T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI EN İYİ YAKINLIK NOKTASI TEOREMLERİ

Melik DİNÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2021
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI EN İYİ YAKINLIK NOKTASI TEOREMLERİ

Melik DİNÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin IŞIK

Ağustos-2021
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Melik Dinç tarafından hazırlanan “**Bazı En İyi Yakınlık Noktası Teoremleri**” adlı tez çalışması 03/08/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..
Danışman	
Doç. Dr. Hüseyin IŞIK Bandırma Onyedi Eylül Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Mühendislik Temel Bilimleri Bölümü	…………………..
Üye	
Doç. Dr. Özgür EGE Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu …../……/……. Tarih ve ………/………. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Melik DİNÇ

Tarih: 03/08/2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI EN İYİ YAKINLIK NOKTASI TEOREMLERİ

Melik DİNÇ

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin IŞIK

Bu tez çalışmasında ilk olarak, sabit nokta teorisinin tarihsel gelişimi kısaca verildi. Ardından tezin okunurluğunu kolaylaştırmak ve anlaşılmasını sağlamak amacıyla temel tanım ve teoremler verilerek, bu tanım ve teoremlerle ilgili örnekler verildi. Son olarak, kendi üzerine olmayan tek değerli büzülme dönüşümleri, küme değerli büzülme dönüşümleri, zayıf proksimal Kannan büzülme dönüşümleri ve Geraghty tipi büzülme dönüşümlerinin en iyi yakınlık noktalarının varlığı ve tekliği üzerine teoremler verilerek, bu teoremleri destekleyen bazı örnekler verildi.

2021, 46 Sayfa

Anahtar Kelimeler: En iyi yakınlık noktası, Geraghty büzülme dönüşümü, Kannan büzülme dönüşümü, Küme değerli büzülme dönüşümleri, P-özelliği, Sabit nokta.

ABSTRACT

MS THESIS

SOME BEST PROXIMITY POINT TEOREMS

Melik DİNÇ

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Hüseyin IŞIK

In this thesis, firstly, the historical development of fixed point theory is given briefly. Subsequently, in order to make the thesis easier to read and understand, basic definitions and theorems were given, and examples were given about these definitions and theorems. Finally, theorems on the existence and uniqueness of best proximal point of nonself single-valued contraction maps, set-valued contraction maps, weak proximal Kannan contraction maps and Geraghty-type contraction maps are given and some examples supporting these theorems are given.

2021, 46 Pages

Keywords: Best proximal point, Geraghty contraction map, Kannan contraction map, Set-valued contraction maps, P-property, Fixed point.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın hazırlanmasında emeği bulunan başta ailem olmak üzere, bu tezin hazırlanması süresince, her anlamda benden desteğini eksik etmeyen, akademik gelişmemde bilgi ve becerilerini paylaşarak bana yardımcı olan, rehberliği ile bana yol gösteren danışman hocam Doç. Dr. Hüseyin IŞIK'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Melik DİNÇ
MUŞ-2021

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$CB(X)$	: X in boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi
$CL(X)$	: X in boştan farklı kapalı alt kümelerinin ailesi
$K(X)$	: X in boştan farklı kompakt alt kümelerinin ailesi
$\mathcal{P}(X)$	: X in boştan farklı tüm alt kümelerinin ailesi
$C(I,R)$	: I dan R ye sürekli fonksiyonların kümesi
$dist(A,B)$	: A ve B kümeleri arasındaki uzaklık
$Card\ A$	: A kümesinin kardinali
X'	: X normlu uzayının duali

1. GİRİŞ

Sabit nokta çalışmaları; bir dönüşümün sabit noktasının hangi şartlar altında var olduğunu, varsa tek olup olmadığını ve nasıl bulunabileceğini inceler. X boş olmayan bir küme ve T dönüşümü X den X e tanımlı olsun. Bu takdirde $T(x) = x$ denklemini sağlayan $x \in X$ noktalarına T dönüşümünün sabit noktaları denir. Örneğin; $X = [0,1]$ aralığında tanımlı $f(x) = x^2$ ve $g(x) = 2x$ dönüşümlerini ele alırsak, f nin ($x = 0$ ve $x = 1$) iki tane sabit noktası vardır fakat g dönüşümünün ($x = 0$) bir tane sabit noktası vardır. Ayrıca f ve g dönüşümlerini $Y = (0,1]$ aralığında tanımlarsak f dönüşümünün ($x = 1$) bir tane sabit noktası kaldığı gibi g dönüşümünün ise hiç sabit noktası kalmaz. Örnekten de anlaşılacağı üzere sabit noktanın varlığı tanımlanan aralığa bağlı olduğu gibi dönüşümün niteliğine de bağlıdır. Böyle bir dönüşümün sabit noktalarının varlığı, niteliği ve sayısı hakkında bilgi veren çok değişik teoremler vardır ve bu teoremler Sabit Nokta Teoremleri olarak adlandırılır. Sabit nokta teoremlerinin uygulama alanı son derece geniştir.

Sabit nokta teorisi, matematiğin; fonksiyonel analiz, genel topoloji, diferansiyel denklemler, cebir ve geometri gibi alt dallarının yanı sıra; fen bilimleri, istatistik, mühendislik bilimleri ve ekonomi gibi farklı alanlarda da geniş çalışma alanlarına sahiptir. Bu yüzden bu konuda birçok farklı çalışma yapılmıştır ve halen yapılmaya devam etmektedir. Sabit nokta teorisinin geçmişi 19. yüzyılın son zamanlarına özellikle diferansiyel denklemler üzerindeki çalışmalarda kullanılan yaklaşım yöntemlerine kadar dayanmaktadır. Burada kullanılan yaklaşım yöntemleri Cauchy (1884), Liouville (1836), Lipschitz (1877), Peano (1885-1886-1889) ve en önemlisi Picard (1890) ile bilinmektedir. Daha sonra 1910 yılında Brouwer tarafından sonlu boyutlu uzaylarda verilen bir teorem ile daha dikkat çekici hale gelmiştir. Ardından Schauder, R^n yerine Banach uzayını alarak Brouwer teoremini bazı ek şartlarla birlikte sonsuz boyutlu uzaylara şu şekilde genişletmiştir: "Bir Banach uzayının kompakt ve konveks bir alt kümesinden kendi üzerine tanımlı sürekli her dönüşüm bir sabit noktaya sahiptir." Sonrasında 1922 yılında Banach tam metrik uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmalarını başlatmış ve büzülme dönüşümü prensibi olarak da bilinen "(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ büzülme dönüşümü olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ sabiti varsa T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir." teoremini ifade ve ispat etmiştir. Metrik uzayda büzülme dönüşümünün en anlaşılır tanımı, farklı iki noktanın görüntüleri arasındaki uzaklığın bu noktalar arasındaki uzaklıktan daha küçük olmasıdır. Bu sebeple her büzülme dönüşümü süreklidir. O halde doğal olarak “sürekli olmayan dönüşümler de bir tek sabit noktaya sahip midir? Sürekli olmayan dönüşümlerin bir tek sabit noktaya sahip olduğu gösterilebilir mi?" gibi sorular ortaya çıkmıştır. 1968'de Kannan, büzülme şartının yerine $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olacak şekilde;

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

eşitsizliğini kullanarak bu sorunun cevabının olumlu olduğunu göstermiştir (Kannan, 1968). Bu koşulu sağlayan dönüşümler Kannan büzülme dönüşümü olarak adlandırılır.

Bir (X, d) tam metrik uzayı için X de kendi üzerine tanımlı her Kannan büzülme dönüşümünün tek bir sabit noktası vardır (Kannan, 1969). Burada büzülme dönüşümü ile Kannan büzülme dönüşümü birbirinden bağımsızdır. Yani, Kannan büzülme dönüşümü olmayan bir büzülme dönüşümü vardır ve büzülme dönüşümü olmayan bir Kannan büzülme dönüşümü vardır. Böylece dönüşümlerin bu iki sınıfı direkt olarak kıyaslanamaz.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Kikkawa ve Suzuki (2008) çalışmasında Kannan'ın sabit nokta teoreminin bir genişlemesi olan aşağıdaki sabit nokta teoremini elde etmiştir.

Teorem 2.1

$$\phi(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{1+r}, & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1. \end{cases}$$

ile verilen ϕ, $[0,1)$ den $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ e tanımlı artmayan bir fonksiyon olsun. (X, d) bir tam metrik uzay ve T, X üzerinde kendi üzerine tanımlı bir dönüşüm olsun. $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ ve $r := \frac{\alpha}{1-\alpha}$ olarak alınsın. Eğer her $x, y \in X$ için $\phi(r)d(x, Tx) \leq d(x, y)$ iken

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

ise, o zaman T nin bir tek z sabit noktası vardır ve her $x \in X$ için $\lim_{n} T^n x = z$ sağlanır (Kikkawa ve Suzuki, 2008).

Teorem 2.1 de tanımlanan $\phi(r)$ her bir r için en iyi sabittir (Kikkawa ve Suzuki, 2008).

Banach büzülme prensibinin bir diğer genelleştirmesi Geraghty (1973) yılındaki çalışmada verilmiştir.

Teorem 2.2 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \beta\big(d(x, y)\big) \cdot d(x, y) \tag{2.1}$$

olacak şekilde $\beta(t_n) \to 1$ iken $t_n \to 0$ koşulunu sağlayan $\beta: [0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonu varsa, o zaman T nin yalnız bir sabit noktası vardır (Geraghty, 1973).

$\beta(t) = k$ fonksiyonu sabit olduğundan yukarıda verilen şartı sağlar ve dolayısıyla Teorem 2.2, Banach büzülme prensibinin bir genişlemesidir. Burada $k \in [0,1)$ bir sayıdır.

Not 2.1 β fonksiyonu 1 den kesin küçük olduğundan (2.1) eşitsizliğinden her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y),$$

yazılabilir ve böylece (2.1) şartını sağlayan herhangi bir $T: X \to X$ dönüşümü süreklidir (Geraghty, 1973).

Bir (X, d) tam metrik uzayı üzerinde herhangi bir sabit noktası olmayan dönüşümler de mevcuttur. Yani herhangi bir $x \in X$ için $d(x, Tx) > 0$ olacak şekilde dönüşümler bulunabilir. Bu durumda $d(x, Tx)$ ifadesinin en küçük değerinin varlığını ve tekliğini sorgulamak oldukça doğaldır. İşte bu en iyi yaklaşım teorisinin ana motivasyon kaynağıdır.

A kümesi bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan alt kümesi ve $T: A \to X$ bir dönüşüm olsun. $Tx = x$ denkleminin çözümleri T nin sabit noktalarıdır. Şu halde $T(A) \cap A \neq \emptyset$ olması T operatörü için bir sabit noktanın varlığı için gerekli bir koşuldur. Eğer bu koşul sağlanmaz ise, o zaman herhangi bir $x \in A$ için $d(x, Tx) > 0$ olduğu görülür. Bu durumda $d(x, Tx)$ ifadesini minimum yapan $x \in A$ elemanlarının bulunması gereklidir.

A ve B, bir (X, d) tam metrik uzayının boş olmayan herhangi iki alt kümesi olsun ve $T: A \to B$ dönüşümü göz önüne alınsın. $d(x_0, Tx_0) = min\{ d(x, Tx): x \in A\}$ olacak şekilde bir $x_0 \in A$ elemanının varlığını sorgulamak doğaldır. Herhangi bir $x \in A$ için $d(x, Tx) \geq d(A, B)$ olduğundan, bu problemin optimal çözümü $\rho(x) = d(x, Tx)$ ile verilen $\rho: A \to R$ reel değerli fonksiyonu ile elde edilen $d(A, B)$ değeri için olacaktır.

En iyi yakınlık noktası üzerine yapılan bazı çalışmalar Sadiq Basha ve ark. (2001), Suzuki ve ark. (2009), Di Bari ve ark. (2008) ve Elred ve Veeramani (2006), Al-Thagafi ve Shanzad (2009), Anuradha ve Veeramani (2009), Caballero ve ark. (2012), Eldred ve Veeramani (2006), Kirk ve ark. (2003), Sadiq Basha ve Veeramani (2000), Sankar Raj (2011) ve Sankar Raj ve Veeramani (2009) olarak sıralanabilir.

Teorem 2.3 (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Eğer T, X üzerinde kendi üzerine bir dönüşüm ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(Tx, y) \tag{2.2}$$

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ ve $\beta \in [0, \infty)$ sayıları varsa, o zaman her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına yakınsar (Berinde, 2004).

Teorem 2.4 (X, d) bir tam metrik uzay ve T, X üzerinde kendi üzerine bir dönüşüm olsun. $\theta: [0,1) \to \left(\frac{1}{2}, 1\right]$,

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \text{ için} \\ \dfrac{1 - r}{r^2}, & \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \leq r \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ için} \\ \dfrac{1}{1 + r}, & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \text{ için} \end{cases} \tag{2.3}$$

ile tanımlanan azalmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için $\theta(r) d(x, Tx) \leq d(x, y)$ iken

$$d(Tx, Ty) \leq r d(x, y)$$

olacak şekilde bir $r \in [0,1)$ sayısı varsa, o zaman T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır (Suzuki, 2008).

Suzuki (2008) yılındaki çalışmasında, her bir $r \in [0,1)$ için $\theta(r)$ sayısının en iyi sabit olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmanın kalanında, bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan iki alt kümesi A ve B için A_0 ve B_0 kümeleri

$$A_0 \coloneqq \{x \in A: d(x,y) = dist(A,B) \text{ bazı } y \in B \text{ için }\}$$

$$B_0 \coloneqq \{y \in B: d(x,y) = dist(A,B) \text{ bazı } x \in A \text{ için }\}$$

olarak tanımlansın. Eğer (A, B) çifti bir X Banach uzayının boş olmayan ve zayıf kompakt alt kümeleri ise, o zaman (A_0, B_0) çifti X in boş olmayan alt kümeleridir.

Caballero ve ark. (2012) yılındaki çalışmasında bu tanımdan yararlanarak aşağıdaki sonucu elde etti.

Teorem 2.5 (A, B) çifti $A_0 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir (X, d) tam metrik uzayının boş olmayan kapalı iki alt kümesi olsun. $T: A \to B$ dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ olacak şekilde bir Geraghty büzülme olsun. Eğer (A, B) çifti P-özelliğini sağlıyorsa, o zaman $d(x^*, Tx^*) = d(A, B)$ olacak şekilde bir tek $x^* \in A$ noktası vardır (Caballero ve ark., 2012).

Almeida ve ark. (2013) yılındaki çalışmasında Caballero ve ark. (2012) çalışmasının bir genişlemesi ve genelleştirmesi olarak Geraghty tipi büzülme dönüşümleri için en iyi yakınlık noktasının varlığı ve tekliği üzerine bazı teoremler vermiştir.

Gabeleh (2013) yılındaki çalışmasında, kendi üzerine olmayan bir T dönüşümü için $x \longmapsto d(x, Tx)$ reel değerli fonksiyonunu minimize eden lineer olmayan programlama problemi üzerine çalışmıştır. Özellikle, Kannan tipinde kendi üzerine olan dönüşümler için sabit noktanın varlık ve tekliğini elde etmek için çalışmıştır.

Gabeleh (2014) yılındaki çalışmasında, uygun bir geometrik özellik kullanarak metrik uzaylarda kendi üzerine olmayan küme değerli ve tek değerli dönüşümlerin yeni bir sınıfı için en iyi yakınlık noktasının varlığını garanti eden yeterli şartlar üzerine çalışmıştır. Burada elde edilen sonuçlar tek değerli ve küme değerli dönüşümler için bazı tanınmış sabit nokta teoremlerinin genelleştirilmesidir.

3. TEORİK ESASLAR

Tanım 3.1 X boş olmayan bir küme olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $d: X \times X \to R^+$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir (Şuhubi, 2001).

(m_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(m_2) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$,

(m_3) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Örnek 3.1 $\forall x, y \in R, d(x,y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan $d: R \times R \to R^+$ fonksiyonu R üzerinde bir metriktir. Bu metriğe mutlak değer (alışılmış, doğal, salt değer) metriği denir (Şuhubi, 2001).

Örnek 3.2 X boş olmayan bir küme ve $d_1: X \times X \to R^+$ fonksiyonu

$$d_1(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \; ise \\ 1, & x \neq y \; ise \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda d_1, X üzerinde bir metrik ve (X, d_1) bir metrik uzaydır. Bu metriğe ayrık (diskret) metrik denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 3.2 (X, d) bir metrik uzay, (x_n), X'de bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$, $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ oluyorsa, (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $x_n \to x_0$ şeklinde gösterilir. Yakınsak olmayan diziye ıraksak dizi denir. Bir diğer ifadeyle, $x_n \to x_0$ ise dizinin belli bir terimden sonra bütün terimleri x_0 ın uygun bir ε civarında bulunur (Şuhubi, 2001).

Örnek 3.3 (R, d) alışılmış metrik uzayını ve $X = (0,1) \subset R$ kümesini göz önüne alalım. $(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right)$ dizisi R de yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dır. Fakat (x_n), X'de yakınsak değildir. Çünkü $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ fakat $0 \notin X$ dır. Ancak $X = [0,1)$ alınırsa $(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right)$ dizisi X de yakınsak olur. Bu örnekte de görüldüğü üzere yakınsaklık dizinin niteliğine göre değiştiği gibi dizinin tanımlandığı aralığa göre de değişir (Şuhubi, 2001).

Örnek 3.4 Alışılmış metriğe göre R de $(x_n) = (1,2,3,\cdots)$ dizisi yakınsak değildir. Fakat genel terimi $x_n = \frac{1}{n+1}$ olan dizi yakınsaktır. Çünkü,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = 0$$

olur. Yani aynı metrik uzay üzerinde tanımlanan diziden biri yakınsak, diğeri ise yakınsak değildir. Dolayısıyla yakınsaklık dizinin tanımına göre de değişir (Şuhubi, 2001).

Örnek 3.5 R^2 de genel terimi $x_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ olan (x_n) dizisini göz önüne alalım. $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2) \in R^2$ olmak üzere, $d(x,y) = maks\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ metriğini alırsak (x_n) dizisi bu metriğe göre $(1,0)$ noktasına yakınsar. Yani,

$$d\big(x_n, (1,0)\big) = d\left(\left(1, \frac{1}{n}\right), (1,0)\right) = maks\left\{|1-1|, \left|\frac{1}{n} - 0\right|\right\} = \frac{1}{n} \to 0$$

olur. Fakat bu dizi ayrık metriğe göre yakınsak değildir. Çünkü d, R^2 de ayrık metrik ise,

$$\lim_{n\to\infty} d\big(x_n, (1,0)\big) = 1 \neq 0$$

olduğu görülür. Yani, yakınsaklık metriğe göre de değişir (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.3 (X, d) bir metrik uzay ve $a \in X$ olsun. $r > 0$ olmak üzere,

$$B(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı açık yuvar (veya a nın r-açık komşuluğu),

$$D(a,r) = \{x \in X : d(a,x) \leq r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar ve

$$S(a,r) = \{x \in X : d(a,x) = r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir (Şuhubi, 2001).

Örnek 3.6 (X, d) bir ayrık metrik uzay, $a \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde

$$B(a,\varepsilon) = \begin{cases} \{a\}, & \varepsilon \leq 1 \ ise \\ X, & \varepsilon > 1 \ ise \end{cases}$$

$$D(a,\varepsilon) = \begin{cases} \{a\}, & \varepsilon < 1 \ ise \\ X, & \varepsilon \geq 1 \ ise \end{cases}$$

$$\mathrm{S(a,\varepsilon)} = \begin{cases} \mathrm{X}\backslash\{a\}, & \varepsilon = 1 \text{ ise} \\ \emptyset, & \varepsilon \neq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur (Şuhubi, 2001).

Örnek 3.7 (R, d) alışılmış metrik uzay olsun. Buna göre $a \in R$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} B(a,\varepsilon) &= \{x \in R : d(x,a) < \varepsilon\} \\ &= \{x \in R : |x - a| < \varepsilon\} \\ &= (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \\ D(a,\varepsilon) &= \{x \in R : d(x,a) \leq \varepsilon\} \\ &= \{x \in R : |x - a| \leq \varepsilon\} \\ &= [a - \varepsilon, a + \varepsilon], \\ S(a,\varepsilon) &= \{x \in R : d(x,a) = \varepsilon\} \\ &= \{x \in R : |x - a| = \varepsilon\} \\ &= \{x = (a - \varepsilon) \ veya \ x = (a + \varepsilon)\} \end{aligned}$$

olur (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.4 (X, d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $x \in A$ için $B\,(x,\, r) \subset A$ olacak biçimde bir $r > 0$ varsa x noktasına A kümesinin bir iç noktası denir. Eğer her bir $x \in A$ noktası A kümesinin bir iç noktası ise A kümesine açık küme denir. $K \subset X$ olmak üzere eğer $K^c = X \backslash K$ açık ise K kümesine kapalı küme denir (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.5 $R \subseteq A \times A$ bağıntısı verilsin.

(a) Her $a \in A$ için $(a, a) \in R$ ise R bağıntısına yansıma özelliğine sahiptir denir.

(b) Her $(a, b) \in R$ için $(b, a) \in R$ ise R bağıntısına simetri özelliğine sahiptir denir.

(c) Her $(a, b), (b, c) \in R$ için $(a, c) \in R$ ise R bağıntısına geçişme özelliğine sahiptir denir.

Eğer R bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa R ye A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı denir (Gezer ve Bizim, 2017).

Tanım 3.6 R, A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve $a \in A$ olsun. a elemanına R bağıntısı ile denk olan tüm noktaların kümesine a nın R bağıntısına göre denklik sınıfı denir (Gezer ve Bizim, 2017).

Tanım 3.7 A ve B kümeleri arasında birebir ve örten bir fonksiyon tanımlanabiliyorsa A ve B kümelerine denk kümeler denir ve $A \equiv B$ ile gösterilir. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. A kümesinin " ≡ " bağıntısına göre denklik sınıfına A kümesinin kardinali denir ve $Card\ A$ ile gösterilir (Gezer ve Bizim, 2017).

Tanım 3.8 F verilen bir cisim ve V boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V kümesine F üzerinde bir vektör uzayı (veya lineer uzay) denir:

A) $V, +$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

(G_1) $\forall x, y \in V$ için $x + y \in V$,

(G_2) $\forall x, y, z \in V$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(G_3) $\forall x \in V$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in V$ vardır,

(G_4) $\forall x \in V$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir tek $-x \in V$ vardır,

(G_5) $\forall x, y \in V$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

(L_1) $\alpha \cdot x \in V$,

(L_2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

(L_3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(L_4) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

(L_5) $1 \cdot x = x$ olacak şekilde bir tek $1 \in F$ vardır. (Bayraktar, 2006).

Tanım 3.9 X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$\|\cdot\|: X \to R^+$$

fonksiyonudur ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir:

(n_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \theta$,

(n_2) $\forall x \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için $\|\alpha\mathrm{x}\| = |\alpha|\|\mathrm{x}\|$,

(n_3) $\forall x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dir (Soykan, 2016).

Örnek 3.8 R^n, n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$ ve $p \geq 1$ için

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\right)^{1/p} = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

ile tanımlı $\|\cdot\|_p: R^n \to R^+$ fonksiyonu bir norm, $(R^n, \|\cdot\|_p)$ bir normlu uzaydır. $p = 2$ için $\|\cdot\|_2$ normuna standart (alışılmış) norm denir (Soysal, 2016).

Tanım 3.10 X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$(\cdot,\cdot): X \times X \to R^+$$

fonksiyonudur ve $(X, (\cdot,\cdot))$ ikilisine bir iç çarpım uzayı denir:

(ip_1) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \theta$,

(ip_2) $\forall x, y \in X$ için $(x, \mathrm{y}) = (\mathrm{y}, x)$,

(ip_3) $\forall x, y, z \in X$ için $(\mathrm{x} + \mathrm{y}, \mathrm{z}) = (\mathrm{x}, \mathrm{z}) + (\mathrm{y}, \mathrm{z})$,

(ip_4) $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ için $(\alpha\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \alpha(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ dir (Soykan, 2016).

Örnek 3.9 R^n, n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y, \cdots, y_n) \in R^n$ için

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

ile tanımlı $(x, y): R^n \times R^n \to R^+$ fonksiyonu bir iç çarpımdır, $(R^n, (\cdot,\cdot))$ ikilisi de bir iç çarpım uzayıdır (Soysal, 2016).

Tanım 3.11 (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar, $f: (X, d) \to (Y, \rho)$ bir fonksiyon ve $a \in X$ olsun. Eğer her bir "$\varepsilon > 0$ için $d(x, a) < \varepsilon$ olduğunda $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$" olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ varsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise f ye X uzayında süreklidir ya da kısaca süreklidir denir (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.12 (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar olmak üzere bir $T : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $d(x,x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(Tx,Tx_0) < \varepsilon$ olacak şekilde sadece ε sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa T fonksiyonu x_0 noktasında düzgün süreklidir denir (Maddox, 1970).

Örnek 3.10 R de $d(x,y) = |x-y|$ alışılmış metriği için $T: R \to R$

$$x \to Tx = x^3$$

ile tanımlı fonksiyon süreklidir, fakat düzgün sürekli değildir (Şuhubi, 2001).

Örnek 3.11 R de $d(x,y) = |x-y|$ alışılmış metriği için $T: R \to R$

$$x \to Tx = \sin x$$

ile tanımlı fonksiyon R de düzgün süreklidir (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.13 X boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ailesine X üzerinde bir topoloji denir. Burada $\mathcal{P}(X)$, X kümesinin tüm alt kümelerinin ailesini gösterir.

(τ_1) $\emptyset, X \in \tau$,

(τ_2) $G_1, G_2, \cdots, G_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$ $(n \in N)$,

(τ_3) $G_i \in \tau,\ i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$ (I bir indis kümesi) dir (Soykan, 2016).

Tanım 3.14 (X,τ) ve (Y,ρ) iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x \in X$ olsun. X deki $x_n \to x$ olacak şekildeki her (x_n) dizisi için $f(x_n) \to f(x)$ oluyorsa f ye x noktasında dizisel süreklidir denir (Şuhubi, 2001).

Teorem 3.1

a) (X,τ) ve (Y,ρ) iki topolojik uzay ve $f: X \to Y$ sürekli bir dönüşüm ise f dizisel süreklidir. Fakat tersi doğru olmayabilir.
b) X ve Y iki metrik uzay ise $f: X \to Y$ nin sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin dizisel sürekli olmasıdır (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.15 (X,d) metrik uzayının tüm açık alt kümelerinin oluşturduğu

$$\tau_d = \{A : A \subset X, d - açık\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye d metriğinin ürettiği topoloji denir (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.16 (X,d) bir metrik uzay, $\{x_n\} \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in N$ için $x_n \in B(a,\varepsilon)$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi a noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to a$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ile gösterilir. Burada a noktasına $\{x_n\}$ dizisinin limiti denir (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.17 (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A \subset X$ olsun. Eğer x noktasının her komşuluğunda A nın x den farklı noktaları varsa, x noktasına A nın bir yığılma noktasıdır denir. A nın tüm yığılma noktalarının kümesi A^{ι} ile gösterilir. Ayrıca $A \cup A^{\iota}$ kümesine A nın kapanışı denir ve Ā ile gösterilir (Soykan, 2016).

Teorem 3.2 (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

a) Bir $x \in X$ noktasının A nın bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter şart A kümesinde terimleri x den farklı ve $x_n \to x$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.
b) A nın kapalı olması için gerek ve yeter şart A daki yakınsak her dizinin limitinin A da olmasıdır (Soykan, 2016).

Tanım 3.18 (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve A ile B, X in boş olmayan iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$dist(A, B) = inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

sayısına A ile B kümeleri arasındaki uzaklık,

$$dist(x, A) = inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

sayısına x noktasının A kümesine uzaklığı ve

$$\delta(A) = sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

sayısına da A kümesinin çapı denir (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.19 Bir metrik uzayda herhangi bir kümenin çapı sonlu ise, bu kümeye sınırlıdır denir (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.20 Bir metrik uzayda herhangi bir dizinin terimlerinin kümesi sınırlı ise, bu diziye sınırlıdır denir (Şuhubi, 2001).

Teorem 3.3 Metrik uzayda yakınsak her dizinin limiti bir tektir ve yakınsak diziler sınırlıdır (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.21 (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\} \subset X$ olsun. $k \in N$ için $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir (Şuhubi, 2001).

Teorem 3.4 Bir metrik uzayda yakınsak bir dizinin her alt dizisi de yakınsaktır ve dizinin kendisi ile alt dizileri aynı noktaya yakınsar (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.22 Bir (X, d) metrik uzayında herhangi bir dizi $\{x_n\}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m > n \geq n_0$ özelliğindeki her $m, n \in N$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir. Eğer (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) ikilisine tam metrik uzay denir (Şuhubi, 2001).

Teorem 3.5 Bir metrik uzaydaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir (Şuhubi, 2001).

Örnek 3.12 $X = (0,1]$ bir alışılmış metrik uzay ve $\left\{x_n = \frac{1}{n} : n \in N\right\}$, X de bir dizi olsun. Bu takdirde $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. Gerçekten, her $\varepsilon > 0$ ve $m, n > \frac{1}{\varepsilon}$ için

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$$

dir. Ancak $x_n \to 0 \notin X$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi X de yakınsak değildir (Şuhubi, 2001).

Örnek 3.13

a) R reel sayılar kümesi mutlak değer metriğine göre tamdır. Ancak $Q \subset R$ rasyonel sayılar kümesi bu metriğe göre tam değildir.

b) Bir diskret metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan, her diskret metrik uzay tamdır.

c) $I = [a, b] \subset R$ olmak üzere $C(I, R)$ kümesi $d(x, y) = sup_{t \in I}|x(t) - y(t)|$ metriğine göre tamdır (Şuhubi, 2001).

Teorem 3.6 Bir X tam metrik uzayının bir M alt uzayının da tam olması için gerek ve yeter şart M nin X de kapalı bir küme olmasıdır (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.23 Tam normlu vektör uzayına Banach uzayı denir (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.24 Tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.25 $x, y \geq 0$ olmak üzere $f: (0,1) \to R$ fonksiyonu için

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye alt toplamsal fonksiyon denir (Rosenbaum, 1950).

Not 3.1 $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ bir alt toplamsal fonksiyon ise $y \leq x$ için

$$f(x) = f(x - y + y) \leq f(x - y) + f(y)$$

olduğundan

$$f(x) - f(y) \leq f(x - y)$$

elde edilir.

Tanım 3.26 A kümesi X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in A$ için x ve y noktalarını birleştiren doğru parçası yine A ya ait oluyorsa A ya konveks küme denir, yani $\lambda \in [0,1]$ için

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$$

dır (Soykan, 2016).

Tanım 3.27 Eğer bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in [0, \infty)$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

koşulunu sağlıyorsa, f ye konveks fonksiyon denir (Soykan, 2016).

Tanım 3.28 Eğer bir $f:[0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x, y \in [0,\infty)$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

koşulunu sağlıyorsa, bu fonksiyona konkav fonksiyon denir (Soykan, 2016).

Tanım 3.29 X bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $\mathcal{G} = \{G_i\}$ ailesi için $A \subseteq \cup_i G_i$ sağlanırsa bu $\mathcal{G}$ ailesine A nın bir örtüsü denir ve eğer X bir topolojik uzay ve her bir G_i açık ise bu $\mathcal{G}$ ailesine A nın bir açık örtüsü denir. Ayrıca $\mathcal{G}$ nin bir sonlu alt ailesi A nın da bir örtüsü ise, yani

$$A \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n}$$

olacak şekilde bazı $G_{i_1}, G_{i_2}, \cdots, G_{i_n} \in \mathcal{G}$ varsa $\mathcal{G}$ bir sonlu örtüye indirgenebilir ya da bir sonlu alt örtü içerir denir ve bu durumda $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \cdots, G_{i_n}\}$ alt ailesine $\mathcal{G}$ nin sonlu bir alt örtüsü denir (Soykan, 2016).

Tanım 3.30 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A nın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kompakttır denir (Soykan, 2016).

Tanım 3.31 X ve Y aynı F cismi üzerinde vektör uzayları olsun. Bir $T: X \rightarrow Y$ fonksiyonu her $\alpha, \beta \in F$ ve $x, y \in X$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

özelliğini sağlıyorsa, T ye bir lineer dönüşüm denir (Soykan, 2016).

X ve Y birer vektör uzayı olsun.

$$B(X, Y) = \{T \mid T: X \rightarrow Y \text{ lineer, sürekli}\}$$

ile gösterilsin.

Tanım 3.32 X, F cismi üzerinde bir normlu vektör uzayı olsun. $B(X, F)$ uzayına X in dual uzayı denir ve X' ile gösterilir (Soykan, 2016).

Tanım 3.33 X bir normlu vektör uzayı olsun.

$$S = \{f^{-1}(G): f \in X', G \in \tau_{|\cdot|}\}$$

tarafından üretilen X üzerindeki topoloji τ olsun. Yani $f \in X'$ ve G, F içinde açık olmak üzere $f^{-1}(G)$ kümelerinin sonlu kesişimlerinin tüm bileşimlerinin ailesi τ olsun. τ topolojisine X üzerinde X' tarafından üretilen (indirgenen) zayıf topoloji denir. Bu topolojinin elemanlarına zayıf açık kümeler denir (Soykan, 2016).

Tanım 3.34 X bir normlu uzay olsun. Bir $A \subseteq X'$ (ya da $A \subset X$) kümesinin zayıf açık kümelerle oluşan her örtüsünün bir sonlu alt örtüsü varsa A zayıf kompakttır denir (Soykan, 2016).

Tanım 3.35 X ve Y boş olmayan iki küme olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $Tx \subset Y$ ise T ye X den Y ye bir küme değerli dönüşüm denir ve $T: X \to \mathcal{P}(Y)$ ile gösterilir (Nadler, 1969).

Tanım 3.36 $T: X \to \mathcal{P}(Y)$ dönüşümü için $x_0 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa bu noktaya T nin sabit noktası denir (Nadler, 1969).

Örnek 3.14 $X = [0,1]$ olmak üzere $T: X \to \mathcal{P}(Y)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{1\} & 0 \le x < 1/3 \\ [0,1] & x = 1/3 \\ [0,1-x] & 1/3 < x \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$\begin{aligned} T(0) &= \{1\}, & T\left(\frac{3}{4}\right) &= \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ T\left(\frac{1}{3}\right) &= [0,1], & T\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right) &= [0,1] \\ T\left(\left(0, \frac{1}{4}\right)\right) &= \{1\}, & T\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)\right) &= \left[0, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Burada $\frac{1}{3} \in T\frac{1}{3} = [0,1]$ olduğundan $\frac{1}{3}$, T nin bir sabit noktasıdır.

Tanım 3.37 (X, d) bir metrik uzay olsun. X in boş olmayan kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi $CB(X)$ ile gösterilsin. $H(\cdot,\cdot)$ Hausdorff metriğini göstersin. Yani, $A, B \in CB(X)$ için

$$H(A, B) = \text{maks}\left\{\sup_{x \in A} dist\,(x, B), \sup_{y \in B} dist\,(y, A)\right\}$$

dır (Munkres, 2000).

Tanım 3.38 $\beta(t_n) \to 1$ iken

$$t_n \to 0$$

koşulunu sağlayan $\beta: [0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{F}$ ile gösterilir (Sankar Raj, 2011).

Tanım 3.39 (A, B) çifti $A_0 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun. (A, B) çifti P-özelliğine sahiptir ancak ve ancak her $x_1, x_2 \in A_0$ ve $y_1, y_2 \in B_0$ için

$$\begin{cases} d(x_1, y_1) = dist(A, B) \\ d(x_2, y_2) = dist(A, B) \end{cases} \Rightarrow d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2),$$

sağlanır (Sankar Raj, 2011).

Örnek 3.15 A ve B kümeleri bir X Hilbert uzayının boş olmayan kapalı konveks iki alt kümesi olsun. Şu halde (A, B) çifti P-özelliğine sahiptir (Sankar Raj, 2011).

Örnek 3.16 (A, B) çifti $A_0 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri ve $dist(A, B) = 0$ olsun. Şu halde (A, B) çifti P-özelliğine sahiptir (Sankar Raj, 2011).

Örnek 3.17 (A, B) çifti bir X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan sınırlı, kapalı ve konveks alt kümeleri ve $dist(A, B) = 0$ olsun. Şu halde (A, B) çifti P-özelliğine sahiptir (Abkar ve Gabeleh, 2012).

Fan (1969) yılındaki çalışması sayesinde iyi bilinen en iyi yakınlık noktası teoremi aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.7 A kümesi bir X normlu uzayının boş olmayan kompakt, konveks bir alt kümesi olsun. $T: A \to X$ dönüşümü sürekli olsun. O zaman

$$|x - Tx| = dist(Tx, A) \coloneqq inf\{\, |Tx - a|: a \in A\}$$

olacak şekilde bir $x \in A$ vardır (Fan, 1969).

Teorem 3.7 deki $x \in A$ noktası T nin A da en iyi yakınlık noktası olarak adlandırılır. Kendi üzerine olmayan dönüşümler için en iyi yakınlık noktasının gösterimi de benzer bir biçimde ortaya çıkmıştır.

Tanım 3.40 (X, d) bir metrik uzay, A ve B kümeleri, X metrik uzayının boş olmayan iki alt kümesi olsun. $T: A \to B$ kendi üzerine olmayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$d(p, Tp) = dist(A, B)$$

oluyorsa $p \in A$ noktasına T nin bir en iyi yakınlık noktasıdır denir.

Aslında, en iyi yakınlık noktası teoremleri en az bir çözüme sahip olacak şekilde

$$\min_{x \in A} d(x, Tx)$$

minimize probleminin çözümlerini bulmak için gerekli şartları bulmak üzerine yapılan çalışmalardır.

Tanım 3.41 (A, B) çifti bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri ve $T: A \to B$ olsun. Her $u_1, u_2, x_1, x_2 \in A$ için

$$\begin{cases} d(u_1, Tx_1) = dist(A, B) \\ d(u_2, Tx_2) = dist(A, B) \end{cases} \Rightarrow d(u_1, u_2) \leq \alpha d(x_1, x_2)$$

olacak şekilde negatif olmayan $\alpha < 1$ sayısı varsa, T ye proksimal büzülme dönüşümü denir (Sadiq Basha, 2011).

Tanım 3.42 (A, B) çifti bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun. Eğer bazı $x \in A$ için $d(x, y_n) \to dist(x, B)$ şartını sağlayan B deki her $\{y_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa, B kümesine A ya göre yaklaşık kompakttır denir (Sadiq Basha, 2011).

Teorem 3.8 (A, B) çifti $A_0 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir tam (X, d) metrik uzayının boş olmayan kapalı alt kümeleri ve B de A ya göre yaklaşık kompakt olsun. Eğer $T: A \rightarrow B$ dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ olacak şekilde bir proksimal büzülme ise, o zaman T nin bir tek en iyi yakınlık noktası vardır (Sadiq Basha, 2011).

Gabeleh (2014) yılındaki çalışmasında, Teorem 3.8 e göre daha zayıf koşullar altında bir en iyi yakınlık noktası teoremi geliştirerek Teorem 3.8 in kapsamını genişletmiştir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

4.1 Tek Değerli Büzülme Dönüşümleri için En İyi Yakınlık Noktasının Varlığı ve Tekliği

Teorem 4.1 (A,B) çifti $A_0 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir (X,d) tam metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun. $T: A \to B$ dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ olacak şekilde verilsin. Her $x, y \in A$ için $\frac{1}{1+\alpha+\beta} d^*(x,Tx) \leq d(x,y)$ iken

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y) + \beta d^*(Tx,y) \tag{4.1}$$

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ ve $\beta \in [0,\infty)$ sayıları var olsun. Burada her $(a,b) \in A \times B$ için $d^*(a,b) \coloneqq d(a,b) - dist(A,B)$ dir. Eğer (A,B) çifti P-özelliğine sahipse, o zaman T bir en iyi yakınlık noktasına sahiptir (Gabeleh, 2014).

İspat. $x_0 \in A_0$ olsun. $Tx_0 \in B_0$ olduğundan $d(x_1, Tx_0) = dist(A,B)$ olacak şekilde $x_1 \in A_0$ vardır. Benzer şekilde $Tx_1 \in B_0$ olduğundan $d(x_2, Tx_1) = dist(A,B)$ olacak şekilde $x_2 \in A_0$ vardır. Böylece her $n \in N \cup \{0\}$ için

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = dist(A,B) \tag{4.2}$$

olacak şekilde A_0 da bir $\{x_n\}$ dizisi vardır. (A,B) çifti P-özelliğini sağladığından her $n \in N$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \tag{4.3}$$

olduğu görülür. Şu halde

$$d(x_0, Tx_0) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, Tx_0) = d(x_0, x_1) + dist(A,B)$$

olarak elde edilir. Böylece $d^*(x_0, Tx_0) \leq d(x_0, x_1)$ olur. Şu halde

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta} d^*(x_0, Tx_0) \leq d^*(x_0, Tx_0) \leq d(x_0, x_1)$$

olduğu görülür. (4.1) ve (4.2) eşitsizliklerinden

$$d(Tx_0, Tx_1) \leq \alpha d(x_0, x_1) + \beta d^*(x_1, Tx_0) = \alpha d(x_0, x_1) \tag{4.4}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $d^*(x_1, Tx_1) \leq d(x_1, x_2)$ olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta} d^*(x_1, Tx_1) \leq d^*(x_1, Tx_1) \leq d(x_1, x_2)$$

olur. (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d(Tx_1, Tx_2) &\leq \alpha d(x_1, x_2) + \beta d^*(x_2, Tx_1) = \alpha d(x_1, x_2) \\ &= \alpha d(Tx_0, Tx_1) \leq \alpha^2 d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olur. Böylece A daki $\{x_n\}$ dizisi için

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(Tx_{n-1}, Tx_n) = \sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n d(x_0, x_1)$$

olduğu açıktır. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin A da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam ve A kapalı olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin yakınsadığı bir $p \in A$ noktası vardır. Benzer şekilde $\{Tx_n\}$ dizisinin yakınsadığı bir $q \in B$ noktası vardır. (4.2) denkleminden

$$d(p, q) = \lim_{n \to \infty} d\,(x_n, Tx_{n-1}) = dist(A, B)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $x \neq p$ olacak şekilde her $x \in A$ için

$$d^*(p, Tx) \leq \alpha d(p, x) + \beta d^*(q, x)$$

olduğunu göstermek gereklidir. $x_n \to p$ olduğundan $n \geq N_1$ olacak şekildeki her $n \in N$ için $d(x_n, p) \leq \frac{1}{3} d(x, p)$ olacak şekilde bir $N_1 \in N$ sayısı vardır. Şu halde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 + \alpha + \beta} d^*(x_n, Tx_n) \quad & \leq d^*(x_n, Tx_n) = d(x_n, Tx_n) - dist(A, B) \\
& \leq d(x_n, p) + d(p, x_{n+1}) \leq \frac{2}{3} d(x, p) \\
& = d(x, p) - \frac{1}{3} d(x, p) \\
& \leq d(x, p) - d(x_n, p) \leq d(x_n, x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$d(Tx_n, Tx) \leq \alpha d(x_n, x) + \beta d^*(Tx_n, x)$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
d(p, Tx) \quad & = \lim_{n \to \infty} d\,(x_n, Tx) \leq \lim_{n \to \infty} [d(x_n, Tx_n) + d(Tx_n, Tx)] \\
& \leq \lim_{n \to \infty} [d(x_n, Tx_{n-1}) + d(Tx_{n-1}, Tx_n) + \alpha d(x_n, x) + \beta d^*(Tx_n, x)] \\
& \leq \lim_{n \to \infty} \; [dist(A, B) + \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha d(x_n, x) + \beta d^*(Tx_n, x)] \\
& = dist(A, B) + \alpha d(p, x) + \beta d^*(x, q)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$d^*(p, Tx) \leq \alpha d(p, x) + \beta d^*(x, q)$$

olarak elde edilir. (A, B) çifti P-özelliğini sağladığından ve $d(p, q) = dist(A, B) = d(x_n, Tx_{n-1})$ olduğundan her $n \in N$ için $d(p, x_n) = d(q, Tx_{n-1})$ olarak elde edilir. Böylece

$$d^*(x_n, Tx_n) \quad \leq d(x_n, p) + d^*(p, Tx_n)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq d(x_n,p)+\alpha d(p,x_n)+\beta d^*(x_n,q)\\
&\leq (1+\alpha)d(p,x_n)+\beta[d(q,Tx_{n-1})+d^*(x_n,Tx_{n-1})]\\
&\leq (1+\alpha)d(p,x_n)+\beta d(q,Tx_{n-1})\\
&= (1+\alpha)d(p,x_n)+\beta d(x_n,p)=(1+\alpha+\beta)d(x_n,p)
\end{aligned}
$$

olur ve dolayısıyla

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta}d^*(x_n,Tx_n)\leq d(x_n,p)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
d(Tx_n,Tp) &\leq \alpha d(x_n,p)+\beta d^*(p,Tx_n)\\
&\leq \alpha d(x_n,p)+\beta[d^*(x_{n+1},Tx_n)+d(x_{n+1},p)]
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Burada $n\to\infty$ alındığında $Tx_n\to Tp$ olur. Yani $q=T\,p$ dir. Dolayısıyla $d(p,Tp)=dist(A,B)$ ve böylece p, T nin en iyi yakınlık noktasıdır.

Sonuç 4.1 (A,B) çifti $A_0\neq\emptyset$ olacak şekilde bir (X,d) tam metrik uzayın boş olmayan kapalı alt kümeleri olsun. $T: A\to B$ dönüşümü $T(A_0)\subseteq B_0$ olacak şekilde verilsin. Her $x,y\in A$ için

$$d(Tx,Ty)\leq \alpha d(x,y)+\beta d^*(Tx,y) \tag{4.5}$$

olacak şekilde $\alpha\in[0,1)$ ve $\beta\in[0,\infty)$ sayıları var olsun. Eğer (A,B) çifti P-özelliğini sağlıyorsa, o zaman T bir en iyi yakınlık noktasına sahiptir (Gabeleh, 2014).

Sonuç 4.2 (X,d) tam metrik uzay olsun ve $T: X\to X$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x,y\in X$ için $\frac{1}{1+\alpha+\beta}d(x,Tx)\leq d(x,y)$ iken

$$d(Tx,Ty)\leq \alpha d(x,y)+\beta d(Tx,y) \tag{4.6}$$

olacak şekilde $\alpha\in[0,1)$ ve $\beta\in[0,\infty)$ sayıları varsa, o zaman T nin bir sabit noktası vardır (Gabeleh, 2014).

Örnek 4.1 $X=R^2$ olsun ve

$$d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=maks\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\},\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in R^2$$

ile tanımlı d fonksiyonu X üzerinde bir metrik tanımlasın. Açıkçası (X,d) tam metrik uzaydır. $A=\{(3,3),(4.02,6),(4,6)\}$ ve $B=\{(3,4),(3,1)\}$ alındığında $dist(A,B)=1$ olur ve (A,B) çifti P-özelliğine sahiptir. $T: A\to B$ dönüşümü $T(3,3)=T(4.02,6)=(3,4)$ ve $T(4,6)=(3,1)$ ile tanımlansın. $\alpha=\frac{1}{3}$ ve $\beta=2$ olsun. Her $(x,y)\in A\times B$ için

a) $(x,y)\neq\big((4.02,6),(4,6)\big)$ olsun. Şu halde

$$d(Tx,Ty)\leq \alpha d(x,y)+\beta d^*(Tx,y)$$

olduğu görülür.

b) $(x, y) = \big((4.02,6), (4,6)\big)$ olsun. Şu halde

$$\frac{1}{1+\alpha+\beta} d^*(x, Tx) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}+2} \times 1 > \frac{2}{100} = d(x, y)$$

olduğu görülür. Bu ise (4.1) koşulunun sağlandığını gösterir. Böylece Teorem 4.1 in tüm koşulları sağlanmış olur. Açıkçası $p = (3,3) \in A$ noktası T nin bir en iyi yakınlık noktasıdır (Gabeleh, 2014).

Örnek 4.2 $X = R^2$ olsun. d metriği de Örnek 4.1 deki gibi tanımlansın. $A = \{(x, 0): 1 \leq x \leq 2\}$ ve $B = \{(0, x): 1 \leq x \leq 2\}$ ile tanımlandığında (A, B) çifti P-özelliğine sahiptir. Her $1 \leq x \leq 2$ için $T: A \to B$ dönüşümü $T(x, 0) = (0, x)$ ile verilsin. $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $\beta = 3$ iken her $x = (x, 0) \in A$ ve $y = (0, y) \in B$ için

$$d(Tx, Ty) = |x - y|, d(x, y) = |x - y|, d^*(Tx, y) = \text{maks}\{|x|, |y|\} - 1$$

olduğu görülür. $x > y$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} \alpha d(x, y) + \beta d^*(Tx, y) &= \frac{1}{2}(x - y) + 3(x - 1) = \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}y - 3 \\ &\geq x - y = d(Tx, Ty) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $x \leq y$ ise, $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d^*(Tx, y)$ olduğunu görmek kolaydır. Sonuç 4.2 den T nin bir en iyi yakınlık noktası vardır (Gabeleh, 2014).

4.2 Küme Değerli Büzülme Dönüşümleri için En İyi Yakınlık Noktasının Varlığı ve Tekliği

Kikkawa ve Suzuki (2008) yılında yapmış olduğu çalışmada Nadler'in (1979) yılında elde ettiği küme değerli büzülmeler için sabit nokta teoreminin genişletilmiş halini sunmuştur.

Teorem 4.2 $\eta: [0,1) \to \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ kesin azalan fonksiyonu

$$\eta(r) = \frac{1}{1+r} \tag{4.7}$$

ile tanımlansın. X bir tam metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $\eta(r) d(x, Tx) \leq d(x, y)$ iken

$$H(Tx, Ty) \leq r d(x, y)$$

olacak şekilde $r \in [0,1)$ sayısı varsa, o zaman $z \in Tz$ olacak şekilde $z \in X$ vardır (Kikkawa ve Suzuki, 2008).

Teorem 4.3 (A,B) çifti $A_0 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir X tam metrik uzayın boş olmayan kapalı alt kümeleri olsun ve (A,B) çifti P-özelliğini sağlasın. $T: A \to 2^B$ bir küme değerli büzülme dönüşümü olsun, yani bazı $\alpha \in (0,1)$ ve her $x, y \in A$ için

$$H(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y) \tag{4.8}$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer her $x \in A$ için $T(x)$ kümesi B de kapalı ve sınırlı ve her $x_0 \in A_0$ için $T(x_0) \subset B_0$ ise, o zaman T nin A da bir en iyi yakınlık noktası vardır. Yani $D(p,Tp) = dist(A,B)$ olacak şekilde $p \in A$ vardır. Burada $D(p,Tp) = \inf\{ d(p,x): x \in Tp\}$ dir (Abkar ve Gabeleh, 2013).

Teorem 4.4 η fonksiyonu (4.7) deki gibi tanımlansın. (A,B) çifti $A_0 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir X tam metrik uzayın boş olmayan kapalı alt kümeleri olsun ve (A,B) çifti P-özelliğini sağlasın. $T: A \to 2^B$ bir genelleştirilmiş küme değerli büzülme dönüşümü olsun, yani her $x, y \in A$ için $\eta(r)D^*(x,Tx) \leq d(x,y)$ iken

$$H(Tx,Ty) \leq rd(x,y) \tag{4.9}$$

olacak şekilde $r \in [0,1)$ sayısı mevcut olsun. Burada $D^*(x,Tx) = D(x,Tx) - dist(A,B)$ dir. Eğer her $x \in A$ için $T(x)$ kümesi B de kapalı ve sınırlı ve her $x_0 \in A_0$ için $T(x_0) \subset B_0$ ise, o zaman T nin A da bir en iyi yakınlık noktası vardır (Gabeleh, 2014).

İspat. r_1 sayısı $0 \leq r < r_1 < 1$ olacak şekilde seçilsin. $x_0 \in A_0$ ve $y_0 \in Tx_0 \subseteq B_0$ olsun. Şu halde $d(x_1,y_0) = dist(A,B)$ olacak şekilde $x_1 \in A_0$ vardır. $D(x_0,Tx_0) \leq d(x_0,y_0) \leq d(x_0,x_1) + d(x_1,y_0)$ ve $\eta(r) \leq 1$ olduğundan $\eta(r)D^*(x_0,Tx_0) \leq d(x_0,x_1)$ olur. Şu halde

$$D(y_0,Tx_1) \leq H(Tx_0,Tx_1) \leq rd(x_0,x_1)$$

olarak elde edilir. Böylece $d(y_0,y_1) \leq r_1 d(x_0,x_1)$ olacak şekilde $y_1 \in Tx_1$ vardır. $Tx_1 \subseteq B_0$ olduğundan $d(x_2,y_1) = dist(A,B)$ olacak şekilde $x_2 \in A_0$ vardır. Ayrıca

$$D(x_1,Tx_1) \leq d(x_1,y_1) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,y_1)$$

olur. Buradan $\eta(r)D^*(x_1,Tx_1) \leq d(x_1,x_2)$ olduğu görülür. Böylece

$$D(y_1,Tx_2) \leq H(Tx_1,Tx_2) \leq rd(x_1,x_2)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $d(y_1,y_2) \leq r_1 d(x_1,x_2)$ olacak şekilde $y_2 \in Tx_2$ vardır. Bu işlem böyle devam ettirilirse, her $n \in N \cup \{0\}$ için

- $y_n \in Tx_n \subseteq B_0$,
- $d(x_{n+1},y_n) = dist(A,B)$,
- $d(y_{n+1},y_n) \leq r_1 d(x_{n+1},x_n)$

olacak şekilde A ve B de sırasıyla $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri elde edilir. (A,B) çifti P-özelliğini sağladığından her $n \in N$ için

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(y_n, y_{n-1})$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned} d(x_{n+2}, x_{n+1}) &= d(y_{n+1}, y_n) \leq r_1 d(x_{n+1}, x_n) = r_1 d(y_n, y_{n-1}) \\ &\leq r_1^2 d(x_n, x_{n-1}) = r_1^2 d(y_{n-1}, y_{n-2}) \leq r_1^3 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\leq \cdots \leq r_1^n d(y_1, y_0) \leq r_1^{n+1} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. A kümesi X tam metrik uzayın kapalı alt kümesi olduğundan $x_n \to p$ olacak şekilde $p \in A$ vardır. Şimdi her $x \in A - \{p\}$ için

$$D^*(p, Tx) \leq rd(p, x)$$

olduğunu gösterelim. $x_n \to p$ olduğundan her $n \geq N_1$ için $d(p, x_n) \leq \frac{1}{3} d(p, x)$ olacak şekilde $N_1 \in N$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \eta(r) D^*(x_n, Tx_n) &\leq D(x_n, Tx_n) - dist(A, B) \leq d(x_n, y_n) - dist(A, B) \\ &\leq d(x_n, p) + d(p, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, y_n) - dist(A, B) \\ &= d(x_n, p) + d(p, x_{n+1}) \leq \frac{2}{3} d(x, p) = d(x, p) - \frac{1}{3} d(x, p) \\ &\leq d(x, p) - d(x_n, p) \leq d(x_n, x) \end{aligned}$$

ve bu yüzden $\eta(r) D^*(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, x)$ dir. Bu da $H(Tx_n, Tx) \leq rd(x_n, x)$ olmasını gerektirir. Diğer taraftan her $z \in Tx$ için

$$d(x_n, z) \leq d(x_n, y_{n-1}) + d(y_{n-1}, z) = dist(A, B) + d(y_{n-1}, z)$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} D(x_n, Tx) &\leq dist(A, B) + D(y_{n-1}, Tx) \leq dist(A, B) + H(Tx_{n-1}, Tx) \\ &\leq dist(A, B) + H(Tx_{n-1}, Tx_n) + H(Tx_n, Tx) \\ &\leq dist(A, B) + r^{n-1} d(x_1, x_0) + rd(x_n, x) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Eğer $n \to \infty$ ise, o zaman her $x \in A - \{p\}$ için

$$D^*(p, Tx) \leq rd(p, x)$$

olarak elde edilir.

Şimdi her $x \in A$ için $H(Tp, Tx) \leq rd(p, x)$ olduğu gösterilsin. $x = p$ ise eşitsizliğin sağlandığı kolaylıkla görülür. $x \neq p$ olsun. Şu halde her $n \in N$ için

$$d(p, z_n) \leq D(p, Tx) + \frac{1}{n} d(x, p)$$

olacak şekilde $z_n \in Tx$ vardır. Böylece

$$D(x, Tx) \leq d(x, z_n) \leq d(x, p) + d(p, z_n) \leq d(x, p) + D(p, Tx) + \frac{1}{n} d(x, p)$$

olur ve dolayısıyla her $n \in N$ için

$$
\begin{aligned}
D^*(x,Tx) \quad &\leq d(x,p) + D^*(p,Tx) + \frac{1}{n}d(x,p) \\
&\leq d(x,p) + rd(x,p) + \frac{1}{n}d(x,p) = \left(1 + r + \frac{1}{n}\right)d(x,p)
\end{aligned}
$$

olur. Şu halde $\eta(r)D^*(x,Tx) \leq d(x,p)$ ve teoremin hipotezinden $H(Tx,Tp) \leq rd(x,p)$ elde edilir. Son olarak

$$
\begin{aligned}
D(p,Tp) \quad &= \lim_{n\to\infty} D\,(x_n,Tp) \leq \lim_{n\to\infty}[D(x_n,Tx_{n-1}) + H(Tx_{n-1},Tp)] \\
&\leq \lim_{n\to\infty}[dist(A,\ B) + r\,d(x_{n-1},p)] \ = dist(A,B)
\end{aligned}
$$

olur yani, $p\ \in A$ noktası T nin en iyi yakınlık noktasıdır.

Örnek 4.3 $X = R^2$ alışılmış metrik ile verilsin. $A = \{(0,1),(-1,0)\}$ ve $\mathrm{B} = \{(1,1),(-1,1),(1,9)\ \}$ olsun. Şu halde (A,B) çifti X in boş olmayan kapalı ve konveks olmayan alt kümeleridir. Ayrıca (A,B) çifti P-özelliğini sağlar ve $dist(A,B) = 1$ dir. $T: A \to 2^B$ dönüşümü

$$
T(0,1) = \{(1,1),(-1,1)\}, \quad T(-1,0) = \{(1,9)\}
$$

ile tanımlansın. Dikkat edilirse T bir küme değerli büzülme değildir. $x \coloneqq (-1,0)$ ve $y \coloneqq (0,1)$ ise, o zaman $H(Tx,Ty) = \text{maks}\{\,8,\sqrt{68}\}$ ve $d(x,y) = \sqrt{2}$ olur. Böylece her $r \in [0,1)$ için

$$
H(Tx,Ty) = \sqrt{68} > r\sqrt{2} = rd(x,y)
$$

olur. Diğer taraftan, her $r \in [0,1)$ için

$$
\begin{aligned}
\eta(r)D^*(x,Tx) \quad &= \frac{1}{1+r}[d(x,Tx) - 1] = \frac{1}{1+r}\left[\sqrt{4+81} - 1\right] \\
&> \frac{1}{1+r}8 > \sqrt{2} = d(x,y)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Şu halde (4.9) sağlanmış olur. Böylece $(0,1)$ noktası T nin en iyi yakınlık noktasıdır. Yani $D\big((0,1),T(0,1)\big) = dist(A,B)$ olur (Gabeleh, 2014).

Örnek 4.4 Alışılmış metrik ile $X = R$ verilsin. $A = \{-5,0,5\}$ ve $B = \{-3,2,3\}$ olsun. (A,B) nin X de boş olmayan kapalı bir ikili olduğu görülür. Ayrıca $dist(A,B) = 2$ ve $A_0 = A, B_0 = B$ olur. Dikkat edilirse (A,B) çiftinin P-özelliği yoktur. $T: A \to 2^B$ dönüşümü

$$
T(-5) = \{2,3\}, \quad T(0) = \{3\}, \quad T(5) = \{2\}
$$

ile verilsin. Açıkçası $r \geq \frac{1}{10}$ sabiti ile T bir genelleştirilmiş küme değerli büzülme dönüşümüdür. Ayrıca her $x \in A_0$ için $T(x) \subseteq B_0$ olur ve $D\big(0,T(0)\big) = 3 = D\big(5,T(5)\big)$

ve $D\big(-5, T(-5)\big) = 7$ olduğu görülür. Dolayısıyla T nin en iyi yakınlık noktası yoktur (Gabeleh, 2014).

Not 4.1 Dikkat edilirse Teorem 4.1 ve 4.7 de tek değerli ve küme değerli büzülme dönüşümleri için en iyi yakınlık noktasına yaklaşmak için algoritmalar sunuldu. Dönüşümlerin bu sınıfları için en iyi yakınlık noktalarının varlığının tartışması P-özelliğinden dolayı sabit nokta teorisinden ilgili sonuçlardan ortaya çıkmıştır (Gabeleh, 2014).

4.3 Kannan Büzülme Dönüşümleri için En İyi Yakınlık Noktasının Varlığı ve Tekliği

Tanım 4.1

$$\theta(r) = 1 - r$$

ile verilen $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ den $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ üzerine tanımlı kesin azalan θ fonksiyonu göz önüne alınsın. (A, B) çifti bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun ve $T: A \to B$ dönüşümü verilsin. $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için $r := \frac{\alpha}{1-\alpha}$ olarak verilsin. $d(u, Tx) = dist(A, B)$ & $d(v, Ty) = dist(A, B)$ olacak şekilde her $u, v, x, y \in A$ için $\theta(r) d^*(x, Tx) \leq d(x, y)$ iken

$$d(u, v) \leq \alpha[d^*(x, Tx) + d^*(y, Ty)] \tag{4.10}$$

oluyorsa, o zaman T ye zayıf proksimal Kannan büzülme dönüşümü denir (Gabeleh, 2015).

Tanım 4.2 (A, B) çifti bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun ve $T: A \to B$ dönüşümü verilsin. $d(u, Tx) = dist(A, B)$ & $d(v, Ty) = dist(A, B)$ olacak şekilde her $u, v, x, y \in A$ için $\theta(r) d^*(x, Tx) \leq d(x, y)$ iken

$$d(u, v) \leq \alpha[d^*(x, Tx) + d^*(y, Ty)]$$

olacak şekilde $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı varsa, T ye proksimal Kannan büzülme dönüşümü denir (Gabeleh, 2015).

Açıkçası, zayıf proksimal Kannan büzülme dönüşümlerinin sınıfı, proksimal Kannan büzülme dönüşümlerinin sınıfını kapsar. Ayrıca proksimal Kannan büzülme dönüşümlerinin sınıfı Kannan büzülme dönüşümlerinin sınıfını kapsar (Gabeleh, 2015).

Teorem 4.5 (A, B) çifti A_0 boştan farklı ve kapalı olacak şekilde bir (X, d) tam metrik uzayının boş olmayan alt kümeleri olsun. Eğer $T: A \to B$ zayıf proksimal Kannan büzülme dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ olacak şekilde verilirse, o zaman $d(x^*, Tx^*) =$

$dist(A,B)$ olaçak şekilde bir tek $x^* \in A$ noktası vardır. Eğer $d(x_{n+1}, Tx_n) = dist(A,B)$ olacak şekilde A da bir $\{x_n\}$ dizisi varsa, o zaman $x_n \to x^*$ dır (Gabeleh, 2015).

İspat. $x_0 \in A_0$ olsun. $T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan $d(x_1, Tx_0) = dist(A,B)$ olacak şekilde bir $x_1 \in A$ vardır. $Tx_1 \in B_0$ olduğundan $d(x_2, Tx_1) = dist(A,B)$ olacak şekilde bir $x_2 \in A$ vardır. Bu işlem böyle sürdürüldüğünde, her $n \in N$ için

$$d(x_{n+1}, Tx_n) = dist(A,B) \tag{4.11}$$

olacak şekilde A_0 da bir $\{x_n\}$ dizisi bulunabilir. Böylece

$$d(x_0, Tx_0) \le d(x_0, x_1) + d(x_1, Tx_0) = d(x_0, x_1) + dist(A,B)$$

ve

$$\theta(r) d^*(x_0, Tx_0) \le d^*(x_0, Tx_0) \le d(x_0, x_1) \quad \& \quad \begin{cases} d(x_1, Tx_0) = dist(A,B) \\ d(x_2, Tx_1) = dist(A,B) \end{cases}$$

olduğu görülür. T zayıf proksimal Kannan büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\le \alpha[d^*(x_0, Tx_0) + d^*(x_1, Tx_1)] \\ &\le \alpha[d(x_0, x_1) + d^*(x_1, Tx_0) + d(x_1, x_2) + d^*(x_2, Tx_1)] \\ &= \alpha[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece

$$d(x_1, x_2) \le \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_0, x_1) = r d(x_0, x_1)$$

olur. Benzer şekilde

$$\theta(r) d^*(x_1, Tx_1) \le d(x_1, x_2) \quad \& \quad \begin{cases} d(x_2, Tx_1) = dist(A,B) \\ d(x_3, Tx_2) = dist(A,B) \end{cases}$$

olduğu görülür. T zayıf proksimal Kannan büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &\le \alpha[d^*(x_1, Tx_1) + d^*(x_2, Tx_2)] \\ &\le \alpha[d(x_1, x_2) + d^*(x_2, Tx_1) + d(x_2, x_3) + d^*(x_3, Tx_2)] \\ &= \alpha[d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece

$$d(x_2, x_3) \le \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_1, x_2) = r d(x_1, x_2) \le r^2 d(x_0, x_1)$$

olur. Böylece tüme varım yöntemi kullanıldığında

$$d(x_n, x_{n+1}) \le r^n d(x_0, x_1)$$

elde edilir. Şu halde

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \le \sum_{n=1}^{\infty} r^n d(x_0, x_1) < \infty$$

olduğu görülür. Bu ise $\{x_n\}$ in A_0 da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. A_0 kapalı ve X tam metrik uzay olduğundan $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır. Şimdi $x_n \to x^*$ olacak şekilde $x^* \in$

A_0 olsun. x^* noktasının T nin bir tek en iyi yakınlık noktası olduğu gösterilecektir. İlk olarak, $x \neq x^*$ olacak şekildeki her $x \in A_0$ için

$$d^*(x^*, Tx) \leq \alpha d(x^*, x) \tag{4.12}$$

olduğu ispatlanmalıdır. $x \in A_0$ ve $x \neq x^*$ olsun. $T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan $d(y, Tx) = dist(A, B)$ olacak şekilde $y \in A_0$ vardır. $x_n \to x^*$ olduğundan her $n \geq N_1$ için

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{1}{3} d(x, x^*)$$

olacak şekilde bir $N_1 \in N$ sayısı vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
\theta(r) d^*(x_n, Tx_n) &\leq d^*(x_n, Tx_n) = d(x_n, Tx_n) - dist(A, B) \\
&\leq d(x_n, x^*) + d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n) - dist(A, B) \\
&= d(x_n, x^*) + d(x^*, x_{n+1}) \leq \frac{2}{3} d(x, x^*) \\
&= d(x, x^*) - \frac{1}{3} d(x, x^*) \leq d(x, x^*) - d(x_n, x^*) \\
&\leq d(x_n, x^*)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\theta(r) d^*(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, x) \quad \& \quad \begin{cases} d(x_{n+1}, Tx_n) = dist(A, B) \\ d(y, Tx) = dist(A, B) \end{cases}$$

olur. T bir zayıf proksimal Kannan büzülme dönüşümü olduğundan

$$d(x_{n+1}, y) \leq \alpha[d^*(x_n, Tx_n) + d^*(x, Tx)] \leq \alpha[d(x_n, x_{n+1}) + d^*(x, Tx)]$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
d(x^*, Tx) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} [d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, y) + d(y, Tx)] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} [(1+\alpha) d(x_n, x_{n+1}) + \alpha d^*(x, Tx) + d(y, Tx)] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} [(1+\alpha) r^n d(x_0, x_1) + \alpha d^*(x, Tx) + dist(A, B)] \\
&= \alpha d^*(x, Tx) + dist(A, B)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şu halde her $x \in A_0$ ve $x \neq x^*$ için

$$d^*(x^*, Tx) \leq \alpha d^*(x, Tx)$$

olur. Yani (4.12) sağlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
d^*(x_n, Tx_n) &\leq d(x_n, x^*) + d^*(x^*, Tx_n) \\
&\leq d(x_n, x^*) + \alpha d^*(x_n, Tx_n)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\theta(r) d^*(x_n, Tx_n) = (1-r) d^*(x_n, Tx_n) \leq (1-\alpha) d^*(x_n, Tx_n) \leq d^*(x_n, x^*) \tag{4.13}$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan $x^* \in A_0$ ve $T(A_0) \subseteq B_0$ olduğundan $d(y^*, Tx^*) = dist(A,B)$ olacak şekilde $y^* \in B_0$ elemanı vardır. Şu halde

$$\theta(r)d^*(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, x^*) \quad \& \quad \begin{cases} d(x_{n+1}, Tx_n) = dist(A,B) \\ d(y^*, Tx^*) = dist(A,B) \end{cases}$$

olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, y^*) &\leq \alpha[d^*(x_n, Tx_n) + d^*(x^*, Tx^*)] \\ &= \alpha[d(x_n, x_{n+1}) + d^*(x_{n+1}, Tx_n) + d^*(x^*, Tx^*)] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $n \to \infty$ alındığında

$$\begin{aligned} d(y^*, x^*) &\leq \alpha d^*(x^*, Tx^*) \\ &= \alpha[d(x^*, y^*) + d^*(y^*, Tx^*)] \\ &= \alpha d(x^*, y^*) \end{aligned}$$

olur. Buradan $d(x^*, y^*) = 0$ ve $x^* = y^*$ olduğu anlaşılır. Böylece x^*, T nin bir en iyi yakınlık noktasıdır. En iyi yakınlık noktasının tekliği, T nin zayıf proksimal Kannan büzülme dönüşümü olması koşulundan gelir, yani x_1^*, x_2^* noktaları $i = 1,2$ için $d(x_i^*, Tx_i^*) = dist(A,B)$ olacak şekilde A da iki farklı nokta olsun. Dolayısıyla

$$\theta(r)d^*(x_1^*, Tx_1^*) \leq d(x_1^*, x_2^*) \quad \& \quad \begin{cases} d(x_1^*, Tx_1^*) = dist(A,B) \\ d(x_2^*, Tx_2^*) = dist(A,B) \end{cases}$$

yazılabilir. Bu ise

$$0 < d(x_1^*, x_2^*) \leq \alpha[d^*(x_1^*, Tx_1^*) + d^*(x_2^*, Tx_2^*)] = 0$$

olduğu anlamına gelir ki bu bir çelişkidir. Böylece T nin en iyi yakınlık noktası tektir.

Sonuç 4.3 (A,B) çifti A_0 boştan farklı ve kapalı olacak şekilde bir (X,d) tam metrik uzayının boş olmayan iki alt kümesi olsun. Eğer $T: A \to B$ proksimal Kannan büzülme dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ olacak şekilde verilirse, o zaman $d(x^*, Tx^*) = dist(A,B)$ olacak şekilde bir tek $x^* \in A$ vardır. Eğer $d(x_{n+1}, Tx_n) = dist(A,B)$ olacak şekilde A da bir $\{x_n\}$ dizisi varsa, o zaman $x_n \to x^*$ dır (Gabeleh, 2015).

Sonuç 4.4 (A,B) çifti A_0 boştan farklı ve kapalı olacak şekilde bir (X,d) tam metrik uzayının boş olmayan iki alt kümesi olsun. Eğer $T: A \to B$ Kannan büzülme dönüşümü $T(A_0) \subseteq B_0$ olacak şekilde verilirse, o zaman $d(x^*, Tx^*) = dist(A,B)$ olacak şekilde bir tek $x^* \in A$ vardır. Eğer $d(x_{n+1}, Tx_n) = dist(A,B)$ olacak şekilde A da bir $\{x_n\}$ dizisi varsa, o zaman $x_n \to x^*$ dır (Gabeleh, 2015).

Sonuç 4.5 A kümesi bir (X,d) tam metrik uzayının boş olmayan ve kapalı alt kümesi olsun. $T: A \to A$ dönüşümü her $x, y \in A$ için

$$\theta(r)d(x, Tx) \leq d(x,y)$$

iken

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

olacak şekilde verilirse, o zaman T nin bir tek $x^* \in A$ sabit noktası vardır. Eğer $x_0 \in A$ ve $x_{n+1} = Tx_n$ ise, o zaman $x_n \to x^*$ dır. Burada $\theta(r)$ fonksiyonu Tanım 4.1 de tanımlanmıştır (Gabeleh, 2015).

Sonuç 4.6 (Kannan Sabit Nokta Teoremi)**.** A kümesi bir (X, d) tam metrik uzayının boş olmayan ve kapalı bir alt kümesi olsun. Eğer $T: A \to A$ bir Kannan büzülme dönüşümü ise, o zaman T nin bir tek sabit noktası vardır. Eğer her bir $x_0 \in A$ için $x_{n+1} = Tx_n$ oluyorsa, o zaman $\{x_n\}$ dizisi T nin sabit noktasına yakınsar (Gabeleh, 2015).

Örnek 4.5 $X = R$ alışılmış metrik ile verilmiş olsun.

$$A \coloneqq [0,2] \cup \{5\} \quad \& \quad B \coloneqq [3,4]$$

olarak alınsın. O zaman A ve B kümeleri X in boş olmayan alt kümeleri ve $A_0 = \{2,5\}$ ve $B_0 = \{3,4\}$ olduğu görülür. Dikkat edilirse $dist(A, B) = 1$ olduğu açıktır. $T: A \to B$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} \frac{7}{2}, & x = 0 \text{ için} \\ 4, & x \neq 0 \text{ için} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. Açıkçası her $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için T bir zayıf proksimal Kannan büzülme dönüşümüdür. Gerçekten $u = 5$ ve $x \in A - \{0\}$ için $d(u, Tx) = dist(A, B)$ sağlanması yeterlidir. Böylece Teorem 4.5, T nin en iyi yakınlık noktasının tekliğini garanti eder ki bu nokta $x^* = 5$ dir (Gabeleh, 2015).

Örnek 4.6 $X = R$ alışılmış metrik ile verilmiş olsun.

$$A \coloneqq \left[0, \frac{1}{100}\right] \cup \{1\} \quad \& \quad B \coloneqq [2,3]$$

olarak alınsın. O zaman A ve B nin X in boş olmayan kapalı alt kümeleri ve $dist(A, B) = 1$ olduğu açıktır. $T: A \to B$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 2, & x \in Q \cap A \text{ için} \\ \frac{101}{50}, & x \in Q^c \cap A \text{ için} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Dikkat edilirse T sürekli değildir. $\alpha = \frac{1}{3}$ için T nin Kannan büzülme dönüşümü olduğunu göstermek için aşağıdaki iki durumu incelemek yeterlidir.

Durum 1. Eğer $x \in Q \cap A - \{1\}$ ve $y \in Q^c \cap A$ ise, o zaman

$$\alpha[d^*(x, Tx) + d^*(y, Ty)] = \frac{1}{3}\left[\frac{101}{50} - (x + y)\right] \geq \frac{2}{3} > \frac{1}{50} = d(Tx, Ty)$$

olur.

Durum 2. Eğer $x = 1$ ve $y \in Q^c \cap A$ ise, o zaman

$$\alpha[d^*(x,Tx)+d^*(y,Ty)]=\frac{1}{3}\left[\frac{51}{50}-y\right]\geq\frac{1}{3}\times\frac{101}{100}>\frac{1}{50}=d(Tx,Ty)$$

olur. Sonuç 4.4 den T nin bir tek en iyi yakınlık noktası vardır ve bu nokta $x^*=1$ dir (Gabeleh, 2015).

4.4 Geraghty Tipi Büzülme Dönüşümleri için En İyi Yakınlık Noktasının Varlığı ve Tekliği

Tanım 4.3 (A,B) çifti bir (X,d) tam metrik uzayının boş olmayan iki alt kümesi olsun ve $T: A\to B$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x,y\in A$ için

$$d(Tx,Ty)\leq\beta\big(d(x,y)\big)\cdot\text{maks}\{\,d(x,y),M(x,y)-d(A,B)\}$$

olacak şekilde $\beta\in\mathcal{F}$ varsa, T ye bir Geraghty tipi büzülme dönüşümüdür denir. Burada $M(x,y)=\text{maks}\{\,d(x,Tx),d(y,Ty)\}$ dır (Almeida ve ark., 2014).

Geraghty tipi büzülmenin sürekli olmasının gerekmediğini göstermek için aşağıda bir örnek sunuldu.

Örnek 4.7 Alışılmış metrik ile $A=B=R$ olarak alınsın. $T: R\to R$ dönüşümü

$$T\,x=\begin{cases}\dfrac{1}{5}x, & x\leq -1 \text{ ise}\\ \dfrac{1}{3}x, & -1<x \text{ ise}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Açıkçası T, $x_0=-1$ noktasında sürekli değildir ve $d(A,B)=0$ olduğu görülür. T nin bir Geraghty tipi büzülme dönüşümü olduğunu göstermek için şu üç durum dikkate alınmalıdır.

Durum 1. $x,y\in(-\infty,-1]$ olsun.

$$d(Tx,Ty)=|Tx-Ty|=\left|\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}y\right|=\frac{1}{5}|x-y|=\frac{1}{5}d(x,y)$$

olduğu görülür.

Durum 2. $x,y\in(-1,\infty)$ olsun.

$$d(Tx,Ty)=|Tx-Ty|=\left|\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y\right|=\frac{1}{3}|x-y|=\frac{1}{3}d(x,y)$$

olduğu görülür.

Durum 3. $x\in(-\infty,-1]$ ve $y\in(-1,\infty)$ olsun.

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &=|Tx-Ty|=\left|\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}y\right|=\left|\frac{3x-5y}{15}\right|\\ &\leq\left|\frac{3x-3y}{15}\right|+\left|\frac{2y}{15}\right|=\frac{1}{5}|x-y|+\frac{2}{15}|y|=\frac{1}{5}\left(|x-y|+\frac{2}{3}|y|\right)\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{5}\big(d(x,y)+d(y,Ty)\big)$$

$$\leq \frac{1}{5}2\cdot \text{maks}\{\,d(x,y),d(y,Ty)\}$$

$$\leq \frac{2}{5}\text{maks}\{\,d(x,y),M(x,y)\}$$

olduğu görülür. Böylece her $x,y\in R$ için

$$d(Tx,Ty)\leq \frac{2}{5}\text{maks}\{\,d(x,y),M(x,y)\}$$

elde edilir. Sonuç olarak T bir Geraghty tipi büzülme dönüşümüdür. Burada $\beta\colon[0,\infty)\to[0,1)$ fonksiyonu her $t\in[0,\infty)$ için $\beta(t)=\frac{2}{3}$ dir. Böylece $\beta\in\mathcal{F}$ olduğu açıktır (Almeida ve ark., 2014).

Teorem 4.6 (A,B) çifti $A_0\neq\emptyset$ olacak şekilde bir (X,d) tam metrik uzayının boş olmayan kapalı iki alt kümesi olsun. $T\colon A\to B$ sürekli dönüşümü $T(A_0)\subset B_0$ sağlayan bir Geraghty tipi büzülme ise ve (A,B) çifti P-özelliğini sağlıyorsa, o zaman $d(x^*,Tx^*)=d(A,B)$ olacak şekilde bir tek $x^*\in A$ noktası vardır (Almeida ve ark., 2014).

İspat. $A_0\neq\emptyset$ olduğundan $x_0\in A_0$ alınabilir. $Tx_0\in T(A_0)\subset B_0$ olduğundan $d(x_1,Tx_0)=dist(A,B)$ olacak şekilde $x_1\in A_0$ bulunabilir. Benzer şekilde $Tx_1\in T(A_0)\subset B_0$ olduğundan $d(x_2,Tx_1)=dist(A,B)$ olacak şekilde $x_2\in A_0$ vardır. Bu süreç böyle devam ettirildiğinde her $n\in N$ için

$$d(x_{n+1},Tx_n)=dist(A,B) \tag{4.14}$$

olacak şekilde bir $(x_n)\in A_0$ dizisi elde edilir. (A,B) çifti P-özelliğini sağladığından her $n\in N$ için

$$d(x_{n+1},x_n)=d(Tx_n,Tx_{n-1}) \tag{4.15}$$

olduğu görülür. $d\big(x_{n_0+1},x_{n_0}\big)=0$ olacak şekilde bir $n_0\in N$ sayısının varlığı kabul edildiğinde (4.15) denkleminden

$$0=d\big(x_{n_0+1},x_{n_0}\big)=d\big(Tx_{n_0},Tx_{n_0-1}\big)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak $Tx_{n_0-1}=Tx_{n_0}$ olur. (4.14) denkleminden

$$dist(A,B)=d\big(x_{n_0},Tx_{n_0-1}\big)=d\big(x_{n_0},Tx_{n_0}\big)$$

olur. Şu halde teoremin varlık için olan kısmı ispatlanmış olur.

Şimdi her $n\in N$ için $d(x_{n+1},x_n)>0$ olduğu kabul edilsin. T bir Geraghty tipi büzülme dönüşümü olduğundan ve (4.15) denkleminden dolayı her $n\in N$ için

$$d(x_{n+1}, x_n) = \quad d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \beta\big(d(x_n, x_{n-1})\big)$$
$$\cdot\, maks\{d(x_n, x_{n-1}), M(x_n, x_{n-1}) - dist(A, B)\} \qquad (4.16)$$

olduğu görülür. Şu halde aşağıdaki iki durum göz önüne alınmalıdır.

Durum 1.

$$maks\{d(x_n, x_{n-1}), M(x_n, x_{n-1}) - dist(A, B)\} = d(x_n, x_{n-1})$$

olsun. Şu halde (4.16) eşitsizliğinden ve β: $[0, \infty) \to [0,1)$ olduğundan

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \beta\big(d(x_n, x_{n-1})\big) d(x_n, x_{n-1}) < d(x_n, x_{n-1}) \qquad (4.17)$$

olur.

Durum 2.

$$maks\{d(x_n, x_{n-1}), M(x_n, x_{n-1}) - dist(A, B)\} = M(x_n, x_{n-1}) - dist(A, B)$$

olsun. Şu halde iki alt durum göz önüne alınmalıdır.

Alt Durum (a) $M(x_n, x_{n-1}) = d(x_n, Tx_n)$ olsun. Şu halde

$$\begin{aligned} M(x_n, x_{n-1}) - dist(A, B) &= d(x_n, Tx_n) - dist(A, B) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx_n) - dist(A, B) \\ &= d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

olduğundan ve (4.16) eşitsizliğinden

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \beta\big(d(x_n, x_{m-1})\big) \cdot d(x_n, x_{n+1}) < d(x_n, x_{n+1})$$

olur ki bu ise bir çelişkidir.

Alt Durum (b) $M(x_n, x_{n-1}) = d(x_{n-1}, Tx_{n-1})$ olsun. Şu halde

$$\begin{aligned} M(x_n, x_{n-1}) - dist(A, B) &= d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) - dist(A, B) \\ &\leq d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, Tx_{n-1}) - dist(A, B) \\ &= d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.16) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \beta\big(d(x_n, x_{n-1})\big) \cdot d(x_{n-1}, x_n) \\ &< d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned} \qquad (4.18)$$

olur. (4.16) ve (4.18) eşitsizliklerinden her $n \in N$ için

$$d(x_{n+1}, x_n) < d(x_{n-1}, x_n)$$

olur. Böylece $\big(d(x_{n+1}, x_n)\big)$ negatif olmayan reel sayıların azalan bir dizisidir. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty} d\,(x_{n+1}, x_n) = r$ olacak şekilde $r\ \geq 0$ sayısı vardır. Şimdi $r = 0$ olduğunu göstermek gereklidir. Bunun için $r > 0$ olarak alınsın. O zaman (4.17) ve (4.18) eşitsizliklerinden her $n \in N$ için

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \beta\big(d(x_n, x_{n-1})\big) \cdot d(x_{n-1}, x_n) < d(x_{n-1}, x_n)$$

olduğu görülür. Bu ise her $n \in N$ için

$$0 < \frac{d(x_{n+1}, x_n)}{d(x_n, x_{n-1})} \leq \beta\big(d(x_n, x_{n-1})\big) < 1$$

olmasını gerektirir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ alındığında

$$\lim_{n\to\infty} \beta\left(d(x_n, x_{n-1})\right) = 1$$

elde edilir. Ayrıca $\beta \in \mathcal{F}$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} d\,(x_n, x_{n-1}) = 0$ dır. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty} d\,(x_n, x_{n-1}) = r > 0$$

varsayımı ile çelişir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} d\,(x_n, x_{n-1}) = 0 \tag{4.19}$$

olmalıdır. Şimdi (x_n) in bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. Her $n \in N$ için $d(x_{n+1}, Tx_n) = dist(A, B)$ olduğundan ve (A, B) çifti P-özelliğini sağladığından her $p, q \in N$ için

$$d\big(x_p, x_q\big) = d\big(Tx_{p-1}, Tx_{q-1}\big)$$

yazılabilir. (x_n) in bir Cauchy dizisi olmadığı kabul edilsin. Şu halde $\limsup_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) > 0$ olduğu anlamına gelir. Üçgen eşitsizliği, (4.14) denklemi ve T nin bir Geraghty tipi büzülme olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) \leq\ & d(x_n + x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_m) \\ =\ & d(x_n, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tx_m) + d(x_{m+1}, x_m) \\ \leq\ & d(x_n, x_{n+1}) + \beta\big(d(x_n, x_m)\big) \cdot maks\{d(x_n, x_m), M(x_n, x_m) \\ & -dist(A, B)\} + d(x_{m+1}, x_m) \end{aligned} \tag{4.20}$$

yazılabilir. Şu halde aşağıdaki iki durum incelenmelidir.

Durum 1. $maks\{d(x_n, x_m), M(x_n, x_m) - dist(A, B)\} = d(x_n, x_m)$ olsun. O zaman (4.20) eşitsizliğinden

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_m, x_{m+1}) + \beta\big(d(x_n, x_m)\big) \cdot d(x_n, x_m)$$

olur. Bu ise

$$d(x_n, x_m) \leq \Big(1 - \beta\big(d(x_n, x_m)\big)\Big)^{-1} \big(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_m, x_{m+1})\big) \tag{4.21}$$

olmasını gerektirir.

Durum 2. maks$\{d(x_n, x_m), M(x_n, x_m) - dist(A, B)\} = M(x_n, x_m) - dist(A, B)$ olsun. Şu halde iki alt durumun incenlenmesi gerekir.

Alt Durum (a) $M(x_n, x_m) = d(x_n, Tx_n)$ olsun. (4.20) eşitsizliğinden

$$d(x_n, x_m) \leq\ d(x_n, x_{n+1}) + d(x_m, x_{m+1}) + \beta\big(d(x_n, x_m)\big)$$

$$\cdot \left(d(x_n, Tx_n) - dist(A,B)\right)$$

$$\leq \quad d(x_n, x_{n+1}) + d(x_m, x_{m+1}) + \beta\big(d(x_n, x_m)\big) \cdot (d(x_n, x_{n+1})$$

$$+d(x_{n+1}, Tx_n) - dist(A,B)\ )$$

$$= \quad d(x_n, x_{n+1}) + d(x_m, x_{m+1}) + \beta\big(d(x_n, x_m)\big) \cdot d(x_n, x_{n+1})$$

$$< \quad 2d(x_n, x_{n+1}) + d(x_m, x_{m+1}) \tag{4.22}$$

olduğu görülür.

Alt Durum (b) $M(x_n, x_m) = d(x_m, Tx_m)$ olsun. Benzer şekilde (4.20) eşitsizliğinden

$$d(x_n, x_m) < 2d(x_m, x_{m+1}) + d(x_n, x_{n+1}) \tag{4.23}$$

olduğu görülür. Şimdi A ve B kümeleri

$$A = \{(n,m) \in N \times N: \text{Alt Durum (a) yı sağlayan } n,m\}$$

ve

$$B = \{(n,m) \in N \times N: \text{Alt Durum (b) yi sağlayan } n,m\}$$

olarak tanımlansın. $Card\ A = \infty$ veya $Card\ B = \infty$ olduğu kabul edilsin. İlk olarak $Card\ A = \infty$ olduğu kabul edilsin. (4.22) eşitsizliğinden

$$d(x_n, x_m) < 2d(x_n, x_{n+1}) + d(x_m, x_{m+1})$$

olur. (4.19) denkleminden ve n ve m sonsuza gittiğinde

$$\lim_{n,m\to\infty} d\ (x_n, x_m) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\limsup\limits_{n,m\to\infty} d\ (x_n, x_m) > 0$ olduğu kabulü ile çelişir. Benzer işlemler $Card\ B = \infty$ varsayımı için de yapıldığında yine bir çelişki elde edilir. Şu halde $Card\ A < \infty$ ve $Card\ B < \infty$ elde edilir. Böylece sonlu sayıda (m,n) sayıları dışında her $(m,n) \in N \times N$ için Durum 1 sağlanır.

(4.21) eşitsizliğinde $m,n \to \infty$ alındığında ve (4.19) denkleminden

$$\limsup_{n,m\to\infty} \left(1 - \beta\big(d(x_n, x_m)\big)\right)^{-1} = \infty$$

olur. Böylece $\limsup\limits_{n,m\to\infty} \beta\big(d(x_n, x_m)\big) = 1$ olduğu görülür. $\beta \in \mathcal{F}$ olduğundan $\limsup\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ olarak elde edilir ve bu bir çelişkidir. Şu halde (x_n) bir Cauchy dizisidir.

Şimdi A kümesi (X,d) tam metrik uzayının bir kapalı alt kümesi ve $(x_n) \subset A$ olduğundan $x_n \to x^*$ olacak şekilde $x^* \in A$ elemanı bulunabilir. T sürekli bir dönüşüm olduğundan $Tx_n \to Tx^*$ olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} d\ (x_{n+1}, Tx_n) = d(x^*, Tx^*)$$

olduğu görülür. $\left(d(x_{n+1}, Tx_n)\right)$ dizisinin $d(A, B)$ değeri ile bir sabit dizi olduğu dikkate alınırsa,

$$d(x^*, Tx^*) = dist(A, B)$$

olduğu görülür. Bu ise x^* noktasının T nin en iyi yakınlık noktası olduğu anlamına gelir. Bu ise teoremin varlık kısmının ispatını tamamlar.

$x_1 \neq x_2$ olacak şekilde x_1 ve x_2 noktalarının T nin en iyi yakınlık noktaları olduğu kabul edilsin. $i = 1,2$ için

$$d(x_i, Tx_i) = dist(A, B),$$

olur. P-özelliği kullanıldığında

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_1, Tx_2)$$

olur. T bir Geraghty tipi büzülme olduğundan

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= d(Tx_1, Tx_2) \\ &\leq \beta\left(d(x_1, x_2)\right) \cdot \text{maks}\{d(x_1, x_2), M(x_1, x_2) - dist(A, B)\} \end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. Şu halde iki durum incelenmesi gereklidir.

Durum 1. $\text{maks}\{d(x_1, x_2), M(x_1, x_2) - dist(A, B)\} = d(x_1, x_2)$ olsun. (4.24) eşitsizliğinden ve $\beta\colon [0, \infty) \to [0,1)$ olduğundan

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_1, Tx_2) \leq \beta\left(d(x_1, x_2)\right) \cdot d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2)$$

olur. Bu ise bir çelişkidir.

Durum 2. maks $\{d(x_1, x_2), M(x_1, x_2) - dist(A, B)\} = M(x_1, x_2) - dist(A, B)$ olsun. Şu halde iki alt durum incelenmelidir.

Alt Durum (a) $M(x_1, x_2) = d(x_1, Tx_1)$ olsun. $d(x_1, Tx_1) = dist(A, B)$ olduğundan

$$d(x_1, x_2) \leq M(x_1, x_2) - dist(A, B) = dist(A, B) - dist(A, B) = 0$$

olur. Böylece $x_1 = x_2$ olduğu görülür.

Alt Durum (b) $M(x_1, x_2) = d(x_2, Tx_2)$ olsun. Alt Durum (a) daki işlemler yapıldığında $x_1 = x_2$ olduğu görülür.

Şu halde ispat tamamlanır.

Sonuç 4.7 (A, B) çifti $A_0 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir (X, d) tam metrik uzayının boş olmayan kapalı iki alt kümesi olsun. $T\colon A \to B$ dönüşümü $T(A_0) \subset B_0$ olacak şekilde her $x, y \in A$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \beta\left(d(x, y)\right) \cdot d(x, y) \tag{4.25}$$

koşulunu sağlasın. Burada $\beta \in \mathcal{F}$ dir. Eğer (A, B) çifti P-özelliğini sağlıyorsa, o zaman $d(x^*, Tx^*) = d(A, B)$ olacak şekilde bir tek $x^* \in A$ noktası vardır (Almeida ve ark., 2014).

İspat. (4.25) büzülme şartından

$d(Tx,Ty) \leq \beta\big(d(x,y)\big) \cdot d(x,y) \leq \beta\big(d(x,y)\big) \cdot \text{maks}\{\, d(x,y), M(x,y) - dist(A,B)\}$

olur. Böylece T bir Geraghty tipi büzülme dönüşümüdür. Dahası

$$d(T\,x, T\,y) \;\leq \beta((d(x,y)) \;\cdot d(x,y) < d(x,y)$$

eşitsizliği T nin sürekli olmasını gerektirir. Şu halde Teorem 4.6 dan istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.8 (A,B) çifti $A_0 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir (X,d) tam metrik uzayının boş olmayan kapalı iki alt kümesi olsun. $T\colon A \to B$ dönüşümü $T(A_0) \subset B_0$ olacak şekilde her $x,y \;\in A$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \beta\big(d(x,y)\big)\left(\frac{d(x,Tx)+d(y,Ty)}{2} - dist(A,B)\right) \tag{4.26}$$

koşulunu sağlayan sürekli bir dönüşüm olsun. Burada $\beta \in \mathcal{F}$ dir. Eğer (A,B) çifti P-özelliğini sağlıyorsa, o zaman $d(x^*,Tx^*) = dist(A,B)$ olacak şekilde bir tek $x^* \in A$ noktası vardır (Almeida ve ark., 2014).

İspat. Dikkat edildiğinde her $x,y \in A$ için

$$\frac{d(x,Tx)+d(y,Ty)}{2} \geq \frac{2dist(A,B)}{2} = dist(A,B)$$

olduğu açıktır. Böylece (4.26) şartı iyi tanımlıdır. (4.26) şartından her $x,y \in A$ için

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) \quad &\leq \beta\big(d(x,y)\big)\left(\frac{d(x,Tx)+d(y,Ty)}{2} - dist(A,B)\right) \\ &\leq \beta\big(d(x,y)\big)\left(\frac{2M(x,y)}{2} - dist(A,B)\right) \\ &= \beta\big(d(x,y)\big)\big(M(x,y) - dist(A,B)\big) \\ &\leq \beta\big(d(x,y)\big)\,\text{maks}\{\, d(x,y), M(x,y) - dist(A,B)\} \end{aligned}$$

olur. Şu halde T bir Geraghty tipi büzülme dönüşümüdür. Ayrıca, T sürekli olduğundan Teorem 4.6 dan istenilen sonuç elde edilir.

Not 4.2 Dikkat edilirse (4.26) koşulunu sağlayan bir dönüşüm sürekli olmak zorunda değildir (Almeida ve ark., 2014).

Örnek 4.8 $A = B = R$ alışılmış metrikle göz önüne alınsın. $T\colon R \to R$ dönüşümü

$$T\,x = \begin{cases} \dfrac{1}{5}x, & x \leq -1 \text{ için} \\ \dfrac{1}{7}x, & -1 < x \text{ için} \end{cases}$$

ile verilsin. Açıkçası $x_0 = -1$ noktasında T dönüşümü sürekli değildir ve $dist(A,B) = 0$ dır. T nin (4.26) koşulunu sağladığını göstermek için aşağıdaki üç durum incelenmelidir.

Durum 1. $x, y \in (-\infty, -1]$ olsun. Şu halde

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= |Tx - Ty| = \left|\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y\right| \leq \frac{1}{5}|x| + \frac{1}{5}|y| = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}|x| + \frac{4}{5}|y|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{d(x,Tx) + d(y,Ty)}{2}\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Durum 2. $x, y \in (-1, +\infty)$ olsun. Şu halde

$$d(Tx,Ty) = |Tx - Ty| = \left|\frac{1}{7}x - \frac{1}{7}y\right| \leq \frac{1}{6}\left(\frac{6}{7}|x| + \frac{6}{7}|y|\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{d(x,Tx) + d(y,Ty)}{2}\right)$$

olduğu görülür.

Durum 3. $x \in (-\infty, -1]$ ve $y \in (-1, +\infty)$ olsun. Şu halde

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= |Tx - Ty| = \left|\frac{1}{5}x - \frac{1}{7}y\right| \\ &\leq \frac{1}{5}|x| + \frac{1}{7}|y| = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}|x| + \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{7}|y| \\ &\leq \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}|x| + \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{7}|y| = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}|x| + \frac{6}{7}|y|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{d(x,Tx) + d(y,Ty)}{2}\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Böylece her $x, y \in R$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{d(x,Tx) + d(y,Ty)}{2}\right)$$

dir. Böylece $\mathcal{F}$ ye ait olan $\beta(t) = \frac{1}{2}$ fonksiyonu ile T dönüşümü (4.26) koşulunu sağlar (Almeida ve ark., 2014).

Sonuç 4.9 (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ sürekli bir Geraghty tipi büzülme dönüşümü olsun. O zaman T nin bir tek sabit noktası vardır (Almeida ve ark., 2014).

Sonuç 4.9, Geraghty'nin (1973) yılında yapmış olduğu çalışmanın ana teoremini genişletir ve geliştirir. Sonuç 4.8 de $A = B$ alınırsa, bu sonuç Geraghty-Kannan tipi büzülme dönüşümü için bir sabit nokta teoremi haline dönüşür (Almeida ve ark., 2014).

Sonuç 4.10 (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \beta\big(d(x,y)\big)\left(\frac{d(x,Tx)+d(y,Ty)}{2}\right)$$

şartını sağlayan sürekli bir dönüşüm olsun. Burada $\beta \in \mathcal{F}$ dir. O zaman T nin bir tek sabit noktası vardır (Almeida ve ark., 2014).

Sonuç 4.11 (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y) + \beta\big(d(x,Tx)+d(y,Ty)\big) \tag{4.27}$$

şartını sağlayan sürekli bir dönüşüm olsun. Burada $\alpha, \beta \in R^+$ ve $\alpha + 2\beta < 1$ dir. O zaman T nin bir tek sabit noktası vardır. (Almeida ve ark., 2014).

İspat. (4.27) şartından her $x,y \in X$ için

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\leq \alpha d(x,y) + \beta\big(d(x,Tx)+d(y,Ty)\big) \\ &= \alpha d(x,y) + 2\beta\left(\frac{d(x,Tx)+d(y,Ty)}{2}\right) \\ &\leq (\alpha+2\beta)\cdot \text{maks}\left\{d(x,y), \frac{2M(x,y)}{2}\right\} \\ &= (\alpha+2\beta)\cdot \text{maks}\{d(x,y), M(x,y)\} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece (4.27) koşulunu sağlayan herhangi bir T dönüşümü $\gamma(t) = \alpha + 2\beta$ olarak tanımlı $\gamma: [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu ile bir Geraghty tipi büzülmedir. Ayrıca $\alpha + 2\beta < 1$ olduğundan $\gamma \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. Şu halde Teorem 4.6 uygulandığında istenilen sonuç elde edilir.

Not 4.3 (4.27) koşulunu sağlayan bir $T: A \to B$ dönüşümü sürekli olmak zorunda değildir (Almeida ve ark., 2014).

Örnek 4.9 Alışılmış metrikle birlikte $A = B = [0,1]$ olsun. $T: [0,1] \to [0,1]$ dönüşümü

$$T\,x = \begin{cases} \dfrac{7x}{20}, & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \text{ için} \\ \dfrac{3x}{10}, & \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \text{ için} \end{cases}$$

ile tanımlı olsun. Açıkçası T dönüşümü $x_0 = \frac{1}{2}$ noktasında sürekli değildir. Ayrıca $\alpha = \frac{1}{10}$ ve $\beta = \frac{4}{9}$ için T dönüşümü (4.27) koşulunu sağlar (Almeida ve ark., 2014).

Aşağıdaki örnek Teorem 4.6 için P-özelliğinin kaldırılamayacağını gösterir.

Örnek 4.10 $X = R$ alışılmış metrikle göz önüne alınsın ve $A = \{8,-8\}$ ve $B = \{1,-1\}$ olsun. Açıkçası A ve B kümeleri R nin kapalı alt kümeleridir ve $A_0 = A$, $B_0 = B$ ve $d(A,B) = 7$ olduğu görülür. $T: A \to B$ dönüşümü $T(8) = -1$ ve $T(-8) = 1$ olarak verilsin. Şu halde T dönüşümü süreklidir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &= d(T8,T(-8)) = d(-1,1) = 2 \\
d(x,y) &= d(8,-8) = 16 \\
d(x,Tx) &= d(8,T8) = d(8,-1) = 9 \\
d(y,Ty) &= d(-8,T(-8)) = d(-8,1) = 9
\end{aligned}
$$

olduğundan her $x, y \in A$ için

$$
d(Tx,Ty) = 2 \leq \frac{1}{2}\text{maks}\{\, d(x,y), M(x,y) - dist(A,B)\} = \frac{1}{2}\text{maks}\{\, 16,2\} = 8
$$

elde edilir. Böylece T sürekli bir Geraghty tipi büzülme dönüşümüdür.

Diğer taraftan, her $x \in A$ için $d(x,Tx) = 9 > d(A,B) = 7$ olduğundan T nin bir en iyi yakınlık noktası yoktur. Dikkat edilirse (A,B) çiftinin P-özelliği yoktur (Almeida ve ark., 2014).

Almeida ve ark. (2014) çalışmasındaki sonuçların daha iyi anlaşılması için bazı örnekler verilmiştir.

Örnek 4.11 Alışılmış metrik ile $X = R^2$ verilsin. $A = \{0\} \times [0,\infty)$ ve $B = \{1\} \times [0,\infty)$ olarak tanımlansın. Şu halde $d(A,B) = 1$ olur ve $A_0 = A$ ve $B_0 = B$ olduğu görülür. $T: A \to B$ dönüşümü

$$
T(0,x) = \left(1, \frac{x}{1+x}\right)
$$

ile tanımlansın. $x \neq y$ olacak şekilde her $(0,x),(0,y) \in A$ için

$$
\begin{aligned}
d\big(T(0,x),T(0,y)\big) &= d\left(\left(1,\frac{x}{1+x}\right),\left(1,\frac{y}{1+y}\right)\right) = \left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right| \\
&= \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}
\end{aligned}
$$

dır. $(1+x)(1+y) \geq 1 + |x-y|$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
d\big(T(0,x),T(0,y)\big) &= \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \beta(|x-y|) \\
&= \beta\Big(d\big((0,x),(0,y)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Burada $\beta: [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu $\beta(t) = \frac{t}{1+t}$ ile tanımlıdır. Böylece $x \neq y$ olacak şekildeki her $(0,x),(0,y) \in A$ için

$$
\begin{aligned}
2d\big(T(0,x),T(0,y)\big) \leq\ & \beta\Big(d\big((0,x),(0,y)\big)\Big) \\
=\ & \frac{\beta\Big(d\big((0,x),(0,y)\big)\Big)}{d\big((0,x),(0,y)\big)} \cdot d\big((0,x),(0,y)\big)
\end{aligned}
$$

$$\leq \ \gamma\big(d\big((0,x),(0,y)\big)\big)$$
$$\cdot \operatorname{maks}\{\, d\big((0,x),(0,y)\big), M\big((0,x),(0,y)\big) - dist(A,B)\}\big)$$

olduğu görülür. Burada $\gamma:[0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu $\gamma(t) = \frac{\beta(t)}{t} = \frac{1}{1+t}$ ile tanımlıdır. Açıkçası $\gamma \in \mathcal{F}$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece T dönüşümü bir Geraghty tipi büzülmedir. Şimdi (A,B) çiftinin P-özelliğini göstermek gereklidir.

$$d\big((0,x_1),(1,y_1)\big) = \sqrt{1+(x_1-y_1)^2} = dist(A,B) = 1$$
$$d\big((0,x_2),(1,y_2)\big) = \sqrt{1+(x_2-y_2)^2} = dist(A,B) = 1$$

olduğundan $x_1 = y_1$ ve $x_2 = y_2$ olması gerekir. Böylece

$$d\big((0,x_1),(0,x_2)\big) = |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = d\big((1,y_1),(1,y_2)\big)$$

elde edilir. Dahası T nin sürekli olduğu açıktır ve Teorem 4.6 nın koşulları sağlanmış olur. Dolayısıyla

$$d\big((0,x^*),T(0,x^*)\big) = dist(A,B) = 1$$

olacak şekilde bir tek $(0,x^*) \in A$ bulunur. Dikkat edilirse, $(0,x^*) \in A$ noktasının $(0,0) \in A$ olduğu görülür (Almeida ve ark., 2014).

(A,B) çiftinin bir (X,d) metrik uzayın kapalı alt kümeleri olmasının bir en iyi yakınlık noktasının var olması için gerekli bir şart olmadığını gösteren örnek aşağıda verilmiştir. Bu örnek verilmeden önce örneğin ispatında kullanılacak bazı lemmalar ispatlanmıştır.

Lemma 4.1 Bir $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu $f(0) = 0$ ve konkav ise, o zaman f fonksiyonu alt toplamsaldır (Almeida ve ark., 2014).

İspat. $x, y \in [0,\infty)$ alındığında f konkav ve $f(0) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{y}{x+y}\cdot 0 + \frac{x}{x+y}\cdot(x+y)\right) \\ &\geq \frac{y}{x+y} f(0) + \frac{x}{x+y} f(x+y) \\ &= \frac{x}{x+y} f(x+y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y) &= f\left(\frac{x}{x+y}\cdot 0 + \frac{y}{x+y}\cdot(x+y)\right) \\ &\geq \frac{x}{x+y} f(0) + \frac{y}{x+y} f(x+y) \\ &= \frac{y}{x+y} f(x+y) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlikler toplandığında

$$f(x) + f(y) \geq \frac{x}{x+y} f(x+y) + \frac{y}{x+y} f(x+y) = f(x+y)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 4.2 $f: [0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonu

$$f(x) = \tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

olarak tanımlansın. Şu halde aşağıdaki iki koşul sağlanır:

a) f fonksiyonu alt toplamsaldır.

b) $\beta: [0, \infty) \to [0,1)$ fonksiyonu $\beta(t) = \frac{f(t)}{t}$ ile tanımlandığında $\mathcal{F}$ sınıfına ait olur (Almeida ve ark., 2014).

İspat.

a) Dikkat edilirse $\tanh 0 = 0$ olduğundan ve her $x > 0$ için

$$(\tanh x)'' = \frac{8e^{2x}(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^3} < 0$$

olduğundan $f(x) = \tanh x$ fonksiyonu konkavdır. Lemma 4.1 den dolayı $f(x) = \tanh x$ fonksiyonu alt toplamsaldır.

b)

$$g(x) = x - f(x) = x - \tanh x = x - \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun türevi her $x > 0$ için

$$g'(x) = \frac{(e^{2x} - 1)^2}{(e^{2x} + 1)^2} > 0$$

olduğundan g fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde kesin artandır. $g(0) = 0$ olduğundan her $x > 0$ için $0 = g(0) < g(x)$ olduğu görülür. Böylece her $x > 0$ için $f(x) = \tanh x < x$ olur.

$\beta \in \mathcal{F}$ olduğunu göstermek için $\beta(t_n) \to 1$ olacak şekilde $[0, \infty)$ aralığında bir (t_n) dizisi göz önüne alınmalıdır. (t_n) nin sınırlı olduğu gösterilmelidir. Aksine $(t_n) \to \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\beta(t_n) = \frac{\tanh t_n}{t_n} \to 0$$

olduğu görülür. Bu ise $\beta(t_n) \to 1$ varsayımı ile çelişir. Şu halde (t_n) dizisi sınırlıdır.

Şimdi $\beta(t_n) \to 1$ ve $t_n \nrightarrow 0$ olsun. Bu ise her $n \in N$ için $p_n \geq n$ ve $t_{p_n} \geq \epsilon$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısının var olduğu anlamına gelir. (t_n) dizisi sınırlı olduğundan bir

$a \geq 0$ için $t_{p_n} \to a$ olacak şekilde (t_n) dizisinin bir $\left(t_{p_n}\right)$ alt dizisi vardır. $\beta(t_n) \to 1$ olduğundan

$$\beta\left(t_{p_n}\right) = \frac{\tanh t_{p_n}}{t_{p_n}} \to \frac{\tanh a}{a} = 1$$

olur. $\tanh x = x$ denkleminin $[0,\infty)$ üzerindeki tek çözümü $x_0 = 0$ olduğundan $a = 0$ dır. Böylece $t_{p_n} \to 0$ olur. Bu ise $n \in N$ için $t_{p_n} \geq \epsilon$ olması ile çelişir. Şu halde $t_n \to 0$ dır. Böylece $\beta \in \mathcal{F}$ olur.

Not 4.4 Not 4.1 ve Lemma 4.2 dikkate alındığında $y \leq x$ olacak şekilde her $x, y \in [0,\infty)$ için

$$\tanh x - \tanh y \leq \tanh(x - y)$$

elde edilir (Almeida ve ark., 2014).

Örnek 4.12 Alışılmış metrik ile $X = R^2$ göz önüne alınsın. X in A ve B alt kümeleri $A = [0,\infty) \times \{0\}$ ve $B = [0,1) \times \{1\}$ olarak tanımlansın. Açıkçası $d(A,B) = 1$ ve B kümesi X in kapalı olmayan bir alt kümesidir. Ayrıca $A_0 = [0,1) \times \{0\}$ ve $B_0 = B$ olduğu görülür. Eğer $T: A \to B$ dönüşümü her $(x,0) \in A$ için

$$T(x,0) = (\tanh x, 1)$$

olarak tanımlanırsa, $T(A_0) \subset B_0$ olduğu açıktır. $x \neq y$ ve $x > y$ (aynı işlemler $y > x$ için de yapılabilir) olacak şekilde her $(x,0),(y,0) \in A$ için

$$\begin{aligned} d\left(T(x,0),T(y,0)\right) &= d\left((\tanh x, 1),(\tanh y, 1)\right) \\ &= |\tanh x - \tanh y| = \tanh x - \tanh y \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x+1})^2} \geq 0$ olduğundan $f(x) = \tanh x$ fonksiyonu artandır. Not 4.4 den dolayı

$$\begin{aligned} d\left(T(x,0),T(y,0)\right) = &\ \tanh x - \tanh y \leq \tanh(x-y) = \tanh(|x-y|) \\ = &\ \frac{\tanh(|x-y|)}{|x-y|} \cdot |x-y| \\ = &\ \frac{\tanh\left(d\left((x,0),(y,0)\right)\right)}{d\left((x,0),(y,0)\right)} \cdot d\left((x,0),(y,0)\right) \\ = &\ \beta\left(d\left((x,0),(y,0)\right)\right) \cdot d\left((x,0),(y,0)\right) \\ \leq &\ \beta\left(d\left((x,0),(y,0)\right)\right) \\ &\ \cdot \text{maks}\{d\left((x,0),(y,0)\right), M\left((x,0),(y,0)\right) - d(A,B)\} \end{aligned}$$

olur. Burada β fonksiyonu $\beta(t) = \frac{\tanh t}{t}$ ile tanımlı olup Lemma 4.2 den dolayı $\mathcal{F}$ sınıfına aittir. Böylece T bir Geraghty tipi büzülme dönüşümüdür. Ayrıca T süreklidir. (A, B) çiftinin P-özelliğini sağladığını göstermek için Örnek 4.11 de yapılan işlemlerin bir benzerini yapmak yeterlidir.

Diğer taraftan

$$d\big((0,0), T(0,0)\big) = d\big((0,0), (\tanh 0, 1)\big) = d\big((0,0), (0,1)\big) = 1 = d(A, B)$$

olduğundan T dönüşümünün en iyi yakınlık noktasının $(0,0) \in A$ olduğu görülür. Eğer $(x, 0) \in A$ noktası T dönüşümünün en iyi yakınlık noktası ise, o zaman

$$1 = d(A, B) = d\big((x, 0), T(x, 0)\big) = d\big((x, 0), (\tanh x\,, 1)\big) = \sqrt{1 + (x - \tanh x)^2}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\tanh x = x$ dir. $\tanh x = x$ denkleminin çözümünün yanlız $x_0 = 0$ olduğu gerçeğinden $x = 0$ olduğu açıktır. Böylece en iyi yakınlık noktasının tekliği ispat edilmiş olur. Dikkat edilirse B kümesi kapalı değildir (Almeida ve ark., 2014).

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Sabit nokta teorisine bakıldığında bir dönüşümün değer kümesi ile görüntü kümesinin genel olarak aynı olduğu görülmektedir. Fakat kendi üzerine olmayan dönüşümlerde değer kümesinin her elemanının görüntü kümesine ait olması mümkün olmadığından, bu tür dönüşümler için sabit noktaların varlığının araştırılması yerine en iyi yakınlık noktalarının araştırılması gerekmektedir.

Bu çalışmada, kendi üzerine olmayan tek değerli büzülme dönüşümleri, küme değerli büzülme dönüşümleri, zayıf proksimal Kannan büzülme dönüşümleri ve Geraghty tipi büzülme dönüşümlerinin en iyi yakınlık noktalarının varlığı ve tekliği üzerine teoremler verilerek, bu teoremleri destekleyen örnekler verildi.

5.2 Öneriler

Bu çalışmadaki teoremlerin genelleştirilmesi üzerine çalışmalar yapılabilir. Ayrıca, bu çalışmadaki tanım ve teoremler tam metrik uzay üzerinde tanımlanmıştır. Başka uzaylarda bu teoremlerin geçerliliği tartışılabilir veya bu teoremlerin başka uzaylarda geçerli olması için yeni koşullara gereksinim duyulabilir.

KAYNAKLAR

Abkar, A., Gabeleh, M. 2012. Global optimal solutions of noncyclic mappings in metric spaces, Journal of Optimization Theory and Applications, 153, 298-305.

Abkar, A., Gabeleh, M. 2013. The existence of best proximity points for multivalued non-self-mappings, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, 107, 319-325.

Almeida, A., Harjani, J., Sadarangani, K. 2009. Existence and uniqueness of best proximity point for contractions of Geraghty type, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, 108, 3665–3671.

Al-Thagafi, M.A., Shahzad, N. 2014. Convergence and existence results for best proximity points, *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, 70, 957–971.

Anuradha, J., Veeramani, P. 2009. Proximal pointwise contraction, Topology and its Applications, 156, 2942–2948.

Bayraktar, M., 2006, Fonksiyonel Analiz, *Gazi Kitap Evi*, *Ankara.*

Caballero, J., Harjani, J., Sadarangani, K. 2012. A best proximity point theorem for Geraghty-contractions, *Fixed Point Theory and Applications*, 231.

Di Bari, C., Suzuki, T., Vetro, C. 2008. Best proximity points for cyclic Meir- Keeler contractions, *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, 69, 3790-3794.

Eldred, A.A., Veeramani, P. 2006. Existence and convergence of best proximity points, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323, 1001–1006.

Gabeleh, M., 2013. Proximal Weakly Contractive and Proximal Nonexpansive Non-self-Mappings in Metric and Banach Spaces, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 158, 615–625.

Gabeleh, M., 2014. Best proximity point theorems for single- and set-valued non-self mappings, *Acta Mathematica Scientia*, 34, 1661-1669.

Gabeleh, M., 2015. Existence and uniqueness results for best proximity points, *Miskolc Mathematical Notes*, 16, 123-131.

Geraghty, M. 1973. On contractive mappings, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 40, 604–608.

Gezer, B., Bizim, O., 2017, Fonksiyonel Analiz, *Dora*, Bursa.

Kannan, R. 1969. Some results on fixed points, *The American Mathematical Monthly*, 76 (4), 405-408.

Khamsi, M., Kirk, W., 2001, An introduction to metric spaces and fixed point theory, *Wiley-Interscience*, New York.

Kikkawa, M., Suzuki, T. 2008. Three fixed point theorems for generalized contractions with constants in complete metric spaces. *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, 69, 2942-2949.

Kikkawa, M., Suzuki, T. 2010. Some similarity between contractions and Kannan mappings, *Fixed Point Theory and Applications*, 4, 1-8.

Kirk, W.A., Reich, S., Veeramani, P. 2003. Proximinal retracts and best proximity pair theorems, *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 24, 851–862.

Munkres, J. R., 2000, Topology, *Prentice Hall*, New Jersey.

Nadler, S.B. 1969. Multivalued contraction mappings, *Pacific Journal Of Mathematics*, 30, 475-488.

Rus, I. A. 1971. Some fixed point theorems in metric spaces. *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste An International Journal of Mathematics*, 3, 169–172.

Rosenbaum, R. A. 1950. Subadditive functions. *Duke Mathematical Journal*, 17, 227-242.

Sadiq Basha, S., Veeramani, P. 2000. Best proximity pair theorems for multifunctions with open fibres. *Journal of Approximation Theory*,103, 119–129.

Sadiq Basha S., Veeramani, P., Pai, D.V. 2001. Best proximity pair theorems. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 32, 1237-1246.

Sadiq Basha, S. 2011. Best proximity points: Optimal solutions, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 151 (1), 210-216.

Sankar Raj, V., Veeramani, P. 2009. Best proximity pair theorems for relatively nonexpansive mappings, *Applied General Topology*, 10, 21–28.

Sankar Raj, V. 2011. A best proximity theorem for weakly contractive non-self mappings, *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, 74, 4804–4808.

Soykan Y., 2016, Fonksiyonel Analiz, *Nobel*, Ankara.

Suzuki, T., Kikkawa, M., Vetro, C. 2009. The existence of best proximity points in metric spaces with the property UC, *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, 71: 2918-2926.

Şuhubi E., 2001, Fonksiyonel Analiz, *İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı*, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Melik DİNÇ
Uyruğu	:	
Doğum Yeri ve Tarihi	:	
Telefon	:	
Faks	:	
e-mail	:	

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Van Atatürk Lisesi, Merkez, Van	2004
Üniversite	:	Muş Alparslan Üniversitesi, Merkez, Muş	2016
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014-2018	Limit Özel Öğretim Kursu	Müdür
2019-2020	Ada Koleji	Öğretmen
2020-	Teknonet Fen Lisesi	Müdür Yardımcısı

UZMANLIK ALANI

Eğitici

YABANCI DİLLER

İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR