T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANYETİK EĞRİLERİN FERMİ-WALKER TÜREVİNİN ENERJİSİ

Hatice ÖZDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2020
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANYETİK EĞRİLERİN FERMİ-WALKER

TÜREVİNİN ENERJİSİ

Hatice ÖZDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Doç. Dr. Talat KÖRPINAR

Haziran-2020
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Hatice ÖZDEMİR tarafından hazırlanan "**Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevinin Enerjisi"** adlı tez çalışması 30/06/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Doç. Dr. Yasin ÜNLÜTÜRK Kırklareli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	....
Danışman	
Doç. Dr. Talat KÖRPINAR Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	....
Üye	
Dr. Öğr. Üyesi Muhsin İNCESU Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi	....

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 09/07/2020 Tarih ve 21/2 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Hatice ÖZDEMİR

30/06/2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MANYETİK EĞRİLERİN FERMİ-WALKER TÜREVİNİN ENERJİSİ

Hatice ÖZDEMİR

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Talat KÖRPINAR

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmanın giriş kısmı verilmiştir. İkinci bölümde, konu hakkında kaynak araştırması yapılmıştır. Üçüncü bölümde, konu ile ilgili temel tanım ve kavramlar ifade edilip, 3-boyutlu Öklid uzayındaki manyetik eğriler ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevlerinin enerjileri hesaplanmıştır. Son bölümde ise sonuçlar verilmiştir.

2020, 50 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Bishop çatı, Enerji, Fermi-Walker türevi, Lorentz kuvveti, Manyetik eğriler, Tip-2 Bishop çatı.

ABSTRACT

MS THESIS

ENERGY OF FERMI WALKER DERIVATIVE OF MAGNETIC CURVES

Hatice ÖZDEMİR

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science Institute
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

This work has consisted of five chapters. The first part of the study has been given. In the second part, a resource survey has been done on the subject. In the third section, the basic definitions and concepts related to the subject have been expressed and the introduction and theorems related to magnetic curves in 3-dimensional Euclidean space have been given. In the fourth chapter, the energies of Fermi-Walker derivatives of magnetic curves have been calculated. Results have been given in the final section.

2020, 50 Pages

Key Words: Bishop frame, Energy, Fermi-Walker derivative, Lorentz force, Magnetic curves, Type-2 Bishop frame.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, çalışmamın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayıran saygıdeğer Hocam Doç. Dr. Talat KÖRPINAR'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu süreç boyunca her daim yanımda olan değerli eşim Memduh ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Hatice ÖZDEMİR
MUŞ-2020

İÇİNDEKİLER

ÖZET .... **iv**

ABSTRACT .... **v**

ÖNSÖZ .... **vi**

İÇİNDEKİLER .... **vii**

SİMGELER ve KISALTMALAR .... **viii**

ŞEKİLLER DİZİNİ .... **ix**

1. GİRİŞ **1**

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **4**

3. MATERYAL ve YÖNTEM **6**

3.1. Temel Tanım ve Teoemler 6
3.2. Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre $\mathbf{T}$-Manyetik Eğriler 13
3.3. Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre $\mathbf{N}_1$-Manyetik Eğriler 13
3.4. Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre $\mathbf{N}_2$-Manyetik Eğriler 13
3.5. Öklid Uzayında Tip-2 Bishop Çatısına Göre ξ_1-Manyetik Eğriler 14
3.6. Öklid Uzayında Tip-2 Bishop Çatısına Göre ξ_2-Manyetik Eğriler 14
3.7. Öklid Uzayında Tip-2 Bishop Çatısına Göre $\mathbf{B}$-Manyetik Eğriler 15

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA **16**

4.1. Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevlerinin Enerjileri 16
4.1.1. Öklid uzayında Bishop çatısına göre $\mathbf{T}$-manyetik eğrilerin enerjileri 16
4.1.2. Öklid uzayında Bishop çatısına göre $\mathbf{N}_1$-manyetik eğrilerin enerjileri 21
4.1.3. Öklid uzayında Bishop çatısına göre $\mathbf{N}_2$-manyetik eğrilerin enerjileri 26
4.2. Öklid Uzayında Tip-2 Bishop Çatısına Göre Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevlerinin Enerjileri 31
4.2.1. Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre ξ_1-manyetik eğrilerin enerjileri .. 32
4.2.2. Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre ξ_2-manyetik eğrilerin enerjileri .. 36
4.2.3. Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre $\mathbf{B}$-manyetik eğrilerin enerjileri 41

5. SONUÇ **47**

KAYNAKLAR **48**

ÖZGEÇMİŞ **50**

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

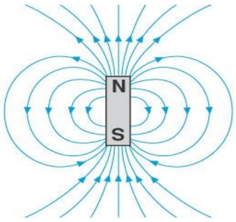
$\mathbb{R}^3$	: Üç boyutlu Öklid uzay
(M, g)	: Riemann manifoldu
Φ	: Lorentz kuvveti
$\mathbf{F}$	: Manyetik alan
$\mathbf{V}$	: Killing vektör alanı
$\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$	: Frenet Çatı
$\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}_1(s), \mathbf{N}_2(s)\}$	: Bishop Çatı
$\{\boldsymbol{\xi}_1(s), \boldsymbol{\xi}_2(s), \mathbf{B}(s)\}$	: Tip-2 Bishop Çatı
$\kappa(s)$	: Eğrilik
$\tau(s)$	: Burulma(Torsion)
$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{X}$	: Fermi-Walker türevi
$\varepsilon(\mathbf{X})$	: $\mathbf{X}$ vektör alanının enerjisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Manyetik Alan Çizgileri 1
Şekil 1.2 Elektriksel Alan Çizgileri 1
Şekil 1.3 Lorentz Kuvveti 2

1. GİRİŞ

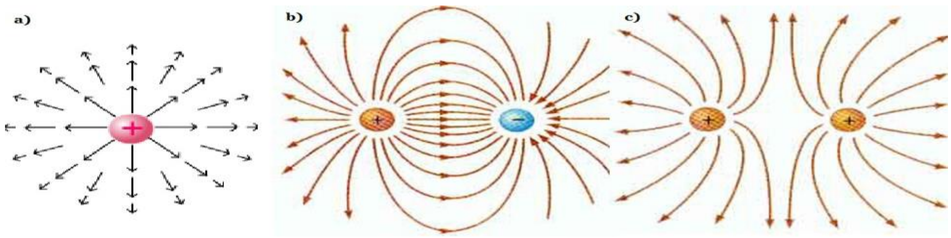
Manyetik alan, hareket eden elektrik yükleri tarafından, zamanla değişen elektrik alanlardan veya temel parçacıklar tarafından içsel olarak üretilir. Manyetik alan vektörel bir büyüklüktür. Herhangi bir noktada yönü ve şiddeti ile tanımlanır. Mıknatıssal veya manyetik alan bir mıknatısın, mıknatıssal özelliklerini gösterebildiği alandır. Mıknatıs çevresinde oluşan çizgilere de manyetik alan çizgileri denir. Manyetik alan çizgilerinin yönü kuzeyden (**N**) güneye (**S**) doğrudur. Manyetik alan **B** ile gösterilir. Birimi Tesla'dır (Sırp bilim adamı Nikola Tesla).



Şekil 1.1. Manyetik alan çizgileri (Hacıfazlıoğlu, 2013)

Manyetik alan birçok yerde karşımıza çıkar. Örneğin, dünya kendi manyetik alanını üretir ve bu manyetik alan pusulanın temel çalışma prensibini oluşturur. Bunun yanısıra dönen manyetik alan, elektrik motorlarında ve jeneratörlerde kullanılır. Buna benzer daha birçok kullanım alanları mevcuttur.

Elektriksel alan, bir elektrik yükünün başka bir elektrik yükü üzerinde oluşturduğu çekme ya da itme kuvveti etkisine denir. Diğer bir deyişle, yüklü bir cismin çevresinde pozitif birim yüke etki eden elektriksel kuvvet olarak da tanımlanabilir. Elektrik yüklerinin çevresinde elektrik alan çizgileri oluşur. Elektriksel alan **E** ile gösterilir (Hacıfazlıoğlu, 2013).



Şekil 1.2. Elektriksel alan çizgileri (Hacıfazlıoğlu, 2013)

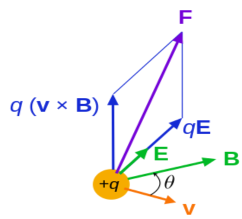
Manyetik alan en genel şekilde, hareket eden elektrik yüküne etki eden Lorentz kuvveti ile tanımlanır. Lorentz kuvveti, fizikte özellikle elektromanyetizmada; elektromanyetik alanların oluşturduğu noktasal yük üzerindeki elektrik ve manyetik kuvvetlerin bileşkesidir. Elektromanyetik radyasyon yayması nedeniyle hızlanan yüklü bir parçacıktaki geri tepme kuvveti olarak da tanımlanabilir. Manyetik alan içerisinde elektrik yüküne sahip bir parçacığın hareket halinde olduğunu varsayalım. Bu yük üzerine etki eden manyetik kuvvet, Lorentz kuvvetidir.

Tarihçiler, her ne kadar bu konuyla ilgili ilk çalışmaları 1865 yılında James Clerck Maxwell'in yazdığı bir makaleyle ilişkilendirseler de, Lorentz kuvvetinin ilk geliştirilmesi, 1889'da Oliver Heaviside'a atfedilmektedir. Bundan bir kaç yıl sonra da Hollandalı fizikçi Hendrik Antoon Lorentz, Lorentz denklemini geliştirmiştir (Hacıfazlıoğlu, 2013).

$\mathbf{B}$ manyetik alan ve $\mathbf{E}$ elekrtiksel alanda, $\mathbf{v}$ hızıyla hareket eden $\mathbf{q}$ yüklü parçacığa etki eden Lorentz kuvveti şöyledir:

$$\mathbf{F} = \mathbf{q}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Görüldüğü üzere Lorentz kuvveti, manyetik alan vektörüne ve parçacığın hız vektörüne diktir. $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{B}$ arasındaki vektörel(çapraz) çarpımdan dolayı, parçacık manyetik alana paralel hareket ederse, etkiyen manyetik kuvvet sıfır olur. İki vektör birbirine dik olduğu zaman Lorentz kuvveti en büyük değerini alır. Manyetik kuvvet parçacığın hızına daima dik olduğundan manyetik kuvvetin hızı; parçacığın büyüklüğünü değiştirmez, sadece yönünü değiştirir. O yüzden yüklü bir parçacık manyetik alanda dairesel hareketler yapar (Synge, 1960).



Şekil 1.3. Lorentz Kuvveti (Hacıfazlıoğlu, 2013)

Lorentz kuvveti yardımıyla bazı yöntemler önerilmiştir. Bunlardan biri de elektriksel empedans tomografisi ile biyolojik dokuların elektriksel iletkenliklerini görüntülemek olmuştur. Bu yöntem, erken evre kanser dokularının tanısı için son zamanlarda önerilen bir yöntem olmuştur.

Ayn zamanda Lorentz kuvveti, manyetik kuvvet ile çalışan bir gemi yapımına başarı ile uygulanabilmiştir. Yamato 1 adı verilen gemi başarıyla 1992 yılında yüzdürülmüştür. Gemide Lorentz kuvvetini oluşturacak süper mıknatıs ve elektrod sistemi, doğrudan gemiye itme gücü sağlayacak bir su jetine uygulanmıştır. Amaç enerji verimliliği ve çevre dostu uygulamaları günlük hayata yerleştirmektir.

3-boyutlu semi-Riemann manifoldundaki manyetik eğriler hakkında da şu bilgileri verebiliriz:

Bir (M,g) Riemann manifoldu üzerindeki manyetik eğriler, $\mathbf{F}$ manyetik alanın etkisi altında M üzerinde hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Buradan M üzerinde $\mathbf{F}$ kapalı 2-formu manyetik alandır ve (M,g) manifoldu üzerindeki $\mathbf{F}$ manyetik alanın Lorentz kuvveti Φ, herhangi $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in\chi(\mathrm{M})$ vektör alanları için,

$$g(\Phi(\mathbf{X}),\mathbf{Y})=\mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$$

eşitliği ile verilen (1,1)-tensör alanıdır. Ayrıca Lorentz kuvveti şu şekilde de ifade edilebilir:

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}=\Phi(\mathbf{T})$$

Üç boyutta manyetik alanlar, sapma içermeyen vektör alanları kullanılarak tanımlanabilir. Killing vektör alanlarının sıfır sapması olduğu için, Killing manyetik alan adı verilen özel bir manyetik alan sınıfı tanımlanabilir (Bishop, 1975).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Belirli bir manyetik alan ve sabit enerji seviyesi için manyetik eğrilerin çalışmasında farklı yaklaşımlar M.I. Munteanu tarafından yeniden incelenmiştir. Munteanu, manyetik yörüngelerin 3-boyutlu Öklid uzayında bir vida hareketiyle ilişkili bir Killing vektör alanına karşılık gelmesi durumunda bu yaklaşımları vurgulamıştır (Munteanu, 2013).

Munteanu ve Nistor (2012), Killing manyetik alanların etkisi altında homojen 3-boyutlu $S^2 \times \mathbb{R}$ de modellenen bir alanda hareket eden yüklü parçacıkların yörüngelerini araştırmışlardır. Druta-Romaniuc ve Munteanu (2013), tüm manyetik eğrileri;

$$\mathbf{V} = a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Killing manyetik alanına karşılık gelen 3-boyutlu Minkowski uzayında sınıflandırmışlardır.

3-boyutlu semi-Riemann manifoldlarında Özdemir vd. (2015) $\mathbf{T}$-manyetik, $\mathbf{N}$-manyetik ve $\mathbf{B}$-manyetik eğri kavramlarını belirlemişlerdir ve bu eğriler için bazı karakterizasyonlar vermişlerdir.

Herhangi bir 3-boyutlu (M, g) Riemann manifoldunda, sıfırdan farklı sabit uzunluğun manyetik alanları, g metriği ile birebir uyuşmaktadır.

Bu gerçeğe dayanarak birçok araştırmacı 3-boyutlu manifoldlar, Sasakian manifoldlar, yarı -Sasakian manifoldlar ve benzerlerinde neredeyse temas halinde kapalı temel 2-formlu manyetik eğriler üzerinde çalışmaya odaklanmışlardır (Druta-Romaniuc vd., 2013; Jleli vd., 2015; Clain ve Crasmareanu, 2015; Inoguchi ve Munteanu, 2013).

Öte yandan uzay eğrilerinin yerel teorisi, Frenet-Serret teoremi kullanılarak pek çok matematikçi tarafından incelenmiştir. Frenet çatısı 3-zamanlı sürekli, dejenere olmayan eğriler için inşa edilmiştir. Ancak eğrinin ikinci türevi sıfır ise, eğri üzerindeki bazı noktalarda eğrilik kaybolabilir. Bu nedenle, $\mathbb{R}^3$ de alternatif bir çatıya ihtiyaç duyulmuştur. Dolayısıyla bir eğri boyunca alternatif hareketli bir çatı, L.R. Bishop tarafından 1975'te tanımlanır ve bu hareketli çatı, Bishop çatısı veya paralel taşıma çatısı olarak adlandırılır (Bishop, 1975).

Nispeten paralel uyarlanmış başka bir çatıya tip-2 Bishop çatı denir. Bishop çatısının yeni versiyonudur.

Bishop çatısının Biyoloji ve Bilgisayar grafiklerinde birçok uygulaması vardır.

Örneğin, Bishop dizisi tarafından tanımlanan bir eğri kullanılarak, DNA dizilerinin şekli hakkındaki bilgileri hesaplamak mümkün olabilir. Ayrıca Bishop çatısıyla bilgisayar animasyonlarında sanal kameraları kontrol etmenin yeni yolları sağlanabilir (Büyükkütük ve Öztürk, 2015). Bu yararlı alternatif çatıyı tanımladıktan sonra, $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında ve $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında alternatif çatıyı kullanan matematikçiler, aynı zamanda tip-2 Bishop çatısını da kullanarak bir çok çalışma yapmışlardır (Bükcü ve Karacan, 2008a; 2008b; 2009; Yılmaz ve Turgut, 2010; Büyükkütük ve Budak, 2015).

Diferansiyel geometride kullanılan ve önemli uygulama alanları olan bir türev, Fermi-Walker türevi olarak bilinir. Bu yeni türevin geometride ve özellikle paralel vektör alanlarının hareketlerinde önemli bir uygulaması mevcuttur. Bir $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında verilen bir uzay eğrisinin teğeti $\mathbf{T}$ olmak üzere, $\mathbf{T}$ nin eğri boyunca paralel olması $\mathbb{R}^n$ nin verilen ∇ konneksiyonu için $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = 0$ şartının sağlaması ile mümkündür. Bu eğri, bu şartı sağlaması durumunda geodezik olarak adlandırılır. $\mathbb{R}^n$ de verilen bütün doğrular geodezikler olacaktır. $\mathbb{R}^n$ de verilen bir eğrinin geodezik olup olmadığı ise Fermi-Walker türevi ile bulunur. Karakuş ve Yaylı (2012), $\mathbb{R}^n$ de Fermi-Walker türevi ile uygulamalarını ve Fermi-Walker anlamında paralel olmayı ifade etmişlerdir.

Ayrıca manyetik eğrilerin verilen manyetik alan içerisinde geodezik eğrilerinin genelleştirilmiş bir hali olmasından dolayı manyetik eğriler için Fermi-Walker türevinin hesaplanması önemli rol oynamaktadır. Bunun yanısıra manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevlerinin enerjisini hesaplayarak, kütle-enerji ve hareket-enerji gibi temel tanım ve kavramlar daha iyi kavranabilir. Bu amaçla; Körpınar ve Demirkol (2017), uzayda yüklü bir parçacığın enerjisini karakterize etmişlerdir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölüm içerisinde araştırma bulguları ve tartışma kısmında kullanılacak bazı temel

tanım ve teoremler verilecektir.

3.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini göstermek üzere, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ... y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{3.1}$$

eşitliği ile tanımlanan ,

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to \langle x, y \rangle$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının **doğal iç çarpım** ya da **Öklid iç çarpım** denir.

$x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{3.2}$$

olmak üzere,

$$\|,\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \quad \to \quad \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ uzayına normlu vektör uzay denir.

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlanan , $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Bu metrik ile $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzay olur. Bu uzaya **Öklid uzay** denir ve kimi zaman $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 3.2 I , $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ biçiminde diferensiyellenebilir bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzay içinde bir **eğri** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 3.3 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}\Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t)\right) \tag{3.4}$$

vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki **hız vektörü** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 3.4 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise, α eğrisine **regüler bir eğri** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 3.5 Bir

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ s &\to \alpha(s) \end{aligned}$$

eğrisi için, $\|\alpha'(s)\| = 1,\ \forall s \in I$ ise α eğrisine **birim hızlı eğri** denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 3.6 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için,

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) \tag{3.5}$$

eşitliğiyle belirli $\mathbf{T}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir. $\mathbf{T}$ vektör alanına, α eğrisinin **teğet vektör alanı** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 3.7 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için, $\kappa : I \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\kappa(s) = \|\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}\| \tag{3.6}$$

fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 3.8 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için ,

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa(s)}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} \tag{3.7}$$

eşitliği ile belirli $\mathbf{N}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birinci dik vektörü (asli normali)** denir. $\mathbf{N}$ vektör alanına, α eğrisinin **birinci dik vektör alanı(asli normal vektör alanı)** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 3.9 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için ,

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) \tag{3.8}$$

eşitliği ile tanımlı $\mathbf{B}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **ikinci dik vektörü**

(binormali) denir. $\mathbf{B}$ vektör alanına, α eğrisinin **ikinci dik vektör alanı(binormal vektör alanı)** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 3.10 $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ vektörlerine, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Serret-Frenet vektörleri** denir. $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir ve $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ vektör alanlarına, α eğrisi üzerinde **Frenet vektör alanları** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 3.11 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ ve $\tau: I \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\tau(s) = \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle \tag{3.9}$$

fonksiyonuna, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki torsiyonu (burulması) denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Teorem 3.12 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla κ ve τ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} \\ \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} \\ \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2001).

Teorem 3.13 Birim hızlı olmayan,

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$u \to \alpha(u)$$

eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları **T, N, B** ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla κ ve τ olmak üzere,

$$\mathbf{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}, \quad \mathbf{B} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}, \quad \kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{<\alpha' \times \alpha'', \alpha'''>}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 3.14 Bir C^∞-manifold M ve M üstündeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve C^∞ fonksiyonların cebiri de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa, bu dönüşüme M üzerinde **Riemann metriği** yada

metrik tensör denir.

$i)$ $\langle , \rangle$ dönüşümü 2-lineerdir,

$ii)$ $\langle , \rangle$ dönüşümü simetriktir,

$iii)$ $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle > 0$, $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} = 0$, $\mathbf{X} \in \chi(M)$.

Üzerinde Riemann metriği tanımlanmış olan C^∞-manifolda, Riemann manifoldu denir (Hacısalihoğlu, 2002).

Tanım 3.15 M bir C^∞-manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve C^∞ fonksiyonların cebiri de $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere;

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

operatörü aşağıdaki özellikleri sağlarsa, M ye bir **yarı-Riemann manifoldu** denir (Hacısalihoğlu, 2002).

$i)$ $\langle , \rangle$ dönüşümü 2-lineerdir,

$ii)$ $\langle , \rangle$ dönüşümü simetriktir,

$iii)$ $\forall \mathbf{Y} \in \chi(M)$ için $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{X} = 0$.

Tanım 3.16 M, n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \nabla \; : \; & \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \\ & (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \;\; \to \;\; \nabla(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$i)$ $\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}$

$ii)$ $\nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}} \mathbf{Z} = f(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}) + g(\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z})$

$iii)$ $\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = f(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) + \mathbf{X}(f)\mathbf{Y}$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya M üzerinde bir **Afin koneksiyon** adı verilir (Hacısalihoğlu, 2002).

Tanım 3.17 (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olmak üzere $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \chi(M)$ için

$i)$ $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$

$ii)$ $\mathbf{X}_g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = g(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z})$ şartları sağlandığında ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu **Riemann koneksiyonu** veya M nin **Levi-Civita koneksiyonu** denir (Hacısalihoğlu, 2002).

Tanım 3.18 Bishop formülleri,

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2, \\ &\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1 = -k_1\mathbf{T}, \\ &\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2 = -k_2\mathbf{T} \end{aligned} \tag{3.11}$$

şeklindedir. Ayrıca Bishop formüllerini;

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} \\ \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1 \\ \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

şeklinde de ifade edilebiliriz. Burada $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ eğrinin her noktasındaki Bishop çatısının birim vektörleridir ve $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ kümesine **Bishop üçlüsü** denir. Ayrıca k_1 ve k_2 ye eğrinin **Bishop eğrilikleri** denir.

Frenet ve Bishop çatısı arasındaki bağlantı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta(s) & \sin\theta(s) \\ 0 & -\sin\theta(s) & \cos\theta(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Burada $\theta(s) = \arctan\dfrac{k_2}{k_1}$, $\tau(s) = \theta'(s)$ ve $\kappa(s) = \sqrt{(k_1)^2 + (k_2)^2}$ dir. Buradan Bishop eğrilikleri, $k_1 = \kappa\cos\theta(s)$ ve $k_2 = \kappa\sin\theta(s)$ şeklinde tanımlanır (Bishop, 1975).

Nispeten paralel uyarlanmış başka bir çatıya **tip-2 Bishop çatı** denir ve tip-2 Bishop formülleri aşağıdaki şekide tanımlanır;

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1 = -\varepsilon_1\mathbf{B}, \\ &\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_2 = -\varepsilon_2\mathbf{B}, \\ &\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} = \varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1 + \varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Tip-2 Bishop formülleri;

$$\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1 \\ \nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_2 \\ \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

şeklinde de yazılabilir.

Frenet ve tip-2 Bishop çatısı arasındaki bağlantı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta(s) & -\cos\theta(s) & 0 \\ \cos\theta(s) & \sin\theta(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Burada $\theta(s) = \arctan\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, $\kappa(s) = \theta'(s)$ ve $\tau(s) = \sqrt{(\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2}$ dir. Buradan tip- Bishop eğrilikleri, $\varepsilon_1 = -\tau\cos\theta(s)$ ve $\varepsilon_2 = -\tau\sin\theta(s)$ şeklinde tanımlanır (Bishop, 1975; Bükcü ve Karacan, 2009; Yılmaz ve Turgut, 2010).

Tanım 3.19 (M,g), n-boyutlu semi-Riemann manifoldu olsun. M üzerinde $\mathbf{F}$ kapalı 2-formu manyetik alandır ve (M,g) manifoldu üzerindeki $\mathbf{F}$ manyetik alanın Lorentz kuvveti Φ herhangi $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \chi(M)$ vektör alanları için,

$$g(\Phi(\mathbf{X}),\mathbf{Y}) = \mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \tag{3.17}$$

şeklinde ifade edilir (Kazan ve Karadağ, 2017).

Tanım 3.20 Bir (M,g) Riemann manifoldu üzerindeki manyetik eğriler, $\mathbf{F}$ manyetik alanın etkisi altında M üzerinde hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Yani $\mathbf{F}$ nin manyetik yörüngeleri, Lorentz denklemindeki M nin eğrileridir. Buradan,

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \Phi(\mathbf{T}) \tag{3.18}$$

olur. M nin geodeziklerinden elde edilen genelleştirilmiş Lorentz denklemi de,

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = 0 \tag{3.19}$$

dır.

Tanım 3.21 3-boyutlu semi-Riemann manifoldunda sapma içermeyen bir vektör alanı, manyetik alan tanımlar. $\mathbf{V} \in \chi(M^n)$ nin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart,

$$L_{\mathbf{V}}g = 0 \tag{3.20}$$

olmasıdır ya da eşdeğer olarak, tüm $p \in M^n$ noktalarında $\nabla\mathbf{V}(p)$, $T_P(M^n)$ de ters-simetrik bir operatördür.

Üç boyutta manyetik alanlar; sapma içermeyen vektör alanları kullanılarak tanımlanabilir. Killing vektör alanlarının sıfır sapması olduğu için, Killing manyetik alan adı verilen özel bir manyetik alan sınıfı tanımlanabilir (Barros vd., 2007).

$\mathbf{F_V}$ nin Lorentz kuvveti;

$$\Phi(\mathbf{X}) = \mathbf{V} \times \mathbf{X} \tag{3.21}$$

dir. (3.18) ve (3.21) denklemlerinden,

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{V} \times \mathbf{T} \tag{3.22}$$

elde edilir (Munteanu, 2013; Özdemir vd., 2015).

Tanım 3.22 n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ de, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ parametre eğrisi boyunca bir $\mathbf{X}$ vektör alanı için Öklid türev $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$ olmak üzere,

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = 0 \tag{3.23}$$

ise $\mathbf{X}$ vektör alanına α eğrisi boyunca **Öklid anlamında paraleldir**, denir (Hacısalihoğlu, 2002).

Tanım 3.23 $\mathbf{X}$**,** s yay parametreli α uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olsun.

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{T}, \mathbf{X} \rangle A + \langle A, \mathbf{X} \rangle \mathbf{T} \tag{3.24}$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{X}$ türevine $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **Fermi-Walker Türevi** denir. Burada $\mathbf{T} = \frac{d\alpha}{ds}$, $A = \frac{d\mathbf{T}}{ds}$ (Benn ve Tucker, 1989).

Tanım 3.24 $\mathbf{X}$, s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere, eğri boyunca vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{X} = 0 \tag{3.25}$$

ise $\mathbf{X}$ vektör alanına, $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca **Fermi-Walker anlamında paraleldir**, denir (Benn ve Tucker, 1989).

Tanım 3.25 $\mathbf{X}$, s yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı ve $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle_{\alpha} = \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} \rangle$ olmak üzere;

$$\varepsilon(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\int_{\alpha} \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle_{\alpha} ds = \frac{1}{2}\int_{\alpha} (1 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} \rangle) ds \tag{3.26}$$

şeklinde tanımlanan $\varepsilon(\mathbf{X})$ ifadesine, $\mathbf{X}$ vektör alanının **Sasakian metrik yardımıyla tanımlanan enerjisi** denir (Chacon ve Naveira, 2004).

3.2 Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre $\mathbf{T}$-Manyetik Eğriler

3-boyutlu Öklid uzayında, Bishop çatısı ile verilen bir eğri $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbf{F_V}$ de, $\mathbb{R}^3$ de manyetik bir alan olsun. Eğer Bishop çatısına göre $\mathbf{T}$ teğet vektör alanı, Lorentz kuvveti denklemi olan

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \Phi(\mathbf{T}) = \mathbf{V} \times \mathbf{T} \tag{3.27}$$

eşitliğini sağlarsa, α eğrisine Bishop çatısına göre $\mathbf{T}$**-manyetik eğri** denir.

Teorem 3.26 α, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{T}$-manyetik eğri olsun. O halde Bishop çatısına göre Lorentz kuvveti ;

$$\begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{T}) \\ \Phi(\mathbf{N}_1) \\ \Phi(\mathbf{N}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & \rho \\ -k_2 & -\rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

olarak elde edilir. Burada ρ fonksiyonu, $\rho = g(\Phi\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.3 Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre $\mathbf{N}_1$- Manyetik Eğriler

3-boyutlu Öklid uzayında, Bishop çatısı ile verilen bir eğri $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbf{F_V}$ de, $\mathbb{R}^3$ de manyetik bir alan olsun. Eğer Bishop çatısına göre $\mathbf{N}_1$ vektör alanı Lorentz kuvveti denklemi olan ,

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1 = \Phi(\mathbf{N}_1) = \mathbf{V} \times \mathbf{N}_1 \tag{3.29}$$

eşitliğini sağlarsa, α eğrisine Bishop çatısına göre $\mathbf{N}_1$**-manyetik eğri** denir (Kazan ve Karadağ, 2017).

Teorem 3.27 α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{N}_1$ -manyetik eğri olsun. O halde Bishop çatısına göre Lorentz kuvveti ;

$$\begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{T}) \\ \Phi(\mathbf{N}_1) \\ \Phi(\mathbf{N}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & \eta \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

olarak elde edilir. Burada η fonksiyonu, $\eta = g(\Phi\mathbf{T}, \mathbf{N}_2)$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.4 Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre $\mathbf{N}_2$-Manyetik Eğriler:

3-boyutlu Öklid uzayında, Bishop çatısı ile verilen bir eğri $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

olsun. $\mathbf{F}_\mathbf{V}$ de, $\mathbb{R}^3$ de manyetik bir alan olsun. Eğer Bishop çatısına göre $\mathbf{N}_2$ vektör alanı, Lorentz kuvveti denklemi olan,

$$\nabla_\mathbf{T}\mathbf{N}_2 = \Phi(\mathbf{N}_2) = \mathbf{V}\times\mathbf{N}_2 \tag{3.31}$$

eşitliğini sağlarsa, α eğrisine Bishop çatısına göre $\mathbf{N}_2$**-manyetik eğri** denir.

Teorem 3.28 α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{N}_2$ -manyetik eğri olsun. O halde Bishop çatısına göre Lorentz kuvveti;

$$\begin{pmatrix}\Phi(\mathbf{T})\\ \Phi(\mathbf{N}_1)\\ \Phi(\mathbf{N}_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \gamma & k_2\\ -\gamma & 0 & 0\\ -k_2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}_1\\ \mathbf{N}_2\end{pmatrix} \tag{3.32}$$

olarak elde edilir. Burada γ fonksiyonu, $\gamma = g(\Phi\mathbf{T},\mathbf{N}_1)$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.5 Öklid Uzayında Tip-2 Bishop Çatısına Göre ξ_1-Manyetik Eğriler:

3-boyutlu Öklid uzayında, tip-2 Bishop çatısı ile verilen bir eğri $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbf{F}_\mathbf{V}$ de, $\mathbb{R}^3$ de manyetik bir alan olsun. Eğer tip-2 Bishop çatısına göre ξ_1 vektör alanı Lorentz kuvveti denklemi olan,

$$\nabla_\mathbf{T}\xi_1 = \Phi(\xi_1) = \mathbf{V}\times\xi_1 \tag{3.33}$$

eşitliğini sağlarsa, α eğrisine tip-2 Bishop çatısına göre ξ_1**-manyetik eğri** denir.

Teorem 3.29 α, 3-boyutlu Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre birim hızlı ξ_1 -manyetik eğri olsun. O halde tip-2 Bishop çatısına göre Lorentz kuvveti ;

$$\begin{pmatrix}\Phi(\xi_1)\\ \Phi(\xi_2)\\ \Phi(\mathbf{B})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -\varepsilon_1\\ 0 & 0 & \rho_2\\ \varepsilon_1 & -\rho_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} \tag{3.34}$$

olarak elde edilir. Burada ρ_2 fonksiyonu, $\rho_2 = g(\Phi\xi_2,\mathbf{B})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.6 Öklid Uzayında Tip-2 Bishop Çatısına Göre ξ_2-Manyetik Eğriler

3-boyutlu Öklid uzayında, tip-2 Bishop çatısı ile verilen bir eğri $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbf{F}_\mathbf{V}$ de, $\mathbb{R}^3$ de manyetik bir alan olsun. Eğer tip-2 Bishop çatısına göre ξ_2 vektör alanı Lorentz kuvveti denklemi olan ,

$$\nabla_\mathbf{T}\xi_2 = \Phi(\xi_2) = \mathbf{V}\times\xi_2 \tag{3.35}$$

eşitliğini sağlarsa, α eğrisine tip-2 Bishop çatısına göre ξ_2 **-manyetik eğri** denir (Kazan ve Karadağ, 2017).

Teorem 3.30 α, 3-boyutlu Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre birim hızlı ξ_2 -manyetik eğri olsun. O halde tip-2 Bishop çatısına göre Lorentz kuvveti ;

$$\begin{pmatrix} \Phi(\xi_1) \\ \Phi(\xi_2) \\ \Phi(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 \\ -\mu_2 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

olarak elde edilir. Burada μ_2 fonksiyonu, $\mu_2 = g(\Phi\xi_1, \mathbf{B})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.7 Öklid Uzayında Tip-2 Bishop Çatısına Göre B -Manyetik Eğriler

3-boyutlu Öklid uzayında, tip-2 Bishop çatısı ile verilen bir eğri $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbf{F_V}$ de, $\mathbb{R}^3$ de manyetik bir alan olsun. Eğer tip-2 Bishop çatısına göre $\mathbf{B}$ vektör alanı Lorentz kuvveti denklemi olan

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} = \Phi(\mathbf{B}) = \mathbf{V} \times \mathbf{B} \tag{3.37}$$

eşitliğini sağlarsa, α eğrisine tip-2 Bishop çatısına göre **B -manyetik eğri** denir.

Teorem 3.31 α, 3-boyutlu Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{B}$ -manyetik eğri olsun. O halde tip-2 Bishop çatısına göre Lorentz kuvveti;

$$\begin{pmatrix} \Phi(\xi_1) \\ \Phi(\xi_2) \\ \Phi(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 & -\varepsilon_1 \\ -\gamma_2 & 0 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

olarak elde edilir. Burada γ_2 fonksiyonu, $\gamma_2 = g(\Phi\xi_1, \xi_2)$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1 Üç Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatısına Göre Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevlerinin Enerjileri:

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında; Bishop çatısına göre $\mathbf{T}$-manyetik, $\mathbf{N}_1$-manyetik ve $\mathbf{N}_2$-manyetik eğrilerinin Fermi-Walker türevlerini inceleyip, bu türevlerinin enerjilerini hesaplayacağız.

4.1.1 Üç boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre $\mathbf{T}$-manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevlerinin enerjileri

Teorem 4.1 α, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{T}$-manyetik eğri olsun. $\Phi(\mathbf{T})$, $\Phi(\mathbf{N}_1)$, $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi sırasıyla,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) &= k_1'\mathbf{N}_1 + k_2'\mathbf{N}_2,\\ \tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) &= -k_1'\mathbf{T} + \rho'\mathbf{N}_2,\\ \tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) &= -k_2'\mathbf{T} - \rho'\mathbf{N}_1\end{aligned} \tag{4.1}$$

dir.

İspat: α, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{T}$-manyetik olsun. O halde Bishop çatısına göre Lorentz kuvvetinin;

$$\begin{pmatrix}\Phi(\mathbf{T})\\ \Phi(\mathbf{N}_1)\\ \Phi(\mathbf{N}_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k_1 & k_2\\ -k_1 & 0 & \rho\\ -k_2 & -\rho & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}_1\\ \mathbf{N}_2\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\Phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi, (3.24) eşitliği göz önüne alınırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) - \langle\mathbf{T},\Phi(\mathbf{T})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T},\Phi(\mathbf{T})\rangle\mathbf{T} \tag{4.2}$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre $\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = k_1'\mathbf{N}_1 + k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1 + k_2'\mathbf{N}_2 + k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2$ olur. Burada (3.11) eşitlikleri göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) &= k_1'\mathbf{N}_1 - k_1^2\mathbf{T} + k_2'\mathbf{N}_2 - k_2^2\mathbf{T}\\ &= (-k_1^2 - k_2^2)\mathbf{T} + k_1'\mathbf{N}_1 + k_2'\mathbf{N}_2\end{aligned} \tag{4.3}$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$\langle\mathbf{T},\Phi(\mathbf{T})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \langle\mathbf{T}, k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2\rangle(k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2) = 0 \tag{4.4}$$

olur ve

$$\langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \Phi(\mathbf{T})\rangle \mathbf{T} = \langle k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2, k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2\rangle \mathbf{T} = (k_1^2 + k_2^2)\mathbf{T} \tag{4.5}$$

şeklinde bulunur. Buradan (4.3), (4.4) ve (4.5) eşitlikleri (4.2) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) - \langle \mathbf{T}, \Phi(\mathbf{T})\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \Phi(\mathbf{T})\rangle \mathbf{T} \\
&= k_1'\mathbf{N}_1 + k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1 + k_2'\mathbf{N}_2 + k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2 - \langle \mathbf{T}, k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} \\
&\quad + \langle k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2, k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2\rangle \mathbf{T} \\
&= k_1'\mathbf{N}_1 - k_1^2\mathbf{T} + k_2'\mathbf{N}_2 - k_2^2\mathbf{T} + k_1^2\mathbf{T} + k_2^2\mathbf{T} \\
&= k_1'\mathbf{N}_1 + k_2'\mathbf{N}_2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{N}_1)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) - \langle \mathbf{T}, \Phi(\mathbf{N}_1)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \Phi(\mathbf{N}_1)\rangle \mathbf{T} \tag{4.6}$$

formülü ile hesaplanır. Burada $\Phi(\mathbf{N}_1) = -k_1\mathbf{T} + \rho\mathbf{N}_2$ olmak üzere;

$$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) = -k_1'\mathbf{T} - k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \rho'\mathbf{N}_2 + \rho\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2$$

olur. Daha sonra (3.11) eşitlikleri göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) &= -k_1'\mathbf{T} - k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \rho'\mathbf{N}_2 + \rho\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2 \\
&= -k_1'\mathbf{T} - k_1^2\mathbf{N}_1 - k_1k_2\mathbf{N}_2 + \rho'\mathbf{N}_2 - k_2\rho\mathbf{T} \\
&= (-k_1' - k_2\rho)\mathbf{T} - k_1^2\mathbf{N}_1 + (-k_1k_2 + \rho')\mathbf{N}_2
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{T}, \Phi(\mathbf{N}_1)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} &= \langle \mathbf{T}, -k_1\mathbf{T} + \rho\mathbf{N}_2\rangle (k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2) \\
&= -k_1(k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2) \\
&= -k_1^2\mathbf{N}_1 - k_2^2\mathbf{N}_2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

olur ve

$$\langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \Phi(\mathbf{N}_1)\rangle \mathbf{T} = \langle k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2, -k_1\mathbf{T} + \rho\mathbf{N}_2\rangle \mathbf{T} = \rho k_2\mathbf{T} \tag{4.9}$$

olarak elde edilir. Buradan (4.7), (4.8) ve (4.9) eşitlikleri (4.6) denkleminde yerlerine yazılırsa ve benzer işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) - \langle \mathbf{T}, \Phi(\mathbf{N}_1)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \Phi(\mathbf{N}_1)\rangle \mathbf{T} \\
&= -k_1'\mathbf{T} - k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \rho'\mathbf{N}_2 + \rho\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2 - \langle \mathbf{T}, -k_1\mathbf{T} + \rho\mathbf{N}_2\rangle (k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2) \\
&\quad + \langle k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2, -k_1\mathbf{T} + \rho\mathbf{N}_2\rangle \mathbf{T} \\
&= -k_1'\mathbf{T} - k_1(k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2) + \rho'\mathbf{N}_2 - \rho k_2\mathbf{T} + k_1^2\mathbf{N}_1 + k_2^2\mathbf{N}_2 + \rho k_2\mathbf{T} \\
&= -k_1'\mathbf{T} + \rho'\mathbf{N}_2
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) - \langle \mathbf{T}, \Phi(\mathbf{N}_2)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \Phi(\mathbf{N}_2)\rangle \mathbf{T} \tag{4.10}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan;

$$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) = -k_2'\mathbf{T} - k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - \rho'\mathbf{N}_1 - \rho\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1$$

olur. Burada ve (3.11) eşitlikleri göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) &= -k_2'\mathbf{T} - k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - \rho'\mathbf{N}_1 - \rho\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1 \\ &= -k_2'\mathbf{T} - k_1k_2\mathbf{N}_1 - k_2^2\mathbf{N}_2 - \rho'\mathbf{N}_1 + k_1\rho\mathbf{T} \\ &= (k_1\rho - k_2')\mathbf{T} - (k_1k_2 + \rho')\mathbf{N}_1 - k_2^2\mathbf{N}_2\end{aligned} \tag{4.11}$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{T}, \Phi(\mathbf{N}_2)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} &= \langle \mathbf{T}, -k_2\mathbf{T} - \rho\mathbf{N}_1\rangle (k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2) \\ &= -k_2(k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2) \\ &= -k_1k_2\mathbf{N}_1 - k_2^2\mathbf{N}_2\end{aligned} \tag{4.12}$$

olur ve

$$\langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \Phi(\mathbf{N}_2)\rangle \mathbf{T} = \langle k_1\mathbf{N}_1 + k_2\mathbf{N}_2, -k_2\mathbf{T} - \rho\mathbf{N}_1\rangle \mathbf{T} = -k_1\rho\mathbf{T} \tag{4.13}$$

olarak elde edilir. Buradan (4.11), (4.12) ve (4.13) eşitlikleri (4.10) denkleminde yerine yazılırsa, $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) - \langle \mathbf{T}, \Phi(\mathbf{N}_2)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \Phi(\mathbf{N}_2)\rangle \mathbf{T} \\ &= (k_1\rho - k_2')\mathbf{T} - (k_1k_2 + \rho')\mathbf{N}_1 - k_2^2\mathbf{N}_2 + k_1k_2\mathbf{N}_1 + k_2^2\mathbf{N}_2 - k_1\rho\mathbf{T} \\ &= -k_2'\mathbf{T} - \rho'\mathbf{N}_1\end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.2 α, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{T}$-manyetik eğri olsun. Buna göre $\Phi(\mathbf{T})$, $\Phi(\mathbf{N}_1)$, $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvvetleri, Fermi-Walker anlamında paralel ise sırasıyla;

$$\begin{aligned}&k_1 = sabit, \\ &k_2 = sabit, \\ &\rho = sabit\end{aligned} \tag{4.14}$$

dir.

Teorem 4.3 α, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{T}$-manyetik eğri olsun. Buna göre $\Phi(\mathbf{T})$, $\Phi(\mathbf{N}_1)$, $\Phi(\mathbf{N}_2)$ alanlarının Sasakian metrik yardımıyla enerjileri sırasıyla;

$$\varepsilon(\Phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(k_1^2+k_2^2)^2+(k_1^{'})^2+(k_2^{'})^2)ds,$$
$$\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_1)) = \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(k_1^{'}+k_2\rho)^2+k_1^4+(-k_1k_2+\rho^{'})^2)ds, \tag{4.15}$$
$$\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_2)) = \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(k_1\rho-k_2^{'})^2+(k_1k_2+\rho^{'})^2+k_2^{4})ds$$

dir.

İspat: α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{T}$-manyetik eğri olsun. O halde (4.3) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\mathbf{T})$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\mathbf{T}))$ enerjisi, (3.26) enerji formülü kullanılarak;

$$\varepsilon(\Phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}),\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})\rangle ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle(-k_1^2-k_2^2)\mathbf{T}+k_1^{'}\mathbf{N}_1+k_2^{'}\mathbf{N}_2,(-k_1^2-k_2^2)\mathbf{T}+k_1^{'}\mathbf{N}_1+k_2^{'}\mathbf{N}_2\rangle)ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(k_1^2+k_2^2)^2+(k_1^{'})^2+(k_2^{'})^2)ds$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde (4.7) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\mathbf{N}_1)$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_1))$ enerjisi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_1)) = \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1),\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle)ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle(-k_1^{'}-k_2\rho)\mathbf{T}-k_1^2\mathbf{N}_1+(-k_1k_2+\rho^{'})\mathbf{N}_2,(-k_1^{'}-k_2\rho)\mathbf{T}$$
$$-k_1^2\mathbf{N}_1+(-k_1k_2+\rho^{'})\mathbf{N}_2\rangle)ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(k_1^{'}+k_2\rho)^2+k_1^{4}+(-k_1k_2+\rho^{'})^2)ds$$

O halde (4.11) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\mathbf{N}_2)$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_2))$ enerjisi;

$$\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_2)) = \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2),\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)\rangle)ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle(k_1\rho-k_2^{'})\mathbf{T}-(k_1k_2+\rho^{'})\mathbf{N}_1$$
$$-k_2^{2}\mathbf{N}_2,(k_1\rho-k_2^{'})\mathbf{T}-(k_1k_2+\rho^{'})\mathbf{N}_1-k_2^{2}\mathbf{N}_2\rangle)ds$$
$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(k_1\rho-k_2^{'})^2+(k_1k_2+\rho^{'})^2+k_2^{4})ds$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.4 $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})$, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)$, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)$ alanlarının Sasakian metrik yardımıyla enerjileri sırasıyla;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+(k_1^{'}k_1+k_2^{'}k_2)^2+(k_1^{''})^2+(k_2^{''})^2)ds,\\
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+(k_1^{''}+k_2\rho^{'})^2+(k_1^{'}k_1)^2+(\rho^{''}-k_1^{'}k_2)^2)ds, \qquad (4.16)\\
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+(\rho^{'}k_1-k_2^{''})^2+(k_2^{'}k_1+\rho^{''})^2+(k_2^{'}k_2)^2)ds
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: $\Phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevinin $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})=k_1^{'}\mathbf{N}_1+k_2^{'}\mathbf{N}_2$ olduğu göz önüne alınırsa ve (3.11) eşitlikleri (3.26) enerji formülünde yerlerine

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})),\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}))\rangle)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(k_1^{'}\mathbf{N}_1+k_2^{'}\mathbf{N}_2),\nabla_{\mathbf{T}}(k_1^{'}\mathbf{N}_1+k_2^{'}\mathbf{N}_2))ds\\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle k_1^{''}\mathbf{N}_1+k_1^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1+k_2^{''}\mathbf{N}_2
\end{aligned}$$

yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&+k_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2,k_1^{''}\mathbf{N}_1+k_1^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1+k_2^{''}\mathbf{N}_2+k_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2\rangle)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle(-k_1^{'}k_1-k_2^{'}k_2)\mathbf{T}+k_1^{''}\mathbf{N}_1\\
&-k_2^{''}\mathbf{N}_2,(-k_1^{'}k_1-k_2^{'}k_2)\mathbf{T}+k_1^{''}\mathbf{N}_1-k_2^{''}\mathbf{N}_2\rangle)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+(k_1^{'}k_1+k_2^{'}k_2)^2+(k_1^{''})^2+(k_2^{''})^2)ds
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{N}_1)$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevinin

$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)=-k_1^{'}\mathbf{T}+\rho^{'}\mathbf{N}_2$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}[1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)),\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1))\rangle]ds\\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}[1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(-k_1^{'}\mathbf{T}+\rho^{'}\mathbf{N}_2),\nabla_{\mathbf{T}}(-k_1^{'}\mathbf{T}+\rho^{'}\mathbf{N}_2)\rangle]ds\\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}[1+\langle-k_1^{''}\mathbf{T}-k_1^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}+\rho^{''}\mathbf{N}_2+\rho^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2,-k_1^{''}\mathbf{T}\\
&-k_1^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}+\rho^{''}\mathbf{N}_2+\rho^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2\rangle]ds\\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}[1+\langle(-k_1^{''}-k_2\rho^{'})\mathbf{T}-k_1^{'}k_1\mathbf{N}_1+(\rho^{''}-k_1^{'}k_2)\mathbf{N}_2,(-k_1^{''}-k_2\rho^{'})\mathbf{T}\\
&-k_1^{'}k_1\mathbf{N}_1+(\rho^{''}-k_1^{'}k_2)\mathbf{N}_2\rangle]ds\\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}[1+(k_1^{''}+k_2\rho^{'})^2+(k_1^{'}k_1)^2+(\rho^{''}-k_1^{'}k_2)^2]ds,
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi

$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) = -k_2'\mathbf{T} - \rho'\mathbf{N}_1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)), \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2))\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}(-k_2'\mathbf{T} - \rho'\mathbf{N}_1), \nabla_{\mathbf{T}}(-k_2'\mathbf{T} - \rho'\mathbf{N}_1)\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1 + \langle -k_2''\mathbf{T} - k_2'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - \rho''\mathbf{N}_1 \\
&\quad - \rho'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1, -k_2''\mathbf{T} - k_2'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - \rho''\mathbf{N}_1 - \rho'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1 + \langle (\rho' k_1 - k_2'')\mathbf{T} - (k_2' k_1 + \rho'')\mathbf{N}_1 - k_2' k_2 \mathbf{N}_2, (\rho' k_1 \\
&\quad - k_2'')\mathbf{T} - (k_2' k_1 + \rho'')\mathbf{N}_1 - k_2' k_2\mathbf{N}_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1 + (\rho' k_1 - k_2'')^2 + (k_2' k_1 + \rho'')^2 + (k_2' k_2)^2)ds
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

4.1.2 Üç boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre $\mathbf{N}_1$ -manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevlerinin enerjileri

Teorem 4.5 α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{N}_1$ -manyetik eğri olsun. $\Phi(\mathbf{T})$, $\Phi(\mathbf{N}_1)$, $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) &= -\eta k_2\mathbf{T} + k_1'\mathbf{N}_1 + \eta'\mathbf{N}_2, \\
\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) &= -k_1'\mathbf{T} - k_1 k_2\mathbf{N}_2, \\
\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) &= -\eta'\mathbf{T} - \eta k_2\mathbf{N}_2
\end{aligned} \tag{4.17}$$

dir.

İspat: α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{N}_1$ -manyetik eğri olsun. O halde Bishop çatısına göre Lorentz kuvvetinin;

$$\begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{T}) \\ \Phi(\mathbf{N}_1) \\ \Phi(\mathbf{N}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & \eta \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\Phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) - \langle \mathbf{N}_1, \Phi(\mathbf{T})\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1, \Phi(\mathbf{T})\rangle \mathbf{N}_1 \tag{4.18}$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})=k_1^{'}\mathbf{N}_1+k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1+\eta^{'}\mathbf{N}_2+\eta\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2$$

olur. Burada (3.11) ve (3.30) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) &= k_1^{'}\mathbf{N}_1-k_1^2\mathbf{T}+\eta^{'}\mathbf{N}_2-\eta k_2\mathbf{T}\\ &= (-k_1^2-\eta k_2)\mathbf{T}+k_1^{'}\mathbf{N}_1+\eta^{'}\mathbf{N}_2\end{aligned} \tag{4.19}$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$\langle\mathbf{N}_1,\Phi(\mathbf{T})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1=\langle\mathbf{N}_1,k_1\mathbf{N}_1+\eta\mathbf{N}_2\rangle(-k_1\mathbf{T})=k_1^2\mathbf{T} \tag{4.20}$$

olur ve

$$\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1,\Phi(\mathbf{T})\rangle\mathbf{N}_1=\langle -k_1\mathbf{T},k_1\mathbf{N}_1+\eta\mathbf{N}_2\rangle\mathbf{N}_1=0 \tag{4.21}$$

şeklinde bulunur. Buradan (4.19), (4.20) ve (4.21) eşitlikleri (4.18) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})-\langle\mathbf{N}_1,\Phi(\mathbf{T})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1,\Phi(\mathbf{T})\rangle\mathbf{N}_1\\ &= (-k_1^2-\eta k_2)\mathbf{T}+k_1^{'}\mathbf{N}_1+\eta^{'}\mathbf{N}_2-k_1^2\mathbf{T}\\ &= -\eta k_2\mathbf{T}+k_1^{'}\mathbf{N}_1+\eta^{'}\mathbf{N}_2\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{N}_1)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)=\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)-\langle\mathbf{N}_1,\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1,\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle\mathbf{N}_1 \tag{4.22}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan;

$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)=-k_1^{'}\mathbf{T}-k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}$ olur ve burada (3.11) eşitlikleri göz önüne alınarak;

$$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)=-k_1^{'}\mathbf{T}-k_1^2\mathbf{N}_1-k_1k_2\mathbf{N}_2 \tag{4.23}$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$\langle\mathbf{N}_1,\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1=\langle\mathbf{N}_1,-k_1\mathbf{T}\rangle(-k_1\mathbf{T})=0 \tag{4.24}$$

olur ve

$$\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1,\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle\mathbf{N}_1=\langle -k_1\mathbf{T},-k_1\mathbf{T}\rangle\mathbf{N}_1=k_1^2\mathbf{N}_1 \tag{4.25}$$

olarak elde edilir. Buradan (4.23), (4.24) ve (4.25) eşitlikleri (4.22) de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)-\langle\mathbf{N}_1,\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1,\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle\mathbf{N}_1\\ &= -k_1^{'}\mathbf{T}-k_1^2\mathbf{N}_1-k_1k_2\mathbf{N}_2+k_1^2\mathbf{N}_1\\ &= -k_1^{'}\mathbf{T}-k_1k_2\mathbf{N}_2\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)=\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)-\langle\mathbf{N}_1,\Phi(\mathbf{N}_2)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1,\Phi(\mathbf{N}_2)\rangle\mathbf{N}_1 \tag{4.26}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan (3.11) ve (3.30) eşitlikleri göz önüne alınarak,

$$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) = -\eta^{'}\mathbf{T} - \eta\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = -\eta^{'}\mathbf{T} - \eta k_1\mathbf{N}_1 - \eta k_2\mathbf{N}_2 \tag{4.27}$$

olur. Diğer yandan,

$$\langle \mathbf{N}_1, \Phi(\mathbf{N}_2)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1 = \langle \mathbf{N}_1, -\eta\mathbf{T}\rangle(-k_1\mathbf{T}) = 0 \tag{4.28}$$

olur ve

$$\langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1, \Phi(\mathbf{N}_2)\rangle \mathbf{N}_1 = \langle -k_1\mathbf{T}, -\eta\mathbf{T}\rangle \mathbf{N}_1 = k_1\eta\mathbf{N}_1 \tag{4.29}$$

olarak elde edilir. Buradan (4.27), (4.28) ve (4.29) eşitlikleri (4.26) da yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) - \langle \mathbf{N}_1, \Phi(\mathbf{N}_2)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1, \Phi(\mathbf{N}_2)\rangle \mathbf{N}_1 \\ &= -\eta^{'}\mathbf{T} - \eta k_1\mathbf{N}_1 - \eta k_2\mathbf{N}_2 + k_1\eta\mathbf{N}_1 \\ &= -\eta^{'}\mathbf{T} - \eta k_2\mathbf{N}_2\end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.6 α, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{N}_1$-manyetik eğri olsun. Buna göre $\Phi(\mathbf{T})$, $\Phi(\mathbf{N}_1)$, $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvvetleri, Fermi-Walker anlamında paralel ise sırasıyla;

$$\begin{aligned}&k_1 = sabit, \\ &k_2 = 0, \\ &\eta = sabit\end{aligned} \tag{4.30}$$

olur.

Teorem 4.7 α, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{N}_1$-manyetik eğri olsun. Buna göre $\Phi(\mathbf{T})$, $\Phi(\mathbf{N}_1)$, $\Phi(\mathbf{N}_2)$ alanlarının Sasakian metrik yardımıyla enerjileri sırasıyla;

$$\begin{aligned}\varepsilon(\Phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1 + (k_1^2 + \eta k_2)^2 + (k_1^{'})^2 + (\eta^{'})^2)ds, \\ \varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1 + (k_1^{'})^2 + k_1^{4} + (k_1k_2)^2)ds, \\ \varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1 + (\eta^{'})^2 + (\eta k_1)^2 + (\eta k_2)^2)ds\end{aligned} \tag{4.31}$$

dir.

İspat: α, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{N}_1$-manyetik eğri olsun. O halde (3.26) enerji formülünde (4.19) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\mathbf{T})$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\mathbf{T}))$ enerjisi,

$$\varepsilon(\Phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}), \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle(-k_1^2-\eta k_2)\mathbf{T}+k_1^{'}\mathbf{N}_1$$

$$+\eta^{'}\mathbf{N}_2,(-k_1^2-\eta k_2)\mathbf{T}+k_1^{'}\mathbf{N}_1+\eta^{'}\mathbf{N}_2\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(k_1^2+\eta k_2)^2+(k_1^{'})^2+(\eta^{'})^2)ds$$

olur. Benzer şekilde (4.23) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\mathbf{N}_1)$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_1))$ enerjisi aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_1)) = \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1), \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle -k_1^{'}\mathbf{T}-k_1^2\mathbf{N}_1-k_1k_2\mathbf{N}_2, -k_1^{'}\mathbf{T}$$

$$-k_1^2\mathbf{N}_1-k_1k_2\mathbf{N}_2\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(k_1^{'})^2+k_1^{4}+(k_1k_2)^2))ds$$

O halde (4.27) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\mathbf{N}_2)$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_2))$ enerjisi;

$$\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_2)) = \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2), \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle -\eta^{'}\mathbf{T}-\eta k_1\mathbf{N}_1-\eta k_2\mathbf{N}_2, -\eta^{'}\mathbf{T}-\eta k_1\mathbf{N}_1-\eta k_2\mathbf{N}_2\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\eta^{'})^2+(\eta k_1)^2+(\eta k_2)^2)ds$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.8 $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})$, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)$, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)$ alanlarının Sasakian metrik yardımıyla enerjileri sırasıyla;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+((\eta k_2)^{'}+k_1^{'}k_1+\eta^{'}k_2)^2 \\
&\quad +(k_1^{''}-\eta k_1k_2)^2+(\eta^{''}-\eta k_2^2)^2)ds, \\
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(k_1k_2^2-k_1^{''})^2+(k_1^{'}k_1)^2 \\
&\quad +(k_1^{'}k_2+(k_1k_2)^{'})^2)ds, \\
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\eta k_2^2-\eta^{''})^2+(\eta^{'}k_1)^2 \\
&\quad +((\eta^{'}k_2+(\eta k_2)^{'})^2)ds
\end{aligned} \tag{4.32}$$

şeklindedir.

İspat: $\Phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevinin $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = -\eta k_2\mathbf{T} + k_1^{'}\mathbf{N}_1 + \eta^{'}\mathbf{N}_2$ olduğu göz önüne alınırsa ve (3.11) eşitlikleri (3.26) enerji formülünde yerlerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})),\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}))\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(-\eta k_2\mathbf{T}+k_1^{'}\mathbf{N}_1+\eta^{'}\mathbf{N}_2),\nabla_{\mathbf{T}}(-\eta k_2\mathbf{T}+k_1^{'}\mathbf{N}_1+\eta^{'}\mathbf{N}_2))ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle(-\eta k_2)^{'}\mathbf{T}-\eta k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}+k_1^{''}\mathbf{N}_1+k_1^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1+\eta^{''}\mathbf{N}_2 \\
&\quad +\eta^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2,(-\eta k_2)^{'}\mathbf{T}-\eta k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}+k_1^{''}\mathbf{N}_1+k_1^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1+\eta^{''}\mathbf{N}_2+\eta^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle(-\eta k_2)^{'}\mathbf{T}-\eta k_1k_2\mathbf{N}_1-\eta k_2^2\mathbf{N}_2+k_1^{''}\mathbf{N}_1-k_1k_1^{'}\mathbf{T}+\eta^{''}\mathbf{N}_2 \\
&\quad -\eta^{'}k_2\mathbf{T},(-\eta k_2)^{'}\mathbf{T}-\eta k_1k_2\mathbf{N}_1-\eta k_2^2\mathbf{N}_2 \\
&\quad +k_1^{''}\mathbf{N}_1-k_1k_1^{'}\mathbf{T}+\eta^{''}\mathbf{N}_2-\eta^{'}k_2\mathbf{T}\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle-((\eta k_2)^{'}+\eta^{'}k_2+k_1k_1^{'})\mathbf{T}+(k_1^{''}-\eta k_1k_2)\mathbf{N}_1 \\
&\quad +(\eta^{''}-\eta k_2^2)\mathbf{N}_2,-((\eta k_2)^{'}+\eta^{'}k_2+k_1k_1^{'})\mathbf{T} \\
&\quad +(k_1^{''}-\eta k_1k_2)\mathbf{N}_1+(\eta^{''}-\eta k_2^2)\mathbf{N}_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+((\eta k_2)^{'}+\eta^{'}k_2+k_1^{'}k_1)^2+(k_1^{''}-\eta k_1k_2)^2+(\eta^{''}-\eta k_2^2)^2)ds
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{N}_1)$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevinin $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) = -k_1^{'}\mathbf{T} - k_1k_2\mathbf{N}_2$ olduğu ve (3.26) denklemleri göz önüne alınarak;

$$\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\mathbf{N}_1)),\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\mathbf{N}_1))\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(-k_1^{'}\mathbf{T}-k_1k_2\mathbf{N}_2),\nabla_{\mathbf{T}}(-k_1^{'}\mathbf{T}-k_1k_2\mathbf{N}_2)\rangle ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle -k_1^{''}\mathbf{T}-k_1^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}-(k_1k_2)^{'}\mathbf{N}_2$$

$$-k_1k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2, -k_1^{''}\mathbf{T}-k_1^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}-(k_1k_2)^{'}\mathbf{N}_2-k_1k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle -k_1^{''}\mathbf{T}-k_1^{'}k_1\mathbf{N}_1-k_1^{'}k_2\mathbf{N}_2-(k_1k_2)^{'}\mathbf{N}_2$$

$$+k_1k_2^2\mathbf{T}, -k_1^{''}\mathbf{T}-k_1^{'}k_1\mathbf{N}_1-k_1^{'}k_2\mathbf{N}_2-(k_1k_2)^{'}\mathbf{N}_2+k_1k_2^2\mathbf{T}\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle (k_1k_2^2-k_1^{''})\mathbf{T}-k_1^{'}k_1\mathbf{N}_1-(k_1^{'}k_2+(k_1k_2)^{'})\mathbf{N}_2, (k_1k_2^2-k_1^{''})\mathbf{T}$$

$$-k_1^{'}k_1\mathbf{N}_1-(k_1^{'}k_2+(k_1k_2)^{'})\mathbf{N}_2\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+(k_1k_2^2-k_1^{''})^2+(k_1^{'}k_1)^2+(k_1^{'}k_2+(k_1k_2)^{'})^2)ds$$

bulunur. O halde $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)=-\eta^{'}\mathbf{T}-\eta k_2\mathbf{N}_2$ ve (3.11) denklemleri göz önüne alınırsa;

$$\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\mathbf{N}_2)),\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\mathbf{N}_2))\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(-\eta^{'}\mathbf{T}-\eta k_2\mathbf{N}_2),\nabla_{\mathbf{T}}(-\eta^{'}\mathbf{T}-\eta k_2\mathbf{N}_2)\rangle ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle -\eta^{''}\mathbf{T}-\eta^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}-(\eta k_2)^{'}\mathbf{N}_2-\eta k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2, -\eta^{''}\mathbf{T}-\eta^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}$$

$$-(\eta k_2)^{'}\mathbf{N}_2-\eta k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle -\eta^{''}\mathbf{T}-\eta^{'}k_1\mathbf{N}_1-\eta^{'}k_2\mathbf{N}_2-(\eta k_2)^{'}\mathbf{N}_2$$

$$+\eta k_2^2\mathbf{T}, -\eta^{''}\mathbf{T}-\eta^{'}k_1\mathbf{N}_1-\eta^{'}k_2\mathbf{N}_2-(\eta k_2)^{'}\mathbf{N}_2+\eta k_2^2\mathbf{T}\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle (\eta k_2^2-\eta^{''})\mathbf{T}-\eta^{'}k_1\mathbf{N}_1-(\eta^{'}k_2+(\eta k_2)^{'})\mathbf{N}_2, (\eta k_2^2-\eta^{''})\mathbf{T}$$

$$-\eta^{'}k_1\mathbf{N}_1-(\eta^{'}k_2+(\eta k_2)^{'})\mathbf{N}_2\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+(\eta k_2^2-\eta^{''})^2+(\eta^{'}k_1)^2+((\eta^{'}k_2+(\eta k_2)^{'})^2)ds$$

şeklinde bulunur.

4.1.3 Üç boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre $\mathbf{N}_2$ -manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevlerinin enerjileri

Teorem 4.9 α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{N}_2$ -manyetik eğri olsun. $\Phi(\mathbf{T})$, $\Phi(\mathbf{N}_1)$, $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) &= -\gamma k_1\mathbf{T}+\gamma'\mathbf{N}_1+k_2'\mathbf{N}_2, \\
\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) &= -\gamma'\mathbf{T}-\gamma k_1\mathbf{N}_1, \\
\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) &= -k_2'\mathbf{T}-k_1k_2\mathbf{N}_1
\end{aligned} \tag{4.33}$$

dir.

İspat: α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{N}_2$ -manyetik eğri olsun. O halde Bishop çatısına göre Lorentz kuvvetinin;

$$\begin{pmatrix}\Phi(\mathbf{T})\\ \Phi(\mathbf{N}_1)\\ \Phi(\mathbf{N}_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \gamma & k_2\\ -\gamma & 0 & 0\\ -k_2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}_1\\ \mathbf{N}_2\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\Phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})=\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})-\langle\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{T})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{T})\rangle\mathbf{N}_2 \tag{4.34}$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre (3.11) eşitlikleri göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) &= \gamma'\mathbf{N}_1+\gamma\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1+k_2'\mathbf{N}_2+k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2 \\
&= \gamma'\mathbf{N}_1-\gamma k_1\mathbf{T}-k_2^2\mathbf{T}+k_2'\mathbf{N}_2 \\
&= (-\gamma k_1-k_2^2)\mathbf{T}+\gamma'\mathbf{N}_1+k_2'\mathbf{N}_2
\end{aligned} \tag{4.35}$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$\langle\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{T})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2=\langle\mathbf{N}_2,\gamma\mathbf{N}_1+k_2\mathbf{N}_2\rangle(-k_2\mathbf{T})=-k_2^2\mathbf{T} \tag{4.36}$$

olur ve

$$\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{T})\rangle\mathbf{N}_2=\langle -k_1\mathbf{T},k_1\mathbf{N}_1+\eta\mathbf{N}_2\rangle\mathbf{N}_2=0 \tag{4.37}$$

şeklinde bulunur. Buradan (4.35), (4.36) ve (4.37) eşitlikleri (4.34) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})-\langle\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{T})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{T})\rangle\mathbf{N}_2 \\
&= (-\gamma k_1-k_2^2)\mathbf{T}+\gamma'\mathbf{N}_1+k_2'\mathbf{N}_2+k_2^2\mathbf{T} \\
&= -\gamma k_1\mathbf{T}+\gamma'\mathbf{N}_1+k_2'\mathbf{N}_2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{N}_1)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)=\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)-\langle\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle\mathbf{N}_2 \tag{4.38}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan (3.11) eşitlikleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) &= -\gamma'\mathbf{T}-\gamma\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} \\ &= -\gamma'\mathbf{T}-\gamma k_1\mathbf{N}_1-\gamma k_2\mathbf{N}_2\end{aligned} \tag{4.39}$$

olur. Diğer yandan,

$$\langle\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2 = \langle\mathbf{N}_2,-\gamma\mathbf{T}\rangle(-k_2\mathbf{T}) = 0 \tag{4.40}$$

olur ve

$$\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle\mathbf{N}_2 = \langle -k_2\mathbf{T},-\gamma\mathbf{T}\rangle\mathbf{N}_2 = \gamma k_2\mathbf{N}_2 \tag{4.41}$$

olarak elde edilir. Buradan (4.39), (4.40) ve (4.41) eşitlikleri (4.38) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)-\langle\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle\mathbf{N}_2 \\ &= -\gamma'\mathbf{T}-\gamma k_1\mathbf{N}_1-\gamma k_2\mathbf{N}_2+\gamma k_2\mathbf{N}_2 \\ &= -\gamma'\mathbf{T}-\gamma k_1\mathbf{N}_1\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)-\langle\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{N}_2)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{N}_2)\rangle\mathbf{N}_2 \tag{4.42}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan (3.11) ve (3.30) eşitlikleri göz önüne alınarak,

$$\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) = -k_2'\mathbf{T}-k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = -k_2'\mathbf{T}-k_1k_2\mathbf{N}_1-k_2^2\mathbf{N}_2 \tag{4.43}$$

olur. Diğer yandan,

$$\langle\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{N}_2)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2 = \langle\mathbf{N}_2,-k_2\mathbf{T}\rangle(-k_2\mathbf{T}) = 0 \tag{4.44}$$

olur ve

$$\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{N}_2)\rangle\mathbf{N}_2 = \langle -k_2\mathbf{T},-k_2\mathbf{T}\rangle\mathbf{N}_2 = k_2^2\mathbf{N}_2 \tag{4.45}$$

olarak elde edilir. Buradan (4.43), (4.44) ve (4.45) eşitlikleri (4.42) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)-\langle\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{N}_2)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2,\Phi(\mathbf{N}_2)\rangle\mathbf{N}_2 \\ &= -k_2'\mathbf{T}-k_1k_2\mathbf{N}_1-k_2^2\mathbf{N}_2+k_2^2\mathbf{N}_2 \\ &= -k_2'\mathbf{T}-k_1k_2\mathbf{N}_1\end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.10 α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{N}_2$ -manyetik eğri olsun. Buna göre $\Phi(\mathbf{T})$, $\Phi(\mathbf{N}_1)$, $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvvetleri, Fermi-Walker anlamında paralel ise sırasıyla;

$$\begin{aligned}&k_1 = 0, \\ &k_2 = sabit, \\ &\gamma = sabit\end{aligned} \tag{4.46}$$

dir.

Teorem 4.11 α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{N}_2$ -manyetik eğri olsun. Buna göre $\Phi(\mathbf{T})$, $\Phi(\mathbf{N}_1)$, $\Phi(\mathbf{N}_2)$ alanlarının Sasakian metrik yardımıyla enerjileri sırasıyla;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\Phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\gamma k_1+k_2^2)^2+(\gamma')^2+(k_2')^2)ds, \\
\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\gamma')^2+(\gamma k_1)^2+(\gamma k_2)^2)ds, \\
\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(k_2')^2+(k_1k_2)^2+k_2^4)ds
\end{aligned} \tag{4.47}$$

dir.

İspat: α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{N}_2$ -manyetik eğri olsun. O halde (3.26) enerji formülünde (4.35) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\mathbf{T})$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\mathbf{T}))$ enerjisi,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\Phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}),\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle(-\gamma k_1-k_2^2)\mathbf{T}+\gamma'\mathbf{N}_1+k_2'\mathbf{N}_2,(-\gamma k_1-k_2^2)\mathbf{T}+\gamma'\mathbf{N}_1+k_2'\mathbf{N}_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\gamma k_1+k_2^2)^2+(\gamma')^2+(k_2')^2)ds
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde (4.39) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\mathbf{N}_1)$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_1))$ enerjisi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1),\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle-\gamma'\mathbf{T}-\gamma k_1\mathbf{N}_1-\gamma k_2\mathbf{N}_2,-\gamma'\mathbf{T}-\gamma k_1\mathbf{N}_1-\gamma k_2\mathbf{N}_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\gamma')^2+(\gamma k_1)^2+(\gamma k_2)^2)ds
\end{aligned}$$

O halde (4.43) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\mathbf{N}_2)$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_2))$ enerjisi;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\Phi(\mathbf{N}_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2),\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle-k_2'\mathbf{T}-k_1k_2\mathbf{N}_1-k_2^2\mathbf{N}_2,-k_2'\mathbf{T}-k_1k_2\mathbf{N}_1-k_2^2\mathbf{N}_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(k_2')^2+(k_1k_2)^2+k_2^4))ds
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.12 $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})$, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)$, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)$ alanlarının Sasakian metrik yardımıyla enerjileri sırasıyla;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+((\gamma k_1)' + k_2'k_2 + \gamma' k_1)^2 + (\gamma'' - \gamma k_1^2)^2 + (k_2'' - \gamma k_1 k_2)^2)ds, \\
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+(\gamma k_1^2 - \gamma'')^2 + (\gamma' k_1 + (\gamma k_1)')^2 + (\gamma' k_2)^2)ds, \\
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+(k_1^2 k_2 - k_2'')^2 + (k_2' k_1 + (k_1 k_2)')^2 + (k_2' k_2)^2)ds
\end{aligned}$$

(4.48)

şeklindedir.

İspat: $\Phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevinin $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}) = -\gamma k_1\mathbf{T} + \gamma'\mathbf{N}_1 + k_2'\mathbf{N}_2$ olduğu göz önüne alınırsa ve (3.11) eşitlikleri (3.26) enerji formülünde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T})), \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{T}))\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(-\gamma k_1\mathbf{T} + \gamma'\mathbf{N}_1 + k_2'\mathbf{N}_2), \nabla_{\mathbf{T}}(-\gamma k_1\mathbf{T} + \gamma'\mathbf{N}_1 + k_2'\mathbf{N}_2))ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle(-\gamma k_1)'\mathbf{T} - \gamma k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \gamma''\mathbf{N}_1 + \gamma'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1 + k_2''\mathbf{N}_2 \\
&\quad + k_2'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2, (-\gamma k_1)'\mathbf{T} - \gamma k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \gamma''\mathbf{N}_1 + \gamma'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1 + k_2''\mathbf{N}_2 + k_2'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle((-\gamma k_1)' - k_2'k_2 - \gamma' k_1)\mathbf{T} + (\gamma'' - \gamma k_1^2)\mathbf{N}_1 + (k_2'' \\
&\quad - \gamma k_1 k_2)\mathbf{N}_2, ((-\gamma k_1)' - k_2'k_2 - \gamma' k_1)\mathbf{T} + (\gamma'' - \gamma k_1^2)\mathbf{N}_1 + (k_2'' - \gamma k_1 k_2)\mathbf{N}_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+((\gamma k_1)' + k_2'k_2 + \gamma' k_1)^2 + (\gamma'' - \gamma k_1^2)^2 + (k_2'' - \gamma k_1 k_2)^2)ds
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{N}_1)$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevinin $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1) = -\gamma'\mathbf{T} - \gamma k_1\mathbf{N}_1$ olduğu ve (3.11) denklemleri göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1)), \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_1))\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(-\gamma'\mathbf{T}-\gamma k_1\mathbf{N}_1), \nabla_{\mathbf{T}}(-\gamma'\mathbf{T}-\gamma k_1\mathbf{N}_1)\rangle ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle -\gamma''\mathbf{T}-\gamma'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}-(\gamma k_1)'\mathbf{N}_1 \\
&\quad -\gamma k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1, -\gamma''\mathbf{T}-\gamma'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}-(\gamma k_1)'\mathbf{N}_1-\gamma k_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle -\gamma''\mathbf{T}-\gamma' k_1\mathbf{N}_1-\gamma' k_2\mathbf{N}_2-(\gamma k_1)'\mathbf{N}_1 \\
&\quad +\gamma k_1^2\mathbf{T}, -\gamma''\mathbf{T}-\gamma' k_1\mathbf{N}_1-\gamma' k_2\mathbf{N}_2+(\gamma k_1)'\mathbf{N}_1+\gamma k_1^2\mathbf{T}\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle(\gamma k_1^2-\gamma'')\mathbf{T}+(-\gamma' k_1-(\gamma k_1)')\mathbf{N}_1 \\
&\quad -\gamma' k_2\mathbf{N}_2, (\gamma k_1^2-\gamma'')\mathbf{T}+(-\gamma' k_1-(\gamma k_1)')\mathbf{N}_1-\gamma' k_2\mathbf{N}_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\gamma k_1^2-\gamma'')^2+(\gamma' k_1+(\gamma k_1)')^2+(\gamma' k_2)^2)ds
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\Phi(\mathbf{N}_2)$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi için $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2) = -k_2'\mathbf{T}-k_1k_2\mathbf{N}_1$ ve (3.11) denklemleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2)), \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{N}_2))\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(-k_2'\mathbf{T}-k_1k_2\mathbf{N}_1), \nabla_{\mathbf{T}}(-k_2'\mathbf{T}-k_1k_2\mathbf{N}_1)\rangle ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle -k_2''\mathbf{T}-k_2'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}-(k_1k_2)'\mathbf{N}_1 \\
&\quad -k_1k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1, -k_2''\mathbf{T}-k_2'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}-(k_1k_2)'\mathbf{N}_1-k_1k_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}_1\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle -k_2''\mathbf{T}-k_1k_2'\mathbf{N}_1-k_2'k_2\mathbf{N}_2-(k_1k_2)'\mathbf{N}_1 \\
&\quad +k_1^2k_2\mathbf{T}, -k_2''\mathbf{T}-k_1k_2'\mathbf{N}_1-k_2'k_2\mathbf{N}_2-(k_1k_2)'\mathbf{N}_1+k_1^2k_2\mathbf{T}\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle(-k_2''+k_1^2k_2)\mathbf{T}+(-k_1k_2'-(k_1k_2)')\mathbf{N}_1 \\
&\quad -k_2k_2'\mathbf{N}_2, (-k_2''+k_1^2k_2)\mathbf{T}+(-k_1k_2'-(k_1k_2)')\mathbf{N}_1-k_2k_2'\mathbf{N}_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(k_1^2k_2-k_2'')^2+(k_2'k_1+(k_1k_2)')^2+(k_2k_2')^2)ds
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

4.2 Üç Boyutlu Öklid Uzayında Tip-2 Bishop Çatısına Göre Manyetik Eğrilerin Fermi-Walker Türevlerinin Enerjileri

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında; tip-2 Bishop çatısına göre ξ_1-manyetik, ξ_2-manyetik ve $\mathbf{B}$-manyetik eğrilerinin Fermi-Walker türevlerini ve bu türevlerinin enerjilerini hesaplayacağız.

4.2.1 Üç boyutlu Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre ξ_1-manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevlerinin enerjileri

Teorem 4.13 α, 3-boyutlu Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre birim hızlı ξ_1-manyetik eğri olsun. $\Phi(\xi_1)$, $\Phi(\xi_2)$, $\Phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi sırasıyla,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1) &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2 - \varepsilon_1'\mathbf{B},\\ \tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2) &= \rho_2\varepsilon_2\xi_2 + \rho_2'\mathbf{B},\\ \tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}) &= \varepsilon_1'\xi_1 - \rho_2'\xi_2 + \rho_2\varepsilon_2\mathbf{B}\end{aligned} \tag{4.49}$$

dir.

İspat: α, 3-boyutlu Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre birim hızlı ξ_1-manyetik eğri olsun. O halde tip-2 Bishop çatısına göre Lorentz kuvveti ;

$$\begin{pmatrix}\Phi(\xi_1)\\ \Phi(\xi_2)\\ \Phi(\mathbf{B})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & -\varepsilon_1\\ 0 & 0 & \rho_2\\ \varepsilon_1 & -\rho_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\Phi(\xi_1)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1) - \langle \xi_1, \Phi(\xi_1)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\xi_1 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\xi_1, \Phi(\xi_1)\rangle \xi_1 \tag{4.50}$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre (3.14) eşitlikleri de göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1) &= -\varepsilon_1'\mathbf{B} - \varepsilon_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\\ &= -\varepsilon_1'\mathbf{B} - \varepsilon_1(\varepsilon_1\xi_1 + \varepsilon_2\xi_2)\\ &= -\varepsilon_1^2\xi_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2 - \varepsilon_1'\mathbf{B}\end{aligned} \tag{4.51}$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$\langle \xi_1, \Phi(\xi_1)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\xi_1 = \langle \xi_1, -\varepsilon_1\mathbf{B}\rangle(-\varepsilon_1\mathbf{B}) = 0 \tag{4.52}$$

olur ve

$$\langle \nabla_{\mathbf{T}}\xi_1, \Phi(\xi_1)\rangle \xi_1 = \langle -\varepsilon_1\mathbf{B}, -\varepsilon_1\mathbf{B}\rangle \xi_1 = \varepsilon_1^2\xi_1 \tag{4.53}$$

şeklinde bulunur. Buradan (4.51), (4.52) ve (4.53) eşitlikleri (4.50) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1) - \langle \xi_1, \Phi(\xi_1)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\xi_1 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\xi_1, \Phi(\xi_1)\rangle \xi_1\\ &= -\varepsilon_1^2\xi_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2 - \varepsilon_1'\mathbf{B} + \varepsilon_1^2\xi_1\\ &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2 - \varepsilon_1'\mathbf{B}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\Phi(\boldsymbol{\xi}_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_2) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_2) - \langle \boldsymbol{\xi}_1, \Phi(\boldsymbol{\xi}_2)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1, \Phi(\boldsymbol{\xi}_2)\rangle \boldsymbol{\xi}_1 \tag{4.54}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan (3.14) ve (3.24) eşitlikleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_2) &= \rho_2'\mathbf{B} + \rho_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} \\ &= \rho_2'\mathbf{B} + \rho_2(\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1 + \varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2) \\ &= \rho_2\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1 + \rho_2\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2 + \rho_2'\mathbf{B} \end{aligned} \tag{4.55}$$

olur. Diğer yandan,

$$\langle \boldsymbol{\xi}_1, \Phi(\boldsymbol{\xi}_2)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1 = \langle \boldsymbol{\xi}_1, \rho_2\mathbf{B}\rangle(-\varepsilon_1\mathbf{B}) = 0 \tag{4.56}$$

olur ve

$$\langle \nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1, \Phi(\boldsymbol{\xi}_2)\rangle \boldsymbol{\xi}_1 = \langle -\varepsilon_1\mathbf{B}, \rho_2\mathbf{B}\rangle \boldsymbol{\xi}_1 = -\rho_2\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1 \tag{4.57}$$

olarak elde edilir. Buradan (4.55), (4.56) ve (4.57) eşitlikleri (4.54) te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_2) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_2) - \langle \boldsymbol{\xi}_1, \Phi(\boldsymbol{\xi}_2)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1, \Phi(\boldsymbol{\xi}_2)\rangle \boldsymbol{\xi}_1 \\ &= \rho_2\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1 + \rho_2\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2 + \rho_2'\mathbf{B} - \rho_2\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1 \\ &= \rho_2\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2 + \rho_2'\mathbf{B} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}) - \langle \boldsymbol{\xi}_1, \Phi(\mathbf{B})\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1, \Phi(\mathbf{B})\rangle \boldsymbol{\xi}_1 \tag{4.58}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan (3.14) eşitlikleri göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}) &= \varepsilon_1'\boldsymbol{\xi}_1 + \varepsilon_1\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1 - \rho_2'\boldsymbol{\xi}_2 - \rho_2\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_2 \\ &= \varepsilon_1'\boldsymbol{\xi}_1 - \varepsilon_1^2\mathbf{B} - \rho_2'\boldsymbol{\xi}_2 + \rho_2\varepsilon_2\mathbf{B} \\ &= \varepsilon_1'\boldsymbol{\xi}_1 - \rho_2'\boldsymbol{\xi}_2 + (\rho_2\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2)\mathbf{B} \end{aligned} \tag{4.59}$$

olur. Diğer yandan,

$$\langle \boldsymbol{\xi}_1, \Phi(\mathbf{B})\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1 = \langle \boldsymbol{\xi}_1, \varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1 - \rho_2\boldsymbol{\xi}_2\rangle(-\varepsilon_1\mathbf{B}) = -\varepsilon_1^2\mathbf{B} \tag{4.60}$$

olur ve

$$\langle \nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1, \Phi(\mathbf{B})\rangle \boldsymbol{\xi}_1 = \langle -\varepsilon_1\mathbf{B}, \varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1 - \rho_2\boldsymbol{\xi}_2\rangle \boldsymbol{\xi}_1 = 0 \tag{4.61}$$

olarak elde edilir. Buradan (4.59), (4.60) ve (4.61) eşitlikleri (4.58) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}) &= \varepsilon_1'\boldsymbol{\xi}_1 - \rho_2'\boldsymbol{\xi}_2 + (\rho_2\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2)\mathbf{B} + \varepsilon_1^2\mathbf{B} \\ &= \varepsilon_1'\boldsymbol{\xi}_1 - \rho_2'\boldsymbol{\xi}_2 + \rho_2\varepsilon_2\mathbf{B} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.14 α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\boldsymbol{\xi}_1$

-manyetik eğri olsun. Buna göre $\Phi(\xi_1)$, $\Phi(\xi_2)$, $\Phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetleri, Fermi-Walker anlamında paralel ise sırasıyla;

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 = sabit, \\ &\varepsilon_2 = 0, \\ &\rho_2 = sabit \end{aligned} \tag{4.62}$$

dir.

Teorem 4.15 α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı ξ_1 -manyetik eğri olsun. Buna göre $\Phi(\xi_1)$, $\Phi(\xi_2)$, $\Phi(\mathbf{B})$ alanlarının Sasakian metrik yardımıyla enerjileri sırasıyla;

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(\xi_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1)^4 + (\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1')^2)ds, \\ \varepsilon(\Phi(\xi_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\rho_2\varepsilon_1)^2 + (\rho_2\varepsilon_2)^2 + (\rho_2')^2)ds, \\ \varepsilon(\Phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1')^2 + (\rho_2')^2 + (\rho_2\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2)^2)ds \end{aligned} \tag{4.63}$$

dir.

İspat: α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı ξ_1-manyetik eğri olsun. O halde (3.26) enerji formülünde (4.51) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\xi_1)$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\xi_1))$ enerjisi,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(\xi_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1), \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)\rangle)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle -\varepsilon_1^2\xi_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2 - \varepsilon_1'\mathbf{B}, -\varepsilon_1^2\xi_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2 - \varepsilon_1'\mathbf{B}\rangle)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1)^4 + (\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1')^2)ds \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde (4.55) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\xi_2)$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\xi_2))$ enerjisi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(\xi_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2), \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)\rangle)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \rho_2\varepsilon_1\xi_1 + \rho_2\varepsilon_2\xi_2 + \rho_2'\mathbf{B}, \rho_2\varepsilon_1\xi_1 + \rho_2\varepsilon_2\xi_2 + \rho_2'\mathbf{B}\rangle)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\rho_2\varepsilon_1)^2 + (\rho_2\varepsilon_2)^2 + (\rho_2')^2)ds \end{aligned}$$

O halde (4.59) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\mathbf{B})$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\mathbf{B}))$ enerjisi;

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\Phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}),\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\varepsilon_1'\xi_1-\rho_2'\xi_2+(\rho_2\varepsilon_2-\varepsilon_1^2)\mathbf{B},\varepsilon_1'\xi_1-\rho_2'\xi_2+(\rho_2\varepsilon_2-\varepsilon_1^2)\mathbf{B}\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+(\varepsilon_1')^2+(\rho_2')^2+(\rho_2\varepsilon_2-\varepsilon_1^2)^2)ds
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.16 $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)$, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)$, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})$ alanlarının Sasakian metrik yardımıyla enerjileri sırasıyla;

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+(\varepsilon_1'\varepsilon_1)^2+((\varepsilon_1\varepsilon_2)'+\varepsilon_1'\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1\varepsilon_2^2-\varepsilon_1'')^2)ds, \\
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+(\rho_2'\varepsilon_1)^2+((\rho_2\varepsilon_2)'+\rho_2'\varepsilon_2)^2+(\rho_2''-\rho_2\varepsilon_2^2)^2)ds, \qquad (4.64) \\
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+((\varepsilon_1''+\rho_2\varepsilon_2\varepsilon_1)^2+(\rho_2\varepsilon_2^2-\rho_2'')^2+(\rho_2'\varepsilon_2-\varepsilon_1'\varepsilon_1+(\rho_2\varepsilon_2)')^2)ds
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

İspat: $\Phi(\xi_1)$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevinin $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)=-\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2-\varepsilon_1'\mathbf{B}$ olduğu göz önüne alınırsa ve (3.14) eşitlikleri (3.26) enerji formülünde yerlerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)) &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)),\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1))\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(-\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2-\varepsilon_1'\mathbf{B}),\nabla_{\mathbf{T}}(-\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2-\varepsilon_1'\mathbf{B}))ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle(-\varepsilon_1\varepsilon_2)'\xi_2-\varepsilon_1\varepsilon_2\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2-\varepsilon_1''\mathbf{B}-\varepsilon_1'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},(-\varepsilon_1\varepsilon_2)'\xi_2-\varepsilon_1\varepsilon_2\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2 \\
&\quad -\varepsilon_1''\mathbf{B}-\varepsilon_1'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle(-\varepsilon_1\varepsilon_2)'\xi_2+\varepsilon_1\varepsilon_2^2\mathbf{B}-\varepsilon_1''\mathbf{B}-\varepsilon_1'\varepsilon_1\xi_1-\varepsilon_1'\varepsilon_2\xi_2,(-\varepsilon_1\varepsilon_2)'\xi_2 \\
&\quad +\varepsilon_1\varepsilon_2^2\mathbf{B}-\varepsilon_1''\mathbf{B}-\varepsilon_1'\varepsilon_1\xi_1-\varepsilon_1'\varepsilon_2\xi_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+\langle-\varepsilon_1'\varepsilon_1\xi_1+((-\varepsilon_1\varepsilon_2)'-\varepsilon_1'\varepsilon_2)\xi_2+(\varepsilon_1\varepsilon_2^2-\varepsilon_1'')\mathbf{B},-\varepsilon_1'\varepsilon_1\xi_1+((-\varepsilon_1\varepsilon_2)' \\
&\quad -\varepsilon_1'\varepsilon_2)\xi_2+(\varepsilon_1\varepsilon_2^2-\varepsilon_1'')\mathbf{B}\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{\alpha}(1+((\varepsilon_1'\varepsilon_1)^2+((\varepsilon_1\varepsilon_2)'+\varepsilon_1'\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1\varepsilon_2^2-\varepsilon_1'')^2)ds
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\Phi(\xi_2)$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevinin $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)=\rho_2\varepsilon_2\xi_2+\rho_2'\mathbf{B}$ olduğu ve (3.14) denklemleri göz önüne alınarak;

$$\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)) \;=\; \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\xi_2)), \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\xi_2))\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(\rho_2\varepsilon_2\xi_2+\rho_2'\mathbf{B}), \nabla_{\mathbf{T}}(\rho_2\varepsilon_2\xi_2+\rho_2'\mathbf{B}))ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle(\rho_2\varepsilon_2)'\xi_2+\rho_2\varepsilon_2\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2+\rho_2''\mathbf{B}$$

$$+\rho_2'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},(\rho_2\varepsilon_2)'\xi_2+\rho_2\varepsilon_2\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2+\rho_2''\mathbf{B}+\rho_2'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle(\rho_2\varepsilon_2)'\xi_2-\rho_2\varepsilon_2^2\mathbf{B}+\rho_2''\mathbf{B}+\rho_2'\varepsilon_1\xi_1$$

$$+\rho_2'\varepsilon_2\xi_2,(\rho_2\varepsilon_2)'\xi_2-\rho_2\varepsilon_2^2\mathbf{B}+\rho_2''\mathbf{B}+\rho_2'\varepsilon_1\xi_1+\rho_2'\varepsilon_2\xi_2\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\rho_2'\varepsilon_1\xi_1+((\rho_2\varepsilon_2)'+\rho_2'\varepsilon_2)\xi_2+(\rho_2''-\rho_2\varepsilon_2^2)\mathbf{B},\rho_2'\varepsilon_1\xi_1$$

$$+((\rho_2\varepsilon_2)'+\rho_2'\varepsilon_2)\xi_2+(\rho_2''-\rho_2\varepsilon_2^2)\mathbf{B}\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+((\rho_2'\varepsilon_1)^2+((\rho_2\varepsilon_2)'+\rho_2'\varepsilon_2)^2+(\rho_2''-\rho_2\varepsilon_2^2)^2)ds$$

bulunur. O halde $\Phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi

$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})=\varepsilon_1'\xi_1-\rho_2'\xi_2+\rho_2\varepsilon_2\mathbf{B}$ ve (3.14) denklemleri göz önüne alınırsa;

$$\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})) \;=\; \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\mathbf{B})), \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\mathbf{B}))\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(\varepsilon_1'\xi_1-\rho_2'\xi_2+\rho_2\varepsilon_2\mathbf{B}), \nabla_{\mathbf{T}}(\varepsilon_1'\xi_1-\rho_2'\xi_2+\rho_2\varepsilon_2\mathbf{B}))ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\varepsilon_1''\xi_1+\varepsilon_1'\nabla_{\mathbf{T}}\xi_1-\rho_2''\xi_2-\rho_2'\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2+(\rho_2\varepsilon_2)'\mathbf{B}+\rho_2\varepsilon_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\varepsilon_1''\xi_1$$

$$+\varepsilon_1'\nabla_{\mathbf{T}}\xi_1-\rho_2''\xi_2-\rho_2'\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2+(\rho_2\varepsilon_2)'\mathbf{B}+\rho_2\varepsilon_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\varepsilon_1''\xi_1-\varepsilon_1'\varepsilon_1\mathbf{B}-\rho_2''\xi_2+\rho_2'\varepsilon_2\mathbf{B}+(\rho_2\varepsilon_2)'\mathbf{B}+\rho_2\varepsilon_2\varepsilon_1\xi_1+\rho_2\varepsilon_2^2\xi_2,\varepsilon_1''\xi_1$$

$$-\varepsilon_1'\varepsilon_1\mathbf{B}-\rho_2''\xi_2+\rho_2'\varepsilon_2\mathbf{B}+(\rho_2\varepsilon_2)'\mathbf{B}+\rho_2\varepsilon_2\varepsilon_1\xi_1+\rho_2\varepsilon_2^2\xi_2\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle(\varepsilon_1''+\rho_2\varepsilon_2\varepsilon_1)\xi_1+(\rho_2\varepsilon_2^2-\rho_2'')\xi_2+(\rho_2'\varepsilon_2-\varepsilon_1'\varepsilon_1+(\rho_2\varepsilon_2)')\mathbf{B},\varepsilon_1''$$

$$+\rho_2\varepsilon_2\varepsilon_1)\xi_1+(\rho_2\varepsilon_2^2-\rho_2'')\xi_2+(\rho_2'\varepsilon_2-\varepsilon_1'\varepsilon_1+(\rho_2\varepsilon_2)')\mathbf{B}\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+((\varepsilon_1''+\rho_2\varepsilon_2\varepsilon_1)^2+(\rho_2\varepsilon_2^2-\rho_2'')^2+(\rho_2'\varepsilon_2-\varepsilon_1'\varepsilon_1+(\rho_2\varepsilon_2)')^2)ds$$

şeklinde bulunur.

4.2.2 Üç boyutlu Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre ξ_2-manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevlerinin enerjileri

Teorem 4.17 α, 3-boyutlu Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre birim hızlı ξ_2

-manyetik eğri olsun. $\Phi(\xi_1)$, $\Phi(\xi_2)$, $\Phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi sırasıyla,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1) &= \eta_2\varepsilon_1\xi_1+\eta_2^{'}\mathbf{B},\\ \tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2) &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1-\varepsilon_2^{'}\mathbf{B},\\ \tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}) &= -\eta_2^{'}\xi_1+\varepsilon_2^{'}\xi_2+\eta_2\varepsilon_1\mathbf{B}\end{aligned} \tag{4.65}$$

dir.

İspat: α, 3-boyutlu Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre birim hızlı ξ_2-manyetik eğri olsun. O halde tip-2 Bishop çatısına göre Lorentz kuvveti ;

$$\begin{pmatrix}\Phi(\xi_1)\\ \Phi(\xi_2)\\ \Phi(\mathbf{B})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \eta_2\\ 0 & 0 & -\varepsilon_2\\ -\eta_2 & \varepsilon_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\Phi(\xi_1)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)=\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)-\langle\xi_2,\Phi(\xi_1)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2,\Phi(\xi_1)\rangle\xi_2 \tag{4.66}$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre (3.14) eşitlikleri göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1) &= \eta_2^{'}\mathbf{B}+\eta_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\\ &= \eta_2\varepsilon_1\xi_1+\eta_2\varepsilon_2\xi_2+\eta_2^{'}\mathbf{B}\end{aligned} \tag{4.67}$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$\langle\xi_2,\Phi(\xi_1)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2=\langle\xi_2,\eta_2\mathbf{B}\rangle(-\varepsilon_2\mathbf{B})=0 \tag{4.68}$$

olur ve

$$\langle\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2,\Phi(\xi_1)\rangle\xi_2=\langle-\varepsilon_2\mathbf{B},\eta_2\mathbf{B}\rangle\xi_2=-\eta_2\varepsilon_2\xi_2 \tag{4.69}$$

şeklinde bulunur. Buradan (4.67), (4.68) ve (4.69) eşitlikleri (4.66) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)-\langle\xi_2,\Phi(\xi_1)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2,\Phi(\xi_1)\rangle\xi_2\\ &= \eta_2\varepsilon_1\xi_1+\eta_2\varepsilon_2\xi_2+\eta_2^{'}\mathbf{B}-\eta_2\varepsilon_2\xi_2\\ &= \eta_2\varepsilon_1\xi_1+\eta_2^{'}\mathbf{B}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\Phi(\xi_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)=\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)-\langle\xi_2,\Phi(\xi_2)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2,\Phi(\xi_2)\rangle\xi_2 \tag{4.70}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan (3.36) ve (3.14) eşitlikleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2) &= -\varepsilon_2^{'}\mathbf{B}-\varepsilon_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\\ &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1-\varepsilon_2^2\xi_2-\varepsilon_2^{'}\mathbf{B}\end{aligned} \tag{4.71}$$

olur. Diğer yandan,

$$\langle \xi_2, \Phi(\xi_2)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\xi_2 = \langle \xi_2, -\varepsilon_2\mathbf{B}\rangle(-\varepsilon_2\mathbf{B}) = 0 \tag{4.72}$$

olur ve

$$\langle \nabla_{\mathbf{T}}\, \xi_2, \Phi(\xi_2)\rangle \xi_2 = \langle -\varepsilon_2\mathbf{B}, -\varepsilon_2\mathbf{B}\rangle \xi_2 = \varepsilon_2^2\xi_2 \tag{4.73}$$

olarak elde edilir. Buradan (4.71), (4.72) ve (4.73) eşitlikleri (4.70) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2) &= \nabla_{\mathbf{T}}\, \Phi(\xi_2) - \langle \xi_2, \Phi(\xi_2)\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\xi_2 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\, \xi_2, \Phi(\xi_2)\rangle \xi_2 \\ &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1 - \varepsilon_2^2\xi_2 - \varepsilon_2^{'}\mathbf{B} + \varepsilon_2^2\xi_2 \\ &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1 - \varepsilon_2^{'}\mathbf{B} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{T}}\, \Phi(\mathbf{B}) - \langle \xi_2, \Phi(\mathbf{B})\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\xi_2 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\, \xi_2, \Phi(\mathbf{B})\rangle \xi_2 \tag{4.74}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan (3.14) eşitlikleri göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{T}}\, \Phi(\mathbf{B}) &= -\eta_2^{'}\xi_1 - \eta_2\nabla_{\mathbf{T}}\xi_1 + \varepsilon_2^{'}\xi_2 + \varepsilon_2\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2 \\ &= -\eta_2^{'}\xi_1 + \eta_2\varepsilon_1\mathbf{B} + \varepsilon_2^{'}\xi_2 - \varepsilon_2^2\mathbf{B} \\ &= -\eta_2^{'}\xi_1 + \varepsilon_2^{'}\xi_2 + (\eta_2\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2)\mathbf{B} \end{aligned} \tag{4.75}$$

olur. Diğer yandan,

$$\langle \xi_2, \Phi(\mathbf{B})\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\xi_2 = \langle \xi_2, -\eta_2\xi_1 + \varepsilon_2\xi_2\rangle(-\varepsilon_2\mathbf{B}) = -\varepsilon_2^2\mathbf{B} \tag{4.76}$$

olur ve

$$\langle \nabla_{\mathbf{T}}\, \xi_2, \Phi(\mathbf{B})\rangle \xi_2 = \langle -\varepsilon_2\mathbf{B}, -\eta_2\xi_1 + \varepsilon_2\xi_2\rangle \xi_2 = 0 \tag{4.77}$$

olarak elde edilir. Buradan (4.75), (4.76) ve (4.77) eşitlikleri (4.74) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}) &= \nabla_{\mathbf{T}}\, \Phi(\mathbf{B}) - \langle \xi_2, \Phi(\mathbf{B})\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\xi_2 + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\, \xi_2, \Phi(\mathbf{B})\rangle \xi_2 \\ &= -\eta_2^{'}\xi_1 + \varepsilon_2^{'}\xi_2 + (\eta_2\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2)\mathbf{B} + \varepsilon_2^2\mathbf{B} \\ &= -\eta_2^{'}\xi_1 + \varepsilon_2^{'}\xi_2 + \eta_2\varepsilon_1\mathbf{B} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.18 α, 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı ξ_2 -manyetik eğri olsun. Buna göre $\Phi(\xi_1)$, $\Phi(\xi_2)$, $\Phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetleri, Fermi-Walker anlamında paralel ise sırasıyla;

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0, \\ \varepsilon_2 &= sabit, \\ \eta_2 &= sabit \end{aligned} \tag{4.78}$$

dir.

Teorem 4.19 α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı ξ_2 -manyetik eğri olsun. Buna göre $\Phi(\xi_1)$, $\Phi(\xi_2)$, $\Phi(\mathbf{B})$ alanlarının Sasakian metrik yardımıyla enerjileri sırasıyla;

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(\xi_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\eta_2\varepsilon_1)^2+(\eta_2\varepsilon_2)^2+(\eta_2^{'})^2)ds, \\ \varepsilon(\Phi(\xi_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2)^4+(\varepsilon_2^{'})^2)ds, \\ \varepsilon(\Phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\eta_2^{'})^2+(\varepsilon_2^{'})^2+(\eta_2\varepsilon_1-\varepsilon_2^2)^2)ds \end{aligned} \tag{4.79}$$

dir.

İspat: α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı ξ_2 -manyetik eğri olsun. O halde (3.26) enerji formülünde (4.67) eşitliği göz önüne alınırsa, $\Phi(\xi_1)$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\xi_1))$ enerjisi,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(\xi_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1),\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)\rangle)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\eta_2\varepsilon_1\xi_1+\eta_2\varepsilon_2\xi_2+\eta_2^{'}\mathbf{B},\eta_2\varepsilon_1\xi_1+\eta_2\varepsilon_2\xi_2+\eta_2^{'}\mathbf{B}\rangle)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\eta_2\varepsilon_1)^2+(\eta_2\varepsilon_2)^2+(\eta_2^{'})^2)ds \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde (4.71) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\xi_2)$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\xi_2))$ enerjisi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(\xi_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2),\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)\rangle)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle-\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1-\varepsilon_2^2\xi_2-\varepsilon_2^{'}\mathbf{B},-\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1-\varepsilon_2^2\xi_2-\varepsilon_2^{'}\mathbf{B}\rangle)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2)^4+(\varepsilon_2^{'})^2)ds \end{aligned}$$

O halde (4.75) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\mathbf{B})$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\mathbf{B}))$ enerjisi;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\Phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}\,\Phi(\mathbf{B}), \nabla_{\mathbf{T}}\,\Phi(\mathbf{B})\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle -\eta_2'\xi_1+\varepsilon_2'\xi_2+(\eta_2\varepsilon_1-\varepsilon_2^2)\mathbf{B}, -\eta_2'\xi_1+\varepsilon_2'\xi_2+(\eta_2\varepsilon_1-\varepsilon_2^2)\mathbf{B}\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\eta_2')^2+(\varepsilon_2')^2+(\eta_2\varepsilon_1-\varepsilon_2^2)^2)ds
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.20 $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)$, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)$, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})$ alanlarının Sasakian metrik yardımıyla enerjileri sırasıyla;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+((\eta_2\varepsilon_1)'+\eta_2'\varepsilon_1)^2+(\eta_2'\varepsilon_2)^2+(\eta_2''-\eta_2\varepsilon_1^2)^2)ds, \\
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+((\varepsilon_1\varepsilon_2)'+\varepsilon_1\varepsilon_2')^2+(\varepsilon_2'\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1^2\varepsilon_2-\varepsilon_2'')^2)ds, \qquad (4.80) \\
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\eta_2\varepsilon_1^2-\eta_2'')^2+(\varepsilon_2''+\eta_2\varepsilon_2)^2+(\eta_2'\varepsilon_1-\varepsilon_2'\varepsilon_2+(\eta_2\varepsilon_1)')^2)ds
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: $\Phi(\xi_1)$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevinin $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)=\eta_2\varepsilon_1\xi_1+\eta_2'\mathbf{B}$ olduğu göz önüne alınırsa ve (3.14) eşitlikleri (3.26) enerji formülünde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\xi_1)), \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\xi_1))\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(\eta_2\varepsilon_1\xi_1+\eta_2'\mathbf{B}), \nabla_{\mathbf{T}}(\eta_2\varepsilon_1\xi_1+\eta_2'\mathbf{B}))ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle (\eta_2\varepsilon_1)'\xi_1+\eta_2\varepsilon_1\nabla_{\mathbf{T}}\xi_1+\eta_2''\mathbf{B} \\
&\quad +\eta_2'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, (\eta_2\varepsilon_1)'\xi_1+\eta_2\varepsilon_1\nabla_{\mathbf{T}}\xi_1+\eta_2''\mathbf{B}+\eta_2'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle (\eta_2\varepsilon_1)'\xi_1-\eta_2\varepsilon_1^2\mathbf{B}+\eta_2''\mathbf{B}+\eta_2'\varepsilon_1\xi_1 \\
&\quad +\eta_2'\varepsilon_2\xi_2, (\eta_2\varepsilon_1)'\xi_1-\eta_2\varepsilon_1^2\mathbf{B}+\eta_2''\mathbf{B}+\eta_2'\varepsilon_1\xi_1+\eta_2'\varepsilon_2\xi_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle ((\eta_2\varepsilon_1)'+\eta_2'\varepsilon_1)\xi_1+\eta_2'\varepsilon_2\xi_2+(\eta_2'' \\
&\quad -\eta_2\varepsilon_1^2)\mathbf{B}, ((\eta_2\varepsilon_1)'+\eta_2'\varepsilon_1)\xi_1+\eta_2'\varepsilon_2\xi_2+(\eta_2''-\eta_2\varepsilon_1^2)\mathbf{B}\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+((\eta_2\varepsilon_1)'+\eta_2'\varepsilon_1)^2+(\eta_2'\varepsilon_2)^2+(\eta_2''-\eta_2\varepsilon_1^2)^2)ds
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\Phi(\xi_2)$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevinin $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)=-\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1-\varepsilon_2'\mathbf{B}$ olduğu ve (3.14) denklemleri göz önüne alınarak;

$$\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)) \;=\; \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\xi_2)), \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\xi_2))\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(-\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1-\varepsilon_2^{'}\mathbf{B}), \nabla_{\mathbf{T}}(-\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_1-\varepsilon_2^{'}\mathbf{B}))ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle (-\varepsilon_1\varepsilon_2)^{'}\xi_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\nabla_{\mathbf{T}}\xi_1-\varepsilon_2^{''}\mathbf{B}$$

$$-\varepsilon_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, (-\varepsilon_1\varepsilon_2)^{'}\xi_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\nabla_{\mathbf{T}}\xi_1-\varepsilon_2^{''}\mathbf{B}-\varepsilon_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle (-\varepsilon_1\varepsilon_2)^{'}\xi_1+\varepsilon_1^2\varepsilon_2\mathbf{B}-\varepsilon_2^{''}\mathbf{B}-\varepsilon_1\varepsilon_2^{'}\xi_1$$

$$-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2\xi_2, (-\varepsilon_1\varepsilon_2)^{'}\xi_1+\varepsilon_1^2\varepsilon_2\mathbf{B}-\varepsilon_2^{''}\mathbf{B}-\varepsilon_1\varepsilon_2^{'}\xi_1-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2\xi_2\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle ((-\varepsilon_1\varepsilon_2)^{'}-\varepsilon_1\varepsilon_2^{'})\xi_1-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2\xi_2+(\varepsilon_1^2\varepsilon_2-\varepsilon_2^{''})\mathbf{B}, ((-\varepsilon_1\varepsilon_2)^{'}$$

$$-\varepsilon_1\varepsilon_2^{'})\xi_1-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2\xi_2+(\varepsilon_1^2\varepsilon_2-\varepsilon_2^{''})\mathbf{B}\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+((\varepsilon_1\varepsilon_2)^{'}+\varepsilon_1\varepsilon_2^{'})^2+(\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1^2\varepsilon_2-\varepsilon_2^{''})^2)ds$$

bulunur. O halde $\Phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})=-\eta_2^{'}\xi_1+\varepsilon_2^{'}\xi_2+\eta_2\varepsilon_1\mathbf{B}$ ve (3.14) denklemleri göz önüne alınırsa;

$$\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})) \;=\; \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\mathbf{B})), \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\mathbf{B}))\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(-\eta_2^{'}\xi_1+\varepsilon_2^{'}\xi_2+\eta_2\varepsilon_1\mathbf{B}), \nabla_{\mathbf{T}}(-\eta_2^{'}\xi_1+\varepsilon_2^{'}\xi_2+\eta_2\varepsilon_1\mathbf{B}))ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle -\eta_2^{''}\xi_1-\eta_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\xi_1+\varepsilon_2^{''}\xi_2+\varepsilon_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2+(\eta_2\varepsilon_1)^{'}\mathbf{B}$$

$$+\eta_2\varepsilon_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, -\eta_2^{''}\xi_1-\eta_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\xi_1+\varepsilon_2^{''}\xi_2+\varepsilon_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2+(\eta_2\varepsilon_1)^{'}\mathbf{B}+\eta_2\varepsilon_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle -\eta_2^{''}\xi_1+\eta_2^{'}\varepsilon_1\mathbf{B}+\varepsilon_2^{''}\xi_2-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2\mathbf{B}+(\eta_2\varepsilon_1)^{'}\mathbf{B}+\eta_2\varepsilon_1^2\xi_1$$

$$+\eta_2\varepsilon_2\xi_2, -\eta_2^{''}\xi_1+\eta_2^{'}\varepsilon_1\mathbf{B}+\varepsilon_2^{''}\xi_2-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2\mathbf{B}+(\eta_2\varepsilon_1)^{'}\mathbf{B}+\eta_2\varepsilon_1^2\xi_1+\eta_2\varepsilon_2\xi_2\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle (\eta_2\varepsilon_1^2-\eta_2^{''})\xi_1+(\varepsilon_2^{''}+\eta_2\varepsilon_2)\xi_2+((\eta_2\varepsilon_1)^{'}-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2+\eta_2^{'}\varepsilon_1)\mathbf{B}, (\eta_2\varepsilon_1^2$$

$$-\eta_2^{''})\xi_1+(\varepsilon_2^{''}+\eta_2\varepsilon_2)\xi_2+((\eta_2\varepsilon_1)^{'}-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2+\eta_2^{'}\varepsilon_1)B\rangle)ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\eta_2\varepsilon_1^2-\eta_2^{''})^2+(\varepsilon_2^{''}+\eta_2\varepsilon_2)^2+(\eta_2^{'}\varepsilon_1-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2+(\eta_2\varepsilon_1)^{'})^2)ds$$

şeklinde bulunur.

4.2.3 Üç boyutlu Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre $\mathbf{B}$-manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevlerinin enerjileri

Teorem 4.21 α, 3-boyutlu Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{B}$ -manyetik eğri olsun. $\Phi(\xi_1)$, $\Phi(\xi_2)$, $\Phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin Fermi-Walker türevi sırasıyla,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1) &= \gamma_2'\xi_2-\varepsilon_1'\mathbf{B},\\ \tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2) &= -\gamma_2'\xi_1-\varepsilon_2'\mathbf{B},\\ \tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}) &= \varepsilon_1'\xi_1+\varepsilon_2'\xi_2\end{aligned} \tag{4.81}$$

dir.

İspat: α , 3-boyutlu Öklid uzayında tip-2 Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{B}$ -manyetik eğri olsun. O halde tip-2 Bishop çatısına göre Lorentz kuvveti ;

$$\begin{pmatrix}\Phi(\xi_1)\\ \Phi(\xi_2)\\ \Phi(\mathbf{B})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \gamma_2 & -\varepsilon_1\\ -\gamma_2 & 0 & -\varepsilon_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\Phi(\xi_1)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)=\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)-\langle\mathbf{B},\Phi(\xi_1)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\Phi(\xi_1)\rangle\mathbf{B} \tag{4.82}$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre (3.14) ve (3.38) eşitlikleri göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1) &= \gamma_2'\xi_2+\gamma_2\nabla_{\mathbf{T}}\xi_2-\varepsilon_1'\mathbf{B}-\varepsilon_1\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\\ &= \gamma_2'\xi_2-\gamma_2\varepsilon_2\mathbf{B}-\varepsilon_1'\mathbf{B}-\varepsilon_1^2\xi_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2\\ &= -\varepsilon_1^2\xi_1+(\gamma_2'-\varepsilon_1\varepsilon_2)\xi_2-(\gamma_2\varepsilon_2+\varepsilon_1')\mathbf{B}\end{aligned} \tag{4.83}$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{B},\Phi(\xi_1)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} &= \langle\mathbf{B},\gamma_2\xi_2-\varepsilon_1\mathbf{B}\rangle(\varepsilon_1\xi_1+\varepsilon_2\xi_2)\\ &= -\varepsilon_1^2\xi_1-\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2\end{aligned} \tag{4.84}$$

olur ve

$$\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\Phi(\xi_1)\rangle\mathbf{B}=\langle\varepsilon_1\xi_1+\varepsilon_2\xi_2,\gamma_2\xi_2-\varepsilon_1\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}=\gamma_2\varepsilon_2\mathbf{B} \tag{4.85}$$

şeklinde bulunur. Buradan (4.83), (4.84) ve (4.85) eşitlikleri (4.82) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)-\langle\mathbf{B},\Phi(\xi_1)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\Phi(\xi_1)\rangle\mathbf{B}\\ &= -\varepsilon_1^2\xi_1+(\gamma_2'-\varepsilon_1\varepsilon_2)\xi_2-(\gamma_2\varepsilon_2+\varepsilon_1')\mathbf{B}+\varepsilon_1^2\xi_1+\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_2+\gamma_2\varepsilon_2\mathbf{B}\\ &= \gamma_2'\xi_2-\varepsilon_1'\mathbf{B}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\Phi(\xi_2)$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)=\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)-\langle\mathbf{B},\Phi(\xi_2)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\Phi(\xi_2)\rangle\mathbf{B} \tag{4.86}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan (3.14) eşitlikleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_2) &= -\gamma_2'\boldsymbol{\xi}_1-\gamma_2\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2'\mathbf{B}-\varepsilon_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\\ &= -\gamma_2'\boldsymbol{\xi}_1+\gamma_2\varepsilon_1\mathbf{B}-\varepsilon_2'\mathbf{B}-\varepsilon_1\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2^2\boldsymbol{\xi}_2\\ &= -(\gamma_2'+\varepsilon_1\varepsilon_2)\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2^2\boldsymbol{\xi}_2+(\gamma_2\varepsilon_1-\varepsilon_2')\mathbf{B}\end{aligned}\tag{4.87}$$

olur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{B},\Phi(\boldsymbol{\xi}_2)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} &= \langle\mathbf{B},-\gamma_2\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2\mathbf{B}\rangle(\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2)\\ &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2^2\boldsymbol{\xi}_2\end{aligned}\tag{4.88}$$

olur ve

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\Phi(\boldsymbol{\xi}_2)\rangle\mathbf{B} &= \langle\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2,-\gamma_2\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}\\ &= -\varepsilon_1\gamma_2\mathbf{B}\end{aligned}\tag{4.89}$$

şeklinde bulunur. Buradan (4.87), (4.88) ve (4.89) eşitlikleri (4.86) denkleminde yerlerine yazılır ve benzer işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_2) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_2)-\langle\mathbf{B},\Phi(\boldsymbol{\xi}_2)\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\Phi(\boldsymbol{\xi}_2)\rangle\mathbf{B}\\ &= -(\gamma_2'+\varepsilon_1\varepsilon_2)\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2^2\boldsymbol{\xi}_2+(\gamma_2\varepsilon_1-\varepsilon_2')\mathbf{B}+\varepsilon_1\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2^2\boldsymbol{\xi}_2-\varepsilon_1\gamma_2\mathbf{B}\\ &= -\gamma_2'\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2'\mathbf{B}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})=\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})-\langle\mathbf{B},\Phi(\mathbf{B})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\Phi(\mathbf{B})\rangle\mathbf{B}\tag{4.90}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan (3.14) eşitlikleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}) &= \varepsilon_1'\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_1\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2'\boldsymbol{\xi}_2+\varepsilon_2\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_2\\ &= \varepsilon_1'\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_1^2\mathbf{B}+\varepsilon_2'\boldsymbol{\xi}_2-\varepsilon_2^2\mathbf{B}\\ &= \varepsilon_1'\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2'\boldsymbol{\xi}_2-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\mathbf{B}\end{aligned}\tag{4.91}$$

olur. Diğer yandan,

$$\langle\mathbf{B},\Phi(\mathbf{B})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}=0\tag{4.92}$$

olur ve

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\Phi(\mathbf{B})\rangle\mathbf{B} &= \langle\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2,\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2\rangle\mathbf{B}\\ &= (\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\mathbf{B}\end{aligned}\tag{4.93}$$

şeklinde bulunur. Buradan (4.91), (4.92) ve (4.93) eşitlikleri (4.90) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}) &= \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})-\langle\mathbf{B},\Phi(\mathbf{B})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\Phi(\mathbf{B})\rangle\mathbf{B}\\ &= \varepsilon_1'\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2'\boldsymbol{\xi}_2-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\mathbf{B}+(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\mathbf{B}\\ &= \varepsilon_1'\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2'\boldsymbol{\xi}_2\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.22 α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{B}$ -manyetik eğri olsun. Buna göre $\Phi(\xi_1)$, $\Phi(\xi_2)$, $\Phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetleri, Fermi-Walker anlamında paralel ise sırasıyla;

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 = sabit, \\ &\varepsilon_2 = sabit, \\ &\gamma_2 = sabit \end{aligned} \tag{4.94}$$

dir.

Teorem 4.23 α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{B}$ -manyetik eğri olsun. Buna göre $\Phi(\xi_1)$, $\Phi(\xi_2)$, $\Phi(\mathbf{B})$ alanlarının Sasakian metrik yardımıyla enerjileri sırasıyla;

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(\xi_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1)^4 + (\gamma_2' - \varepsilon_1\varepsilon_2)^2 + (\gamma_2\varepsilon_2 + \varepsilon_1')^2)ds, \\ \varepsilon(\Phi(\xi_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\gamma_2' + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2)^4 + (\gamma_2\varepsilon_1 - \varepsilon_2')^2)ds, \\ \varepsilon(\Phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1')^2 + (\varepsilon_2')^2 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^2)ds \end{aligned} \tag{4.95}$$

dir.

İspat: α , 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre birim hızlı $\mathbf{B}$ -manyetik eğri olsun. O halde (3.26) enerji formülünde (4.83) eşitliği göz önüne alınırsa, $\Phi(\xi_1)$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\xi_1))$ enerjisi,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(\xi_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1), \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_1)\rangle)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle -\varepsilon_1^2\xi_1 + (\gamma_2' - \varepsilon_1\varepsilon_2)\xi_2 - (\gamma_2\varepsilon_2 + \varepsilon_1')\mathbf{B}, -\varepsilon_1^2\xi_1 + (\gamma_2' - \varepsilon_1\varepsilon_2)\xi_2 \\ &\quad - (\gamma_2\varepsilon_2 + \varepsilon_1')\mathbf{B}\rangle)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1)^4 + (\gamma_2' - \varepsilon_1\varepsilon_2)^2 + (\gamma_2\varepsilon_2 + \varepsilon_1')^2)ds \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde (4.87) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\xi_2)$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\xi_2))$ enerjisi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Phi(\xi_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2), \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)\rangle)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle -(\gamma_2' + \varepsilon_1\varepsilon_2)\xi_1 - \varepsilon_2^2\xi_2 + (\gamma_2\varepsilon_1 - \varepsilon_2')\mathbf{B}, -(\gamma_2' \\ &\quad + \varepsilon_1\varepsilon_2)\xi_1 - \varepsilon_2^2\xi_2 + (\gamma_2\varepsilon_1 - \varepsilon_2')\mathbf{B}\rangle)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\gamma_2' + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2)^4 + (\gamma_2\varepsilon_1 - \varepsilon_2')^2)ds \end{aligned}$$

O halde (4.91) eşitliği göz önüne alınırsa $\Phi(\mathbf{B})$ vektör alanı için $\varepsilon(\Phi(\mathbf{B}))$ enerjisi;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\Phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B}), \nabla_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \varepsilon_1'\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2'\boldsymbol{\xi}_2-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\mathbf{B}, \varepsilon_1'\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2'\boldsymbol{\xi}_2-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\mathbf{B}\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1')^2+(\varepsilon_2')^2+(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)^2)ds
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.24 $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_1)$, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_2)$, $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})$ alanlarının Sasakian metrik yardımıyla enerjileri sırasıyla;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1'\varepsilon_1)^2+(\gamma_2''-\varepsilon_1'\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1''+\gamma_2'\varepsilon_2)^2)ds, \\
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\gamma_2''+\varepsilon_2'\varepsilon_1)^2+(\varepsilon_2'\varepsilon_2)^2+(\gamma_2'\varepsilon_1-\varepsilon_2'')^2)ds, \qquad (4.96)\\
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1'')^2+(\varepsilon_2'')^2+(\varepsilon_1'\varepsilon_1+\varepsilon_2'\varepsilon_2)^2)ds
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: $\Phi(\boldsymbol{\xi}_1)$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevinin $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_1)=\gamma_2'\boldsymbol{\xi}_2-\varepsilon_1'\mathbf{B}$ olduğu göz önüne alınırsa ve (3.14) eşitlikleri (3.26) enerji formülünde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_1)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_1)), \nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_1))\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \nabla_{\mathbf{T}}(\gamma_2'\boldsymbol{\xi}_2-\varepsilon_1'\mathbf{B}), \nabla_{\mathbf{T}}(\gamma_2'\boldsymbol{\xi}_2-\varepsilon_1'\mathbf{B}))ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \gamma_2''\boldsymbol{\xi}_2+\gamma_2'\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_2-\varepsilon_1''\mathbf{B}-\varepsilon_1'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, \gamma_2''\boldsymbol{\xi}_2 \\
&\quad +\gamma_2'\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_2-\varepsilon_1''\mathbf{B}-\varepsilon_1'\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle \gamma_2''\boldsymbol{\xi}_2-\gamma_2'\varepsilon_2\mathbf{B}-\varepsilon_1''\mathbf{B}-\varepsilon_1'\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_1'\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2, \gamma_2''\boldsymbol{\xi}_2 \\
&\quad -\gamma_2'\varepsilon_2\mathbf{B}-\varepsilon_1''\mathbf{B}-\varepsilon_1'\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_1'\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle(-\varepsilon_1'\varepsilon_1)\boldsymbol{\xi}_1+(\gamma_2''-\varepsilon_1'\varepsilon_2)\boldsymbol{\xi}_2-(\varepsilon_1''+\gamma_2'\varepsilon_2)\mathbf{B}, (-\varepsilon_1'\varepsilon_1)\boldsymbol{\xi}_1 \\
&\quad +(\gamma_2''-\varepsilon_1'\varepsilon_2)\boldsymbol{\xi}_2-(\varepsilon_1''+\gamma_2'\varepsilon_2)\mathbf{B}\rangle)ds \\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1'\varepsilon_1)^2+(\gamma_2''-\varepsilon_1'\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1''+\gamma_2'\varepsilon_2)^2)ds
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\Phi(\boldsymbol{\xi}_2)$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevinin $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\boldsymbol{\xi}_2)=-\gamma_2'\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2'\mathbf{B}$ olduğu ve (3.14) denklemleri olduğu göz önüne alınarak;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\xi_2)) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\xi_2)),\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\xi_2))\rangle)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(-\gamma_2^{'}\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2^{'}\mathbf{B}),\nabla_{\mathbf{T}}(-\gamma_2^{'}\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2^{'}\mathbf{B}))ds\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle-\gamma_2^{''}\boldsymbol{\xi}_1-\gamma_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2^{''}\mathbf{B}-\varepsilon_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},-\gamma_2^{''}\boldsymbol{\xi}_1\\
&\quad -\gamma_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2^{''}\mathbf{B}-\varepsilon_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\rangle)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle-\gamma_2^{''}\boldsymbol{\xi}_1+\gamma_2^{'}\varepsilon_1\mathbf{B}-\varepsilon_2^{''}\mathbf{B}-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2,-\gamma_2^{''}\boldsymbol{\xi}_1\\
&\quad +\gamma_2^{'}\varepsilon_1\mathbf{B}-\varepsilon_2^{''}\mathbf{B}-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_1\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2\rangle)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle(-\gamma_2^{''}-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_1)\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2\boldsymbol{\xi}_2+(\gamma_2^{'}\varepsilon_1-\varepsilon_2^{''})\mathbf{B},(-\gamma_2^{''}\\
&\quad -\varepsilon_2^{'}\varepsilon_1)\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2\boldsymbol{\xi}_2\boldsymbol{\xi}_2+(\gamma_2^{'}\varepsilon_1-\varepsilon_2^{''})\mathbf{B}\rangle)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\gamma_2^{''}+\varepsilon_2^{'}\varepsilon_1)^2+(\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2)^2+(\gamma_2^{'}\varepsilon_1-\varepsilon_2^{''})^2)ds
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $\Phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi $\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})=\varepsilon_1^{'}\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2^{'}\boldsymbol{\xi}_2$ ve (3.14) denklemleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\Phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\mathbf{B})),\nabla_{\mathbf{T}}(\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\,\Phi(\mathbf{B}))\rangle)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\nabla_{\mathbf{T}}(\varepsilon_1^{'}\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2^{'}\boldsymbol{\xi}_2),\nabla_{\mathbf{T}}(\varepsilon_1^{'}\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2^{'}\boldsymbol{\xi}_2))ds\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\varepsilon_1^{''}\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_1^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2^{''}\boldsymbol{\xi}_2+\varepsilon_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_2,\varepsilon_1^{''}\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_1^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2^{''}\boldsymbol{\xi}_2+\varepsilon_2^{'}\nabla_{\mathbf{T}}\boldsymbol{\xi}_2\rangle)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\varepsilon_1^{''}\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_1^{'}\varepsilon_1\mathbf{B}+\varepsilon_2^{''}\boldsymbol{\xi}_2-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2\mathbf{B},\varepsilon_1^{''}\boldsymbol{\xi}_1-\varepsilon_1^{'}\varepsilon_1\mathbf{B}+\varepsilon_2^{''}\boldsymbol{\xi}_2-\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2\mathbf{B}\rangle)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+\langle\varepsilon_1^{''}\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2^{''}\boldsymbol{\xi}_2-(\varepsilon_1^{'}\varepsilon_1+\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2)\mathbf{B},\varepsilon_1^{''}\boldsymbol{\xi}_1+\varepsilon_2^{''}\boldsymbol{\xi}_2-(\varepsilon_1^{'}\varepsilon_1+\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2)\mathbf{B}\rangle)ds\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha (1+(\varepsilon_1^{''})^2+(\varepsilon_2^{''})^2+(\varepsilon_1^{'}\varepsilon_1+\varepsilon_2^{'}\varepsilon_2)^2)ds
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

5. SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle Bishop çatısına göre elde edilen $\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ manyetik eğrileri ile ve tip-2 Bishop çatısına göre elde edilen ξ_1, ξ_2 ve $\mathbf{B}$ manyetik eğrilerinin Fermi-Walker türevleri hesaplandı. Daha sonra türevleri hesaplanan manyetik eğrilerin enerjileri hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR

Barros, M., Cabrerizo, L., Fernandez, M., Romeo, A. 2007. Magnetic Vortex Filament Flows. *J Math Phys*, 48, 1-27.

Benn, I. M. and Tucker, R. W. 1989. Wave mechanics and inertial guidance, *The American Physical Society,* 39 (6), 1594-1601.

Bishop, R.L. 1975. There is more than one way to frame a curve, *The Amer. Math. Monthly*, 82(3), 246-251.

Bükcü, B., Karacan, M.K. 2008a. Special Bishop Motion and Bishop Darboux rotation axis of the space curve, *J. Dyn. Syst. Geom. Theor*., 6(1), 27-34.

Bükcü, B., Karacan, M.K. 2008b. On the Slant Helices According to Bishop Frame of the Timelike Curve in Lorentzian Space, *Tamkang J. Math*., 39(3), 255-262.

Bükcü, B., Karacan, M.K. 2009. The Slant Helices according to Bishop frame, *Int. J. Math. Comput. Sci*., 3(11), 67-70.

Büyükkütük, S., Öztürk, G. 2015. Constant Ratio Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space E^3, *Gen. Math. Notes*, 28(1), 81-91.

Chacon, P.M., Naveira, A.M. 2004. Corrected Energy of Distrubution on Riemannian Manifolds, *Osaka J. Math*, 41, 97-105.

Clain, C., Crasmareanu, M. 2016. Magnetic Curves in Three - Dimensional Quasi - Para - Sasakian Geometry, *Mediterr. J. Math*., 13, 2087-2097.

Druta-Romaniuc, S.L., Inoguchi, J.I., Munteanu, M.I., Nistor, A.I. 2013. Magnetic Curves in Sasakian Manifolds, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 22(3), 428-447.

Druta-Romaniuc, S.L., Munteanu, M.I. 2013. Killing Magnetic Curves in a Minkowski 3-Space, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 14, 383-396.

Hacısalihoğlu, H. H., 2002, Diferensiyel Geometri, *Fen Fakültesi yayınları*, Ankara, Cilt 1. 269.

Hacıfazlıoğlu, H., 2013, *"Manyetik Ayırma ile Zenginleştirme"*. İstanbul, İstanbul Üniversitesi, http://zikipedia.herokuapp.com/wiki/Manyetik_kutup [Erişim Tarihi: 20 Şubat 2019].

Inoguchi, J., Munteanu, M.I. 2013. Periodic Magnetic Curves in Eliptic Sasakian Space Forms, arXiv:1310.2899v1 [math.DG].

Jleli, M., Munteanu, M.I., Nistor, A.I. 2015. Magnetic Trajectories in an Almost Contact Metric Manifold R^{2N+1}, *Results in Math*., 67, 125-134.

Karakuş, F., Yaylı, Y. 2012. On the Fermi-Walker derivative and non-rotating frame, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 9(8), 1250066.

Kazan, A., Karadağ, H.B. 2017. Magnetic Curves According to Bishop Frame and Type-2 Bishop Frame in Euclidean 3-Space, *British J. Math*., 22(4), 1-18.

Körpinar, T., Demirkol, R.C. 2017. A New Apporoach on the Energy of Elastica and Non-Elastica in Minkowski Space, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, 49, 159-177.

Munteanu, M.I., Nistor, A.I. 2012. The Classification of Killing Magnetic Curves in $S^2 \times R$, Journal of Geometry and Physics, 62, 170-182.

Munteanu, M.I. 2013. Magnetic Curves in a Euclidean Space: One example, Several Applications, *Publications de L'Institut Mathematique*, 94(108), 141-150.

Özdemir, Z., Gök, İ., Yaylı,Y., Ekmekçi, F.N. 2015. Notes on Magnetic Curves in 3D semi-Riemannian Manifolds, *Turk J. Math*., 39, 412-426.

Sabuncuoğlu, A., 2001, Diferensiyel Geometri, *Nobel Yayınları*, Ankara, 522.

Synge, J.L., 1960, Relativity: The General Theory, *North Holland Pub. Co*., Amsterdam.

Yılmaz, S., Turgut, M. 2010. A new Version of Bishop Frame and an Application to Spherical İmages, *J. Math. Anal. Appl*., 371, 764-776.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Hatice ÖZDEMİR
Uyruğu	**:**	T. C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Merkez/MUŞ - 01.02.1988
Telefon	**:**	05064310088
Faks	**:**	
e-mail	**:**	nehirhatice49@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**BitirmeYılı**
Lise	:	Muş Rekabet Kurumu Lisesi	**2005**
Üniversite	:	Elazığ Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	**2011**
YüksekLisans	:	Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	**2020**

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2013-2020	MEB	Matematik Öğretmenliği