise her $x, y, z \in E$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ve $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
- (ii) $x \vee y = y \vee x$ ve $x \wedge y = y \wedge x$;
- (iii) $x \wedge (x \vee y) = x$ ve $x \vee (x \wedge y) = x$;
- (iv) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ ve $x \vee (y \vee z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Tanım 3.10 E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun.

- 1) $x \vee 0$ elemanına x 'in *pozitif* denir ve x^+ ile gösterilir.
- 2) $(-x) \vee 0$ elemanına x 'in *negatif* denir ve x^- ile gösterilir.
- 3) $(-x) \vee x$ elemanına x 'in *modülü* (mutlak değeri) denir ve $|x|$ ile gösterilir.

4) Her $x, y \in E$ için $x \wedge y = 0$ ise x ile y elemanları birbirine *diktir* denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

Tanım 3.11 A, E 'nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere, $\{x \in E : \text{her } y \in A \text{ için } x \perp y\}$ kümesine A kümesinin *diklik tümleyeni* denir ve A^d ile gösterilir. $A, B \subseteq E$ olmak üzere her $x \in E$ ve her $y \in E$ için $x \perp y$ oluyorsa A ile B kümelerine birbirine diktir denir ve $A \perp B$ şeklinde gösterilir.

Sonuç:

1) A^d alt vektör uzayıdır.

2) $A^{dd} = \{z \in E : \text{her } y \in A^d, y \perp z \text{ olmak üzere } A^d \perp A^{dd} = 0\}$ dır.

Tanım 3.12 E Riesz uzayı ve $A, B \subseteq E$ boştan farklı iki küme olsun. Aşağıdaki tanımlamaları yazabiliriz

1) $A^+ = \{a^+ : a \in A\}$

2) $A^- = \{a^- : a \in A\}$

3) $|A| = \{|a| : a \in A\}$

Teorem 3.2 E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ boştan farklı bir küme olsun. Eğer $\sup A$ varsa her $x \in E$ için $\sup(x \wedge A)$ vardır ve $\sup(x \wedge A) = x \wedge \sup A$ 'dır. Benzer şekilde eğer $\inf A$ varsa her $x \in E$ için $\inf(x \vee y)$ vardır ve $\inf(x \vee y) = x \vee \inf A$ 'dır.

Aşağıda vereceğimiz sonuçlar Aliprantis ve Burkinshaw (2006) çalışmasındaki Teorem 1.3., Teorem 1.5. ve Teorem 1.7.'den alınmıştır.

Teorem 3.3 E bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olsun. O zaman aşağıdaki önermeler doğrudur.

- (i) $x \vee y = - [(-x) \wedge (-y)];$
- (ii) $x \wedge y = - [(-x) \vee (-y)];$
- (iii) $x + y = x \vee y + x \wedge y;$
- (iv) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z);$
- (v) $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z);$
- (vi) $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot (x \vee y) = a \cdot x \vee a \cdot y$ ve $a \cdot (x \wedge y) = a \cdot x \wedge a \cdot y;$
- (vii) $x = x^+ + x^-;$
- (viii) $|x| = x^+ + x^-;$
- (ix) $x^+ \wedge x^- = 0;$
- (x) $x = (x - y)^+ + x \wedge y;$
- (xi) $|x - y| = x \vee y - x \wedge y.$

Tanım 3.13 İki vektör uzayı arasında tanımlanan doğrusal fonksiyona *operatör* denir. Yani E ve F iki vektör uzayı olsun. Eğer $T: E \rightarrow F$ fonksiyonu için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ şartı tüm $x, y \in E$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ elemanları için sağlanırsa T fonksiyonuna *operatör* denir. Bundan sonra $T(x)$ yerine Tx ifadesini kullanacağız.

Sonuç: E sıralı vektör uzayı için aşağıdakiler birbirine denktir.

- (i) E bir Riesz uzayıdır.
- (ii) Her $x \in E$ için $x^+ \in E'$ dir.
- (iii) Her $x \in E$ için $x^- \in E'$ dir.
- (iv) Her $x \in E$ için $|x| \in E'$ dir.

Teorem 3.4 E Riesz uzayı ve her $x, y, z \in E$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

- (i) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ ve $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$,
- (ii) Eğer $x, y, z \geq 0$ ise $x \wedge (y + z) \leq x \wedge y + x \wedge z$.

Tanım 3.14 E sıralı vektör uzayı ve $A \subseteq E$ olsun.

- 1) Eğer her $x, y \in A$ için $x \leq z$ ve $y \leq z$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa A 'ya *yukarı yönlendirilmiş küme* denir ve $A \uparrow$ biçiminde gösterilir. A yukarı yönlendirilmiş küme ve E içinde $\sup(A) = a$ varsa $A \uparrow a$ biçiminde gösterilir.
- 2) Eğer her $x, y \in A$ için $z \leq x$ ve $z \leq y$ olacak şekilde bir $z \in A$ varsa A 'ya *aşağı yönlendirilmiş küme* denir ve $A \downarrow$ biçiminde gösterilir. A aşağı yönlendirilmiş küme ve E içinde $\inf(A) = a$ varsa $A \downarrow a$ biçiminde gösterilir.
- 3) Yönlendirilmiş bir A kümesinden herhangi bir E kümesine tanımlanmış bir fonksiyona *ağ (net)* denir. A yerine herhangi bir (x_α) ağı alındığında benzer şekilde $x_\alpha \uparrow, x_\alpha \uparrow a, x_\alpha \downarrow$ ve $x_\alpha \downarrow b$ tanımları verilebilir.

Tanım 3.15 E Riesz uzayında her $x \in E^+$ için $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $n^{-1} \cdot x \downarrow 0$ şartı sağlanırsa E 'ye *Archimedean Riesz uzayı* denir.

Bu çalışmada aksi söylenmedikçe, tüm kafes uzaylarının gerçel değerli Archimedean özelliğine sahip olduğu kabul edilecektir. Tüm kafes uzayları Archimedean özelliğini sağlamayabilir. Bunu aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 3.2 \mathbb{R}^2 üzerinde, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için,

$$x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$$

sıralamasına göre Archimedean Riesz uzayıdır.

Örnek 3.3 \mathbb{R}^2 üzerinde, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ ancak ve ancak $x_1 \leq y_1$ ya da $x_1 = x_2$ iken $y_1 \leq y_2$ sıralama bağıntısını tanımlarsak (\mathbb{R}^2, \leq) bir

kafes uzayı olur. Ancak Archimedean değildir. Bunu görebilmek için $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ elemanını ele alalım. Tanımladığımız bu sıralamaya göre $\frac{1}{n}(1,1) \downarrow$ fakat $\frac{1}{n}(1,1) \downarrow 0$ değildir. Dolayısıyla bu sıralama bağıntısıyla \mathbb{R}^2 Archimedean özelliğine sahip değildir.

Tanım 3.16 E bir kafes uzayı olsun. Herhangi $a, b \in E$ iki elaman ve $a \leq b$ olmak üzere $\{x \in E : a \leq x \leq b\}$ kümesine E 'de bir *sıralı aralık* denir ve $[a, b]$ ile gösterilir. Bir $A \subseteq E$ alt kümesi için $A \subseteq [a, b]$ olacak şekilde $a, b \in E$ varsa A 'ya, E 'de *sıra sınırlı küme* denir.

Tanım 3.17 E bir Riesz uzayı olsun. E 'nin boştan farklı ve üstten sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir alt kümesinin) supremumu ya da alttan sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir alt kümesinin) infimumu varsa E Riesz uzayına *Dedekind tam* (σ -Dedekind tam) *Riesz uzayı* denir. Her dizi aynı zamanda bir ağ olduğundan dolayı E uzayı Dedekind tam ise σ -Dedekind tamdır. E Riesz uzayının Dedekind tam olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve üstten sınırlı olacak şekilde her ağın E içinde supremumunun var olmasıdır.

Tanım 3.18 E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun.

- 1) Her $y \in E$ ve $x \in A$ için $y \leq x$ iken $y \in A$ oluyor ise A 'ya *solid küme* denir. Aynı zamanda solid alt uzaya *ideal* denir.
- 2) A, E 'nin solid alt uzayı ise A 'ya E içinde ideal denir. $A \subseteq E$ boştan farklı kümesi için A 'yı kapsayan en küçük ideale A 'nın ürettiği *ideal* denir ve I_A ile gösterilir. Her ideal bir Riesz alt uzayıdır.
- 3) A, E de bir ideal olmak üzere A 'nın E de supremumu olan her alt kümesinin A 'da supremumu varsa A 'a *band* denir ve B_A ile gösterilir. Diğer bir ifade ile A 'nın band olması için yeterli ve gerekli şart keyfi her $(x_\alpha) \subseteq A$ ağı için $0 \leq x_\alpha \uparrow |x|$ şartı sağlanırken $x \in A$ olmasıdır.

Tanım 3.19 Eğer bir E kafes uzayıdaki $(x_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ ağı için başka bir $(y_\beta)_{(\beta \in B)} \downarrow 0$ ağı var ve her $\beta \in B$ indisi için en az bir $\alpha_0 \in I$ var öyle ki $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ her $\alpha \geq \alpha_0$ için sağlanırsa $(x_\alpha)_{(\alpha \in I)}$ ağı $x \in E$ 'ye *sıra (order) yakınsaktır* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ ile gösterilir.

Tanım 3.20 E bir Riesz uzayı ve $0 < e \in E$ olsun.

- 1) $I_e = E$ ise e 'ye *güçlü birim (strong unit)* denir.
- 2) $B_e = E$ ise e 'ye *zayıf birim (weak unit)* denir.

Tanım 3.21 E Riesz uzayı olsun. G , E 'nin Riesz alt uzayı olmak üzere her $0 < x \in E$ için $0 < y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G kümesine E 'de *sıra yoğun* (*order dense*) denir.

Tanım 3.22 E ve F birer Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere;

- 1) T operatörü sıra sınırlı kümeleri sıra sınırlı kümelere taşırsa T operatörüne *sıra sınırlı operatör* denir.
- 2) Eğer $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ yakınsaması E 'de sağlanırken, $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$ yakınsaması F 'de sağlanırsa T 'e *sıra sürekli operatör* denir.
- 3) Eğer $x_n \xrightarrow{o} x$ yakınsaması E 'de sağlanırken, $Tx_n \xrightarrow{o} Tx$ yakınsaması F 'de sağlanırsa T 'e σ -*sıra sürekli operatör* denir.

Tanım 3.23 E bir Riesz uzayı, F Dedekind tam Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı bir operatör olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- 1) T sıra sürekli.
- 2) Eğer E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ ise F içinde $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$.
- 3) Eğer E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ ise F içinde $\inf\{|Tx_\alpha|\} = 0$.
- 4) T^+ ve T^- ikisi de süre sürekli.
- 5) $|T|$ sıra sürekli.

3.2 İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.24 K doğal sayıların boştan farklı bir alt kümesi olsun. $K_n = \{k \leq n: k \in K\}$ kümesi ve $|K| = \text{card}(K)$ (K kümesinin kardinalitesi) olmak üzere;

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n}$$

ve

$$\bar{\delta}(K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n}$$

limitlerine sırasıyla K kümesinin alt ve üst yoğunluğu denir. $\bar{\delta}(K) = \underline{\delta}(K)$ ise $\left(\frac{|K_n|}{n}\right)$ dizisinin limiti mevcuttur. Bu limit $\delta(K)$ ile gösterilir ve K kümesinin *doğal yoğunluğu* (*asymptotic density*) denir. $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: k \in K\}|$$

ile gösterilir (Niven ve ark., 1991). Şimdi doğal yoğunluk ile ilgili bazı özellik ve örnekler verelim.

- (i) $K \subseteq \mathbb{N}$ sonlu ise $\delta(K) = 0$ dır.
- (ii) $K = \mathbb{N}$ ise $\delta(k) = \frac{n}{n} = 1$
- (iii) $K = \{2n + 1: n \in \mathbb{N}\} = T$ ise $\delta(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.
- (iv) $K = \{2n: n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{C}$ ise $\delta(\mathbb{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.
- (v) $K = \{n^2: n \in \mathbb{N}\}$ ise $\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$.
- (vi) $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ ise $\delta(K_1 \cup K_2) - \delta(K_1 \cap K_2) = \delta(K_1) + \delta(K_2)$.
- (vii) $K_1 \subseteq K_2$ ise $\delta(K_1) \leq \delta(K_2)$.

Tanım 3.25 Reel sayıların bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için alın her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| > \varepsilon\}| = 0$$

sağlanır ise $x = (x_n)$ dizisi $L \in \mathbb{R}$ sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir (Fast, 1951).

Şimdi istatistiksel yakınsaklık ile ilgili ve literatürde mevcut bulunan birkaç örneği inceleyelim.

Örnek 3.4 \mathbb{R} Reel sayılarda $n = k^2$ olarak yazılabilirse $x_n = 1$, diğer durumlarda $x_n = 0$ olarak tanımlanan bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi alalım. Bu durumda dizinin terimleri $x_k = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots\}$ şeklinde olacaktır. O halde, $K_\varepsilon = \{k: |x_k - l| \geq \varepsilon\} = \{k: |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{k: k = n^2\}$ olur ki;

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

ifadesi sağlanır. Böylece $st - \lim x_n = 0$ elde edilir.

Kolaylıkla görülebilir ki yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat bu önermenin tersi her zaman doğru olmayabilir. Yani istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir.

Tanım 3.26 Bir $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{k: |x_k - x_N| > \varepsilon\}) = 0$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ varsa $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel Cauchy dizisi* denir (Fridy, 1985).

Teorem 3.5 Bir $x = (x_k)$ dizisi için aşağıdaki önermeler denktir.

- (i) $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır.
- (ii) $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.
- (iii) $x_k = y_k$ eşitliği hemen hemen sağlanacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır (Fridy, 1985).

Tanım 3.27 $x = (x_n)$ dizisi verilsin. (x_{k_n}) monoton artan ve $\delta(K) = 1$ olacak şekilde

$$K = \{k_1 < k_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$$

alt kümesi varsa (x_n) reel sayısı dizisine *istatistiksel monoton artandır* denir. Benzer şekilde monoton azalma da tanımlanabilir (Tripathy, 1997).

Tanım 3.28 $x = (x_n)$ reel sayısı dizisi için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: |x_n| > A\}) = 0$$

olacak şekilde en az bir sonlu $A > 0$ reel sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi *istatistiksel sınırlıdır* denir (Fridy ve Orhan, 1997).

Şimdi Riesz uzaylarında istatistiksel yakınsaklık ile ilgili temel kavramları hatırlayalım.

Tanım 3.29 (x_n) bir E Riesz uzayında bir dizi olsun. Eğer doğal yoğunluğu 1 olan bir $K = \{n_1 < n_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ indeks kümesi bulunabilir ki (x_{k_n}) azalan ve $\inf_{n \in K} (x_{k_n}) = 0$ sağlansın. Bu durumda (x_n) dizisine *istatistiksel olarak azalarak sıfıra yakınsar* denir. Bu durumda bu yakınsama $x_n \downarrow^{sto} 0$ ile gösterilir.

Tanım 3.30 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ E Riesz uzayında bir dizi olsun ve $x \in E$ olsun. $q_n \downarrow^{sto} 0$ olacak şekilde $K = \{n_1 < n_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ ve $\delta(K) = 1$ ve $|x_n - x| \leq q_n$ (her $n \in K$) sağlanırsa (x_n) dizisi x 'e *istatistiksel sıra yakınsak* denir ve $x_n \xrightarrow{sto} x$ ile gösterilir.

4. İSTATİSTİKSEL SÜREKLİ OPERATÖRLER

Bu bölümde istatistiksel sıra sınırlı ve istatistiksel olarak σ -sıra sürekliliği kavramlarını tanımlayacağız. Bu bölümde ifade edeceğimiz çeşitli tanım, teorem, sembol ve notasyonlar, kafes uzaylarının temel argümanlarıdır ve bu argümanlar (Aydın ve ark., 2023) çalışmasından alınmıştır.

Tanım 4.1 (x_n) bir E Riesz uzayında bir dizi olsun. Eğer bir pozitif $e \in E$ vektörü ve $\delta(K) = 1$ şartını sağlayan bir $K = \{n_1 < n_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ indisi mevcut ve $|x_{n_k}| \leq e$ eşitsizliği her $n_k \in K$ için sağlanır ise (x_n) dizisine *is st_o -sınırlı* denir.

Her sınırlı dizinin st_o -sınırlı olduğu ve ayrıca istatistiksel olarak sıra yakınsak bir dizinin de st_o -sınırlı olduğu açıktır. Ancak, tersinin genel olarak doğru olması gerekmez. Bunu görmek için aşağıdaki iki örneği inceleyelim.

Örnek 4.1 Tüm sıfıra yakınsak gerçekte dizilerin uzayı olan c_0 Riesz uzayını düşünelim. c_0 için de bir (x_n) dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$x_n := \begin{cases} e_n, & \text{eğer } n = m^3 \text{ bazı } m \in \mathbb{N} \\ \theta, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

o zaman (x_n) 'nin *is st_o -sınırlı* fakat sıra sınırlı değildir.

Örnek 4.2 E Riesz uzayı yalnızca sonlu sayıda farklı değerlere sahip dizilerden oluşan P^∞ uzayı olsun. E 'de bir (f_n) dizisini tüm $n \in \mathbb{N}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$f_n(k) := \begin{cases} \frac{1}{k}, & k = 1, 2, \dots, n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

Tüm n 'ler için $0 \leq f_n \leq k$ olduğu görülebilir (k her elemanı aynı ve 1 olan diziyi göstermektedir). Dolayısıyla (f_n) dizisi sıra sınırlıdır ve böylece st_o -sınırlıdır. Ancak istatistiksel olarak sıra yakınsak değildir.

Örnek 4.3 Yalnızca sonlu farklı terime sahip dizilerden oluşan Riesz uzayını E olarak alalım. E de $(x_n) = (x_1^k, x_2^k, \dots)$ dizisini tanımlayalım.

$$x_n^k := \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots \right)$$

$n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{N}$ $\theta \leq x_n^k \leq 1$ tüm n, k için sağlanır. Burada $\mathbb{1}$, 1'e eşit olan diziyi temsil eder. Yani (x_n) dizisi sıra sınırlı ve bununla beraber st_o -sınırlıdır. Ancak istatistiksel olarak yakınsak değildir.

Tanım 4.2 E ve F iki Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun.

- 1) Eğer $x_n \xrightarrow{st_o} x$ E 'de yakınsarken, $Tx_n \xrightarrow{st_o} Tx$ F 'de yakınsıyorsa T 'ye

istatistiksel σ -sıra sürekli operatör denir.

- 2) Eğer T operatörü istatistiksel sıra sınırlı dizileri istatistiksel sıra sınırlı dizilere taşırsa T 'ye *istatistiksel sıra sınırlı operatör* denir.

Genel olarak Riesz uzaylarındaki diziler için σ - gösteriminin kullanıldığına dikkat edilmelidir. $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ ile tek türlü olarak bir $x = x_1 + x_2$ ayrıştırmasına sahip her $x \in E$ vektörünün bir $P_B: E \rightarrow E$ olduğu bir Riesz uzayı $E = B \oplus B^d$ de bir band izdüşümü vardır ve $P_B(x) = x_1$ formülü ile tanımlanır.

Örnek 4.4 B bir izdüşüm bandı ve P_B, B 'ye karşılık gelen band izdüşümü olsun. O zaman P_B istatistiksel olarak σ -düzeyinde sürekli ve sınırlı operatördür.

İspat: $x_n \xrightarrow{st_0} x$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $\delta(K) = 1$ kümesiyle $q_n \downarrow^{st_0} \theta$ dizisi var öyle ki; $|x_{k_n} - x| \leq q_{k_n}$ eşitsizliği tüm $k_n \in K$ için sağlanır. Öte yandan, P_B 'nin $\theta \leq P_B \leq I$ sağlayan bir lattice homomorfizmi olduğu bilinmektedir. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

$$|P_B x_{k_n} - P_B x| = P_B(|x_{k_n} - x|) \leq |x_{k_n} - x| \leq q_{k_n}$$

K üzerinde elde ettiğimiz tüm $k_n \in K$ için $P_B x_{k_n} \xrightarrow{o} P_B x$ olur. Bu nedenle $P_B x_n \xrightarrow{st_0} P_B x$ sağlanır. Yani, P_B istatistiksel σ -sıra sürekli'dir. Bu durum istatistiksel sıra sınırlılık içinde benzerdir.

Teorem 4.1 Her sıra sınırlı operatör istatistiksel sıra sınırlıdır.

İspat: E ve F iki Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow F$ bir sıra sınırlı operatör olsun. (x_n) , E 'de st_0 -sınırlı bir dizi olsun. O zaman pozitif bir $w \in E$ vektörü ve her $k_n \in K$ için $|x_{k_n}| \leq w$ olacak şekilde bir $\delta(K) = 1$ indisi vardır. Bu nedenle, (Tx_{k_n}) F 'de sıra sınırlı bir dizidir, çünkü T sıra sınırlı operatördür. Bu nedenle, (Tx_n) istendiği gibi F 'de istatistiksel sıra sınırlı bir dizidir.

Bu teoremin tersinin genel olarak doğru olması gerekmediği açıktır. Ayrıca, her sıra sürekli operatörün sıra sınırlı olduğunu biliyoruz; bkz. Lemma 1.54 (Zaanen,1971). Bu da her sıra sürekli operatörünün istatistiksel olarak sıra sınırlı olduğunu ima eder.

Teorem 4.2 Her σ -sıra sürekli operatör, istatistiksel σ -sıra sürekli'dir.

İspat: E ve F iki Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow F$ bir σ -sıra sürekli operatör olsun ve $x_n \xrightarrow{st_0} x$ E 'de bir dizi olsun. O zaman her $k_n \in K$, için $|x_{k_n} - x| \leq q_{k_n}$ olacak şekilde $\delta(K) = 1$ şartını sağlayan $q_n \downarrow^{st_0} \theta$ dizisi vardır. Böylece T 'nin σ -sıra sürekliliğini kullanarak F 'de $Tx_{k_n} \xrightarrow{o} Tx$ elde ederiz. Buradan $Tx_n \xrightarrow{st_0} Tx$ olur, çünkü sıra yakınsaklığı istatistiksel sıra yakınsaklığını ifade eder.

Bu teoremin tersinin sağlanmasına gerek yoktur, çünkü (Abramovich ve Sirotkin, 2005) Örnek 3'ten görülebileceği gibi, istatistiksel sıra yakınsaklık sıra yakınsaklığı gerektirmez.

Örnek 4.5 Tüm yakınsak gerçel değerli dizilerin kümesi bir Riesz uzayıdır ve bu uzayı E olarak alalım, $F = \mathbb{R}$ olsun ve $T: E \rightarrow F$ operatörü için $T\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k$ ile bir sıra sınırlı operatörü tanımlayalım. T istatistiksel olarak σ -sıra sürekli değildir. Gerçekten de $\alpha_n = 1_{m \geq n} \xrightarrow{o} 0$ bu da $\alpha_n \xrightarrow{st_o} 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $T\alpha_n \equiv 1 \xrightarrow{st_o} 1 \neq 0$.

Teorem 4.3 E ve F Riesz uzayları olsun. O halde, E 'den F 'ye tüm istatistiksel σ -sıra sürekli operatörlerin kümesi $St_c(E, F)$ bir vektör uzayıdır.

İspat: $S, T \in St_c(E, F)$ ve $\beta \in \mathbb{R}$ olsun. E 'de $x_n \xrightarrow{st_o} x$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla $Sx_n \xrightarrow{st_o} Sx$ ve $Tx_n \xrightarrow{st_o} Tx$ sağlanır. O zaman $\delta(K) = \delta(M) = 1$ yoğunlukları ile indis kümeleri ile $p_n \downarrow^{st_o} \theta$ ve $q_n \downarrow^{st_o} \theta$ dizileri var öyle ki;

$$|Sx_{m_n} - Sx| \leq q_{m_n} \quad \text{ve} \quad |Tx_{k_n} - Tx| \leq p_{k_n}$$

tüm $m_n \in M$ ve $k_n \in K$ için sağlanır. Böylece

$|(\beta S + T)x_{j_n} - (\beta S + T)x| \leq |\beta| \cdot |Sx_{j_n} - Sx| + |Tx_{j_n} - Tx| \leq |\beta| \cdot q_{j_n} + p_{j_n}$ eşitsizliği tüm $j_n \in J := M \cap K$ için sağlanır. Bu durumda $\delta(J) = 1$ ve $(|\beta| \cdot q_{j_n} + p_{j_n}) \downarrow \theta$ olduğundan

$$(\beta S + T)x_n = \beta Sx_n + Tx_n \xrightarrow{st_o} \beta Sx + Tx = (\beta S + T)x$$

elde edilir.

Sonraki örnekte $St_c(E, F) = \emptyset$ 'nin mümkün olduğunu gösterilmektedir.

Örnek 4.6 $T: C[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$ istatistiksel olarak pozitif σ -sıra sürekli operatör. Buradan herhangi bir sabit $0 \leq h \in L_2[0,1]$ için $C[0,1]$ den \mathbb{R} ye $f \in C[0,1]$ elemanları için aşağıdaki G fonksiyonu tanımlayalım:

$$G(f) := \int_0^1 h(x)[Tf(x)]dx$$

O zaman G istatistiksel olarak σ -sıra sürekli dir. Böylece Örnek 1.58 (Zaanen, 1971) uygulayarak

$$\int_0^1 h(x)[Tf(x)]dx = 0$$

her $h \in L_2[0,1]$ ve tüm $f \in C[0,1]$ için elde edilir. Dolayısıyla istediğimiz gibi $T = \theta$ dir.

Hatırlayalım ki eğer F Dedekind tam bir Riesz uzayı ise $T \in L_b(E, F)$ sıra sınırlı operatörün $|T|$ modül operatörü vardır; bkz. Theorem 1.67 (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006). $|T(x)| \leq |T|(|x|)$ formülünden de anlaşılacağı gibi eğer bir T operatörü istatistiksel olarak σ -sıra sürekli (istatistiksel sıra sınırlı) $|T|$ modülüne sahipse, o zaman T aynı zamanda istatistiksel σ -sıra süreklidir (istatistiksel sıra sınırlıdır).

Teorem 4.4 $T: E \rightarrow F$ ve aynı zamanda $|T|$ modülüne sahip istatistiksel sıra sınırlı bir operatör ise, o zaman $|T|$ istatistiksel sıra sınırlıdır.

İspat: (x_n) , E' de istatistiksel sıra sınırlı bir dizi olsun. O zaman pozitif bir $w \in E$ vektörü ve her $k_n \in K$ için $|x_{k_n}| \leq w$ olacak şekilde bir $\delta(K) = 1$ indisi vardır. Bununla beraber Lemma 1.6 (Zaanen, 1971) uygulanırsa ;

$$|T(x_{k_n})| \leq |T|(|x_{k_n}|) \leq |T|(w) \in F_+$$

her $k_n \in K$ için sağlanır çünkü $|T|$ pozitif bir operatördür. Buradan istenilen sonucu elde ederiz.

Soru 4.1 $T: E \rightarrow F$, $|T|$ modülüne sahip istatistiksel sıra sürekli bir operatör olsun. O halde

$|T|$ istatistiksel sıralı sürekli midir?

Eğer bir $S: X \rightarrow Y$ operatörü için $|Sx| \leq T(|x|)$ eşitsizliği bütün $x \in X$ elamanları için sağlayacak başka bir pozitif $T: X \rightarrow Y$ operatörü bulunabilir ise bu T operatörü S operatörünü domine eder denir.

Teorem 4.5 $T: E \rightarrow F$ istatistiksel σ -sıra sürekli (istatistiksel sıra sınırlı) bir pozitif operatör olsun ve $S: E \rightarrow F$ sağlasın, o zaman S aynı zamanda istatistiksel σ -sıra süreklidir (istatistiksel sıra sınırlıdır).

İspat: Kabul edelim ki E' de $x_n \xrightarrow{sto} x$ olsun. O halde her $k_n \in K$ için $|x_{k_n} - x| \leq q_{k_n}$ ve $\delta(K) = 1$ olacak şekilde $q_n \downarrow^{sto} \theta$ dizisi ve indis kümesi vardır. Buradan

$$|Sx_{k_n} - Sx| \leq T|x_{k_n} - x|$$

eşitsizliği ile istenen sonuç elde edilir. Sıra sınırlı durum içinde benzerdir.

Aşağıdaki teoremden, Soru 4.1'in kısmi bir cevabını almış olacağız.

Teorem 4.6 $T: E \rightarrow \mathbb{R}$ bir sıra sınırlı fonksiyonel olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) T istatistiksel σ -süreklidir.
- (ii) T^+ istatistiksel σ -süreklidir.
- (iii) T^- istatistiksel σ -süreklidir.
- (iv) $|T|$ istatistiksel σ -süreklidir.

İspat: (i) \Rightarrow (ii) E' de $x_n \xrightarrow{st_0} \theta$ sağlansın. Teorem 1.18 (Zaanen, 1971) uygulanırsa

$$T^+x = \sup\{Ty: \theta \leq y \leq x\}$$

elde edilir. Çünkü \mathbb{R} bir Dedekind tam Riesz uzayıdır. Şimdi, \mathbb{R}' de bir $t_n \downarrow \theta$ dizisi alalım. Böylece, her $n \in \mathbb{N}$ için $\theta \leq y_n \leq x_n$ ve $T^+(x_n) - t_n \leq Ty_n$ olacak şekilde bir $y_n \in E$ ögesi bulabiliriz. Dolayısıyla, her n için $T^+x_n \leq t_n + Ty_n$ bulunur. Öte yandan, T 'nin istatistiksel sıra sürekliliğini kullanarak $Ty_n \xrightarrow{st_0} \theta$ ve böylece $(t_n + Ty_n) \xrightarrow{st_0} \theta$ elde edilir, çünkü $t_n \downarrow \theta$ ise $t_n \xrightarrow{st_0} \theta$ 'dir. Dolayısıyla $T^+x_n \xrightarrow{st_0} \theta$ elde edilir. Böylece istendiği gibi istatistiksel σ -sıra süreklidir.

(ii) \Rightarrow (iii) $T^- = (-T)^+$ eşitliğini göz önünde bulundurarak T^- 'nin istatistiksel sıra sürekliliğini elde edebiliriz.

(iii) \Rightarrow (iv) $|T| = T^+ + T^-$ ve $T^+ = (-T)^-$ 'yi kullanarak istediğimiz sonucu elde ederiz.

(iv) \Rightarrow (i) $|T|$ pozitif operatör olduğundan ve T 'ye sahip olduğundan, Teorem 4.5'ten yola çıkarak, $|T|$ istatistiksel σ -sıra sürekli olduğunda T 'nin de istatistiksel σ -sıra sürekli olduğu sonucu elde edilir.

Teorem 4.7 $T: E \rightarrow F$ pozitif ve istatistiksel σ -sıra sürekli bir operatör olsun. O zaman T σ -sıra süreklidir.

Teoremi ispatlamadan önce şu açıklamayı yapalım.

Önerme 4.1 Riesz uzaylarında monoton ve st_0 -yakınsak bir dizi st_0 -limitine sıra yakınsar. Gerçekten, E Riesz uzayı üzerinde $x_n \downarrow$ ve $x_n \xrightarrow{st_0} x$ in olduğunu varsayalım. Keyfi bir $m \in \mathbb{N}$ alalım. Yani tüm $n \geq m$ için $x_m - x_n \in E_+$ olur. Böylece $x_m - x_n \xrightarrow{st_0} x_m - x \in E_+$ için $x_m \geq x$ olduğu sonuca çıkar. x , (x_n) dizisinin bir alt sınırı olur çünkü m keyfidir. Her n için $x_n \geq y$ ise, $x_n - y \xrightarrow{st_0} x - y \in E_+$ buradan $x \geq y$ elde ederiz. Böylece $x_n \downarrow x$ istediğimiz gibi elde ederiz; bkz Theorem 6 (Abramovich ve Sirotkin, 2005).

İspat: $T: E \rightarrow F$ pozitif bir operatör ve E' de $x_n \downarrow \theta$ olsun. O halde $x_n \xrightarrow{st_0} \theta$ (Abramovich, 2005). Burada varsayımımızdan ötürü $Tx_n \xrightarrow{st_0} \theta$. Önerme 4.1 i uygularsak $Tx_n \downarrow$ ve $Tx_n \downarrow \theta$ sonucuna ulaşırız. Böylece T σ -sıra süreklidir. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

Teorem 4.8 $T: E \rightarrow F$ bir pozitif operatör ve F bir Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Bu durumda E 'den F 'ye tüm $x \in E_+$ elamanları için aşağıdaki şekilde tanımlanan bir \tilde{T} operatörü σ -sıra sürekli olur.

$$\tilde{T}(x) := \inf \left\{ \sup T(x_n) : \theta \leq x_n \uparrow \text{ and } x_n \xrightarrow{st_0} x \right\}.$$

İspat: Kabul edelim ki $\theta \leq x_n \uparrow$ ve $x_n \xrightarrow{st_0} x$ E 'de sağlansın. O halde bir $q_n \downarrow^{st_0} \theta$ dizisi ile $\delta(K) = 1$ indis kümesi var öyle ki $|x_{k_n} - x| \leq q_{k_n}$ eşitsizliği her $k_n \in K$ ve $x_{k_n} \xrightarrow{o} x$ K 'da sağlanır. $k_n \in K$ için keyfi bir $\varepsilon > 0$ alalım. Buradan yola çıkarak Teorem 1.66 (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006) göz önünde bulundurursak $T_{k_n}: E^+ \rightarrow F^+$ operatörünü aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz;

$$T_{k_n}(u) = \sup \{Tv : v \in I_{k_n} \text{ ve } \theta \leq v \leq u\}$$

$u \in E_+$. Böylece $(\varepsilon x - x_{k_n})^+$ tarafından üretilen I_{k_n} ideali üzerinde T ile eşit olur ve ayrıca $(\varepsilon x - x_{k_n})^-$ üzerinde sıfır değerini alır. Dolayısıyla her bir $k_n \in K$ için $\theta \leq T_{k_n} \downarrow \leq T$ ve $T_{k_n}(x_{k_n} - \varepsilon x)^+ = \theta$ sağlanmış olur. Şimdi $T_n \xrightarrow{st_0} G$ yani $T_{k_n} \downarrow G \in \mathcal{L}_b(E, F)$ olduğunu varsayalım. Buradan her $k_n \in K$ için $\theta \leq (x_{k_n} - \varepsilon x)^+ \uparrow (x - \varepsilon x) = (1 - \varepsilon)x$ ve $G(x_{k_n} - \varepsilon x)^+ = \theta$ olur. $\tilde{G}(x) = \inf \{ \sup G(x_{k_n}) : \theta \leq x_n \uparrow \text{ ve } x_n \xrightarrow{st_0} x \} = \theta$ elde edilir. Öte yandan $\theta \leq x - x_{k_n} \leq (1 - \varepsilon)x + (\varepsilon x - x_{k_n})^+$ eşitsizliğinden

$$\theta \leq \tilde{T}(x - x_{k_n}) \leq (1 - \varepsilon)\tilde{T}x + \tilde{T}(\varepsilon x - x_{k_n})^+ \quad (*)$$

elde edilir. Bu nedenle bizde

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\varepsilon x - x_{k_n})^+ &= \inf \left\{ \sup (Tz_n) : \theta \leq z_n \uparrow \text{ and } z_n \xrightarrow{st_0} (\varepsilon x - x_{k_n})^+ \right\} \\ &= \inf \left\{ \sup (T_{k_n}z_n) : \theta \leq z_n \uparrow \text{ and } z_n \xrightarrow{st_0} (\varepsilon x - x_{k_n})^+ \right\} \\ &= \tilde{T}_{k_n}(\varepsilon x - x_{k_n})^+ \\ &\leq \tilde{T}_{k_n}x \end{aligned}$$

elde ederiz, çünkü $\theta \leq z \leq (\varepsilon x - x_{k_n})^+$ ise $Tz = T_{k_n}z$ dir. Dolayısıyla (*) eşitsizliğinden

$$\theta \leq \tilde{T}(x - x_{k_n}) \leq (1 - \varepsilon)\tilde{T}x + \tilde{T}_{k_n}x \quad (**)$$

elde edilir. Teorem 1.59 (Zaanen, 1971) ele alındığında $T \rightarrow \tilde{T}$ operatörü σ -sıra sürekli operatördür. Böylece $T_{k_n} \downarrow G$ ise $\tilde{T}_{k_n} \downarrow \tilde{G}$ olur. Dolayısıyla Teorem VII. 2.3. (Vulikh,

1967) uygulandığında $\tilde{T}_{k_n}(x) \downarrow \tilde{G}(x) = \theta$ sağlanır. Bu nedenle (**) eşitsizliğinden $\theta \leq \inf_{k_n} \{\tilde{T}(x - x_{k_n})\} \leq (1 - \varepsilon)\tilde{T}x$ elde edilir. Buradan istenildiği gibi $\tilde{T}(x - x_{k_n}) \downarrow \theta$, yani $\tilde{T}(x - x_n) \xrightarrow{st_0} \theta$ elde etmiş oluruz.

Hatırlatma: A 'daki $0 \leq x_n \uparrow x$ dizisi için bir $x \in A$ 'ya sahipsek bir Riesz uzayının A idealinin σ -ideal olarak adlandırıldığını hatırlayalım. E ve F Riesz uzayları arasında tanımlanan T operatörünün lattice homomorfizması olması için her x ve y elemanları için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ eşitliği sağlanmalıdır.

Teorem 4.9 $T: E \rightarrow F$ bir lattice homomorfizması olsun. O zaman $\text{Ker}(T)$, E 'nin σ -ideali ise T istatistiksel σ -sıra süreklidir.

İspat: Kabul edelim ki $(x_n) \text{Ker}(T)$ üzerinde $\theta \leq x_n \uparrow x$ sağlayacak şekilde bir dizi olsun. Böylece $x_n \xrightarrow{st_0} x$ sağlanır. Teorem 1.31 (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006) uygulandığında lattice homomorfizmanın çekirdeğinin bir ideal olduğu görülür. Dolayısıyla T istatistiksel sıra sürekli olduğundan $T(x_n) \xrightarrow{st_0} T(x)$, yani $T(x_{k_n}) \xrightarrow{0} T(x)$. Buradan $T(x) = \theta$ bulunur. Böylece $x \in \text{Ker}(T)$ elde edilir. Bu nedenle $\text{Ker}(T)$ σ -idealdir.

Tersine $\text{Ker}(T)$ nin σ -ideal olduğunu kabul edip, T 'nin istatistiksel σ -sıra sürekli olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $x_n \xrightarrow{st_0} \theta$ E 'de bir dizi olsun. O halde $|x_{k_n}| \leq q_{k_n}$ olacak şekilde $\delta(K) = 1$ indisli $q_n \downarrow^{st_0} \theta$ dizisi vardır. Böylece $|Tx_{k_n}| = T|x_{k_n}| \leq Tq_{k_n}$ eşitsizliği tüm $k_n \in K$ için sağlanır, çünkü T pozitifdir. Her $k_n \in K$ için $\theta \leq w \leq Tq_{k_n}$ olduğunu varsayalım. O halde bazı $z \in E_+$ için $Tz = w$ olur çünkü T örten bir lattice homomorfizmadır. Böylece $\theta \leq (z - q_{k_n})^+ \xrightarrow{st_0} z$ sahip oluruz. Buradan $T(z - q_{k_n})^+ = (Tz - Tq_{k_n})^+ = (w - Tq_{k_n})^+ = \theta$ elde edilir. Bununla beraber her k_n için $(z - q_{k_n})^+ \in \text{Ker}(T)$ olur. Şimdi $\text{Ker}(T)$ 'nin σ -idealliklerinden bir $z \in \text{Ker}(T)$ alalım. Böylece $w = Tz = \theta$ olur. Bu nedenle $Tq_{k_n} \xrightarrow{0} \theta$ ve $Tx_n \xrightarrow{st_0} \theta$.

İki Riesz uzayı arasındaki sıra sınırlı operatörün adjoint operatörünün sıra sınırlı ve sıra sürekli olduğunu hatırlayalım; bkz Teorem 1.73 (Zaanen, 1971). Aynı zamanda E üzerindeki tüm sıralı sınırlı doğrusal fonksiyonellerin vektör uzayı E^\sim , E 'nin sıra dualidir. Bir E Riesz uzayı için;

$$E_{st}^\sim := \{f: E \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ istatistiksel } \sigma\text{-sıra sürekli} \}$$

E 'nin istatistiksel olarak σ -sıralı sürekli duali olarak ele alınabilir. Aşağıdaki sonuç ile benzer bir durumu inceleyebiliriz.

Teorem 4.10 $T: E \rightarrow F$ sıra sınırlı ve istatistiksel σ -sıra sürekli operatör olsun. O halde $T^\sim: F^\sim \rightarrow E_{st}^\sim$ tanımlanan $T^\sim(f)(x) := f(Tx)$ operatörü istatistiksel σ -sıra sürekli, burada F^\sim , F 'nin σ -sıra sürekli dualidir.

İspat: Öncelikle her bir $f \in F^\sim$ için $T^\sim(f) \in E_{st}^\sim$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $x_n \xrightarrow{st_0} \theta$ E 'de sağlansın. T istatistiksel σ -sıra sürekli olduğundan $Tx_n \xrightarrow{st_0} \theta$ yakınsaması F 'de sağlanır. f istatistiksel σ -sıra sürekli olduğundan $f(Tx_n) \xrightarrow{st_0} \theta$ ya da $(f \circ T)(x_n) \xrightarrow{st_0} \theta$ olur. Böylece $f \circ T \in E_{st}^\sim$ elde edilir. Şimdi kabul edelim ki $\theta \leq f_n \xrightarrow{st_0} \theta$ yakınsaması F^\sim de sağlansın. $T^\sim f_n \xrightarrow{st_0} \theta$ ya da $f_n \circ T \xrightarrow{st_0} \theta$ olduğunu gösterelim. $x \in E_+$ keyfi bir elemanını alalım. Böylece bazı $u \in F_+$ için $|Ty| \leq u$ eşitsizliği tüm $|y| \leq x$ için sağlanır. Dolayısıyla tüm pozitif $f \in F^\sim$ için $[|T^\sim(f)|](x) \leq f(u)$ veya $f(|T|(x)) \leq f(u)$ sağlanır. Bu nedenle tüm n için $f_n(|T|(x)) \leq f_n(u)$ olur. Öte yandan $k_n \in K$ için $f_{k_n} \leq g_{k_n}$ olacak şekilde $\delta(K) = 1$ indisli F^\sim 'de $g_n \downarrow^{st_0} \theta$ dizisi vardır. Bu nedenle $f_n \xrightarrow{st_0} \theta$ olduğundan K 'da $f_{k_n} \xrightarrow{o} \theta$ olur. Burada Theorem VIII.2.3 (Vulikh, 1967) göz önünde bulundurulduğunda $g_{k_n}(u) \downarrow \theta$ elde edilir. Bu nedenle $f_{k_n}(|T|(x)) \downarrow \theta$ veya $[|T^\sim|f_{k_n}](x) \downarrow \theta$. Yani $|T^\sim|$ istatistiksel σ -sıra sürekli. Teorem 4.6 dan T^\sim 'nin de istatistiksel σ -sıra sürekli olduğu sonucu çıkar.

KAYNAKLAR

- Abramovich, Y.A., Aliprantis, C. D., 2002. An invitation to operator theory, American Mathematical Society, Rhoda Island, 50.
- Abramovich, Y.A., Sirotkin G., 2005. On order convergence of nets, *Positivity*, 9(3), 287-292.
- Abramovich, Y.A., Sirotkin G., 2005. On order convergence of nets, *Positivity*, 9(3), 287-292.
- Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 2006, Positive operators, Springer, Dordrecht, 119.
- Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 2003. Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics, second Edition, Mathematical Surveys and Monographs Centrum, Indianapolis, 105.
- Albayrak, H., Pehlivan, S., 2012, Statistical convergence and statistical continuity on locally solid Riesz spaces, *Topology and its Applications*, 159(7), 1887-1893.
- Aydın, A. 2020. The statistically unbounded τ -convergence on locally solid Riesz spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 44 (3), 949-956.
- Aydın, A. 2021. The statistical multiplicative order convergence in Riesz algebras, *Facta Universitatis Series*, 36 (2), 409-417.
- Aydın, A. 2020a. Multiplicative order convergence in f-algebras, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 49(3), 998-1005.
- Aydın, A., 2020b. Hahn-Banach theorem for operators on the lattice normed f-algebras, *MSU journal of science*, 8(1), 737-741.
- Aydın, A., Emelyanov, E., Gorokhova, S. 2021. Full lattice convergence on Riesz spaces, *Indagationes Mathematicae*, 32 (3), 658-690.
- Aydın, A., Temizsu, F. 2021. Statistical convergence of nets in Riesz spaces, arXiv preprint arXiv:2105.08420.
- Aydın, A., Gorokhova, S., Selen, R., Solak, S. 2023. Statistically order continuous operators on Riesz spaces. *Maejo International Journal of Science and Technology*, 17 (1), 1-9.
- Buck, R.C. 1953. Generalized asymptotic density, *American journal of mathematics*, 75 (2), 335-346.
- Connor, J. 1988. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, *Analysis*, 8 (1-2), 47-64.
- De Pagter, B., 1981. "f-Algebras and Orthomorphisms", Doctor of philosophy Dissertation, Mathematics, Leiden University, Leiden.
- Ercan, Z. 2009. A characterization of u-uniformly completeness of Riesz spaces in terms of statistical u-uniformly pre-completeness, *Demonstratio Mathematica*, 42 (2), 381-386.
- Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique, *Colloquium mathematicae*, 241-244.
- Fridy, J. 1993. Statistical limit points, *Proceedings of the American mathematical society*, 118 (4), 1187-1192.

- Fridy, J., Orhan, C. 1997. Statistical limit superior and limit inferior, *Proceedings of the American mathematical society*, 125 (12), 3625-3631.
- Fridy, J.A. 1985. On statistical convergence, *Analysis*, 5 (4), 301-314.
- Gutman, A. 1996. Disjointness preserving operators. in: *Vector Lattices and Integral Operators*, Springer, pp. 359-454.
- Huijsmans, C. 1991. Lattice-ordered algebras and f-algebras: a survey, *Positive operators, Riesz spaces, and economics (Pasadena, CA, 1990)*, 151-169, Springer, Berlin.
- Kostyrko, P., Mačaj, M., Šalát, T., Strauch, O. 2001. On statistical limit points, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129 (9), 2647-2654.
- Kusraev, A., Kutateladze, S. 2020. Some applications of Boolean valued analysis, *Journal of Applied Logics If CoLog Journal of Logics and their Applications*, 7 (4).
- Maddox, I., 1988. Statistical convergence in a locally convex space, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press, 141-145.
- Meyer-Nieberg, P., Schaefer, H. 1995. Banach lattices, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 97 (1), 12-12.
- Niven, I., Zuckerman, H.S., Montgomery, H.L., 1991. *An introduction to the theory of numbers*, John Wiley & Sons.
- Pehlivan, S., Mamedov, M.A., 2000, Statistical cluster points and turnpike, *Optimization*, 48(1), 91-106.
- Rath, D., Tripathy, B. 1994. On statistically convergent and statistically Cauchy sequences, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 25, 381-381.
- Riesz, F., 1928. Sur la decomposition des operations fonctionelles lineaires. *Internazionale dei Matematici*, 3, 143-148.
- Šalát, T. 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica slovacica*, 30 (2), 139-150.
- Schoenberg, I. 1959. The integrability of certain functions and related summability methods, *The American mathematical monthly*, 66 (5), 361-775.
- Steinhaus, H., 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloquium Mathematicum*, 2, 73-74.
- Şençimen, C., Pehlivan, S., 2012, Statistical order convergence in Riesz spaces, *Mathematica Slovaca*, 62(2), 257-270.
- Tripathy, B. 1997. On statistically convergent and statistically bounded sequences, *Bull. Malays. Math. Soc*, 20 (1), 31-33.
- Tripathy, B.C., 1998. On statistical convergence, *Proceedings-estonian academy of sciences physics mathematics, tallinn technical university and the estonian academy of sciences*, 299-303.
- Vulikh, B.Z., 1967. *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Wolters-Noordhoff Scientific Publications, Groningen.
- Wickstead, A. 2001. Kusraev, AG Dominated operators (Mathematics and its Applications, vol. 519, Kluwer, 2000), xiii+ 446 pp., 0 792 36485 6 (hardback),£ 120, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 44 (3), 665-666.

W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, "Riesz Spaces I", North Holland Publishing, Amsterdam, 1971, pp.1-514.

Zaanen, A.C., 1983. Riesz spaces II, Elsevier, The Netherlands: North-Holland Publishing, Amsterdam, 30.

Zygmund, A., 1935, Trigonometric Series, Monografie Matematyczne, 5, 331.

