



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PROJEKTİF DÜZLEMDE BEZİER EĞRİLERİ

Mücahit ŞİMŞEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Kasım-2024
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PROJEKTİF DÜZLEMDE BEZIER EĞRİLERİ

Mücahit ŞİMŞEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhsin İNCESU

Jüri Üyesi: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Muhsin İNCESU

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Şükrü İLGÜN

Kasım-2024
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ
PROJEKTİF DÜZLEMDE BEZIER EĞRİLERİ

Mücahit ŞİMŞEK

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhsin İNCESU

Projektif düzlem elde etmenin bir yöntemi olarak verilen bir Afin düzleme ideal nokta adı verilen sonsuzda noktalar ilave edilmesi ile bir afin düzlemin kapanışının elde edilmesi yöntemidir. Buna göre her doğruya sonsuzda bir nokta karşılık getirilmektedir. Bu tez çalışmasında bir afin düzlemin kapanışı olarak alınan bir kümede tanımlanacak Bezier eğrileri incelenmiş, bu eğrilerin reel projektif düzlemde karşılıkları üzerinde durulmuştur. Burada sıklıkla kullanılan lineer ve kuadratik Bezier eğrileri dikkate alınmıştır.

2024,25 Sayfa

Anahtar Kelimeler; Bezier Eğrisi, afin düzlem, projektif düzlem, reel projektif düzlem

ABSTRACT
MASTER THESIS
THE BEZIER CURVES IN PROJEKTIVE PLANE

Mücahit ŞİMŞEK

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhsin İNCESU

As a method of obtaining a projective plane, it is a method of obtaining the closure of an affine plane by adding points at infinity called ideal points to a given affine plane. Accordingly, a point at infinity corresponds to each line. In this thesis, Bezier curves to be defined in a set taken as the closure of an affine plane are examined, and the counterparts of these curves in the real projective plane are emphasized. Here, frequently used linear and quadratic Bezier curves are considered.

2024, 25 Pages

Keywords; Bezier Curve, affine plane, projective plane, real projective plane

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince tez çalışmamın her aşamasında akademik birikimini ve her türlü desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, fikirleriyle çalışmalarına yol gösteren çok değerli danışmanım Doç. Dr. Muhsin İNCESU hocama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez savunması sınavında ve sonrasında gösterdikleri anlayış, ilgi ve yönlendirmeden dolayı jüri üyeleri hocalarım da ayrı ayrı teşekkürlerimi sunarım.

Mücahit ŞİMŞEK
MUŞ-2024



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
1.GİRİŞ ve KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	2
2.1. Bezier Eğrileri.....	2
2.1.1. Genel Bezier eğrileri.....	2
2.1.2. Bezier Eğrilerinin özellikleri.....	3
2.1.3. Kontrol poligonu.....	3
2.1.4. Konveks Hullar (convex hull).....	4
2.2. Afin ve Projektif Düzlemler.....	4
2.2.1. Afin Uzay ve Afin Düzlem.....	4
2.2.2. İdeal Noktalar ve Projektif Düzlemin İnşası.....	5
2.2.3. Reel Projektif Düzlem.....	8
3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA	11
3.1. Projektif Düzlemde Bezier Eğrileri.....	11
3.2. Linear Bezier Eğrileri.....	11
3.2.1. İki Afin Kontrol Noktalı Linear Bezier Eğrileri.....	11
3.2.2. Bir Afin Bir İdeal Kontrol Noktalı Linear Bezier Eğrileri.....	12
3.2.3. İki İdeal Kontrol Noktalı Linear Bezier Eğrileri.....	13
3.3. Kuadratik Bezier Eğrileri.....	14
3.3.1. Üç Afin Kontrol Noktalı Kuadratik Bezier Eğrileri.....	14
3.3.2. İki Afin Bir İdeal Kontrol Noktalı Kuadratik Bezier Eğrileri.....	15
3.3.3. Bir Afin İki İdeal Kontrol Noktalı Kuadratik Bezier Eğrileri.....	18
3.3.4. Üç İdeal Kontrol Noktalı Kuadratik Bezier Eğrileri.....	20
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	22
4.1. Sonuçlar.....	22
4.2. Öneriler.....	22
KAYNAKLAR	24
ÖZGEÇMİŞ	26

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

- $B(t)$: Afin uzayın kapanışı S de alınan Bézier Eğrisi
 $\bar{B}(t)$: Reel Projektif Düzlemde alınan dayanak Bezier eğrisi
 R^3 : Reel Vektör uzayı
 $X(t, v)$: Reel Projektif Uzaydaki Bezier Eğrisi
 $[\ell]$: ℓ doğrusuna sonsuzda eklenen İdeal Nokta
 ℓ : Afin doğru
 P_i : Afin uzayın kapanışı S de alınan Kontrol Noktası
 L_i : Reel Projektif Düzlemde P_i noktasının karşılığı olan doğru
 \bar{P}_i : Reel Projektif Düzlemde alınan dayanak Bezier eğrisinin kontrol noktası

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.	Kontrol noktaları $b_0 = (1,-2,0)$, $b_1 = (2,0,1)$, $b_2 = (3,1,1)$, $b_3 = (-1,2,-1)$ olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu	3
Şekil 2.	Doğru demetleri	5
Şekil 3.	Afin düzleme İdeal noktaların eklenmesi	6
Şekil 4.	P nin iç nokta, Q nun ideal nokta olması durumunda P ve Q nun aynı doğru üzerinde yer alması.....	7
Şekil 5.	P,Q sıradan iki afin nokta $R^* = [\ell]$ olduğunda her doğru üç nokta içerir.	8
Şekil 6.	Reel Projektif Düzlem	10
Şekil 7.	P_0 ve P_1 afin nokta olması durumunda lineer Bezier Eğrisi.....	12
Şekil 8.	P_0 afin nokta, P_1 ideal nokta olması durumunda lineer Bezier Eğrisi.....	12
Şekil 9.	P_0 ve P_1 ideal nokta olması durumunda lineer Bezier Eğrisi.....	13
Şekil 10.	Her üç kontrol noktası da afin nokta olan kuadratik Bezier eğrisi	14
Şekil 11.	İdeal noktası uç kontrol nokta olan kuadratik Bezier eğrileri.....	15
Şekil 12.	İdeal noktanın iç kontrol noktası olduğu kuadratik Bezier eğrisi	17
Şekil 13.	P_0 afin P_1 ve P_2 İdeal nokta olan kuadratik Bezier eğrileri.....	19
Şekil 14.	P_1 afin nokta olan kuadratik Bezier Eğrisi	20
Şekil 15.	P_0 , P_1 ve P_2 ideal nokta olması durumunda kuadratik Bezier Eğrisi.....	21

1. GİRİŞ ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bilgisayar destekli tasarımların (CAD) temelini parametrik eğriler ve parametrik yüzeyler oluşturmaktadır. Bilgisayar destekli geometrik tasarımda (CAGD) şüphesiz ki en önemli buluşlar, Bezier Eğrileri ve yüzeyleri, Coons yamaları (patch) ve daha sonra da B- spline metodlarıdır. Bezier eğrileri ve yüzeyleri ilk defa 1958-1960 yıllarında otomotiv sektöründe, Citroen ve Renault firmalarında mühendis olarak görev yapan Paul de Casteljaou ve Pierre Bezier tarafından birbirlerinden bağımsız olarak geliştirilmiştir. De Casteljaou, P. Bezier'den az bir zaman önce geliştirmiş, ancak yaptığı çalışmaları herhangi bir yerde yayınlamamıştır. Böylece, polinom eğri ve yüzeylerin Bernstein formunda ifadesiyle tamamen gelişen Bezier eğri ve yüzeyleri teorisi, P.Bezier'in ismiyle anılır hale gelmiştir. Bezier eğri ve yüzeyleri otomotiv sanayiinden uçak sanayiine kadar çok geniş bir yelpazede kullanılmaktadır (İncesu,2003).

Bilgisayar destekli geometrik tasarım, 1974 yılında Amerika'da Utah Üniversitesinde yapılan konferansın ardından, Barnhill ve Riesenfeld' in önderliğinde kendi içinde bir disiplin içine girmiştir. (Barnhill ve Riesenfeld ,1974; İncesu, 2003)

Son zamanlarda kullanılan CAD sistemleri içinde en kararlı sayısal çözümleri veren eğrilerin Bezier ve rasyonel Bezier eğrileri oldukları da Farouki ve Rajan tarafından gösterilmiştir (Farouki ve Rajan, 1987).

Bezier eğrileri ile ilgili pek çok çalışmalar yapılmıştır. Bunlara örnek olarak G. Farin (1990), R. Farouki (1985), J.Hoschek (1985), H. Potmann (1995), Incesu (2003, 2004), Samancı H., Çelik S, Incesu M (2015), Samancı H (2018, 2021), Samancı H ve İncesu M (2020) çalışmaları verilebilir.

Projektif düzlem elde etmenin bir yöntemi olarak verilen bir Afin düzleme ideal nokta adı verilen sonsuzda noktalar ilave edilmesi ile bir afin düzlemin kapanışının elde edilmesi yöntemidir. Buna göre her doğruya sonsuzda bir nokta karşılık getirilmektedir. Bu tez çalışmasında bir afin düzlemin kapanışı olarak alınan bir kümede tanımlanacak Bezier eğrileri incelenmiş, bu eğrilerin reel projektif düzlemde karşılıkları üzerinde durulmuştur. Burada sıklıkla kullanılan lineer ve kuadratik Bezier eğrileri dikkate alınmıştır.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1 Bezier Eğrileri

Bezier eğrileri, özellikle mekanikte çok önemli bir yeri olan polinom eğrilerdir. Bilgisayar destekli tasarımda (CAD) ve bilgisayar grafiklerinde kullanılan eğri ve yüzeylerin en önemli gösterimlerinden biri de Bezier formlarıdır. n. dereceden bir Bezier eğrisi; kontrol noktaları adı verilen, n +1 tane nokta ile belirlenen ve n. dereceden Bernstein taban fonksiyonları ile lineer şekilde ifade edilen polinom eğri parçalarıdır. ve

2.1.1 Genel bezier eğrileri

Tanım 1: Genel Bezier eğrisi, Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen ve başlangıç noktası b_0 , bitim noktası b_n olan n. dereceden bir polinom eğridir. Genel Bezier eğrisi, vektörel formda,

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \quad t \in [0,1] \quad (1)$$

olarak tanımlanır. Burada $B_i^n(t)$ fonksiyonları

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2)$$

biçimde verilen Bernstein taban fonksiyonları (ya da Bernstein taban polinomları) dır.

$\frac{n!}{i!(n-i)!}$ ifadeleri de Binom katsayılarıdır ve $\binom{n}{i}$ ya da ${}^n C_i$ ile gösterilir.

Teorem 1: Bernstein taban polinomları aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$1) \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, t \in [0,1] \quad (\text{Toplamın birim olması}) \quad (3)$$

$$2) B_i^n(t) \geq 0, t \in [0,1] \quad (\text{Pozitiflik}) \quad (4)$$

$$3) B_{n-i}^n(t) = B_i^n(1-t), i = 0,1,\dots,n \quad (\text{Simetri}) \quad (5)$$

$$4) B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + t B_{i-1}^{n-1}(t) \quad (\text{indirgeme}) \quad (6)$$

(İncesu,2003)

2.1.2 Bezier Eğrilerinin özellikleri

Teorem 2: Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir $B = B(t)$ Bezier eğrisi aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$1) B(0) = b_0, \quad B(1) = b_n \quad (\text{Son nokta interpolasyon özelliği}) \quad (7)$$

$$2) B'(0) = \frac{dB}{dt} \Big|_{t=0} = n(b_1 - b_0) \quad (\text{Son nokta teğet özelliği})$$

$$B'(1) = \frac{dB}{dt} \Big|_{t=1} = n(b_n - b_{n-1}) \quad (8)$$

$$3) \forall t \in [0,1] \text{ için, } B(t) \in CH(\{b_0, b_1, \dots, b_n\}) \quad (9)$$

(Bezier eğrisinin tamamı, kontrol noktalarının konvex alanı içinde kalmaktadır.)

4) F , bir Afın dönüşümü olmak üzere,

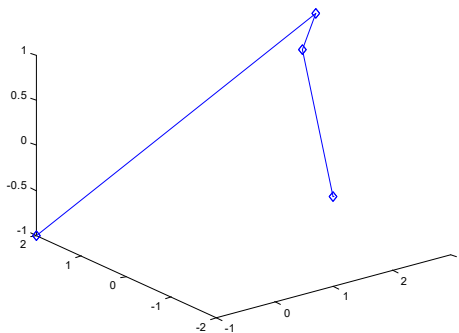
$$F(B(t)) = F\left(\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^n F(b_i) B_i^n(t) \quad (10)$$

dir. (Kontrol noktaları $b_i, i = 0, 1, \dots, n$ olan Bezier eğrisinin bir Afın dönüşümü altındaki görüntüsü, kontrol noktaları $F(b_i), i = 0, 1, \dots, n$ olan Bezier eğrisidir.)

2.1.3 Kontrol poligonu

Tanım 2: Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir Bezier eğrisinin kontrol noktalarını sıra korumak kaydıyla birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu geometrik şekle Bezier eğrisinin kontrol poligonu adı verilir.

Örnek 1: Kontrol noktaları $b_0 = (1, -2, 0), b_1 = (2, 0, 1), b_2 = (3, 1, 1), b_3 = (-1, 2, -1)$ olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu Şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 1. Kontrol noktaları $b_0 = (1, -2, 0), b_1 = (2, 0, 1), b_2 = (3, 1, 1), b_3 = (-1, 2, -1)$ olan bezier eğrisinin kontrol poligonu

2.1.4 Konveks hullar (convex hull)

Tanım 3: $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^3$ sonlu noktalar sisteminin konveks hullunun vektörel ifadesi:

$$CH(X) = \left\{ a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n : x_i \in X, \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n \right\} \quad (11)$$

olarak tanımlanır. Yani uzayda x_0, x_1, \dots, x_n noktalarını birleştirmek suretiyle elde edilen en geniş bölgeye $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sisteminin konveks hullu denir. (Marsh, 1999)

2.2 Afin ve Projektif Düzlemler

2.2.1 Afin Uzay ve Afin Düzlem

Tanım 4: $A \neq \emptyset$ bir küme, V ise K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A, V ile birleştirilmiş bir afin uzaydır denir:

- A1) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ dir.
 A2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ vardır.
 (Hacısalıhoğlu, 1983)

Tanım 5: A afin uzayda $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $n+1$ lisi verilsin. Eğer A ya karşılık gelen vektör uzayında $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ vektör n lisi bir çatı oluşturuyorsa A daki $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $n+1$ lisine A nın bir afin çatısı denir. (Hacısalıhoğlu, 1983)

Önerme 1: A bir afin uzay ve V de bu afin uzaya birleşen vektör uzayı olsun. Bu takdirde A nın boyutu V nin boyutuna eşittir.

Şimdi boyutu 2 olan bir afin uzay alalım. Bu afin uzaya bir Afin düzlem adını vereceğiz.

Önerme 2: A bir afin düzlem olsun. Bu takdirde A şu özellikleri sağlar:

A-1 $P, Q \in A$ iki farklı nokta olsun A da P ve Q yu içeren tek ve bir tek ℓ doğrusu vardır

A-2 Bir $\ell \subset A$ doğrusu ve $P \in A (P \notin \ell)$ verildiğinde ℓ -ye paralel ve P -den geçen tek ve bir tek m doğrusu vardır.

A-3 Doğrudaş olmayan en az üç nokta vardır. (P_1, P_2, P_3 noktalarına doğrudaş denir eğer hepsi aynı doğru üzerinde ise.) (Hartshorne, 1967)

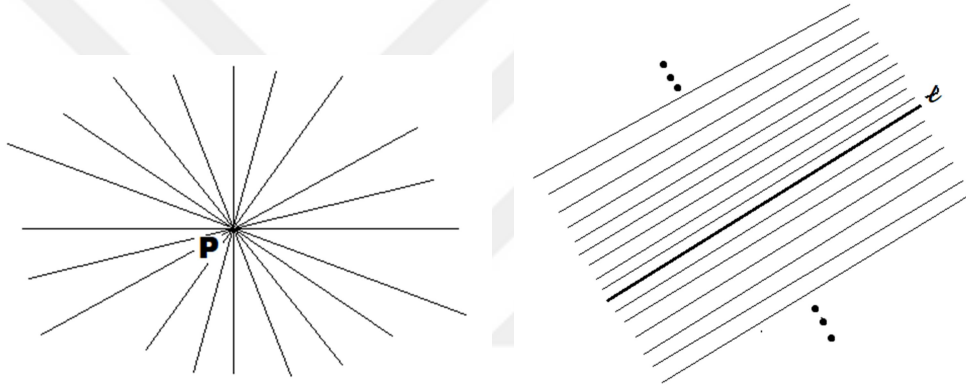
Sonuç 1: Bir afin düzlem en az 4 nokta içerir. (Hartshorne, 1967)

Tanım 6: A afin düzlemde ℓ ve m iki doğru olsun. Eğer $\ell = m$ veya $\ell \cap m = \emptyset$ ise ℓ ve m doğrularına **paralel** iki doğru denir. (Hartshorne, 1967)

Önerme 3: Afin düzlemde doğruların Paralellik bağıntısı bir **denklik** bağıntısıdır. (Hartshorne, 1967).

Önerme 4: Afin düzlemde Paralel olmayan iki doğrunun ancak bir tek ortak noktası vardır. (Hartshorne, 1967).

Tanım 7: Düzlemde doğruların bir demeti demek, bir P noktasından geçen doğrular ya da verilen bir ℓ doğrusuna paralel olan tüm doğrular demektir. (Hartshorne, 1967)



a) P noktasından geçen doğruların demeti

b) verilen bir ℓ doğrusuna paralel doğruların denklik sınıfı olan $[\ell]$ doğru demeti

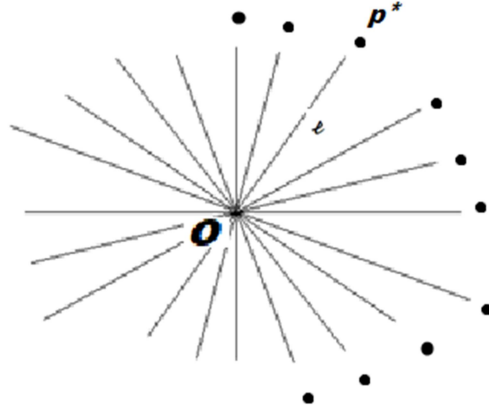
Şekil 2. Doğru demetleri

2.2.2 İdeal Noktalar ve Projektif Düzlemin İnşası

A afin düzlem verilsin. Şimdi bu verilen afin düzleme sonsuzda bir takım noktalar ilave edilerek afin düzlemin bir anlamda kapanışıyla projektif düzlemi elde edeceğiz.

A'nın her bir ℓ doğrusu için ℓ doğrusuna paralel olan doğru demeti bir denklik sınıfı olacağından bu demeti $[\ell]$ ile göstereceğiz. Her bir $[\ell]$ demetine, ℓ yönünde 'ideal nokta' yada 'sonsuzda bir nokta' diye adlandıracağımız bir nokta ilave edeceğiz ve bu noktayı P^* , Q^* , ... gibi sembollerle göstereceğiz. $P^* = [\ell]$ biçiminde yazacağız. Yani her bir doğruya bir ideal nokta ilave ediliyor ancak tüm birbirine paralel olan doğrulara tek bir ideal nokta ilave edilmektedir. Her bir $[\ell]$ demetini yani denklik

sınıfını temsilen orjinden geçen ℓ doğrusunu alır ve bu demete sonsuzda ilave edilen ideal noktayı da ℓ doğrusunun sonuna ekleyecek olursak, tüm ideal nokta ilavelerini aşağıdaki gibi sembolik olarak gösterebiliriz:



Şekil 3. Afin düzleme İdeal noktaların eklenmesi

Böylece A nın doğrularına ideal noktalar ilave edilerek A nın kapanışını elde etmiş olacağız. Bu yeni kümeyi S ile gösterirsek, S nin noktaları A nın noktaları ile A nın tüm ideal noktalarının birleşimidir. Böylece,

S deki her bir L doğrusu ,

- A nın bir ℓ doğrusu ile bu ℓ doğrusunun ideal noktası $[\ell]=P^*$ in toplamıdır. Ya da
- A nın tüm ideal noktalarından oluşan ‘Sonsuzluk doğrusu ’ nu içerir.

(Hartshorne, 1967)

Tanım 8: (Projektif Düzlem):

S noktalardan oluşan bir küme ve onun doğrulardan oluşan alt kümeleri Şu 4 axiomu sağlarsa S -ye projektif düzlem denir:

- S -nin iki farklı P ve Q noktaları ancak ve ancak bir tek doğru üzerinde ise.
- L_1 ve L_2 herhangi iki doğru , en az bir noktada kesişiyorsa .
- En az üç doğrudaş olmayan nokta varsa.
- Her doğru en az üç nokta içeriyorsa.

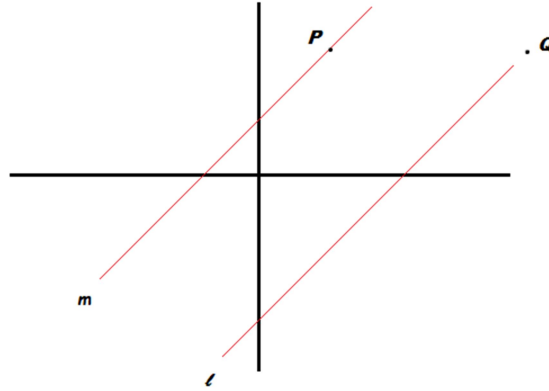
(Hartshorne, 1967)

Önerme 5: A afin düzlemin kapanışı S bir projektif düzlemdir .

İspat: P1-P4 axiomları sağladığını göstermeliyiz

P1) $P, Q \in S$ olsun.

- i) P ve Q A-nın sıradan elemanları olsun \Rightarrow P ve Q ancak bir doğru üzerinde bulunabilir. (yani iki noktadan bir doğru geçeceğinden ve aynı anda ikinci doğru üzerinde bulunmazlar.) P ve Q iç nokta olduğundan sonsuzluktaki doğru üzerinde de olamaz.
- ii) P, A –nın bir iç noktası $Q = [\ell]$ olsun Bu durumda $\exists m$ doğrusu öyle ki, $P \in m$. ve $m \parallel \ell$ ($m \in [\ell]$) dir. (A-2). Böylece Q noktası m doğrusunun S-ye genişlemesi üzerinde yer alır . (Paralel doğrulara tek ideal nokta karşılık geldiği için P ve Q aynı doğru üzerinde yer alır.)



Şekil 4. P nin iç nokta, Q nun ideal nokta olması durumunda P ve Q nun aynı doğru üzerinde yer alması

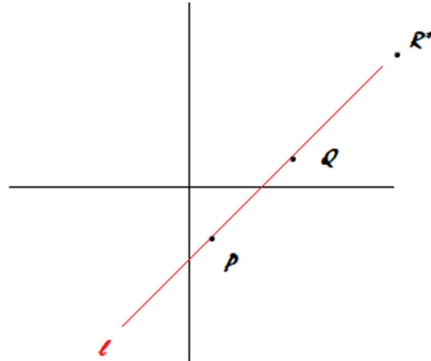
- iii) P ve Q ikiside ideal nokta olsun . Dolayısıyla P ve Q sonsuzluktaki doğru üzerinde olacaktır.

P2:) L ve M , S de iki doğru olsun.

- i) Eğer $L = \ell$ ve $M = m$ sıradan afın doğru ise ve $\ell \nparallel m$ ise bu durumda zaten ikisi A-nın en az bir noktasında kesişir. ($\ell = m$ ise tüm noktaları ortaktır.) Eğer $\ell \parallel m \Rightarrow P^*$ ideal noktası $P^* = [\ell] = [m]$ olacağından bu nokta L ve M doğrularının arakesit noktasıdır.
- ii) $L = \ell$ sıradan afın doğru, M sonsuzluk doğrusu olsun Bu durumda $P^* = [\ell]$ noktası hem L ve hem de M üzerindedir.
- iii) L ve M ikisi de sonsuzluk doğrusu olsun. S de sonsuzluk doğrusu tek olacağından $L = M$ olur.

P3:) A-3 axiomundan çok rahat görülebilir. Çünkü P,Q,R A-nın sıradan iç noktası ve doğrudan olmayan üç noktası olsun. Bu durumda bu üç nokta sonsuzluk doğrusunun da üzerinde değildir. Çünkü hiç biri ideal nokta değildir. Böylece P,Q,R aynı zaman da S nin doğrudan olmayan üç noktasıdır.

P4:) A-nın herhangi bir sıradan doğrusu en az iki nokta içerir. Böyle bir doğruya bir de sonsuzda bir ideal nokta ilave edildiğinde üç nokta aynı doğru üzerinde olur. $P, Q \in \ell$ ise $P, Q, R^* \in \ell \cup [\ell] = L$



Şekil 5. P,Q sıradan iki afin nokta $R^* = [\ell]$ olduğunda her doğru üç nokta içerir.

2.2.3 Reel Projektif Düzlem

R^3 sıradan üç boyutlu Öklid uzayı olsun. \tilde{L} , R^3 ün O başlangıç noktasından geçen tüm doğrularının kümesi olsun. \tilde{L} nin bir noktası, R^3 ün O başlangıç noktasından geçen bir doğrusu olarak tanımlanır. Aynı şekilde \tilde{L} nin bir doğrusu olarak da, R^3 ün O başlangıç noktasından geçen doğrularının bir koleksiyonu olarak tanımlanırsa \tilde{L} bir projektif düzlem oluşturur. Bu kümeyi homojen koordinatlar yardımıyla aşağıdaki gibi analitik olarak ifade edebiliriz:

\tilde{L} nin bir noktası O başlangıç noktasından geçen doğru olduğundan bu noktayı P ile gösterirsek P noktası bir ℓ doğrusudur. Her ℓ doğrusunu, doğru üzerinde (0,0,0) dan farklı bir (x_1, x_2, x_3) noktası seçerek göstereceğiz. Buradaki (x_1, x_2, x_3) noktaları P noktasının homojen koordinatlarını ifade edecektir. ℓ üzerindeki başka bir nokta $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ dir. ($\lambda \in R, \lambda \neq 0$). Böylece \tilde{L} , (x_1, x_2, x_3) şeklindeki üçlülerden oluşur öyle ki, x_1, x_2, x_3 lerin hepsi birden aynı anda sıfır olmaz ve herhangi iki üçlü $P = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Q = (x_1', x_2', x_3')$ aynı noktayı ifade eder ancak ve ancak P ve Q lineer bağımlı ise ya da $\exists \lambda \in R$ öyleki $x_i' = \lambda x_i$ dir. ($i = 1, 2, 3$).

R^3 te O başlangıç noktasından geçen bir düzlemin denklemi

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

dir ve a_i lerin hepsi birden sıfır olmaz. Görülecektir ki bu denklem \tilde{L} nin bir doğrusunun denklemidir.

Tanım 9: S ve S' iki projektif düzlem olsun. Eğer bir $T: S \rightarrow S'$ birebir dönüşümü doğrudan noktaları yine doğrudan noktalara resmedecek şekilde bulunabilirse S ve S' projektif düzlemlerine **İzomorfik** denir. (Hartshorne, 1967)

Önerme 6: Homojen koordinatlar yardımıyla yukarıdaki gibi tanımlanan \tilde{L} projektif düzlemi, Öklid geometride Sıradan afin düzlemin kapanışı olarak elde edilen S Projektif düzlemine izomorfiktir. (Hartshorne, 1967)

İspat: Bir tarafta, noktaları homojen koordinatlarda (x_1, x_2, x_3) ler ($x_i \in \mathbb{R}$ ve hepsi birden sıfır değil) olarak verilen S projektif düzlemi ve diğer tarafta da , Kartezyen koordinatları (x, y) olarak verilen A afin düzleminin kapanışı olarak tanımlanan S' projektif düzlemlerini alalım. Böylece S' nin noktaları A -nın (x, y) noktaları ile ideal noktaların birleşiminden oluşmaktadır . Şimdi paralel doğruların doğru demeti tek türlü olarak belirlidir . (doğrunun m eğimi ile) ve bu eğim herhangi bir reel sayı yada ∞ olabilir . Böylece ideal noktalar m koordinatıyla belirlidir .

Şimdi $T: S \rightarrow S'$ izomorfizmanını tanımlayalım. $P(x_1, x_2, x_3) \in S$ olsun.

i) Eğer $x_3 \neq 0$ ise $T(P)$ - yi A -nın bir noktası olarak tanımlayalım .

$$T(p) = (x, y) ; x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$$

Belirtelim ki x ve y tek türlü belirlidir. Çünkü (x_1, x_2, x_3) yerine $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ alınırsa x ve y değişmez. Yine belirtelim ki A -nın her noktası bu yolla belirlenebilir. Aslında (x, y) koordinatlarıyla verilen nokta , S -nin $(x, y, 1)$ homojen koordinatı ile belirli olan resmidir .

ii) $x_3 = 0$ olsun. Bu durumda $T(p)$, S' -nin ideal noktası olarak (eğimi $m = \frac{x_2}{x_1}$ ile belirli) tanımlarız Belirtelim ki bu mantıklıdır. Çünkü x_1 ve x_2 aynı anda sıfır olamaz. Yine $(x_1, x_2, 0)$ yerine $(\lambda x_1, \lambda x_2, 0)$ alsak da m değişmez. Böylece m -nin her bir değeri oluşur :

Yani eğer $m \neq \infty$ durumunda $T(1, m, 0)$ alabiliriz eğer $m = \infty$ ise bu durumda da $T(0, 1, 0)$ alınabilir. Böylece T , S den S' ne birebir bir dönüşüm olur . Ayrıca kontrol etmeliyiz ki T , doğrudan noktaları yine doğrudan noktalara resmediyor mu ? Bunun için S -de bir L doğrusu alalım. Denklemi

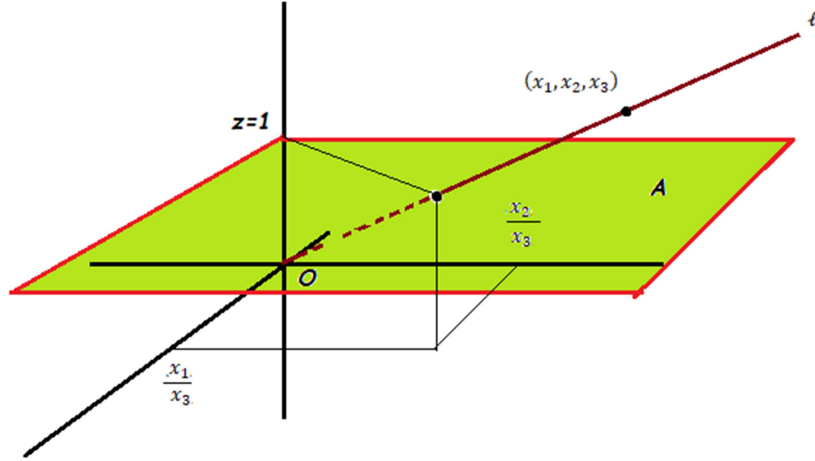
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

olsun.

i) Varsayalım ki a_1 ve a_2 aynı anda sıfır olmasın Bu durumda $x_3 = 0$ sağlayan noktalar için $x_1 = \lambda a_2$ ve $x_2 = -\lambda a_1$ alınırsa $(x_1, x_2, 0)$, L doğrusu üzerinde

olur ve ideal noktalar $m = -\frac{a_1}{a_2}$ ile verilir. Aslında bu S' de sonsuz doğrularının üzerinde bulunur.

- ii) Eğer $a_1 = a_2 = 0$ ise L nin denklemine göre $x_3 = 0$ dır. Bu da S nin noktalarında $x_3 = 0$ demek olur ki bu noktanın görüntüsü S' nün bir ideal noktasıdır. Bu da yine doğru üzerinde olur. (Hartshorne, 1967)



Şekil 6. Reel Projektif Düzlem

3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

3.1 Projektif Düzlemde Bezier Eğrileri

Bir A afin düzlemin kapanışı olarak alınan S projektif düzlemini göz önüne alalım. Bu bölümde S projektif düzleminde bir Bezier eğrisi tanıtılacak kontrol noktalarının afin nokta ya da sonsuzdaki ideal nokta olup olmamasına göre bu eğriler irdelenecek ve reel projektif düzlemde nasıl bir karşılığı oldukları üzerinde durulacaktır.

3.2 Lineer Bezier Eğrisi

Kontrol noktaları P_0 ve P_1 olan lineer Bezier eğrisini göz önüne alalım. P_0 ve P_1 noktalarını A afin düzlemin kapanışı olarak ifade ettiğimiz S kümesinden alalım. Burada 3 durum sözkonusu olabilir:

3.2.1 İki Afin Kontrol Noktalı Lineer Bezier Eğrisi

i) P_0 ve P_1 A nın iç noktası ya da afin noktalar olsunlar. Bu durumda lineer Bezier eğrisinin $t \in [0,1]$ olmak üzere vektörel ifadesi

$$B(t) = P_0 + t\overrightarrow{P_0P_1} \quad (12)$$

olur. Parametrik karşılığı da klasik olarak

$$B(t) = (1-t)P_0 + tP_1 \quad (13)$$

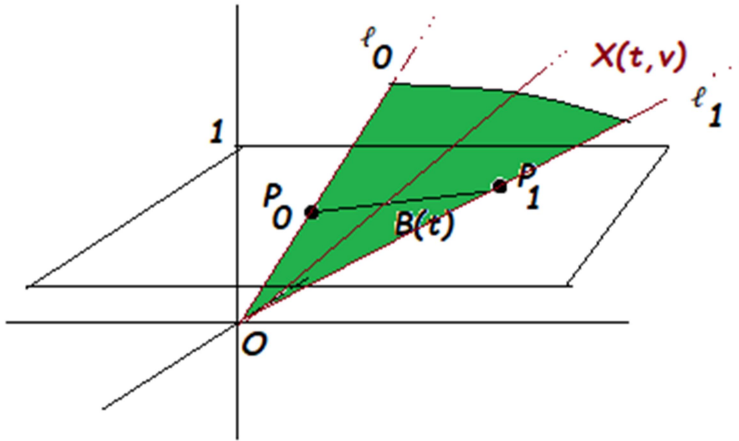
yazılır. Şimdi P_0 ve P_1 noktalarının reel projektif düzlemde karşılıkları sırasıyla ℓ_0 ve ℓ_1 doğruları olarak alınır ve bu doğrular üzerindeki herhangi bir nokta da doğruların temsilcisi olarak alınabileceğinden A afin düzlemdeki $P_i = (P_{i1}, P_{i2})$ noktalarının homojen koordinatı olan $\overline{P}_i = (P_{i1}, P_{i2}, 1)$ noktaları doğruların temsilcisi olarak alınır. $B(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı $\mathbf{B}(t)$ Bezier eğrisi

$$\overline{B}(t) = (1-t)\overline{P}_0 + t\overline{P}_1 \quad (14)$$

dir. Buradaki \overline{P}_0 ve \overline{P}_1 noktaları ℓ_0 ve ℓ_1 doğrularının birer temsilcisidir. O halde $B(t)$ lineer Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı $X(t, v)$ düzlemsel bir koni yüzeyidir. Bu yüzeyin \mathbb{R}^3 teki denklemi ise

$$X(t, v) = v\overline{B}(t) = v[(1-t)\overline{P}_0 + t\overline{P}_1] \quad (15)$$

biçimindedir. (Şekil 7)



Şekil 7. P_0 ve P_1 afin nokta olması durumunda lineer Bezier Eğrisi

3.2.2 Bir Afin, Bir İdeal Kontrol Noktalı Lineer Bezier Eğrisi

P_0 , A nın iç noktası ya da afin nokta; P_1 ise bir ideal nokta olsun. Bu durumda bir ℓ afin doğrusu vardır ki $P_1 = [\ell]$ dir. Bu halde lineer Bezier eğrisi P_0 dan başlayan ve ℓ ye paralel olan ışıdır. Yani, ℓ doğrusunun doğrultmanı \vec{u} ise $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere lineer Bezier eğrisinin vektörel ifadesi

$$B(t) = P_0 + t\vec{u}$$

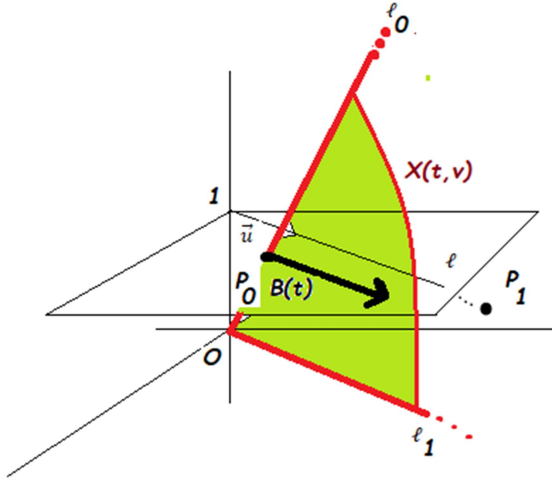
olur. P_0 ve P_1 noktalarının reel projektif düzlemde karşılıklarını sırasıyla L_0 ve L_1 doğruları olarak alınırsa ve bu doğrular üzerindeki herhangi bir nokta da doğruların temsilcisi olarak alınabileceğinden A afin düzlemdeki $P_0 = (P_{01}, P_{02})$ noktasının homojen koordinatı olan $\bar{P}_0 = (P_{01}, P_{02}, 1)$ noktası L_0 doğrusunun temsilcisi olarak alınır; P_1 de bir ideal nokta olduğundan ℓ doğrusunun eğimi $m = \infty$ ise P_1 in reel projektif düzlemdeki karşılığını $\bar{P}_1 = (0, 1, 0)$ noktasından geçen orjin çıkışlı doğru olarak ve temsilcisini de olarak \bar{P}_1 noktası olarak alırsak; eğer ℓ doğrusunun eğimi m , ∞ dan farklı ise P_1 in reel projektif düzlemdeki karşılığını $\bar{P}_1 = (1, m, 0)$ noktasından geçen orjin çıkışlı doğru olarak ve temsilcisini de \bar{P}_1 noktası olarak alırsak; $B(t)$ lineer Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı $X(t, v)$ düzlemsel bir koni yüzeyidir. Bu yüzeyin \mathbb{R}^3 teki denklemi ise

$$X(t, v) = v\bar{B}(t) = v[(1-t)\bar{P}_0 + t\bar{P}_1] \quad (16)$$

biçimindedir. Burada

$$\bar{B}(t) = (1-t)\bar{P}_0 + t\bar{P}_1 \quad (17)$$

dir. Bu ise $X(t, v)$ düzlemsel bir koni yüzeyinin dayanak eğrisi olan bir Bezier eğrisidir. (Şekil 8)



Şekil 8. P_0 afin nokta, P_1 ideal nokta olması durumunda lineer Bezier Eğrisi

3.2.3 İki İdeal Kontrol Noktalı Lineer Bezier Eğrisi

P_0 ve P_1 , S nin sonsuzdaki ideal noktaları olsun. Bu durumda ℓ_0 ve ℓ_1 afin doğruları vardır ki $P_0 = [\ell_0]$ ve $P_1 = [\ell_1]$ dir. Bu halde lineer Bezier eğrisi P_0 ve P_1 den geçen sonsuzluk doğrusu üzerindeki doğru parçasıdır. Yani P_0 ve P_1 , S nin elemanları olduğundan lineer Bezier eğrisi

$$B(t) = (1 - t)P_0 + tP_1$$

yazılabilir. Bu eğri afin olmayan sonsuzda bir eğridir. Yani sonsuzluk doğrusunun üzerindedir. Bu eğrinin reel projektif düzlemdeki karşılığı için P_0 ve P_1 noktalarının reel projektif düzlemde karşılıklarını sırasıyla L_0 ve L_1 doğruları olarak alırsak, L_0 ve L_1 doğruları $z = 0$ düzleminde ve sırasıyla ℓ_0 ve ℓ_1 doğrularıyla aynı eğime sahip doğrulardır. ℓ_0 ve ℓ_1 doğrularının eğimleri sırasıyla m_0 ve m_1 ise L_0 ve L_1 doğruları üzerindeki noktalar Q_0 ve Q_1 olmak üzere;

$$m_0 = \infty \text{ ve } m_1 \neq \infty \text{ ise } Q_0 = (0,1,0) \text{ ve } Q_1 = (1, m_1, 0)$$

$$m_0 \neq \infty \text{ ve } m_1 = \infty \text{ ise } Q_0 = (1, m_0, 0) \text{ ve } Q_1 = (0,1,0)$$

$$m_0 \neq \infty \text{ ve } m_1 \neq \infty \text{ ise } Q_0 = (1, m_0, 0) \text{ ve } Q_1 = (1, m_1, 0)$$

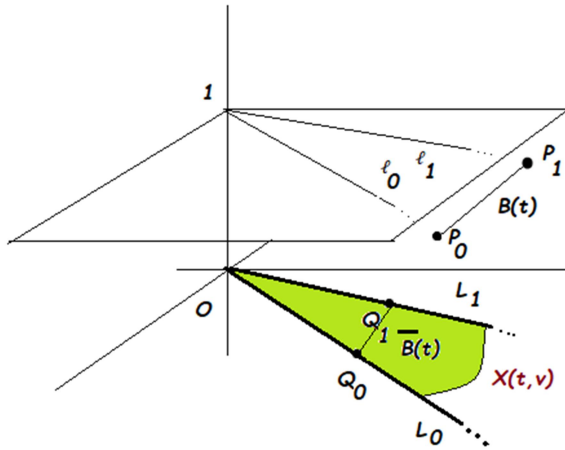
alınabilir. O halde $B(t)$ lineer Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı $X(t, v)$ düzlemsel bir koni yüzeyidir. Bu yüzeyin dayanak eğrisi $\bar{B}(t)$ Bezier eğrisi

$$\bar{B}(t) = (1 - t)Q_0 + tQ_1$$

dir. Bu yüzeyin R^3 teki denklemi ise

$$X(t, v) = v\bar{B}(t) = v[(1 - t)Q_0 + tQ_1] \quad (18)$$

biçimindedir. (Şekil 9)



Şekil 9. P_0 ve P_1 ideal nokta olması durumunda lineer Bezier Eğrisi

3.3 Kuadratik Bezier Eğrileri

Kontrol noktaları P_0 , P_1 ve P_2 olan kuadratik Bezier eğrisini göz önüne alalım. P_0 , P_1 ve P_2 noktalarını A afin düzlemin kapanışı olarak ifade ettiğimiz S kümesinden alalım. Burada 4 kategoride 8 durum söz konusu olabilir:

- i) P_0 , P_1 ve P_2 noktaları A afin düzlemin iç noktaları olmaları durumu
- ii) P_0 , P_1 ve P_2 den birinin ideal nokta ikisinin ise A nın iç noktaları olmaları durumu:
Bu durumu da ideal noktanın bir uç nokta ya da bir iç nokta olmasına göre üç farklı biçimde ifade edebiliriz.
- iii) P_0 , P_1 ve P_2 den birinin A nın afin noktası diğer ikisinin birer ideal nokta olmaları durumu
Bu durumu da afin noktanın bir uç nokta ya da bir iç nokta olmasına göre yine üç farklı biçimde ifade edebiliriz
- iv) P_0 , P_1 ve P_2 den üçünün de A nın ideal noktaları olmaları durumu

Şimdi bu durumları inceleyelim:

3.3.1 Üç Afin Kontrol Noktalı Kuadratik Bezier Eğrileri

- i) P_0 , P_1 ve P_2 noktaları A afin düzlemin iç noktaları olsunlar. Bu durumda kuadratik Bezier eğrisinin ifadesi $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2 \quad (19)$$

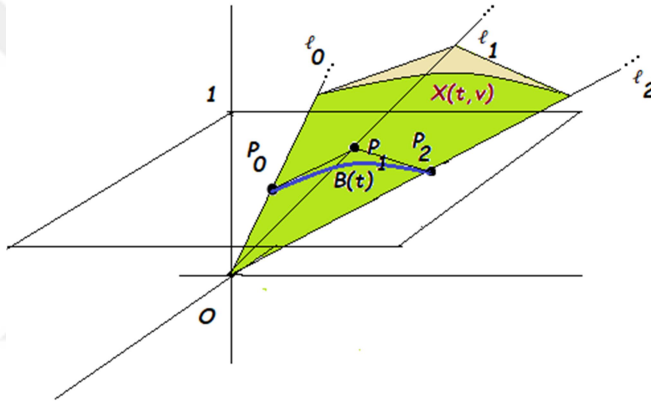
dir. Şimdi P_0, P_1 ve P_2 noktalarının reel projektif düzlemde karşılıkları sırasıyla ℓ_0, ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları olarak alınırsa ve her bir ℓ_i doğrusu üzerindeki bir nokta ile temsil edileceğinden bu doğruların temsilcisi olarak A afin düzlemdeki $P_i = (P_{i1}, P_{i2})$ noktalarının homojen koordinatı olarak $\bar{P}_i = (P_{i1}, P_{i2}, 1)$ alınırsa $B(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı $X(t, v)$ bir koni yüzeyidir. Bu yüzeyin dayanak eğrisi $B(t)$ Bezier eğrisi

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^2 \bar{P}_0 + 2t(1-t) \bar{P}_1 + t^2 \bar{P}_2 \quad (20)$$

dir. Bu yüzeyin R^3 teki denklemi ise

$$X(t, v) = v\mathbf{B}(t) = v \left[(1-t)^2 \bar{P}_0 + 2t(1-t) \bar{P}_1 + t^2 \bar{P}_2 \right] \quad (21)$$

biçiminde ifade edilebilir. (Şekil 10)



Şekil 10. Her üç kontrol noktası da afin nokta olan kuadratik Bezier eğrisi

3.3.2 İki Afin Bir İdeal Kontrol Noktalı Kuadratik Bezier Eğrileri

P_0, P_1 ve P_2 noktaları iki afin ve bir ideal noktadan oluşsun. Bu da temelde iki şekilde ele alınabilir: İdeal noktanın uç nokta olması ya da ideal noktanın bir iç kontrol noktası olması durumu.

- a) ideal noktanın bir uç nokta olması durumu. Yani, P_0 ya da P_2 den birinin ideal nokta ve bunlardan diğeri ile P_1 in bir afin nokta olması durumu. Burada genelinden bir şey kaybetmeden P_2 yi ideal nokta olarak alalım. (P_0 da alınabilirdi.) Bu durumda bir ℓ afin doğrusu vardır ki $P_2 = [\ell_2]$ dir. Bu durumda kuadratik Bezier eğrisinin S deki ifadesi $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2$$

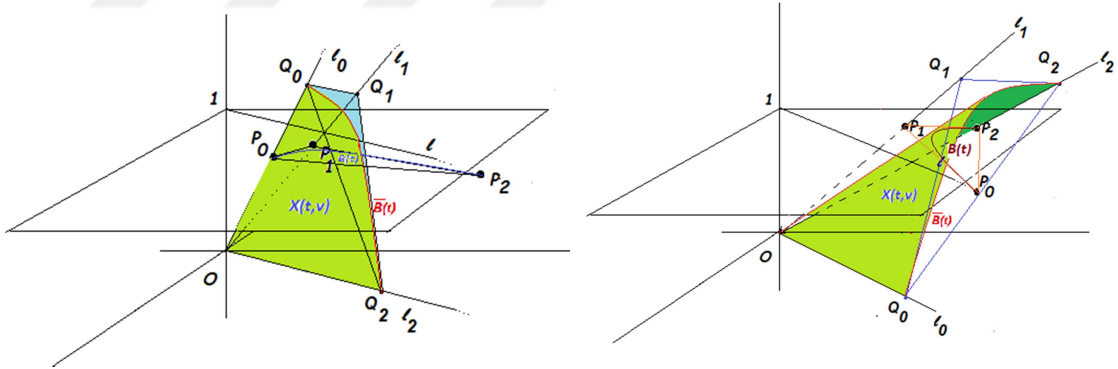
yazılabilir. Ancak bu eğri incelendiğinde görülecektir ki eğri, P_0 dan başlayıp P_1 yönüne yönelecek ancak P_1P_2 ışınına paralel kalarak sonsuza devam edecektir. Hatta öyle ki hemen hemen P_1P_2 ışını gibi olacaktır. Şimdi P_0 , P_1 ve P_2 noktalarının reel projektif düzlemde karşılıklarını sırasıyla Q_0 , Q_1 ve Q_2 doğruları olarak alalım. Bu doğrular üzerinde alınacak üç nokta sırasıyla Q_0 , Q_1 ve Q_2 olsun. Bu noktalar $P_0 = (P_{01}, P_{02})$, $P_1 = (P_{11}, P_{12})$ afin noktalarının reel projektif düzlemdeki homojen koordinatlarda karşılığı olan $Q_0 = (\sigma P_{01}, \sigma P_{02}, \sigma)$ ve $Q_1 = (\sigma P_{11}, \sigma P_{12}, \sigma)$ noktaları olarak ve Q_2 olarak da eğer Q_2 nin eğimi ∞ ise $Q_2 = (0, \sigma, 0)$ noktası, eğer Q_2 nin eğimi ∞ değilse $Q_2 = (\sigma, \sigma m_2, 0)$ noktası olarak alınır. ($\sigma > 0$) Böylece, S deki $B(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı $X(t, v)$ koni yüzeyidir. Bu yüzeyin dayanak eğrisi $t \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\bar{B}(t) = (1 - t)^2 Q_0 + 2t(1 - t) Q_1 + t^2 Q_2 \quad (22)$$

biçimindeki Bezier eğrisidir. Buna göre S deki $B(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı $X(t, v)$ koni yüzeyi

$$X(t, v) = v \bar{B}(t) = v[(1 - t)^2 Q_0 + 2t(1 - t) Q_1 + t^2 Q_2] \quad (23)$$

biçimindedir. (Şekil 11-a). Benzer olarak İdeal nokta olarak P_2 değil de P_0 alınsaydı bu durumda koni yüzeyi (Şekil 11-b) deki gibi olacaktı.



a) P_2 ideal noktalı kuadratik Bezier eğrisi b) P_0 ideal noktalı kuadratik Bezier eğrisi

Şekil 11. İdeal noktası uç kontrol noktası olan kuadratik Bezier eğrileri

b) ideal noktanın bir iç nokta olması durumu. Yani, P_0 ve P_2 birer afin nokta ve P_1 in bir ideal nokta olması durumudur. Bu durumda bir ℓ afin doğrusu vardır ki $P_1 = [\ell]$ dir. Bu durumda kuadratik Bezier eğrisinin S deki ifadesi $t \in [0, 1]$ olmak üzere

$$B(t) = (1 - t)^2 P_0 + 2t(1 - t) P_1 + t^2 P_2$$

yazılabilir. P_1 bir ideal nokta olduğundan sonsuzda olacağı için bu eğriyi sanki bir noktada sonsuzluk tipindeki süreksizlik gibi düşünebiliriz. Yani sağdan ve soldan

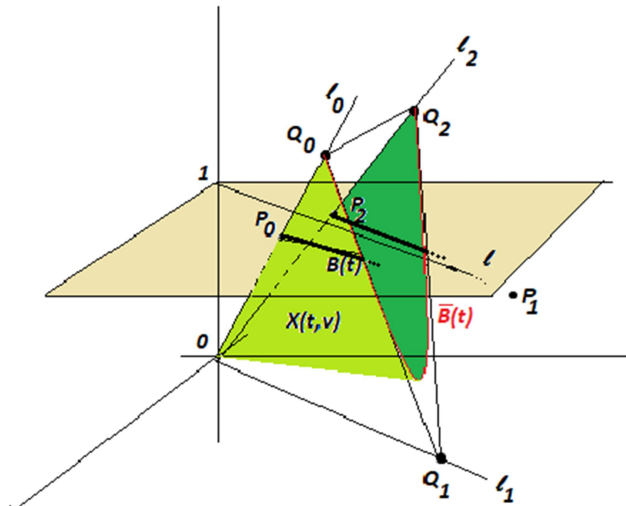
aynı sonsuzluk durumunun olduğu fonksiyonlardaki bir noktada süreksizlik durumu gibi görülebilir. Ancak S projektif düzleminin yapısı ve Bezier eğrilerindeki son nokta teğet özellikleri dikkate alındığında Bu eğrinin P_0 ve P_2 den ℓ ye paralel çizdiğimizde P_1 bu paralel doğruların üçünün de üzerinde olmalıdır. Çünkü paralel doğrulara sonsuzda tek bir karşılık getirilmekteydi. Buna göre S deki $B(t)$ kuadratik Bezier eğrisi P_0 ve P_2 den sonsuza çizilen iki paralel ışını ifade eder. Şimdi bu eğrinin reel projektif düzlemde karşılığına bakalım. P_0 , P_1 ve P_2 noktalarının reel projektif düzlemde karşılıklarını sırasıyla ℓ_0 , ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları olarak alalım. S deki P_0 ve P_2 afin noktalarının ($P_0 = (P_{01}, P_{02})$, $P_2 = (P_{21}, P_{22})$ olmak üzere) reel projektif düzlemdeki homojen koordinatlarda karşılıklarını $Q_0 = (\sigma P_{01}, \sigma P_{02}, \sigma)$ ve $Q_2 = (\sigma P_{21}, \sigma P_{22}, \sigma)$ noktaları olarak alırsak ($\sigma > 0$) ve Q_1 noktasını da ℓ_1 doğrusunun eğimi m_1 in durumuna göre, eğer $m_1 = \infty$ ise $Q_1 = (0, \sigma, 0)$ olarak ve eğer $m_1 \neq \infty$ ise $Q_1 = (\sigma, \sigma m_1, 0)$ noktası olarak aldığımızda S deki $B(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemdeki karşılığı $X(t, v)$ koni yüzeyidir. Bu yüzeyin dayanak eğrisi $t \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\bar{B}(t) = (1-t)^2 Q_0 + 2t(1-t) Q_1 + t^2 Q_2 \quad (24)$$

biçimindeki Bezier eğrisidir. O halde $X(t, v)$ koni yüzeyi

$$X(t, v) = v \bar{B}(t) = v[(1-t)^2 Q_0 + 2t(1-t) Q_1 + t^2 Q_2] \quad (25)$$

biçimindedir. (Şekil 12).



Şekil 12. İdeal noktanın iç kontrol noktası olduğu kuadratik Bezier eğrisi

3.3.3 İki İdeal Bir Afin Kontrol Noktalı Kuadratik Bezier Eğrileri

P_0 , P_1 ve P_2 noktaları iki ideal ve bir afin noktadan oluşsun. Bu da temelde iki şekilde ele alınabilir: Afin noktanın uç nokta olması ya da afin noktanın bir iç kontrol noktası olması durumu.

- a) Afin noktanın bir uç kontrol noktası olması durumu. Yani, P_0 ya da P_2 den birinin afin nokta ve bunlardan diğeri ile P_1 in bir ideal nokta olması durumu. Genelinden bir şey kaybetmeden burada da P_0 afin nokta ve P_1 ve P_2 ideal nokta olsun. Bu durumda bir ℓ_1 ve ℓ_2 afin doğruları vardır ki $P_1 = [\ell_1]$ ve $P_2 = [\ell_2]$ dir. Bu durumda kuadratik Bezier eğrisinin S deki ifadesi $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$B(t) = (1 - t)^2 P_0 + 2t(1 - t)P_1 + t^2 P_2$$

yazılabilir. Bu eğri incelendiğinde P_1 sonsuzda bir nokta olduğundan eğrinin karakteristiğinde büyük rolü olacağından eğrimiz sanki P_1 de kesişen iki doğru gibi görünecektir. Bunlar P_0P_1 ve P_1P_2 doğrularıdır. Şimdi P_0 , P_1 ve P_2 noktalarının reel projektif düzlemde karşılıklarını sırasıyla L_0 , L_1 ve L_2 doğruları olarak alalım. Bu doğrular üzerinde alınacak üç temsilci nokta sırasıyla Q_0 , Q_1 ve Q_2 olsun. Q_0 noktası S deki $P_0 = (P_{01}, P_{02})$ afin noktanın reel projektif düzlemde karşılığı olan L_0 in homojen koordinatlardaki temsilcisi olarak alınacak $Q_0 = (\sigma P_{01}, \sigma P_{02}, \sigma)$ noktasıdır. ($\sigma > 0$) Q_1 ve Q_2 noktaları da L_1 ve L_2 nin eğimlerine bağlı olarak; L_1 in eğimi m_1 , L_2 nin eğimi m_2 olmak üzere,

$$m_1 = \infty \text{ ve } m_2 \neq \infty \text{ ise } Q_1 = (0,1,0) \text{ ve } Q_2 = (1, m_2, 0)$$

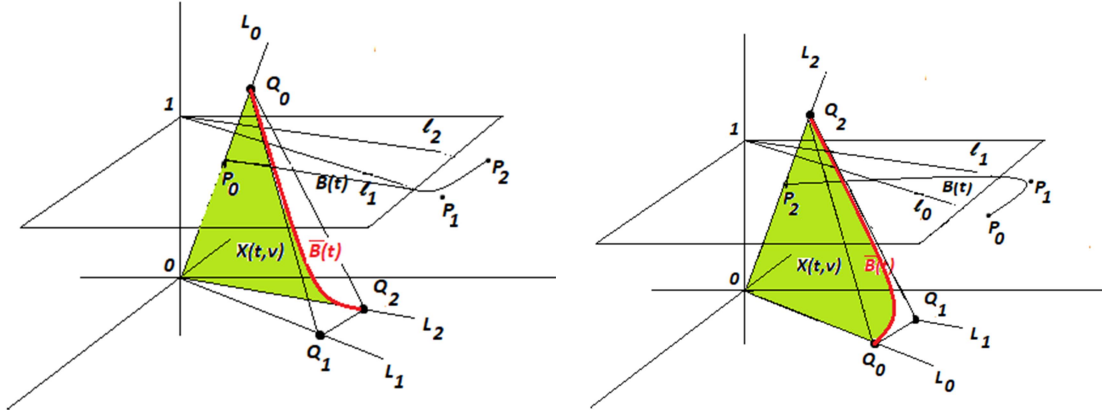
$$m_1 \neq \infty \text{ ve } m_2 = \infty \text{ ise } Q_1 = (1, m_1, 0) \text{ ve } Q_2 = (0,1,0)$$

$$m_1 \neq \infty \text{ ve } m_2 \neq \infty \text{ ise } Q_1 = (1, m_1, 0) \text{ ve } Q_2 = (1, m_2, 0)$$

olarak alınan kontrol noktalarıdır. Böylece S de alınan $B(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı $X(t, v)$ koni yüzeyidir. Bu yüzeyin dayanak eğrisi \mathbb{R}^3 teki kontrol noktaları Q_0 , Q_1 ve Q_2 olan bir Bezier eğrisidir. Bu koni yüzeyinin denklemi ise $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$X(t, v) = v\bar{B}(t) = v[(1 - t)^2 Q_0 + 2t(1 - t)Q_1 + t^2 Q_2]$$

biçimindedir. (Şekil 13-a). Benzer olarak afin nokta olarak P_0 değil de P_2 alınsaydı bu durumda koni yüzeyi (Şekil 13-b) deki gibi olacaktı.



a) Yalnız P_0 afin nokta olan kuadratik Bezier eğrisi b) Yalnız P_2 afin nokta olan kuadratik Bezier eğrisi
Şekil 13. ideal noktası uç nokta olan kuadratik Bezier eğrileri

b) Afin noktanın bir iç kontrol noktası olması durumu. Yani, P_0 ve P_2 ideal nokta ve P_1 bir afin nokta olsun. Bu durumda bir ℓ_0 ve ℓ_2 afin doğruları vardır ki $P_0 = [\ell_0]$ ve $P_2 = [\ell_2]$ dir. Bu durumda kuadratik Bezier eğrisinin S deki ifadesi $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2$$

yazılabilir. Bu eğri incelendiğinde P_0 ve P_2 sonsuzda birer nokta olduğundan eğrinin karakteristiğinde büyük rolleri olacağından eğrimiz sanki sonsuzluk doğrusuna yakın bir eğri olacaktır. Şimdi P_0 , P_1 ve P_2 noktalarının reel projektif düzlemde karşılıklarını sırasıyla L_0 , L_1 ve L_2 doğruları olarak alalım. Bu doğrular üzerinde alınacak üç temsilci nokta sırasıyla Q_0 , Q_1 ve Q_2 olsun. Q_1 noktası S deki $P_1 = (P_{11}, P_{12})$ afin noktanın reel projektif düzlemde karşılığı olan L_1 in homojen koordinatlardaki temsilcisi olarak alınacak $Q_1 = (\sigma P_{11}, \sigma P_{12}, \sigma)$ noktasıdır. ($\sigma > 0$) Q_0 ve Q_2 noktaları da L_0 ve L_2 nin eğimlerine bağlı olarak; L_0 in eğimi m_0 , L_2 nin eğimi m_2 olmak üzere,

$$m_0 = \infty \text{ ve } m_2 \neq \infty \text{ ise } Q_0 = (0,1,0) \text{ ve } Q_2 = (1, m_2, 0)$$

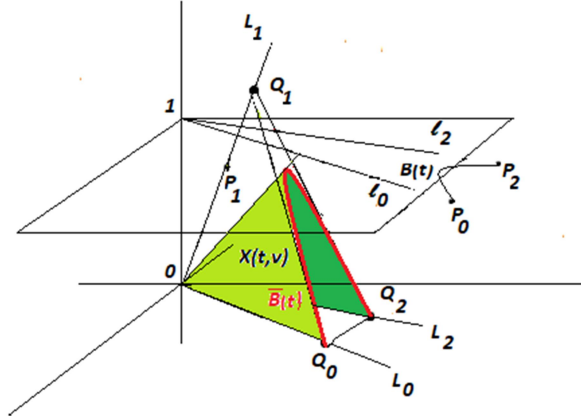
$$m_0 \neq \infty \text{ ve } m_2 = \infty \text{ ise } Q_0 = (1, m_0, 0) \text{ ve } Q_2 = (0,1,0)$$

$$m_0 \neq \infty \text{ ve } m_2 \neq \infty \text{ ise } Q_0 = (1, m_0, 0) \text{ ve } Q_2 = (1, m_2, 0)$$

olarak alınan kontrol noktalarıdır. Böylece S de alınan $B(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı $X(t, v)$ koni yüzeyidir. Bu yüzeyin dayanak eğrisi \mathbb{R}^3 teki kontrol noktaları Q_0 , Q_1 ve Q_2 olan bir Bezier eğrisidir. Bu koni yüzeyinin denklemi ise $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$X(t, v) = v\bar{B}(t) = v[(1-t)^2 Q_0 + 2t(1-t) Q_1 + t^2 Q_2] \quad (26)$$

biçiminde yazılabilir. (Şekil 14). Benzer olarak afin nokta olarak P_0 değil de P_2 alınsaydı bu durumda koni yüzeyi (Şekil 13-b) deki gibi olacaktı.



Şekil 14. P_1 afin nokta olan kuadratik Bezier Eğrisi

3.3.4 Üç İdeal Kontrol Noktalı Kuadratik Bezier Eğrileri

P_0 , P_1 ve P_2 noktaları üçü de ideal noktadan oluşsun. Bu durum aslında üç noktanın sonsuzluk doğrusu üzerinde olması durumudur. Üç nokta doğrudan olduğundan Bezier eğrisi her ne kadar kuadratik olarak ifade edilse de aslında lineer durum ile aynı koşulları taşımış olacaktır. Bunun için P_0 , P_1 ve P_2 noktaları üçü de ideal nokta olduğundan bir ℓ_0 , ℓ_1 ve ℓ_2 afin doğruları vardır ki $P_0 = [\ell_0]$, $P_1 = [\ell_1]$ ve $P_2 = [\ell_2]$ dir. Şimdi Bezier eğrisinin S deki ifadesi $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

yazılabilir. Bu eğri gerçekte P_0 dan P_2 ye kadar sonsuzluk doğrusu üzerinde yer alan doğru parçasıdır. Yani

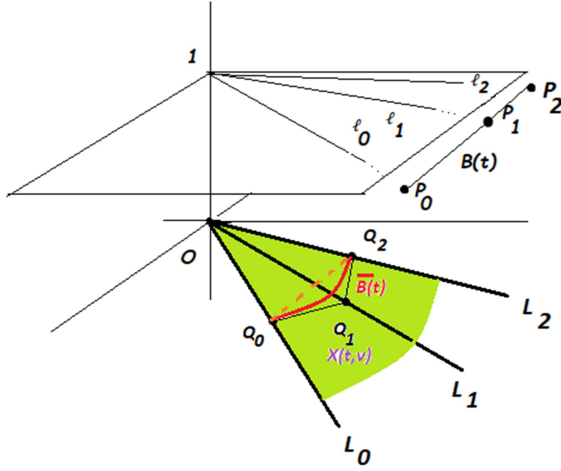
$$B(t) = (1-t)P_0 + tP_2$$

ile özdeşdir. Tek farkı eğrinin hızıdır. Bu eğrinin reel projektif düzlemde karşılığını ifade etmek istersek, P_0 , P_1 ve P_2 noktalarının reel projektif düzlemde karşılıklarını sırasıyla L_0 , L_1 ve L_2 doğruları olarak alalım. Bu L_i doğruları üzerinde alınacak üç temsilci nokta sırasıyla Q_0 , Q_1 ve Q_2 olsun. ℓ_i doğrularının eğimleri m_i olmak üzere bu üç nokta m_i ler sonsuz değilse $Q_0 = (1, m_1, 0)$, $Q_1 = (1, m_1, 0)$, $Q_2 = (1, m_2, 0)$ olarak alınabileceği gibi $Q_0 = (\sigma_0, \sigma_0 m_1, 0)$, $Q_1 = (\sigma_1, \sigma_1 m_1, 0)$, $Q_2 = (\sigma_2, \sigma_2 m_2, 0)$ olarak da alınabilir. Böylece S de alınan $B(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı $X(t, v)$ düzlemsel koni yüzeyidir. Bu yüzeyin dayanak eğrisi \mathbb{R}^3 teki kontrol noktaları Q_0 , Q_1 ve Q_2 olan bir Bezier eğrisidir. Bu dayanak eğrisi, Q_i lerin

birinci seçimine göre düzlemde Q_0Q_2 doğru parçası yani lineer Bezier eğrisi, yada Q_i lerin ikinci seçimine göre de düzlemde kuadratik bir Bezier eğrisini ifade eder. Her iki durumda da koni yüzeyi aynıdır. O halde S de alınan $B(t)$ kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı $X(t, v)$ düzlemsel koni yüzeyi $t \in [0, 1]$ olmak üzere

$$X(t, v) = v\bar{B}(t) = v[(1 - t)^2Q_0 + 2t(1 - t)Q_1 + t^2Q_2] \quad (27)$$

olarak yazılabilir.



Şekil 15. P_0 , P_1 ve P_2 ideal nokta olması durumunda kuadratik Bezier Eğrisi

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Bu tezde alınan **özgün sonuçlar** aşağıda özet olarak verilmiştir:

1) Bu tez çalışmasında bir afin düzleme ideal nokta ilaveleriyle elde edilen bir projektif düzlemde Bezier eğrisinin denklemleri verilmiştir.

2) Bir A afin düzlemine ideal nokta ilaveleriyle elde edilen bir S projektif düzlemi reel projektif düzleme izomorfik olduğundan S de alınan iki afin kontrol noktalı lineer Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı olan düzlemsel koni yüzeyleri ifade edilmiştir.

3) S projektif düzleminde alınan bir afin bir ideal kontrol noktalı lineer Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı olan düzlemsel koni yüzeyleri ifade edilmiştir.

4) S projektif düzleminde alınan iki ideal kontrol noktalı lineer Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı olan düzlemsel koni yüzeyleri ifade edilmiştir.

5) S projektif düzleminde alınan üç afin kontrol noktalı kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı olan koni yüzeyleri ifade edilmiştir.

6) S projektif düzleminde alınan iki afin bir ideal kontrol noktalı kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı olan koni yüzeyleri ifade edilmiştir.

7) S projektif düzleminde alınan bir afin iki ideal kontrol noktalı kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı olan koni yüzeyleri ifade edilmiştir.

8) S projektif düzleminde alınan üç ideal kontrol noktalı kuadratik Bezier eğrisinin reel projektif düzlemde karşılığı olan düzlemsel koni yüzeyleri ifade edilmiştir.

9) S projektif düzleminde alınan üç ideal kontrol noktalı kuadratik Bezier eğrisinin iki ideal noktalı lineer Bezier eğrisiyle çakıştığı ifade edilmiştir.

4.2 Öneriler

Bu tezde alınan **özgün sonuçlar** ışığında bir sonraki çalışmalar için aşağıdaki öneriler yapılmıştır:

1) Bir A afin düzlemine ideal nokta ilaveleriyle elde edilen bir S projektif düzleminde alınan bir Bezier eğrisinin keyfi noktadaki Frenet vektör alanlarının reel projektif düzlemde karşılıkları ifade edilebilir.

2) Bir A afin düzlemine ideal nokta ilaveleriyle elde edilen bir S projektif düzlemindeki Bezier eğrisinin başkaca çatı vektör alanlarının reel projektif düzlemde karşılıkları ifade edilebilir. .

3) Alınan bu sonuçlar bir Afin uzaya sonsuzda noktalar ilavesiyle elde edilecek projektif uzada alınarak bunların reel projektif 3-uzaydaki karşılıkları verilebilir.



KAYNAKLAR

- Barnhill R., Riesenfeld R.F., 1974, editors, Computer Aided Geometric Design, *Academic Press Inc.*, San Diago.
- Clifford W. K. 1873. Preliminary sketch of bi-quaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1,381-395.
- Farin G., 1990, Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design A Practical Guide, 2nd edition, *Academic Press Inc.*, San Diago.
- Farouki R., (1985) Exact offset procedures for simple solids. *Computer Aided Geometric Design*, 2 (4), 257-279.
- Farouki R., Rajan V.T. 1987. On the numerical condition of polynomials in Bernstein form. *Computer Aided Geometric Design*, 4(3), 191-216.
- Gray A., 1998, Modern Differential Geometry of curves and surfaces with Mathematica, 2nd edition, *CRC Press LCC, Boca Raton, Florida*.
- Gürsoy O. 1990. On Integral Invariant of A Closed Ruled Surface, *Journal of Geometry*, 39, 80-91.
- Hacısalihoglu, H. H., 1983, Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar Teorisi. *Gazi Üniversitesi yayınları*, Ankara.
- Hoschek J. 1985. Offset curves in the plane, *Computer Aided Design*, 17 (2) , 77-82.
- Hartshorne R., 1967, Foundations of Projective Geometry, *W.A. Benjamin, Inc.*, Newyork.
- İncesu M., (2003) Bezier Eğrileri, Bezier Yüzeyleri ve Sayısal Algoritmalar, Yük. Lis. Tezi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Karadeniz Teknik Üniversitesi ,Trabzon,
- İncesu M, Gürsoy, O., 2004, Bezier Yüzeylerinde Esas Formlar ve eğrilikler, *XVII Ulusal Matematik Sempozyumu*, Bolu,146-157.
- İncesu, M. 2022. The new characterization of ruled surfaces corresponding dual Bézier curves. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(18), 12030-12045.
- Lee E., 1987. The Rational Bezier Representation for Conics. in: *G. Farin, editor, Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, *SIAM*, Philadelphia, 3-19.
- Liming R., 1944, Practical Analytic Geometry with Applications to Aircraft, *Macmillan*,
- Marsh D., 1999, Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, *Springer-Verlag London Berlin Heidelberg*, London.

- Potmann H. 1995. Rational curves and surfaces with rational offsets, *Computer Aided Geometric Design*, 12, 175-192.
- Study E., 1891, Von den bewegungen und umlegungen. *Mathematische Annalen*, 39, 441-566.
- Samancı, H. K., Celik, S., İncesu, M. 2015. The Bishop frame of Bézier curves. *Life Sci. J*, 12(6), 175-180.
- Samancı, H. Kaya K.S., 2015, The Dual Variable Bernstein Polynomials. *International Conference on Pure and Applied Mathematics* (p. 142).
- Samancı, H. K. 2016. Generalized Dual Variable Bernstein Polynomials, *Konuralp Journal of Mathematics*, 5(1), 56-67.
- Samancı, H. K., İncesu, M. 2020. Investigating a quadratic Bezier curve due to NCW and N-Bishop frames. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 12(2), 120-127.
- Samancı, H. K. 2021. The Serret Frenet Frame of the Rational Bezier Curves in the Euclidean -3 Space by Algorith Method, *Journal of Science & Arts*, 21(3), 721-748.
- Schoenberg I., 1953, On variation diminishing approximation methods. In: *On Numerical Approximation*, editor, R.E.Langer, Univ. of Wisconsin Press, 249-274.
- Weatherburn C.E. Çev: Z. Asuman ILGAZ, 1984, Üç Boyutlu diferensiyel geometri, *K.T.Ü. Yayınları*, yayın No: 16, *KTÜ Basımevi*, Trabzon.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mücahit ŞİMŞEK
Doğum Yeri : Kulp
Doğum Tarihi :1988

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Üniversite	:Dicle Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2009
Yüksek Lisans	: Muş Alparslan Üniversitesi	2024