T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYINDA BAZI EĞRİLERİN FERMİ-WALKER TÜREVİ

Büşra ALTUNTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2023
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYINDA BAZI EĞRİLERİN FERMİ-WALKER TÜREVİ

Büşra ALTUNTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

Şubat-2023
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Büşra ALTUNTAŞ tarafından hazırlanan "Öklid Uzayında Bazı Eğrilerin Fermi-Walker Türevi" adlı tez çalışması 10/02/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..
Danışman	
Prof. Dr. Talat KÖRPINAR Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..
Üye	
Dr. Öğretim Üyesi Ahmet SAZAK Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu …../……/……. Tarih ve ………/……….. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Büşra ALTUNTAŞ

10/02/2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖKLİD UZAYINDA BAZI EĞRİLERİN FERMİ-WALKER TÜREVİ

Büşra ALTUNTAŞ

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, öncelikle fiziksel tanım ve kavramlar verilmiştir ve daha sonra 3-boyutlu Öklid uzayındaki manyetik eğriler üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre T-manyetik, N-manyetik ve B-manyetik eğrilerin tanımlarına yer verilmiştir. Dördüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre T-manyetik, N-manyetik ve B-manyetik eğrilerin türevleri, Fermi-Walker türevleri, normal Fermi-Walker türevleri, modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevleri hesaplanmıştır. Beşinci bölümde ise 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre T-manyetik, N-manyetik ve B-manyetik eğrilerin türevi, Fermi-Walker türevi, normal Fermi-Walker türevi ve modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri hesaplanmıştır.

2023, 57 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Enerji, Lorentz Kuvveti, Frenet Çatı, Fermi-Walker Türevi, normal Fermi-Walker Türevi, Manyetik Eğriler.

ABSTRACT

MS THESIS

FERMI-WALKER DERIVATIVE OF SOME CURVES IN EUCLIDEAN SPACE

Büşra ALTUNTAŞ

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

This study consists of five parts. The first chapter is the introduction part of the study. First, the physical definitions and concepts are given and then the information in the literature about the studies on magnetic curves in 3- dimensional Euclidean space is given. In the second part, the basic definitions and theorems used in our study are given. In the third chapter, definitions of T-magnetic, N-magnetic and B-magnetic curves are given according to Frenet frame in 3-dimensional Euclidean space. In the fourth chapter, derivatives of T-magnetic, N-magnetic and B-magnetic curves, Fermi-Walker derivatives, normal Fermi-Walker derivatives, modified (bi-normal) Fermi-Walker derivatives are calculated according to Frenet frame in 3-dimensional Euclidean space. In the fifth section, the energies of derivatives of T-magnetic, N-magnetic and B-magnetic curves, Fermi-Walker derivatives, normal Fermi-Walker derivatives and modified (bi-normal) Fermi-Walker derivatives are calculated according to Frenet frame in 3-dimensional Euclidean space.

2023, 57 Pages

Keywords: Energy, Frenet Frame, Fermi Walker Derivate, Lorentz Force, Normal Fermi-Walker Derivate, Magnetic Curves.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, çalışmamın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayıran saygıdeğer hocam Prof. Dr. Talat KÖRPINAR'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu süreç boyunca her daim yanımda olan değerli eşim Kadir ALTUNTAŞ'a teşekkür ederim.

Büşra ALTUNTAŞ
MUŞ-2023

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzay
(M, g)	: Riemann manifoldu
ϕ	: Lorentz kuvveti
$\mathbb{F}$	: Manyetik alan
$\mathbf{V}$	: Killing vektör alanı
$\{\mathbf{T}(s),\ \mathbf{N}(s),\ \mathbf{B}(s)\}$	: Frenet Çatı
$\mathbf{T}(s)$	: Teğet vektör alanı
$\mathbf{N}(s)$	: Asli normal vektör alanı
$\mathbf{B}(s)$	: Binormal vektör alanı
$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}X$	: Fermi-Walker türevi
$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X}$	: Normal Fermi-Walker türevi
$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X}$	: Modifiye Fermi-Walker türevi
$\varepsilon(X)$	: X vektör alanının enerjisi

1. GİRİŞ

Manyetik alan kavramı bilimin birçok alanında karşımıza çıkar. Örnek olarak, dünya kendi manyetik alanını üretir ve bu manyetik alan sonucu pusulanın temel çalışma prensibi ortaya çıkar. Bununla beraber manyetik alan, jeneratörlerde ve elektrik motorlarında kullanılır. Manyetik alan, temel parçacıklar tarafından, hareketli elektrik yükleri tarafından veya zamanla değişen elektrik alanlardan içsel olarak üretilir. Vektörel bir büyüklüktür. Herhangi bir noktadaki şiddeti ve yönü ile tanımlanır. Manyetik alan mıknatısın, mıknatıssal özelliklerini gösterdiği alandır. Mıknatısların çevrelerinde oluşan çizgilere manyetik alan çizgileri denir. Manyetik alan çizgilerinin yönleri kuzeyden(N) güneye(S) doğrudur. Manyetik alan $\mathbb{B}$ ile gösterilir. Birimi Sırp bilim adamı Nikola Tesla'nın soy ismi olan Tesla'dır (Synge, 1960).

Bir elektrik yükünün başka bir elektrik yükü üzerinde oluşturduğu itme veya çekme kuvveti etkisine elektriksel alan denir. Yüklü cismin etrafında birim pozitif yükü etkileyen elektriksel kuvvet şeklinde de tanımlanabilir. Elektrik yüklerinin etrafında elektrik alan çizgileri oluşur. Elektriksel alan E simgesi ile gösterilir (Synge, 1960).

Genel anlamda Manyetik alan, hareketli elektrik yükünü etkileyen Lorentz kuvvetiyle tanımlanır. Lorentz kuvveti, fizik ve özellikle elektromanyetizmada; elektromanyetik alanların oluşturduğu noktasal yük üstündeki manyetik ve elektrik kuvvetlerin bileşkesidir. Her ne kadar tarihçiler ilk çalışmaları James Clerck Maxwell'in 1865 yılında yazdığı bir makaleye bağlasalar da Lorentz kuvvetinin ilk olarak geliştirilmesi, 1889'da yaptığı çalışmalarla Oliver Heaviside'a atfedilmiştir. Bir kaç sene sonrasında da Lorentz kuvvet denklemini Hollandalı fizikçi Hendrik Antoon tarafından geliştirilmiştir. E elekrtiksel alan ve $\mathbb{B}$ manyetik alanda, v hızı ile hareket eden q yüklü parçacığı etkileyen Lorentz kuvveti şöyledir:

$$\mathbb{F} = \mathbf{q}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B})$$

Lorentz kuvvet denklemi görüldüğü üzere, parçacığın hız vektörüne ve manyetik alan vektörüne diktir. v ve $\mathbb{B}$ arasında olan vektörel(çapraz) çarpımdan dolayı, parçacık manyetik alana paralel olarak hareket ederse, etkiyen manyetik kuvvet sıfır olur. Lorentz kuvveti iki vektörün birbirine dik($\perp$) olduğu zamanda en büyük değerini alır. Parçacığın hızı manyetik kuvvete her zaman dik olduğundan hız ve büyüklük etkilenmez, yalnızca yönü değişir. Böylece manyetik alanda yüklü bir parçacık çembersel hareketler yapar. Pozitif ve negatif elektrik yüklerin eşit olmadığı parçacıklara yüklü parçacıklar denir. Eğer negatif yükler daha fazlaysa, parçacık eksi yüklü; pozitif yükler daha fazlaysa, parçacık artı yüklü olur. Yüklerin birbirine eşit olması durumunda parçacık nötr veya yüksüzdür. Böylece Lorentz kuvveti mıknatıssal alan içinde hareketli yüklü parçacığı etkiler (Dandolof, 1989; Synge, 1960).

Lorentz kuvveti sayesinde tomografiyle dokuların elektriksel iletkenlikleri görüntülenerek kanseri erken teşhis etmek mümkündür. 1992'de başarı ile yüzdürülen YAMATO 1 isimli gemi Lorentz kuvveti yardımıyla manyetik alanla çalıştırılmıştır. Lorentz kuvvetini elde edecek elektrot ve süper mıknatıs sistemi, gemiye doğrudan itme gücü oluşturacak su jetine aktarılmıştır. Amacı ise çevre dostu uygulamaları ve enerji verimliliğini günlük hayata entegre edebilmektir(Bozkurt ve ark, 2014).

Her γ yörüngesi, $\nabla_{\gamma'}\gamma' = \phi(\gamma')$ Lorentz denkleminin çözümüyle bulunur; burada ϕ, F'ye karşılık gelen Lorentz kuvvetidir ve ∇, g'nin Levi Civita bağlantısıdır. Lorentz kuvvetleri, Riemann manifoldu (M, g) üzerindeki (1, 1) tipi bir tensör alanıdır ve $\mathrm{g}(\phi(\mathrm{X}), \mathrm{Y}) = \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),\ \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \chi(\mathrm{M})$ yi sağlar. Buradan Lorentz kuvvet denklemi $\phi(\mathrm{X}) = \mathrm{V} \times \mathrm{X}$ ile tanımlanır. Ayrıca F manyetik alanlarının manyetik yörüngeleri şu şekilde verilmektedir:

$\nabla_{\mathrm{T}}\mathrm{T} = \phi(\mathrm{T}) = \mathrm{V} \times \mathrm{T}.$

Üç boyuttaki manyetik alanlar, sapma içermeyen vektör alanlarından yararlanarak tanımlanabilir. Killing vektör alanlarının sapması sıfır olduğundan, Killing manyetik alan şeklinde isimlendirilen manyetik alan sınıfı ile tanımlanabilir (Frenet, 1975; Manoff, 1998). Belirli manyetik alan ve enerjisi sabit olan manyetik eğrilerin çalışmasında M.I. Munteanu tarafından farklı yaklaşımlar incelenmiştir. Munteanu, 3-boyutlu Öklid uzayında manyetik yörüngelerin bir vida şeklindeki hareketi ile ilişkili Killing vektör alanına denk düşmesiyle bu yaklaşımları vurgulamıştır (Munteanu, 2013). Araştırmacılar, Killing manyetik alanların etkisinde homojen 3-boyutlu $\mathrm{S}^2 \times \mathbb{R}$ de modellenen alanda hareketli yüklü parçacıkların yörüngeleri ile ilgili araştırma yapmışlardır(Munteanu ve Nistor, 2012). Araştırmacılar, Killing manyetik alanıyla eşleşen 3-boyutlu olan Minkowski uzayında manyetik eğrileri;

$\mathrm{V} = \mathrm{a}\,\partial_{\mathrm{x}} + \mathrm{b}\,\partial_{\mathrm{y}} + \mathrm{c}\,\partial_{\mathrm{z}}, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathbb{R}$

şeklinde sınıflandırmışlardır (Druta-Romaniuc ve Munteanu, 2013).

Araştırmacılar, 3-boyutlu Semi-Riemann manifoldlarında, T-manyetik, N-manyetik ve B-manyetik eğri kavramlarını belirlemişler ve bu eğriler için karakterizasyonlar elde etmişlerdir(Özdemir ve ark, 2015). Ayrıca araştırmacılar, 3-

boyutlu Minkowski uzayında boş-dejenere manyetik eğrilerle çalışmışlardır. Herhangi 3-boyutlu (M, g) Riemann manifoldunda, sıfırdan farklı sabit uzaklığın manyetik alanları, g metriği ile birebirdir(Kazan ve Karadağ, 2017). Bundan hareketle araştırmacıların Sasakian monifoldları, yarı-Sasakian monifoldları, 3-boyutlu monifoldlar ve bir çok manyetik eğriler üzerinde çalışmalarına öncü olmuştur. (Balakrishnan, 2005; Clain ve Crasmareanu, 2015; Druta-Romaniuc ve ark, 2013; Inoguchi ve Munteanu, 2013; Jleli ve ark, 2015).

Önemli uygulama alanları olan Fermi-Walker türevi diferansiyel geometri ve fizikte kullanılan ve bir türev çeşitidir. Bu yeni türevin geometride ve özellikle paralel vektör alanlarının hareketlerinde önemli uygulamaları vardır. Bir $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında verilen bir uzay eğrisinin teğeti T olmak üzere, T nin eğri boyunca paralel olması $\mathbb{E}^n$ nin verilen ∇ konneksiyonu için $\nabla_T T = 0$ şartını sağlaması ile mümkündür. Bu eğri, bu şartı sağlaması durumunda geodezik olarak adlandırılır. $\mathbb{E}^n$ de verilen bütün doğrular geodezikler olacaktır. $\mathbb{E}^n$ de verilen bir eğrinin geodezik olup olmadığı ise Fermi-Walker türevi ile bulunur. Ayrıca manyetik eğrilerin verilen manyetik alan içerisinde geodezik eğrilerinin genelleştirilmiş bir hali olmasından dolayı manyetik eğriler için Fermi-Walker türevinin hesaplanması önemli rol oynamaktadır(Fermi, 1922; Karakuş ve Yaylı, 2012; Körpınar ve ark, 2017).

Bazı araştırmacılar yarı-Riemann manifoldlarını düzenlemiş ve T-manyetik, N-manyetik ve B-manyetik eğriler ve bazı karakterizasyonlar geliştirmiştir(Bükçü ve Karacan, 2008a; Bükçü ve Karacan, 2008b; Büyükkütük ve Öztürk, 2015; Clain ve Crasmareanu, 2015; Do Carmo, 1976; Frenet, 1975). Manyetik eğriler, farklı bakış açıları altında doğal bir araştırma konusu olduklarından, yıllardır yoğun bir şekilde çalışılmaktadır (Inoguchi ve Munteanu, 2013; Yılmaz ve Turgut, 2010). Ayrıca, geodeziklerin genellemeleri olarak analizlerinin yanı sıra, aslında daha fazla fiziksel ve geometrik anlam ifade ederler. Sabit bir enerji seviyesinde belirli bir manyetik alan için eğrilerin analizinde çeşitli yöntemler araştırmıştır(Munteanu ve Nistor, 2012). Farklı yöntemler kullanarak enerji ile ilgili çalışmalar birçok bilim insanı tarafından kabul edilmiştir (Inoguchi ve Munteanu, 2013; Yılmaz ve Turgut, 2010).

Bu çalışmada, 3-boyutlu uzayda Frenet çatısına göre T, N, B manyetik eğrilerinin türevlerini, Fermi-Walker türevleri, normal Fermi-Walker türevleri ve modifiye (bi-normal) Fermi-Walker türevleri hesaplanarak Frenet çatısındaki bazı vektör alanlarının enerji denklemleri elde edilmiştir.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini göstermek üzere, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}\}$ vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{2.1}$$

eşitliği ile tanımlanan ,

$\langle , \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to \langle x, y\rangle$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının **doğal iç çarpım** ya da **Öklid iç çarpım** denir.

$x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{2.2}$$

olmak üzere,

$\|,\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x \quad \to \quad \sqrt{\langle x, x\rangle}$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ uzayına normlu vektör uzayı denir.

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanan , $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Bu metrik ile $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzay olur. Bu uzaya **Öklid uzayı** denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.2 I, $\mathbb{R}$ de bir açık aralık olmak üzere,

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

biçiminde diferensiyellenebilir bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzayında **eğri** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.3 $\beta: I \to \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki

$$\dot{\beta}(t) = \frac{d\beta}{dt}|_t = (\frac{d\beta_1}{dt}(t), \dots, \frac{d\beta_n}{dt}(t)) \tag{2.4}$$

vektörüne, β eğrisinin $\beta(t)$ noktasındaki **hız vektörü** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.4 Bir
$\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$s \to \beta(s)$

eğrisi için, $\|\beta'(s)\| = 1$, $\forall s \in I$ ise β eğrisine **birim hızlı eğri** denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** adı verilir (Izumiya ve Takeuchi, 2004; Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.5 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için ,

$$\mathbf{T}(s) = \beta'(s) \tag{2.5}$$

eşitliğiyle belirli $\mathbf{T}(s)$ vektörüne, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir. **T** vektör alanına, α eğrisinin **teğet vektör alanı** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.6 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için ,$\kappa: I \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| \tag{2.6}$$

fonksiyonuna β eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\beta(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.7 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için ,

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{T}'(s) \tag{2.7}$$

eşitliği ile belirli $\mathbf{N}(s)$ vektörüne, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki **birinci dik vektörü (asli normali)** denir. **N** vektör alanına, β eğrisinin **birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı)** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.8 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için ,

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) \tag{2.8}$$

eşitliği ile tanımlı $\mathbf{B}(s)$ vektörüne, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki **ikinci dik vektörü (binormali)** denir. **B** vektör alanına, β eğrisinin **ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı)** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.9 $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ vektörlerine, $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki **Serret-Frenet vektörleri** denir. $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ kümesine, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir ve **T**, **N**, **B** vektör alanlarına, β eğrisi üzerinde **Frenet vektör alanları** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.10 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları **T**, **N**, **B** ve $\tau: I \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\tau(s) = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \tag{2.9}$$

fonksiyonuna, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki torsiyonu (burulması) denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Teorem 2.1 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları **T**, **N**, **B** ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla κ ve τ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \kappa\mathbf{N}, \\ \mathbf{N} &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \\ \mathbf{B} &= -\tau\mathbf{N}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

dır (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.11 Bir C^∞-manifold M, M üstündeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve C^∞ fonksiyonların cebiri $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$<,>: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa, bu dönüşüme M üzerinde Riemann metriği yada metrik tensör denir.

$i)$ $<,>$ dönüşümü 2-lineerdir,

$ii)$ $<,>$ dönüşümü simetriktir,

$iii)$ $< X,X >> 0, < X,X >= 0 \Leftrightarrow X = 0, X \in \chi(M)$.

Üzerinde Riemann metriği tanımlanmış olan C^∞-manifolda, **Riemann manifoldu** denir (Hacısalihoğlu, 2002).

Tanım 2.12 M, n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$

$(X,Y) \to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$

dönüşümü, $\forall X, Y. Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$i)$ $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

$ii)$ $\nabla_{fX+gY} Z = f(\nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z)$

$iii)$$\nabla_X(fY) = f(\nabla_X Y) + X(f)Y$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya M üzerinde bir **afin koneksiyon** adı verilir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.13 (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olmak üzere $\forall X, Y. Z \in \chi(M)$ için

$i)$ $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$

$ii)$ $X_g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

şartlarını sağladığında ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyonu veya M nin **Levi-Civita koneksiyonu** denir (Hacısalihoğlu, 2002) .

Tanım 2.14 (M, g), n-boyutlu semi-Riemann manifoldu olsun. M üzerinde **F** kapalı 2-formu manyetik alandır ve (M, g) manifoldu üzerindeki **F** manyetik alanın Lorentz kuvveti ϕ, herhangi $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için,

$$g(\phi(X), Y) = \mathbf{F}(X, Y) \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir(Kazan ve Karadağ, 2017).

Tanım 2.15 Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki manyetik eğriler, **F** manyetik alanın etkisi altında M üzerinde hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Yani **F**'nin manyetik yörüngeleri, Lorentz denklemindeki M'nin eğrileridir. Buradan,

$$\nabla_{\beta'}\beta' = \phi(\beta') \tag{2.12}$$

olur. M'nin jeodeziklerinden elde edilen genelleştirilmiş Lorentz denklemi de,

$$\nabla_{\beta'}\beta' = 0 \tag{2.13}$$

dır (Hacısalihoğlu, 2002).

Tanım 2.16 3-boyutlu Semi-Riemann manifoldunda sapma içermeyen bir vektör alanı, manyetik alanı tanımlar. $\mathbf{V} \in \chi(M^n)$ nin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart,

$$L_{\mathbf{V}}g = 0 \tag{2.14}$$

olmasıdır ya da eşdeğer olarak, tüm $p \in M^n$ noktalarında $\nabla\mathbf{V}(p)$, $T_P(M^n)$' de ters-simetrik bir operatördür.

Yani, üç boyutta manyetik alanlar; sapma içermeyen vektör alanları kullanılarak tanımlanabilir. Killing vektör alanlarının sıfır sapması olduğu için, Killing manyetik alan adı verilen özel bir manyetik alan sınıfı tanımlanabilir (Barros ve ark, 2007).

$\mathbf{F_V}$ ye karşılık gelen Lorentz kuvveti;

$$\phi(X) = \mathbf{V} \times X \tag{2.15}$$

dir. (2.18) ve (2.22) denklemlerinden,

$$\nabla_{\beta'}\beta' = \mathbf{V} \times \beta' \tag{2.16}$$

dır (Munteanu, 2013; Özdemir ve ark, 2015).

Tanım 2.17 n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ parametre eğrisi boyunca bir **X** vektör alanı için Öklid anlamında türev $\frac{dX}{dt}$ olmak üzere,

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = 0 \tag{2.17}$$

ise X vektör alanına β eğrisi boyunca **Öklid anlamında paraleldir**, denir (Hacısalihoğlu, 2000) .

Tanım2.18 X, s yay parametreli $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere;

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}} X = \nabla_{\mathbf{T}} X - \langle \mathbf{T}, X \rangle A + \langle A, X \rangle \mathbf{T} \tag{2.18}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}} X$ türevine $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **Fermi-Walker Türevi** denir. Burada $\mathbf{T} = \frac{d\beta}{ds}, A = \frac{d\mathbf{T}}{ds}$ (Benn ve Tucker, 1989).

Tanım 2.19 X, s yay parametreli $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere, eğri boyunca vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}} X = 0 \tag{2.19}$$

ise X vektör alanına $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca **Fermi-Walker anlamında paraleldir,** denir (Benn ve Tucker, 1989).

Tanım2.20 X, s yay parametreli $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere;

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal} \mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X} \rangle \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{N}, \mathbf{X} \rangle \mathbf{N} \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal} \mathbf{X}$ türevine $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **normal Fermi-Walker Türevi** denir. Burada $\mathbf{N} = \frac{d\beta}{ds}, \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{N}}{ds}$(Fermi, 1922).

Tanım 2.21 X, s yay parametreli $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere, eğri boyunca vektör alanının normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{T}^{0normal} X = 0 \tag{2.21}$$

ise X vektör alanına $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca **normal Fermi-Walker anlamında paraleldir,** denir (Fermi, 1922).

Tanım2.22 X, s yay parametreli $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere;

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified} \mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{X} - \langle \mathbf{B}, \mathbf{X} \rangle \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{B} + \langle \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{B}, \mathbf{X} \rangle \mathbf{B} \tag{2.22}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified} \mathbf{X}$ türevine $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **modifiye(bi-normal) Fermi-Walker Türevi** denir. Burada $\mathbf{B} = \frac{d\beta}{ds}, \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}}{ds}$.

Tanım 2.23 X, s yay parametreli $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere, eğri boyunca vektör alanının modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified} \mathbf{X} = 0 \tag{2.23}$$

ise X vektör alanına $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca **modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paraleldir,** denir.

Tanım 2.24 X, s yay parametreli $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı ve $\langle X, X\rangle_\beta = \langle \mathbf{T}, \mathbf{T}\rangle + \langle \nabla_\mathbf{T} X, \nabla_\mathbf{T} X\rangle$ olmak üzere

$$\varepsilon(X) = \frac{1}{2}\int_\beta \langle X, X\rangle_\beta ds = \frac{1}{2}\int_\beta \left(1 + \langle \nabla_\mathbf{T} X, \nabla_\mathbf{T} X\rangle\right) ds \tag{2.24}$$

şeklinde tanımlanan $\varepsilon(X)$ ifadesine X vektör alanının **Sasakian metrik yardımıyla tanımlanan enerjisi** denir (Chacon ve Naveira, 2001; Chacon ve Naveira, 2004).

3. UZAYDAKİ FRENET ÇATISINA GÖRE MANYETİK EĞRİLER

3-boyutlu Öklid uzayında, Frenet çatısına göre **T**-manyetik, **N**-manyetik ve **B**-manyetik eğrileri bu bölümde tanımlayacağız.

3.1 Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Manyetik Eğriler

3.1.1 Uzaydaki Frenet çatısına göre T-manyetik eğriler

3-boyutlu Öklid uzayında, Frenet çatısı ile verilen bir eğri $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbf{F_V}$ de, $\mathbb{R}^3$ de manyetik bir alan olsun. Eğer Frenet çatısına göre **T** teğet vektör alanı, Lorentz kuvveti denklemi olan ,

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \phi(\mathbf{T}) = \mathbf{V} \times \mathbf{T} \tag{3.1}$$

eşitliğini sağlarsa, β eğrisine Frenet çatısına göre **T -manyetik eğri** denir.

Teorem 3.1.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre Lorentz kuvveti

$$\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \\ \phi(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \Omega \\ 0 & -\Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

olarak elde edilir. Burada Ω fonksiyonu, $\Omega = g(\phi(\mathbf{N}), \mathbf{B})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.1.2 Uzaydaki Frenet çatısına göre N-manyetik eğriler

3-boyutlu Öklid uzayında, Frenet çatısı ile verilen bir eğri $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbf{F_V}$ de, $\mathbb{R}^3$ de manyetik bir alan olsun. Eğer Frenet çatısına göre **N** vektör alanı Lorentz kuvveti denklemi olan ,

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} = \phi(\mathbf{N}) = \mathbf{V} \times \mathbf{N} \tag{3.3}$$

eşitliğini sağlarsa, α eğrisine Frenet çatısına göre **N -manyetik eğri** denir [14].

Teorem 3.1.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun.O halde Frenet çatısına göre Lorentz kuvveti

$$\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \\ \phi(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & \alpha \\ -\kappa & 0 & \tau \\ -\alpha & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

olarak elde edilir. Burada α fonksiyonu, $\alpha = g(\phi(\mathbf{T}), \mathbf{B})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.1.3 Uzaydaki Frenet çatısına göre B-manyetik eğriler

3-boyutlu Öklid uzayında, Frenet çatısı ile verilen bir eğri $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbf{F_V}$ de, $\mathbb{R}^3$ de manyetik bir alan olsun. Eğer Frenet çatısına göre **B** vektör alanı, Lorentz kuvveti denklemi olan,

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} = \phi(\mathbf{B}) = \mathbf{V} \times \mathbf{B} \tag{3.5}$$

eşitliğini sağlarsa, β eğrisine Frenet çatısına göre **B -manyetik eğri** denir [14].

Teorem 3.1.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre Lorentz kuvveti

$$\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \\ \phi(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_2 & 0 \\ -\Omega_2 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

olarak elde edilir. Burada Ω_2 fonksiyonu, $\Omega_2 = g(\phi(\mathbf{T}), \mathbf{N})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.2 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Lorentz Kuvvetleri

3.2.1 T-Manyetik eğrilerin uzaydaki Frenet çatısına göre Lorentz kuvvetleri

Teorem 3.2.1 β, Frenet çatısında **T**-Manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetleri ve **V** manyetik alanı

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{T}) &= k\mathbf{N}, \\ \phi(\mathbf{N}) &= -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}, \\ \phi(\mathbf{B}) &= -\Omega\mathbf{N}, \\ \mathbf{V} &= \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B} \end{aligned} \tag{3.7}$$

olarak elde edilir. Burada Ω fonksiyonu, $\Omega = g(\phi(\mathbf{N}), \mathbf{B})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.2.2 N-Manyetik eğrilerin uzaydaki Frenet çatısına göre Lorentz kuvvetleri

Teorem 3.2.2 β, Frenet çatısında **N**-Manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetleri ve **V** manyetik alanı

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{T}) &= k\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}, \\ \phi(\mathbf{N}) &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \\ \phi(\mathbf{B}) &= -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}, \\ \mathbf{V} &= \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B} \end{aligned} \tag{3.8}$$

olarak elde edilir. Burada α fonksiyonu, $\alpha = g(\phi(\mathbf{T}), \mathbf{B})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.2.3 B-Manyetik eğrilerin uzaydaki Frenet çatısına göre Lorentz kuvvetleri

Teorem 3.2.3 α, Frenet çatısında **B**-Manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetleri ve **V** manyetik alanı

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{T}) &= \Omega_2 \mathbf{N}, \\ \phi(\mathbf{N}) &= -\Omega_2 \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \\ \phi(\mathbf{B}) &= -\tau \mathbf{N}, \\ \mathbf{V} &= \tau \mathbf{T} + \Omega_2 \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

olarak elde edilir. Burada Ω_2 fonksiyonu, $\Omega_2 = g(\phi(\mathbf{T}), \mathbf{N})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

4. MANYETİK EĞRİLERİN UZAYDAKİ FRENET ÇATISINA GÖRE ÇEŞİTLİ TÜREVLERİ

3-boyutlu Öklid uzayında; Frenet çatısına göre **T**-manyetik, **N**-manyetik ve **B**-manyetik eğrilerinin türevlerini, Fermi-Walker türevlerini, normal Fermi-Walker türevlerini ve Modifiye Fermi-Walker türevlerini bu bölümde elde edeceğiz.

4.1 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Türevleri

Teorem 4.1.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = -\kappa^2\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B},\\
&\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + (-\kappa^2 - \tau\Omega)\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B},\\
&\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = \Omega\kappa\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{N} - \Omega\tau\mathbf{B},\\
&\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + (\Omega\kappa - \kappa\tau)\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet elemanlarının Lorentz kuvvetlerinin

$$\begin{pmatrix}\phi(\mathbf{T})\\ \phi(\mathbf{N})\\ \phi(\mathbf{B})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \Omega\\ 0 & -\Omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\mathbf{T}) = \kappa\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için türev

$$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}) = -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti için türev

$$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B} + \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + (-\kappa^2 - \tau\Omega)\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{B}) = -\Omega\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için türev

$$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} - \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = \Omega\kappa\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{N} - \Omega\tau\mathbf{B}$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\mathbf{V} = \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$ manyetik alanı için türevi

$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B} + \kappa\mathbf{B}'$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + (\Omega\kappa - \kappa\tau)\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}$

elde edilir.

Teorem 4.1.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) &= -\kappa^2\mathbf{T} + (\kappa' - \alpha\tau)\mathbf{N} + (\kappa\tau + \alpha')\mathbf{B},\\
\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) &= -\kappa'\mathbf{T} + (-\kappa^2 - \tau^2)\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},\\
\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) &= (-\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{T} + (-\alpha\kappa - \tau')\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B},\\
\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} &= (\tau' + \alpha\kappa)\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} + (-\alpha\tau + \kappa')\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet elemanlarının Lorentz kuvvetlerinin

$$\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \\ \phi(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & \alpha \\ -\kappa & 0 & \tau \\ -\alpha & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\mathbf{T}) = \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti için türev

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B} + \alpha\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = -\kappa^2\mathbf{T} + (\kappa' - \alpha\tau)\mathbf{N} + (\kappa\tau + \alpha')\mathbf{B}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}) = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti için türev

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + (-\kappa^2 - \tau^2)\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}$

olur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{B}) = -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için türev

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \alpha\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = (-\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{T} + (-\alpha\kappa - \tau')\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}$

olur.

Benzer şekilde $\mathbf{V} = \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}$ manyetik alanı için türev

$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} - \alpha\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = (\tau' + \alpha\kappa)\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} + (-\alpha\tau + \kappa')\mathbf{B}$

elde edidi.

Teorem 4.1.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının türevi sırasıyla

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) &= -\Omega_2\kappa\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\tau\mathbf{B},\\
\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) &= -\Omega_2'\mathbf{T} + (-\Omega_2\kappa - \tau^2)\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},\\
\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) &= \tau\kappa\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B},\\
\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} &= \tau'\mathbf{T} + (\tau\kappa - \Omega_2\tau)\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet elemanlarının Lorentz kuvvetlerinin

$$
\begin{pmatrix}\phi(\mathbf{T})\\ \phi(\mathbf{N})\\ \phi(\mathbf{B})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \Omega_2 & 0\\ -\Omega_2 & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}
$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için türev

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = -\Omega_2\kappa\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\tau\mathbf{B}$

olur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$, Lorentz kuvveti için türev

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} + (-\Omega_2\kappa - \tau^2)\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}$

olur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{B}) = -\tau\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için türev

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} - \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = \tau\kappa\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}$

olur.

Benzer şekilde $\mathbf{V} = \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}$ manyetik alanı için türev

$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{B} + \Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + (\tau\kappa - \Omega_2\tau)\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}$

elde edilir.

4.2 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Fermi- Walker Türevleri

Teorem 4.2.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) &= \kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B},\\
\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) &= -\kappa'\mathbf{T} - \Omega\tau\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B}, \qquad (4.4)\\
\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) &= -\Omega'\mathbf{N} - \Omega\tau\mathbf{B},\\
\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} &= \Omega'\mathbf{T} - \kappa\tau\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}
\end{aligned}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet elemanlarının Lorentz kuvvetlerinin

$$\begin{pmatrix}\phi(\mathbf{T})\\ \phi(\mathbf{N})\\ \phi(\mathbf{B})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \Omega\\ 0 & -\Omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\mathbf{T}) = \kappa\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) - \langle\mathbf{T}, \phi(\mathbf{T})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \phi(\mathbf{T})\rangle\mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle\mathbf{T}, \kappa\mathbf{N}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\kappa\mathbf{N}, \kappa\mathbf{N}\rangle\mathbf{T}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \kappa^2\mathbf{T}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}) = -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = \nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) - \langle\mathbf{T}, \phi(\mathbf{N})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \phi(\mathbf{N})\rangle\mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B} + \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$

$$-\langle \mathbf{T}, -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle \kappa\mathbf{N}, -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa(\kappa\mathbf{N}) + \Omega'\mathbf{B} + \Omega(-\tau\mathbf{N}) + \kappa^2\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B} - \Omega\tau\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \Omega\tau\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{B}) = -\Omega\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{T}\phi(\mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) - \langle \mathbf{T}, \phi(\mathbf{B})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \phi(\mathbf{B})\rangle\mathbf{T}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} - \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle \mathbf{T}, -\Omega\mathbf{N}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle \kappa\mathbf{N}, -\Omega\mathbf{N}\rangle\mathbf{T}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} - \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle \mathbf{T}, -\Omega\mathbf{N}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle \kappa\mathbf{N}, -\Omega\mathbf{N}\rangle\mathbf{T}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} - \Omega(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \Omega\kappa\mathbf{T}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} - \Omega\tau\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\mathbf{V} = \Omega\mathbf{T} + \kappa B$ manyetik alanı için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} - \langle \mathbf{T}, \mathbf{V}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \mathbf{V}\rangle\mathbf{T}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$

$$-\langle \mathbf{T}, \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle \kappa\mathbf{N}, \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega(\kappa\mathbf{N}) + \kappa'\mathbf{B} + \kappa(-\tau\mathbf{N}) - \Omega\kappa\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} - \kappa\tau\mathbf{N} - \Omega\kappa\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} - \kappa\tau\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = (\kappa' - \alpha\tau)\mathbf{N} + (\kappa\tau + \alpha')\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + (-\alpha' - \tau\kappa)\mathbf{N} + (-\alpha\tau + \kappa')\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet elemanlarının Lorentz kuvvetlerinin

$$\begin{pmatrix}\phi(\mathbf{T})\\ \phi(\mathbf{N})\\ \phi(\mathbf{B})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & \alpha\\ -\kappa & 0 & \tau\\ -\alpha & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\mathbf{T}) = \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) - \langle\mathbf{T}, \phi(\mathbf{T})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \phi(\mathbf{T})\rangle\mathbf{T}$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B} + \alpha\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\\
&-\langle\mathbf{T}, \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle\kappa\mathbf{N}, \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}
\end{aligned}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \alpha'\mathbf{B} + \alpha(-\tau\mathbf{N}) + \kappa^2\mathbf{T}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{B} + \alpha'\mathbf{B} - \alpha\tau\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} - \alpha\tau\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B} + \alpha'\mathbf{B}$$

ortak çarpan parantezine alınırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = (\kappa' - \alpha\tau)\mathbf{N} + (\kappa\tau + \alpha')\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}) = -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}$, Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = \nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) - \langle\mathbf{T}, \phi(\mathbf{N})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \phi(\mathbf{N})\rangle\mathbf{T}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\\
&-\langle\mathbf{T}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}
\end{aligned}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} + \tau(-\tau\mathbf{N})$

$-\langle \mathbf{T}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle \kappa\mathbf{N}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} - \tau^2\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{N}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{B}) = -\Omega\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) - \langle \mathbf{T}, \phi(\mathbf{B})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \phi(\mathbf{B})\rangle\mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} - \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle \mathbf{T}, -\Omega\mathbf{N}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle \kappa\mathbf{N}, -\Omega\mathbf{N}\rangle\mathbf{T}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \alpha\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}$

$-\langle \mathbf{T}, -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle\mathbf{T}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{N} - \tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{B} + \alpha\kappa\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{T}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\mathbf{V} = \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}$ manyetik alanı için Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} - \langle \mathbf{T}, \mathbf{V}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \mathbf{V}\rangle\mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} - \alpha\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$

$-\langle \mathbf{T}, \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{N} - \alpha(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \kappa'\mathbf{B} + \kappa(-\tau\mathbf{N})$

$-\langle \mathbf{T}, \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle \kappa\mathbf{N}, \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{N} + \alpha\kappa\mathbf{T} - \alpha\tau\mathbf{B} + \kappa'\mathbf{B} - \tau\kappa\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{N} - \alpha\kappa\mathbf{T}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + (-\alpha' - \tau\kappa)\mathbf{N} + (-\alpha\tau + \kappa')\mathbf{B}$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\tau\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} - \Omega_2\tau\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet elemanlarının Lorentz kuvvetlerinin

$$\begin{pmatrix}\phi(\mathbf{T})\\ \phi(\mathbf{N})\\ \phi(\mathbf{B})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \Omega_2 & 0\\ -\Omega_2 & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) - \langle\mathbf{T}, \phi(\mathbf{T})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \phi(\mathbf{T})\rangle\mathbf{T}$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle\mathbf{T}, \Omega_2\mathbf{N}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \Omega_2\mathbf{N}\rangle\mathbf{T}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \langle\mathbf{T}, \Omega_2\mathbf{N}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle\kappa\mathbf{N}, \Omega_2\mathbf{N}\rangle\mathbf{T}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} - \kappa\Omega_2\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{B} + \kappa\Omega_2\mathbf{T}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\tau\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$, Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = \nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) - \langle\mathbf{T}, \phi(\mathbf{N})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \phi(\mathbf{N})\rangle\mathbf{T}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) &= -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}\\
&-\langle\mathbf{T}, -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}
\end{aligned}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) &= -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} + \tau(-\tau\mathbf{N})\\
&-\langle\mathbf{T}, -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle\kappa\mathbf{N}, -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}
\end{aligned}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} - \tau^2\mathbf{N} + \Omega_2\kappa\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{B}) = -\tau\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) - \langle\mathbf{T},\phi(\mathbf{B})\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T},\phi(\mathbf{B})\rangle\mathbf{T}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} - \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle\mathbf{T},-\tau\mathbf{N}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T},-\tau\mathbf{N}\rangle\mathbf{T}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} - \tau(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$
$$-\langle\mathbf{T},-\tau\mathbf{N}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle\kappa\mathbf{N},-\tau\mathbf{N}\rangle\mathbf{T}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{B} - \tau\kappa\mathbf{T}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\mathbf{V} = \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}$ manyetik alanı için Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} - \langle\mathbf{T},\mathbf{V}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T},\mathbf{V}\rangle\mathbf{T}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{B} + \Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$
$$-\langle\mathbf{T},\tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T},\tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B} + \Omega_2(-\tau\mathbf{N})$$
$$-\langle\mathbf{T},\tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle\kappa\mathbf{N},\tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B} - \Omega_2\tau\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} - \Omega_2\tau\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

4.3 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Normal Fermi- Walker Türevleri

Teorem 4.3.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının normal Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet elemanlarının Lorentz kuvvetlerinin

$$\begin{pmatrix}\phi(\mathbf{T})\\ \phi(\mathbf{N})\\ \phi(\mathbf{B})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \Omega\\ 0 & -\Omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz.$\phi(\mathbf{T}) = \kappa\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle\mathbf{N},\kappa\mathbf{N}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N},\kappa\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$
$$-\langle\mathbf{N},\kappa\mathbf{N}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}),\kappa\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{B} + \kappa^2\mathbf{T} - \kappa\tau\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}) = -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti içinNormal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B} + \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$

$$-\langle \mathbf{N}, -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle \mathbf{N}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\kappa\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B} + \Omega(-\tau\mathbf{N})$$

$$-\langle \mathbf{N}, -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B} - \Omega\tau\mathbf{N} + \Omega\tau\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{B}) = -\Omega\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{N}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} - \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle \mathbf{N}, -\Omega\mathbf{N}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, -\Omega\mathbf{N}\rangle \mathbf{N}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} - \Omega(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$

$$-\langle \mathbf{N}, -\Omega\mathbf{N}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), -\Omega\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} + \Omega\kappa\mathbf{T} - \Omega\tau\mathbf{B} - \Omega\kappa\mathbf{T} + \Omega\tau\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{T}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\mathbf{V} = \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$ manyetik alanı için normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{N}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{B} + \Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$

$$-\langle \mathbf{T}, \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}, \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle \mathbf{T}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$

$$-\langle \mathbf{N}, \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}\rangle \mathbf{N}$$

ve gerekli eşitlikler yerine yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} + \kappa(-\tau\mathbf{N})$$

$$-\langle \mathbf{N}, \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} - \tau\kappa\mathbf{N} - \Omega\kappa\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{N}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B}$

olarak bulunur.

Teorem 4.3.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının normal Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet elemanlarının Lorentz kuvvetlerinin

$$\begin{pmatrix}\phi(\mathbf{T})\\ \phi(\mathbf{N})\\ \phi(\mathbf{B})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & \alpha\\ -\kappa & 0 & \tau\\ -\alpha & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz.$\phi(\mathbf{T}) = \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti için normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \alpha'\mathbf{B} + \alpha(-\tau\mathbf{N})$

$-\langle\mathbf{N},\kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}),\kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$

elde edilir ve gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{B} + \alpha'\mathbf{B}$

$-\tau\alpha\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T} - \kappa\tau\mathbf{B} + \tau\alpha\mathbf{N}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B}$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}) = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti için normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$

$$-\langle \mathbf{N}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} + \tau(-\tau\mathbf{N})$$

$$-\langle \mathbf{N}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} - \tau^2\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{B}) = -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \alpha\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}$$

$$-\langle \mathbf{N}, -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{N} - \tau'\mathbf{N} - \tau(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$

$$-\langle \mathbf{N}, -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{N} - \tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{B} - \kappa\tau\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{B} + \kappa\alpha\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\mathbf{V} = \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}$ manyetik alanı için normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} - \alpha\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$

$$-\langle \mathbf{N}, \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{N} - \alpha(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$

$$+\kappa'\mathbf{B} + \kappa(-\tau\mathbf{N}) - \langle \mathbf{N}, \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$

$+\langle(-\kappa\mathbf{T}+\tau\mathbf{B}),\tau\mathbf{T}-\alpha\mathbf{N}+\kappa\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V}=\tau'\mathbf{T}+\tau\kappa\mathbf{N}-\alpha'\mathbf{N}+\alpha\kappa\mathbf{T}-\alpha\tau\mathbf{B}+\kappa'\mathbf{B}$

$-\kappa\tau\mathbf{N}-\alpha\kappa\mathbf{T}+\tau\alpha\mathbf{B}-\kappa\tau\mathbf{N}+\kappa\tau\mathbf{N}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V}=\tau'\mathbf{T}-\alpha'\mathbf{N}+\kappa'\mathbf{B}$

olarak bulunur.

Teorem 4.3.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının normal Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T})=\Omega_2'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N})=-\Omega_2'\mathbf{T}+\tau'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B})=-\tau'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V}=\tau'\mathbf{T}+\Omega_2'\mathbf{B}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet elemanlarının Lorentz kuvvetlerinin

$$
\begin{pmatrix}\phi(\mathbf{T})\\ \phi(\mathbf{N})\\ \phi(\mathbf{B})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \Omega_2 & 0\\ -\Omega_2 & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}
$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\mathbf{T})=\Omega_2\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X}=\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}-\langle\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T})=\Omega_2'\mathbf{N}+\Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}-\langle\mathbf{N},\Omega_2\mathbf{N}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N},\Omega_2\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T})=\Omega_2'\mathbf{N}+\Omega_2(-\kappa\mathbf{T}+\tau\mathbf{B})$

$-\langle\mathbf{N},\Omega_2\mathbf{N}\rangle(-\kappa\mathbf{T}+\tau\mathbf{B})+\langle(-\kappa\mathbf{T}+\tau\mathbf{B}),\Omega_2\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T})=\Omega_2'\mathbf{N}-\Omega_2\kappa\mathbf{T}+\Omega_2\tau\mathbf{B}+\Omega_2\kappa\mathbf{T}-\Omega_2\tau\mathbf{B}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T})=\Omega_2'\mathbf{N}$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti için normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{N}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$
$$-\langle \mathbf{N}, -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle \mathbf{N}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} + \tau(-\tau\mathbf{N})$$
$$-\langle \mathbf{N}, -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle \mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} - \tau^2\mathbf{N} + \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{B}) = -\tau\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{N}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} - \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle \mathbf{N}, -\tau\mathbf{N}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, -\tau\mathbf{N}\rangle \mathbf{N}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} - \tau(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$
$$-\langle \mathbf{N}, -\tau\mathbf{N}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), -\tau\mathbf{N}\rangle \mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{B} - \tau\kappa\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\mathbf{V} = \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}$ manyetik alanı için normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{N}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{B} + \Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$
$$-\langle \mathbf{N}, \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}, \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle \mathbf{N}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B} + \Omega_2(-\tau\mathbf{N})$$

$-\langle \mathbf{N}, \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$

veya

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B} - \Omega_2\tau\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2\tau\mathbf{N}$$

veya

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

4.4 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Modifiye (Bi-Normal) Fermi- Walker Türevleri

Teorem 4.4.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Modifiye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = -\kappa^2\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{N},\\
&\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B}, \qquad (4.10)\\
&\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = \Omega\kappa\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{N},\\
&\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}
\end{aligned}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet elemanlarının Lorentz kuvvetlerinin

$$\begin{pmatrix}\phi(\mathbf{T})\\ \phi(\mathbf{N})\\ \phi(\mathbf{B})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \Omega\\ 0 & -\Omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\mathbf{T}) = \kappa\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için modifye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle \mathbf{B}, \kappa\mathbf{N}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, \kappa\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$

$-\langle \mathbf{B}, \kappa\mathbf{N}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}), \kappa\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$

veya

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{B} - \kappa\tau\mathbf{B}$$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = -\kappa^2\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{N}$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}) = -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti için modifye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B} + \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$

$-\langle\mathbf{B}, -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\kappa\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B} + \Omega(-\tau\mathbf{N})$

$-\langle\mathbf{B}, -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}), -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B} - \Omega\tau\mathbf{N} + \Omega\tau\mathbf{N}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B}$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{B}) = -\Omega\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için modifye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} - \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle\mathbf{B}, -\Omega\mathbf{N}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, -\Omega\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} - \Omega(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$-\langle\mathbf{B}, -\Omega\mathbf{N}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}), -\Omega\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} + \Omega\kappa\mathbf{T} - \Omega\tau\mathbf{B} + \Omega\tau\mathbf{B}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = \Omega\kappa\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{N}$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\mathbf{V} = \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$ manyetik alanı için modifye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$
$$-\langle \mathbf{B}, \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}\rangle \mathbf{B}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} + \kappa(-\tau\mathbf{N})$$
$$-\langle \mathbf{B}, \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}), \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}\rangle \mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} - \tau\kappa\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Modifiye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) &= -\kappa^2\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B},\\
\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) &= -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}, \qquad (4.11)\\
\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) &= (-\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{T} + (-\alpha\kappa - \tau')\mathbf{N},\\
\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} &= (\tau' + \alpha\kappa)\mathbf{T} + (\tau\kappa - \alpha')\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}
\end{aligned}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet elemanlarının Lorentz kuvvetlerinin

$$\begin{pmatrix}\phi(\mathbf{T})\\ \phi(\mathbf{N})\\ \phi(\mathbf{B})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & \alpha\\ -\kappa & 0 & \tau\\ -\alpha & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\mathbf{T}) = \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti için modifye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B} + \alpha\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$
$$-\langle \mathbf{B}, \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}\rangle \mathbf{B}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \alpha'\mathbf{B} + \alpha(-\tau\mathbf{N})$

$-\langle\mathbf{B}, \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}), \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} - \kappa\kappa\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{B}$

$+\alpha'\mathbf{B} - \alpha\tau\mathbf{N} + \alpha\tau\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = -\kappa^2\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B}$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}) = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti için modifye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$

$-\langle\mathbf{B}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} + \tau(-\tau\mathbf{N})$

$-\langle\mathbf{B}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}), -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} - \tau^2\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{N}$

veya

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{B}) = -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için modifye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \alpha\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N}$

$-\langle\mathbf{B}, -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}, -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{N} - \tau'\mathbf{N} - \tau(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$-\langle\mathbf{B}, -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}), -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{N} - \tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{B} + \tau^2\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = (-\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{T} + (-\alpha\kappa - \tau')\mathbf{N}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\mathbf{V} = \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}$ manyetik alanı için modifye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} - \alpha\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} + \kappa\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$

$$-\langle\mathbf{B},\tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{N} - \alpha(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$

$$+\kappa'\mathbf{B} + \kappa(-\tau\mathbf{N}) - \langle\mathbf{B},\tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle(-\tau\mathbf{N})$$

$$+\langle(-\tau\mathbf{N}),\tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{N} + \alpha\kappa\mathbf{T}$$

$$-\alpha\tau\mathbf{B} + \kappa'\mathbf{B} - \tau\kappa\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{N} + \alpha\tau\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = (\tau' + \alpha\kappa)\mathbf{T} + (\tau\kappa - \alpha')\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Modifiye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = -\Omega_2\kappa\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{N},$$

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}, \tag{4.12}$$

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = \tau\kappa\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N},$$

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet elemanlarının Lorentz kuvvetlerinin

$$\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \\ \phi(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_2 & 0 \\ -\Omega_2 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. $\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için modifye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle\mathbf{B},\Omega_2\mathbf{N}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\Omega_2\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$

$$-\langle\mathbf{B},\Omega_2\mathbf{N}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}),\Omega_2\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$$

veya

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\kappa\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{B} - \Omega_2\tau\mathbf{B}$$

veya

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}) = -\Omega_2\kappa\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{N}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$ Lorentz kuvveti için modifye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$

$$-\langle\mathbf{B},-\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},-\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}$$

$$+\tau(-\tau\mathbf{N}) - \langle\mathbf{B},-\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle(-\tau\mathbf{N})$$

$$+\langle(-\tau\mathbf{N}),-\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$$

veya

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} - \tau^2\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{N}$$

veya

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{B}) = -\tau\mathbf{N}$ Lorentz kuvveti için modifye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} - \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} - \langle\mathbf{B},-\tau\mathbf{N}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},-\tau\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} - \tau(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$

$$-\langle\mathbf{B},-\tau\mathbf{N}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}),-\tau\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{B} + \tau^2\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}) = \tau\kappa\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde $\mathbf{V} = \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}$ manyetik alanı için modifye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{B} + \Omega_2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B}$$

$$-\langle\mathbf{B},\tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B},\tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$$

olur. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}$$

$$+\Omega_2(-\tau\mathbf{N}) - \langle\mathbf{B},\tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle(-\tau\mathbf{N})$$

$$+\langle(-\tau\mathbf{N}),\tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B} - \Omega_2\tau\mathbf{N} + \Omega_2\tau\mathbf{N}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}$$

olarak bulunur.

5. MANYETİK EĞRİLERİN UZAYDAKİ FRENET ÇATISINA GÖRE ÇEŞİTLİ TÜREVLER YARDIMIYLA ENERJİLERİ

3-boyutlu Öklid uzayında; Frenet çatısına göre **T**-manyetik, **N**-manyetik ve **B**-manyetik eğrilerinin türevi, Fermi-Walker türevi, normal Fermi-Walker türevi ve Modifiye Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjilerini bu bölümde inceleyeceğiz.

5.1 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Türev Yardımıyla Enerjileri

Teorem 5.1.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının enerjileri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2+(\kappa')^2+\kappa^4+\kappa^2\tau^2)ds,\\
\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) &= \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2+\Omega^2+(\kappa')^2+\kappa^4\\
&+2\kappa^2\Omega\tau+(\Omega')^2+\Omega^2\tau^2)ds,\\
\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_\beta (\Omega^2+(\Omega')^2+\kappa^2\Omega^2+(\Omega')^2\tau^2)ds,\\
\varepsilon(\mathbf{V}) &= \frac{1}{2}\int_\beta (\Omega^2+\kappa^2+(\Omega')^2+\kappa^2\Omega^2\\
&-2\kappa^2\Omega\tau+(\kappa')^2+\kappa^2\tau^2)ds
\end{aligned}\tag{5.1}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$ için enerji

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\phi(\mathbf{T}),\phi(\mathbf{T})\rangle+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}),\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\kappa\mathbf{N},\kappa\mathbf{N}\rangle\\
&+\langle\kappa'\mathbf{N}-\kappa^2\mathbf{T}+\kappa\tau\mathbf{B},\kappa'\mathbf{N}-\kappa^2\mathbf{T}+\kappa\tau\mathbf{B}\rangle)ds
\end{aligned}$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2+(\kappa')^2+\kappa^4+\kappa^2\tau^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{N})$ için enerji

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\phi(\mathbf{N}),\phi(\mathbf{N})\rangle+\langle\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}),\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N})\rangle)ds,$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta \,(\langle -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}, -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle$

$+\langle -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2 N + \Omega'\mathbf{B} - \tau\Omega\mathbf{N},$

$-\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2 N + \Omega'\mathbf{B} - \tau\Omega\mathbf{N}\rangle)ds$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta \,(\kappa^2 + \Omega^2 + (\kappa')^2 + \kappa^4$

$+\kappa^2\Omega\tau + (\Omega')^2 + \kappa^2\Omega\tau + \Omega^2\tau^2)ds$

ve gerekli işlemlerle

$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta \,(\kappa^2 + \Omega^2 + (\kappa')^2$

$+\kappa^4 + 2\kappa^2\Omega\tau + (\Omega')^2 + \Omega^2\tau^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{B})$ için enerji

$\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta \,(\langle\phi(\mathbf{B}), \phi(\mathbf{B})\rangle + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}), \nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B})\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta \,(\langle -\Omega\mathbf{N}, -\Omega\mathbf{N}\rangle + \langle -\Omega'\mathbf{N}$

$+\Omega\kappa\mathbf{T} - \Omega\tau\mathbf{B}, -\Omega'\mathbf{N} + \Omega\kappa\mathbf{T} - \Omega\tau\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta \,(\Omega^2 + \kappa^2 + (\Omega')^2$

$+\kappa^2\Omega^2 - 2\kappa^2\Omega\tau + (\kappa')^2 + \kappa^2\tau^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre **V** için enerji

$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta \,(\langle\mathbf{V}, \mathbf{V}\rangle + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V}, \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V}\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta \,(\langle\Omega\mathbf{T} + \kappa B, \Omega\mathbf{T} + \kappa B\rangle$

$+\langle\Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} - \kappa\tau\mathbf{N},$

$\Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} - \kappa\tau\mathbf{N}\rangle)ds$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta \,(\Omega^2 + \kappa^2 + (\Omega')^2 + \kappa^2\Omega^2$

$-\kappa^2\Omega\tau + (\kappa')^2 - \kappa^2\Omega\tau + \kappa^2\tau^2)ds,$

ve gerekli işlemlerle

$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta \,(\Omega^2 + \kappa^2 + (\Omega')^2$

$+\kappa^2\Omega^2 - 2\kappa^2\Omega\tau + (\kappa')^2 + \kappa^2\tau^2)ds$

elde edilir.

Teorem 5.1.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının enerjileri sırasıyla

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + \alpha^2 + (\kappa')^2 - 2\kappa'\alpha\tau$$
$$+\kappa^4 + \kappa^2\tau^2 + 2\kappa\tau\alpha' + (\alpha')^2 + \alpha^2\tau^2)ds,$$
$$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + \tau^2 + (\kappa')^2 \tag{5.2}$$
$$+\kappa^4 + 2\kappa^2\tau^2 + (\tau')^2 + \tau^4)ds,$$
$$\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\alpha^2 + \tau^2 + (\alpha')^2 - 2\alpha'\tau\kappa$$
$$+\alpha^2\kappa^2 + 2\alpha\kappa\tau' + (\tau')^2 + \tau^2\kappa^2 + \tau^4)ds,$$
$$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau^2 + \alpha^2 + \kappa^2 + (\tau')^2 + 2\tau'\alpha\kappa$$
$$+(\alpha')^2 + \alpha^2\kappa^2 + \alpha^2\tau^2 - 2\alpha\tau\kappa' + (\kappa')^2)ds$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$ için enerji

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\alpha (\langle\phi(\mathbf{T}),\phi(\mathbf{T})\rangle + \langle\nabla_\mathbf{T}\phi(\mathbf{T}),\nabla_\mathbf{T}\phi(\mathbf{T})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\kappa\mathbf{N},\kappa\mathbf{N}\rangle$$
$$+\langle\kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{B},\kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + \alpha^2 + (\kappa')^2 - \kappa'\alpha\tau + \kappa^4$$
$$+\kappa^2\tau^2 + \kappa\tau\alpha' + \kappa\tau\alpha' + (\alpha')^2 - \kappa'\alpha\tau + \alpha^2\tau^2)ds$$

elde edilir ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + \alpha^2 + (\kappa')^2 - 2\kappa'\alpha\tau$$
$$+\kappa^4 + \kappa^2\tau^2 + 2\kappa\tau\alpha' + (\alpha')^2 + \alpha^2\tau^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{N})$ için enerji

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\phi(\mathbf{N}),\phi(\mathbf{N})\rangle + \langle\nabla_\mathbf{T}\phi(\mathbf{N}),\nabla_\mathbf{T}\phi(\mathbf{N})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}, -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle$$

$$+\langle -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2 N + \Omega'\mathbf{B} - \tau\Omega\mathbf{N},$$

$$-\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2 N + \Omega'\mathbf{B} - \tau\Omega\mathbf{N}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + \tau^2 + (\kappa')^2$$

$$+\kappa^4 + \kappa^2\tau^2 + (\tau')^2 + \kappa^2\tau^2 + \tau^4)ds$$

ve gerekli işlemlerle

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + \tau^2 + (\kappa')^2$$

$$+\kappa^4 + 2\kappa^2\tau^2 + (\tau')^2 + \tau^4)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{B})$ için enerji

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle \phi(\mathbf{B}), \phi(\mathbf{B})\rangle + \langle \nabla_\mathbf{T}\phi(\mathbf{B}), \nabla_\mathbf{T}\phi(\mathbf{B})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}, -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle$$

$$+\langle -\alpha'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{N} - \tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{B},$$

$$-\alpha'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{N} - \tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\alpha^2 + \tau^2 + (\alpha')^2 - \alpha'\tau\kappa + \alpha^2\kappa^2$$

$$+\alpha\kappa\tau' + \alpha\kappa\tau' + (\tau')^2 - \alpha'\tau\kappa + \tau^2\kappa^2 + \tau^4)ds$$

veya

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\alpha^2 + \tau^2 + (\alpha')^2 - 2\alpha'\tau\kappa$$

$$+\alpha^2\kappa^2 + 2\alpha\kappa\tau' + (\tau')^2 + \tau^2\kappa^2 + \tau^4)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\mathbf{V}$ için enerji

$$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}\rangle + \langle \nabla_\mathbf{T}\mathbf{V}, \nabla_\mathbf{T}\mathbf{V}\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}, \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle$$

$$+\langle \tau'\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} + \alpha\kappa\mathbf{T} - \alpha\tau\mathbf{B} + \kappa'\mathbf{B},$$

$$\tau'\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} + \alpha\kappa\mathbf{T} - \alpha\tau\mathbf{B} + \kappa'\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau^2 + \alpha^2 + \kappa^2 + (\tau')^2 + \tau'\alpha\kappa + (\alpha')^2$$
$$+\tau'\alpha\kappa + \alpha^2\kappa^2 + \alpha^2\tau^2 - \alpha\tau\kappa' - \alpha\tau\kappa' + (\kappa')^2)ds$$

ve gerekli işlemlerle

$$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau^2 + \alpha^2 + \kappa^2 + (\tau')^2 + 2\tau'\alpha\kappa + (\alpha')^2$$
$$+\alpha^2\kappa^2 + \alpha^2\tau^2 - 2\alpha\tau\kappa' + (\kappa')^2)ds$$

elde edilir.

Teorem 5.1.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının enerjileri sırasıyla

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\Omega_2^2 + (\Omega_2')^2 + \Omega_2^2\kappa^2 + \Omega_2^2\tau^2)ds,$$
$$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\Omega_2^2 + \tau^2 + (\Omega_2')^2 \tag{5.3}$$
$$+2\Omega_2\kappa\tau^2 + (\tau')^2 + \Omega_2^2\kappa^2 + \tau^4)ds,$$
$$\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau^2 + (\tau')^2 + \tau^2\kappa^2 + \tau^4)ds,$$
$$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau^2 + \Omega_2^2 + (\tau')^2$$
$$+\tau^2\kappa^2 - 2\tau^2\kappa\Omega_2 + \Omega_2' + \Omega_2^2\tau^2)ds$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$ için enerji

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\phi(\mathbf{T}),\phi(\mathbf{T})\rangle + \langle\nabla_\mathbf{T}\phi(\mathbf{T}),\nabla_\mathbf{T}\phi(\mathbf{T})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\Omega_2\mathbf{N},\Omega_2\mathbf{N}\rangle + \langle\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\kappa\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{B},\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\kappa\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\Omega_2^2 + (\Omega_2')^2 + \Omega_2^2\kappa^2 + \Omega_2^2\tau^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{N})$ için enerji

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\phi(\mathbf{N}),\phi(\mathbf{N})\rangle + \langle\nabla_\mathbf{T}\phi(\mathbf{N}),\nabla_\mathbf{T}\phi(\mathbf{N})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle-\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B},-\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle$$
$$+\langle-\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} - \tau^2\mathbf{N},$$
$$-\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B} - \tau^2\mathbf{N}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\Omega_2^2 + \tau^2 + (\Omega_2')^2 + \Omega_2\kappa\tau^2$$

$$+(\tau')^2 + \Omega_2^2\kappa^2 + \Omega_2\kappa\tau^2 + \tau^4)ds$$

ve gerekli işlemlerle

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\Omega_2^2 + \tau^2 + (\Omega_2')^2$$

$$+2\Omega_2\kappa\tau^2 + (\tau')^2 + \Omega_2^2\kappa^2 + \tau^4)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{B})$ için enerji

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle\phi(\mathbf{B}), \phi(\mathbf{B})\rangle + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}), \nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle -\tau\mathbf{N}, -\tau\mathbf{N}\rangle$$

$$+\langle\tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{B}, \tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\tau^2 + (\tau')^2 + \tau^2\kappa^2 + \tau^4)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\mathbf{V}$ için enerji

$$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle\mathbf{V}, \mathbf{V}\rangle + \langle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V}, \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V}\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle\tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}, \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle + \langle\tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N}$$

$$+\Omega_2'\mathbf{B} - \Omega_2\tau\mathbf{N}, \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B} - \Omega_2\tau\mathbf{N}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\tau^2 + \Omega_2^2 + (\tau')^2 + \tau^2\kappa^2$$

$$-\tau^2\kappa\Omega_2 + (\Omega_2')^2 - \tau^2\kappa\Omega_2 + \Omega_2^2\tau^2)ds$$

ve gerekli işlemlerle

$$\varepsilon(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\tau^2 + \Omega_2^2 + (\tau')^2 + \tau^2\kappa^2$$

$$-2\tau^2\kappa\Omega_2 + (\Omega_2')^2 + \Omega_2^2\tau^2)ds$$

elde edilir.

5.2 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Fermi-Walker Türevi Yardımıyla Enerjileri

Teorem 5.2.1 β3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + (\kappa')^2 + \kappa^2\tau^2)ds,$$

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + \Omega^2 + (\kappa')^2 + (\Omega')^2 + \Omega^2\tau^2)ds, \tag{5.4}$$

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\Omega^2 + (\Omega')^2 + \Omega^2\tau^2)ds,$$

$$\varepsilon^{fermi}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\Omega^2 + \kappa^2 + (\Omega')^2 + (\kappa')^2 + \kappa^2\tau^2)ds$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(\phi(\mathbf{T})),(\phi(\mathbf{T}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\kappa\mathbf{N},\kappa\mathbf{N}\rangle + \langle\kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B},\kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + (\kappa')^2 + \kappa^2\tau^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{N})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(\phi(\mathbf{N})),(\phi(\mathbf{N}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle-\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B},-\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}\rangle$$

$$+\langle-\kappa'\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B} - \Omega\tau\mathbf{N},-\kappa'\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B} - \Omega\tau\mathbf{N}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + \Omega^2 + (\kappa')^2 + (\Omega')^2 + \Omega^2\tau^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle(\phi(\mathbf{B})),(\phi(\mathbf{B}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B})\rangle\right)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle-\Omega\mathbf{N},-\Omega\mathbf{N}\rangle\right.$$

$$\left.+\langle-\Omega'\mathbf{N}-\Omega\tau\mathbf{B},-\Omega'\mathbf{N}-\Omega\tau\mathbf{B}\rangle\right)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\Omega^2+(\Omega')^2+\Omega^2\tau^2\right)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\mathbf{V}$ manyetik alanının Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{fermi}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle\mathbf{V},\mathbf{V}\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V},\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V}\rangle\right)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{fermi}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle\Omega\mathbf{T}+\kappa\mathbf{B},\Omega\mathbf{T}+\kappa\mathbf{B}\rangle\right.$$

$$\left.+\langle\Omega'\mathbf{T}+\kappa'\mathbf{B}-\kappa\tau\mathbf{N},\Omega'\mathbf{T}+\kappa'\mathbf{B}-\kappa\tau\mathbf{N}\rangle\right)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{fermi}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\Omega^2+\kappa^2+(\Omega')^2+(\kappa')^2+\kappa^2\tau^2\right)ds$$

elde edilir.

Teorem 5.2.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_\beta \left(\kappa^2+\alpha^2+(\kappa')^2+\alpha^2\tau^2\right.\\
&\quad\left.-2\kappa'\alpha\tau+\kappa^2\tau^2+(\alpha')^2+2\kappa\tau\alpha'\right)ds,\\
\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{N})) &= \frac{1}{2}\int_\beta \left(\kappa^2+\tau^2+(\kappa')^2+\tau^4+(\tau')^2\right)ds,\\
\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_\beta \left(\alpha^2+\tau^2+(\alpha')^2+(\tau')^2+\tau^4\right)ds,\\
\varepsilon^{fermi}(\mathbf{V}) &= \frac{1}{2}\int_\beta \left(\tau^2+\alpha^2+\kappa^2+(\tau')^2+(\alpha')^2\right.\\
&\quad\left.+\tau^2\kappa^2+2\alpha'\tau\kappa+\alpha^2\tau^2+(\kappa')^2-2\alpha\tau\kappa'\right)ds
\end{aligned} \tag{5.5}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle(\phi(\mathbf{T})),(\phi(\mathbf{T}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T})\rangle\right)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle\kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}, \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}\rangle$$

$$+\langle(\kappa' - \alpha\tau)\mathbf{N} + (\kappa\tau + \alpha')\mathbf{B}, (\kappa' - \alpha\tau)\mathbf{N} + (\kappa\tau + \alpha')\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\kappa^2 + \alpha^2 + (\kappa')^2$$

$$+\alpha^2\tau^2 - 2\kappa'\alpha\tau + \kappa^2\tau^2 + (\alpha')^2 + 2\kappa\tau\alpha')ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{N})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle(\phi(\mathbf{N})), (\phi(\mathbf{N}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}), \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle$$

$$+\langle-\kappa'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}, -\kappa'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\kappa^2 + \tau^2 + (\kappa')^2 + \tau^4 + (\tau')^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle(\phi(\mathbf{B})), (\phi(\mathbf{B}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}), \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle-\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}, -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle$$

$$+\langle-\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}, -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\alpha^2 + \tau^2 + (\alpha')^2 + (\tau')^2 + \tau^4)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\mathbf{V}$ manyetik alanının Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{fermi}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle\mathbf{V}, \mathbf{V}\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V}\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{fermi}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle\tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}, \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle$$

$+\langle(\tau')\mathbf{T}+(-\alpha'-\tau\kappa)\mathbf{N}+(-\alpha\tau+\kappa')\mathbf{B},(\tau')\mathbf{T}$

$+(-\alpha'-\tau\kappa)\mathbf{N}+(-\alpha\tau+\kappa')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$\varepsilon^{fermi}(\mathbf{V})=\frac{1}{2}\int_\beta\left(\tau^2+\alpha^2+\kappa^2+(\tau')^2+(\alpha')^2\right.$

$\left.+\tau^2\kappa^2+2\alpha'\tau\kappa+\alpha^2\tau^2+(\kappa')^2-2\alpha\tau\kappa'\right)ds$

elde edilir.

Teorem 5.2.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Fermi-Walker enerjileri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{T}))&=\frac{1}{2}\int_\beta(\Omega_2^2+(\Omega_2')^2+\Omega_2^2\tau^2)ds,\\
\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{N}))&=\frac{1}{2}\int_\beta(\Omega_2^2+\tau^2+(\Omega_2')^2+\tau^4+(\tau')^2)ds,\\
\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{B}))&=\frac{1}{2}\int_\beta(\tau^2+(\tau')^2+\tau^4)ds,\\
\varepsilon^{fermi}(\mathbf{V})&=\frac{1}{2}\int_\beta(\tau^2+\Omega_2^2+(\tau')^2+\Omega_2^2\tau^2+(\Omega_2')^2)ds
\end{aligned}\tag{5.6}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji;

$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{T}))=\frac{1}{2}\int_\beta\left(\langle(\phi(\mathbf{T})),(\phi(\mathbf{T}))\rangle+\langle\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}),\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T})\rangle\right)ds$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{T}))=\frac{1}{2}\int_\beta\left(\langle\Omega_2\mathbf{N},\Omega_2\mathbf{N}\rangle\right.$

$\left.+\langle\Omega_2'\mathbf{N}+\Omega_2\tau\mathbf{B},\Omega_2'\mathbf{N}+\Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle\right)ds$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{T}))=\frac{1}{2}\int_\beta(\Omega_2^2+(\Omega_2')^2+\Omega_2^2\tau^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{N})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{N}))=\frac{1}{2}\int_\beta\left(\langle(\phi(\mathbf{N})),(\phi(\mathbf{N}))\rangle+\langle\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}),\tilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N})\rangle\right)ds$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{N}))=\frac{1}{2}\int_\beta\left(\langle-\Omega_2\mathbf{T}+\tau\mathbf{B},-\Omega_2\mathbf{T}+\tau\mathbf{B}\rangle\right.$

$\left.+\langle-\Omega_2'\mathbf{T}-\tau^2\mathbf{N}+\tau'\mathbf{B},-\Omega_2'\mathbf{T}-\tau^2\mathbf{N}+\tau'\mathbf{B}\rangle\right)ds$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\Omega_2^2 + \tau^2 + (\Omega_2')^2 + \tau^4 + (\tau')^2\right)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetinin Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle(\phi(\mathbf{B})),(\phi(\mathbf{B}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B})\rangle\right)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle-\tau\mathbf{N},-\tau\mathbf{N}\rangle$$

$$+\langle-\tau'\mathbf{N}-\tau^2\mathbf{B},-\tau'\mathbf{N}-\tau^2\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{fermi}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\tau^2 + (\tau')^2 + \tau^4\right)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre **V** manyetik alanının Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{fermi}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle\mathbf{V},\mathbf{V}\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V},\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{V}\rangle\right)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{fermi}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\tau\mathbf{T}+\Omega_2\mathbf{B},\tau\mathbf{T}+\Omega_2\mathbf{B}\rangle$$

$$+\langle\tau'\mathbf{T}-\Omega_2\tau\mathbf{N}+\Omega_2'\mathbf{B},\tau'\mathbf{T}-\Omega_2\tau\mathbf{N}+\Omega_2'\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{fermi}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\tau^2 + \Omega_2^2 + (\tau')^2 + \Omega_2^2\tau^2 + (\Omega_2')^2\right)ds$$

elde edilir.

5.3 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre normal Fermi-Walker Türevi Yardımıyla Enerjileri

Teorem 5.3.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\kappa^2 + (\kappa')^2\right)ds,$$

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle\kappa^2 + \Omega^2 + (\kappa')^2 + (\Omega')^2\right)ds, \tag{5.7}$$

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\Omega^2 + (\Omega')^2\right)ds,$$

$\varepsilon^{normal}(\mathbf{V})=\frac{1}{2}\int_{\beta}(\Omega^2+\kappa^2+(\Omega')^2+(\kappa')^2)ds$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvvetinin normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{T}))=\frac{1}{2}\int_{\beta}(\langle(\phi(\mathbf{T})),(\phi(\mathbf{T}))\rangle+\langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\Phi(\mathbf{T}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\Phi(\mathbf{T})\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{X}))=\frac{1}{2}\int_{\beta}(\langle\kappa\mathbf{N},\kappa\mathbf{N}\rangle+\langle\kappa'\mathbf{N},\kappa'\mathbf{N}\rangle)ds$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{X}))=\frac{1}{2}\int_{\beta}(\kappa^2+(\kappa')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{N})$ Lorentz kuvvetinin normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{N}))=\frac{1}{2}\int_{\beta}(\langle(\phi(\mathbf{N})),(\phi(\mathbf{N}))\rangle+\langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N})\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{N}))=\frac{1}{2}\int_{\beta}(\langle-\kappa\mathbf{T}+\Omega\mathbf{B},-\kappa\mathbf{T}+\Omega\mathbf{B}\rangle$

$+\langle-\kappa'\mathbf{T}+\Omega'\mathbf{B},-\kappa'\mathbf{T}+\Omega'\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{N}))=\frac{1}{2}\int_{\beta}(\langle\kappa^2+\Omega^2+(\kappa')^2+(\Omega')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetinin normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{B}))=\frac{1}{2}\int_{\beta}(\langle(\phi(\mathbf{B})),(\phi(\mathbf{B}))\rangle$

$+\langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B})\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{B}))=\frac{1}{2}\int_{\beta}(\langle-\Omega\mathbf{N},-\Omega\mathbf{N}\rangle$

$+\langle-\Omega'\mathbf{N},-\Omega'\mathbf{N}\rangle)ds$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{B}))=\frac{1}{2}\int_{\beta}(\Omega^2+(\Omega')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre **V** manyetik alanının normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{normal}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}\rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V}\rangle\right) ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{normal}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\langle \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}, \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}\rangle\right.$$
$$\left.+\langle \Omega'\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B}, \Omega'\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B}\rangle\right) ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{normal}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\Omega^2 + \kappa^2 + (\Omega')^2 + (\kappa')^2\right) ds$$

elde edilir.

Teorem 5.3.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{T})) &= \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\kappa^2 + \alpha^2 + (\kappa')^2 + (\alpha')^2\right) ds,\\
\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{N})) &= \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\kappa^2 + \tau^2 + (\kappa')^2 + (\tau')^2\right) ds,\\
\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{B})) &= \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\alpha^2 + \tau^2 + (\alpha')^2 + (\tau')^2\right) ds,\\
\varepsilon^{normal}(\mathbf{V}) &= \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\tau^2 + \alpha^2 + \kappa^2 + (\tau')^2 + (\alpha')^2 + (\kappa')^2\right) ds
\end{aligned} \tag{5.8}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvvetinin normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\langle (\phi(\mathbf{T})), (\phi(\mathbf{T}))\rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T}), \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T})\rangle\right) ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\langle \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}, \kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}\rangle\right.$$
$$\left.+\langle \kappa'\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B}, \kappa'\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B}\rangle\right) ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\kappa^2 + \alpha^2 + (\kappa')^2 + (\alpha')^2\right) ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{N})$ Lorentz kuvvetinin normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\langle (\phi(\mathbf{N})), (\phi(\mathbf{N}))\rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}), \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N})\rangle\right) ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle$$

$$+\langle -\kappa'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B}, -\kappa'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\kappa^2 + \tau^2 + (\kappa')^2 + (\tau')^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetinin normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle(\phi(\mathbf{B})), (\phi(\mathbf{B}))\rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}), \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}, -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle$$

$$+\langle -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N}, -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\alpha^2 + \tau^2 + (\alpha')^2 + (\tau')^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\mathbf{V}$ manyetik alanının normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{normal}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}\rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V}\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{normal}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}, \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle$$

$$+\langle \tau'\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}, \tau'\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{normal}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\tau^2 + \alpha^2 + \kappa^2$$

$$+(\tau')^2 + (\alpha')^2 + (\kappa')^2)ds$$

elde edilir.

Teorem 5.3.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı $\mathbf{B}$-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve $\mathbf{V}$ manyetik alanının normal Fermi-Walker enerjileri sırasıyla

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\Omega_2^2 + (\Omega_2')^2)ds,$$

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\Omega_2^2 + \tau^2 + (\Omega_2')^2 + (\tau')^2)ds, \tag{5.9}$$

$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau^2 + (\tau')^2)ds,$

$\varepsilon^{normal}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau^2 + \Omega_2^2 + (\tau')^2 + (\Omega_2')^2)ds$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvvetinin normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(\phi(\mathbf{T})),(\phi(\mathbf{T}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{T})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\Omega_2\mathbf{N},\Omega_2\mathbf{N}\rangle + \langle\Omega_2'\mathbf{N},\Omega_2'\mathbf{N}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\Omega_2^2 + (\Omega_2')^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{N})$ Lorentz kuvvetinin normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(\phi(\mathbf{N})),(\phi(\mathbf{N}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{N})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle-\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle$$
$$+\langle-\Omega_2'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B}, -\Omega_2'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\Omega_2^2 + \tau^2 + (\Omega_2')^2 + (\tau')^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetinin normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(\phi(\mathbf{B})),(\phi(\mathbf{B}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\phi(\mathbf{B})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle-\tau\mathbf{N},-\tau\mathbf{N}\rangle + \langle-\tau'\mathbf{N},-\tau'\mathbf{N}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{normal}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau^2 + (\tau')^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\mathbf{V}$ manyetik alanının normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{normal}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}\rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}\mathbf{V}\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{normal}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}, \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle$$
$$+\langle \tau'\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{B}, \tau'\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{normal}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\tau^2 + \Omega_2^2 + (\tau')^2 + (\Omega_2')^2)ds$$

elde edilir.

5.4 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre modifiye(bi-normal) Fermi-Walker Türevi Yardımıyla Enerjileri

Teorem 5.4.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\kappa^2 + (\kappa')^2 + \kappa^4)ds,\\
&\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\kappa^2 + \Omega^2 + (\kappa')^2 + \kappa^4 + (\Omega')^2)ds, \qquad (5.10)\\
&\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\Omega^2 + (\Omega')^2 + \Omega^2\kappa^2)ds,\\
&\varepsilon^{modified}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\Omega^2 + \kappa^2 + (\Omega')^2 + \Omega^2\kappa^2 + (\kappa')^2)ds
\end{aligned}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvvetinin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle(\phi(\mathbf{T})), (\phi(\mathbf{T}))\rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}), \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle \kappa\mathbf{N}, \kappa\mathbf{N}\rangle + \langle \kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T}, \kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\kappa^2 + (\kappa')^2 + \kappa^4)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{N})$ Lorentz kuvvetinin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\langle(\phi(\mathbf{N})),(\phi(\mathbf{N}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N})\rangle\right)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\langle-\kappa\mathbf{T}+\Omega\mathbf{B},-\kappa\mathbf{T}+\Omega\mathbf{B}\rangle\right.$$
$$\left.+\langle-\kappa'\mathbf{T}-\kappa^2\mathbf{N}+\Omega'\mathbf{B},-\kappa'\mathbf{T}-\kappa^2\mathbf{N}+\Omega'\mathbf{B}\rangle\right)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\kappa^2+\Omega^2+(\kappa')^2+\kappa^4+(\Omega')^2\right)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetinin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\langle(\phi(\mathbf{B})),(\phi(\mathbf{B}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B})\rangle\right)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\langle-\Omega\mathbf{N},-\Omega\mathbf{N}\rangle\right.$$
$$\left.+\langle-\Omega'\mathbf{N}+\Omega\kappa\mathbf{T},-\Omega'\mathbf{N}+\Omega\kappa\mathbf{T}\rangle\right)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\Omega^2+(\Omega')^2+\Omega^2\kappa^2\right)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\mathbf{V}$ manyetik alanının modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{modified}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\langle\mathbf{V},\mathbf{V}\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V},\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V}\rangle\right)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{modified}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\langle\Omega\mathbf{T}+\kappa\mathbf{B},\Omega\mathbf{T}+\kappa\mathbf{B}\rangle\right.$$
$$\left.+\langle\Omega'\mathbf{T}+\Omega\kappa\mathbf{N}+\kappa'\mathbf{B},\Omega'\mathbf{T}+\Omega\kappa\mathbf{N}+\kappa'\mathbf{B}\rangle\right)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{modified}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} \left(\Omega^2+\kappa^2+(\Omega')^2+\Omega^2\kappa^2+(\kappa')^2\right)ds$$

elde edilir.

Teorem 5.4.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve $\mathbf{V}$ manyetik alanının modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + \alpha^2 + (\kappa')^2 + \kappa^4 + (\alpha')^2)ds,$$

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + \tau^2 + (\kappa')^2 + \kappa^4 + (\tau')^2)ds, \quad (5.11)$$

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\alpha^2 + \tau^2 + (\alpha')^2 + \tau^2\kappa^2$$

$$-2\alpha'\tau\kappa + \alpha^2\kappa^2 + (\tau')^2 + 2\alpha\kappa\tau')ds,$$

$$\varepsilon^{modified}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau^2 + \alpha^2 + \kappa^2 + (\tau')^2 + \alpha^2\kappa^2$$

$$+2\tau'\alpha\kappa + \tau^2\kappa^2 + (\alpha')^2 - 2\tau\kappa\alpha' + (\kappa')^2)ds$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvvetinin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(\phi(\mathbf{T})),(\phi(\mathbf{T}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B},\kappa\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}\rangle$$

$$+\langle\kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{B},\kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + \alpha^2 + (\kappa')^2 + \kappa^4 + (\alpha')^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{N})$ Lorentz kuvvetinin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(\phi(\mathbf{N})),(\phi(\mathbf{N}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B},-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle$$

$$+\langle-\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},-\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^2 + \tau^2 + (\kappa')^2 + \kappa^4 + (\tau')^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetinin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(\phi(\mathbf{B})),(\phi(\mathbf{B}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}, -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}\rangle + \langle(-\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{T}$

$+(-\alpha\kappa - \tau')\mathbf{N}, (-\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{T} + (-\alpha\kappa - \tau')\mathbf{N}\rangle)ds$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\alpha^2 + \tau^2 + (\alpha')^2 + \tau^2\kappa^2$

$-2\alpha'\tau\kappa + \alpha^2\kappa^2 + (\tau')^2 + 2\alpha\kappa\tau')ds$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre **V** manyetik alanının modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$\varepsilon^{modified}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}\rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V}\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\varepsilon^{modified}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}, \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}\rangle + \langle(\tau' + \alpha\kappa)\mathbf{T}$

$+(\tau\kappa - \alpha')\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}, (\tau' + \alpha\kappa)\mathbf{T} + (\tau\kappa - \alpha')\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$\varepsilon^{modified}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau^2 + \alpha^2 + \kappa^2 + (\tau')^2 + \alpha^2\kappa^2$

$+2\tau'\alpha\kappa + \tau^2\kappa^2 + (\alpha')^2 - 2\tau\kappa\alpha' + (\kappa')^2)ds$

elde edilir.

Teorem 5.4.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\Omega_2^2 + (\Omega_2')^2 + \Omega_2^2\kappa^2)ds,\\
&\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\Omega_2^2 + \tau^2 + (\Omega_2')^2 + \Omega_2^2\kappa^2 + (\tau')^2)ds,\\
&\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau^2 + (\tau')^2 + \tau^2\kappa^2)ds,\\
&\varepsilon^{modified}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau^2 + \Omega_2^2 + (\tau')^2 + \tau^2\kappa^2 + (\Omega_2')^2)ds
\end{aligned} \tag{5.12}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$ Lorentz kuvvetinin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(\phi(\mathbf{T})), (\phi(\mathbf{T}))\rangle + \langle \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T}), \widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{T})\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle \Omega_2\mathbf{N}, \Omega_2\mathbf{N}\rangle + \langle \Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\kappa\mathbf{T}, \Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\kappa\mathbf{T}\rangle)ds$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\Omega_2^2 + (\Omega_2')^2 + \Omega_2^2\kappa^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{N})$ Lorentz kuvvetinin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle(\phi(\mathbf{N})),(\phi(\mathbf{N}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{N})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle-\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, -\Omega_2\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}\rangle$$

$$+\langle-\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}, -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{modifiye}(\phi(\mathbf{N})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\Omega_2^2 + \tau^2 + (\Omega_2')^2 + \Omega_2^2\kappa^2 + (\tau')^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetinin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle(\phi(\mathbf{B})),(\phi(\mathbf{B}))\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B}),\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\phi(\mathbf{B})\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle-\tau\mathbf{N}, -\tau\mathbf{N}\rangle + \langle-\tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T}, -\tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{modified}(\phi(\mathbf{B})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\tau^2 + (\tau')^2 + \tau^2\kappa^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde Frenet çatısına göre **V** Lorentz kuvvetinin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerji

$$\varepsilon^{modified}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle\mathbf{V},\mathbf{V}\rangle + \langle\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V},\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}\mathbf{V}\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır. Buna göre

$$\varepsilon^{modified}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle\tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}, \tau\mathbf{T} + \Omega_2\mathbf{B}\rangle$$

$$+\langle\tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}, \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur. Burada iç çarpım işlemleri yapılırsa

$$\varepsilon^{modified}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\tau^2 + \Omega_2^2 + (\tau')^2 + \tau^2\kappa^2 + (\Omega_2')^2)ds$$

elde edilir.

6. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, 3-boyutlu uzayda Frenet çatısına göre T, N, B manyetik eğrilerinin türevleri, Fermi-Walker türevleri, normal Fermi-Walker türevleri ve modifiye (bi-normal) Fermi-Walker türevleri hesaplanarak Frenet çatısındaki bazı vektör alanlarının enerji denklemleri elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Balakrishnan, R. 2005. Space curves, anholonomy and nonlinearity. *Pramana Journal of Physics*, 64 (4), 607-615.

Barros, M., Cabrerizo, L., Fernandez, M., Romeo, A., 2007. Magnetic Vortex Filament Flows. *J Math Phys*, 48, 1-27.

Benn, I. M. and Tucker, R. W., 1989. Wave mechanics and inertial guidance, *The American Physical Society*, 39 (6), 1594-1601.

Bozkurt, Z., Gök İ., Yaylı Y., Ekmekci F.N. 2014. A new approach for magnetic curves in 3D Riemannian manifolds, *Journal of Mathematical Physics*, 55 (5). 053501.

Bükcü, B., Karacan, M.K., 2008a. Special Bishop Motion and Bishop Darboux rotation axis of the space curve. *J. Dyn. Syst. Geom. Theor*., 6(1), 27-3.

Bükcü, B., Karacan, M.K., 2008b.On theSlant Helices According to Bishop Frame of the Timelike Curve in Lorentzian Space. *Tamkang J. Math*., 39(3), 255-262.

Büyükkütük, S., Öztürk, G., 2015. Constant Ratio Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space . *Gen. Math. Notes*, Vol.28, no.1, pp.81-91. 3 E

Chacon, P.M., Naveira, A.M., Weston, J.M.: On the energy of distributions, with application to the quaternionic Hopf fibrations. *Monatsh. Math*. 133, 281–294 (2001)

Chacon P. M., Naveira A. M., Corrected Energy of Distrubution on Riemannian Manifolds, *Osaka J. Math*., **41** (2004), 97–105.

Clain, C., Crasmareanu, M., 2015. Magnetic Curves in Three - Dimensional Quasi - Para - Sasakian Geometry. *Mediterr. J. Math*., DOI 10.1007/s00009-015-0570-y.

Dandolof, R. 1989. Berry's Phase and Fermi-Walker parallel transport, *Elsevier science publishers Physics Letters A*, 139 (1-2), 19-20.

Druta-Romaniuc, S.L., Inoguchi, J.I., Munteanu, M.I., Nistor, A.I., 2013. Magnetic Curves in Sasakian Manifolds. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol. 22, No. 3, 428-447.

Druta-Romaniuc, S.L., Munteanu, M.I., 2013. Killing Magnetic Curves in a Minkowski 3-Space. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 14, 383-396.

Fermi E., Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. *Fiz. Mat. Nat.*, 31, 184 (1922) 306.

Hacısalihoğlu, H. H., 2002. Diferensiyel Geometri, *Fen Fakültesi yayınları*, Cilt 1. 269, Ankara.

Karakuş, F., Yaylı, Y., 2012. On the Fermi-Walker derivative and non-rotating frame, *Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 52

Körpinar, T., Demirkol, R.C., Asil, V., 2017. New Characterizations on the energy of parallel vector fields in Minkowski Space *Journal of Advanced Physics* 6(4), 562-569(8).

Manoff S., Fermi derivative and Fermi- Walker transports over (Ln, g)- spaces, Internat. *J. Modern Phys. A*, 13, No.25 (1998) 4289- 4308.

Munteanu, M.I., Nistor, A.I., 2012. The Classification of Killing Magnetic Curves in . *Journal of Geometry and Physics*, 62, 170-182. R2 S

Munteanu, M.I., 2013. Magnetic Curves in a Euclidean Space: One example, Several Applications. *Publications de L'Institut Mathematique*, 94(108), 141-150.

Özdemir, Z., Gök, İ., Yaylı,Y., Ekmekçi, F.N., 2015. Notes on Magnetic Curves in 3D semi-Riemannian Manifolds. *Turk J. Math*., 39, 412-426.

Sabuncuoğlu, A., 2001. Diferensiyel Geometri. *Nobel Yayınları*, 522, Ankara.

Synge, J.L., 1960. Relativity: The General Theory. Amsterdam, *North Holland Pub*. Co.

Yılmaz, S., Turgut, M., 2010. A new Version of Bishop Frame and an Application to Spherical İmages. *J. Math. Anal. Appl*., 371, 764-776.