T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANYETİK ADJOINT EĞRİLER

Samet AYCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2023
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANYETİK ADJOINT EĞRİLER

Samet AYCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

Şubat-2023
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Samet AYCAN tarafından hazırlanan “Manyetik Adjoint Eğriler” adlı tez çalışması 10/02/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..
Danışman Prof. Dr. Talat KÖRPINAR Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..
Üye Dr. Öğr. Üyesi Ahmet SAZAK Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu …./…./…. Tarih ve …./…. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION THESIS

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Samet AYCAN

Şubat 2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MANYETİK ADJOINT EĞRİLER

Samet AYCAN

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, öncelikle tanım ve kavramlar verilmiştir. Sonra, 3-boyutlu Öklid uzayındaki manyetik eğriler üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayındaki uzay eğrilerinin adjoint eğrileri ile ilgili tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, 3-Boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre ilişkili eğrilerin manyetik alan denklemleri hesaplanmıştır.

2023, 34 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Adjoint vektör, Frenet çatı, Lorentz kuvveti, manyetik eğriler, manyetik alan denklemleri.

ABSTRACT

MS THESIS

MAGNETIC ADJOINT CURVES

Samet AYCAN

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

This study consists of four chapters. The first chapter is the introduction of the study, and the definitions and concepts are given first. Then, the study of magnetic curves in the 3-dimensional Euclidean space is given information in the literature. In the second chapter, contains the basic definitions and theorems used in our study. In the third chapter, definitions and theorems related to adjoint curves of space curves in 3-dimensional Euclidean space are given. In the fourth chapter, the magnetic field equations of the associated curves according to Frenet framework in 3-dimensional Euclidean space. The fields equations were calculated.

2023, 34 Pages

Keywords: Adjoint vector, Frenet frames, Lorentz force, magnetic curves, magnetic field equations.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, çalışmamın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayıran saygı değer hocam Prof. Dr. Talat KÖRPINAR’a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu süreç boyunca her daim yanımda olan değerli eşim Kübra AYCAN’a teşekkür ederim.

Samet AYCAN
MUŞ-2023

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}^3$	: 3-Boyutlu Öklid Uzay
β	: Adjoint Eğri
τ	: Burulma
$\mathbf{W}$	: Darboux Vektörü
κ	: Eğrilik
$\{\mathbf{T},\ \mathbf{N},\ \mathbf{B}\}$	: Frenet Çatı
$\{\overline{\mathbf{T}},\ \overline{\mathbf{N}},\ \overline{\mathbf{B}}\}$	: Frenet İlişkili Vektörler
Φ	: Lorentz Kuvveti
$\mathbb{B}$	: Manyetik Alan

1. GİRİŞ

Eğrilerin diferansiyel geometrisi, eğrilerin geometrik ve fiziksel özelliklerinin diferansiyel işlemler yardımıyla karakterize edilmesini sağlar. Ayrıca bu karakterizasyonlar sayesinde eğri türlerinin belirlenmesinde önemli bir yeri vardır. α birim hızlı eğrisinin sırasıyla burulması τ, eğriliği κ olmak üzere; $\kappa = 0$ ise α bir doğru; $\kappa > 0$, $\tau = 0$ ise α bir düzlem eğrisi veya bir dairenin parçasıdır. Eğrilerin Frenet vektörleri herhangi bir eğrinin geometrik özelliklerini tanımlamada, hareket ve eğrilerin Frenet vektörleri arasındaki ilişki eğrilerini sınıflandırmada önemli bir rol oynar. Örneğin; $\mathbb{R}^3$ teki bir eğriye karşılık gelen noktalarda bu iki eğrinin ana normal vektörlerinin doğrusal olarak bağımlı olduğu ikinci bir eğri varsa bu iki eğriye Bertrand eğri çifti denir. Ayrıca teğet vektörleri ortogonal olan iki eğriye involute-evolute eğri çifti denir (Güven, 2013; Tunçer, 2012).

Başka bir eğri türü olan adjoint eğrisi, binormal vektörünün herhangi bir s parametresine göre integrali olarak tanımlanmıştır (Nurkan ve ark., 2018). Bu çalışmada eğrilik, burulma ve Frenet çatı kullanılarak adjoint eğrilerinin karakterizasyonları elde edilmiştir.

Genel helisler veya eğim çizgilerinin teğetleri her noktada sabit bir yön ile sabit bir açı oluşturur. $\mathbb{R}^3$ teki genel bir sarmal, teğet çizgileri genel sarmalın ekseni olarak adlandırılan durağan bir yön ile durağan bir açı oluşturan eğridir. Bu eğriye; $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı $(\tau \neq 0)$ sabit ise veya κ ve τ sıfırdan farklı sabitler ise genel helis denir. $\kappa \neq 0$ olan bir eğri eğrinin asli normal çizgileri ile durağan bir yön ile durağan bir açı yapıyorsa eğik sarmal olarak adlandırılır. Eğik bir sarmalın ana normal vektörü durağan bir yön ile durağan bir açı oluşturur ve merkez noktası sabit bir eksen etrafında ilerler. $\langle \mathbf{N}, \mathbf{V} \rangle = sabit$.

İzumiya ve Takeuchi, bir eğrinin sadece jeodezik olması halinde eğimli bir helis olduğunu

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa_\alpha^2}{(\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'\right)(s)$$

sabit bir fonksiyon olma şartı ile elde etti (İzumiya ve Takeuchi, 2004).

Körpınar Frenet-Serret çerçeve inşaatını kullanarak Heisenberg ara zamanındaki iki harmonik parçacık gibi bir zamana göre enerji konusunu tartıştı. Körpınar ve Demirkol, farklı uzay gemilerinde farklı ortonormal çerçeve yapıları göz önünde bulundurularak dinamik ve elektrodinamik güç alanlarında hareketli parçacığın enerjisini ve enerji işlevselliğini en aza indirdi (Körpınar, 2014; Körpınar ve Demirkol 2017; Körpınar ve Demirkol 2018).

Bir mıknatısın kendi özelliklerini açığa çıkardığı alan, manyetik alan olarak ifade edilir. Çevresindeki çizgilere ise, mıknatısın orada meydana getirdiği manyetik alan çizgileri denir. Bu yön kuzey kutbundan güneye doğrudur. Bunun oluşturulması için her zaman mıknatısa gerek duyulmaz. Elektriksel parçacıkların devinimiyle de üretilebilir. Yönü ve kuvveti olan bir büyük olan manyetik alan $\mathbb{B}$ ile gösterilir.

Manyetik alanın birden fazla yaralanıldığı alanı mevcuttur. Yeryüzü kendisinin manyetik alanını oluşturur ve bu pusulanın esas işleme ilkesini meydana getirir. Dönen manyetik alan elektrik motorlarında ve jeneratörlerde yararlanılır. Manyetik kuvvetler bir materyal içerisindeki yük iletici sayısıyla ilgili malumat verir (Hacıfazlıoğlu, 2013).

Elektriksel alan, bir elektrik yükün diğer bir elektrik yükü üzerinde meydana getirdiği itme veya çekme gücüne denir. Yüklü bir cismin etrafında pozitif birim yüke tesir eden elektriksel kuvvet olarak da tanımlanabilir. Elektrik yüklerinin etrafında elektrik alan çizgileri meydana gelir ve bu $\mathbf{E}$ ile gösterilir (Synge, 1960).

En kapsamlı olarak manyetik alanı devinim eden elektriksel yüke tesir eden Lorentz kuvveti ile ifade edilir. Lorentz kuvveti, fizikte bilhassa elektromanyetizmada; elektromanyetik alanların meydana getirdiği noktasal yük üstündeki elektrik ve manyetik etkilerin bileşkesidir. Elektromanyetik radyasyon yayması sebebiyle hızlanan yüklü bir parçacıktaki geri tepme kuvveti olarak da ifade edilebilir. Yani manyetik alan içinde elektrik yüküne sahip bir parçacığın devinim halinde olduğunu kabul edelim. Bu yük üzerine tesir eden manyetik kuvvet, Lorentz kuvvetidir.

İlk çalışmalar, matematik tarihçileri tarafından 1865 yılında James Clerck Maxwell'in yazdığı bir makaleyle bağdaştırılsada Lorentz kuvvetinin ilk geliştirilmesi, 1889'da Oliver Heaviside'a isnad edilmiştir. Bundan bir kaç yıl sonra da Hollandalı fizikçi Hendrik Antoon Lorentz denklemi geliştirilmiştir.

Manyetik ve elektriksel alan sırasıyla $\mathbb{B}$ ve $\mathbf{E}$ olmak üzere, $\mathbf{v}$ hızlı $\mathbf{q}$ yüküne tesir eden Lorentz kuvveti aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{q}(\vec{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \vec{\mathbb{B}})$$

Buradan, Lorentz kuvvetinin hız vektörüyle manyetik alan vektörüne dik olduğunu görüyoruz. Manyetik kuvvet, $\mathbf{v}$ ve $\mathbb{B}$ nin vektörel çarpımından dolayı sıfır olur. Lorentz kuvveti en büyük değerini iki vektörün birbirine dik olduğu zamanda alır. Manyetik kuvvet parçacığın hızına her zaman dik olduğundan dolayı hızı; şiddetini değiştirmez fakat yönünü değiştirir. Manyetik alanda bundan dolayı yüklü bir parçacık çembersel eylemler oluşturur (Synge, 1960).

Lorentz kuvveti yardımıyla bazı yöntemler önerilmiştir. Bunlardan biri de elektriksel empedans tomografisi ile biyolojik dokuların elektriksel iletkenliklerini görüntülemek olmuştur. Bu metot, erken dönem kanser dokularının teşhisi için son dönemlerde tavsiye edilen bir yöntem haline gelmiştir.

Aynı zamanda Lorentz kuvveti, manyetik kuvvet ile hareket eden bir gemi yapımına başarı ile uyarlanabilmiştir. YAMATO 1 olarak adlandırılan gemi 1992'de yüzdürülmüştür. Gemide Lorentz kuvvetini meydana getirecek süper mıknatıs ve elektrod sistemi, direkt gemiye itme kuvveti sağlayacak bir su jetine uygulanmıştır. Amaç enerji verimliliği ve çevre dostu uygulamaları günlük hayata yerleştirmektir.

Pozitif yük niceliklerinin negatif yük niceliklerine eşit olmadığı parçacıklara yüklü parçacıklar denir. Pozitif yük miktarı daha fazlaysa, parçacık artı yüklü; negatif yük miktarı daha fazlaysa, parçacık eksi yüklü olur. Birbirine eşit olması durumunda ise parçacık yüksüz veya nötr olur. Bu sebepten mıknatıssal alanda devinim yapan yüklü parçacığa Lorentz kuvveti etki eder.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

Tanım 2.1 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini ifade etmek üzere, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_i \in \mathbb{R}\}$ vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{2.1}$$

eşitliği ile ifade edilen ,

$$\langle , \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to \langle x, y \rangle$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu **Öklid iç çarpımı** olarak adlandırılır.
$x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{2.2}$$

olduğunu varsayarak,$\|, \|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \quad \to \quad \sqrt{\langle x, x \rangle}$
fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Bu nedenle $\mathbb{R}^n$ uzayına normlu vektör uzayı olarak adlandırılır.

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{2.3}$$

biçiminde ifade edilen , $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Bu metrikle $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzay olur. Bu **Öklid uzayı** olarak adlandırılır ve bazen $\mathbb{E}^n$ ile ifade edilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2 $\mathbb{R}$ nin açık bir aralığı I olarak verilsin,
$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
şeklinde diferensiyellenebilir bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzayında **eğri** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.3 $\alpha: I \to \mathbb{E}^n$ bir eğri olarak kabul edelim. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ deki

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}|_t = (\frac{d\alpha_1}{dt}(t),\dots,\frac{d\alpha_n}{dt}(t)) \tag{2.4}$$

vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ deki **hız vektörü** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.4 $\alpha: I \to E^n$ bir eğri olarak kabul edelim. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ deki hız vektörü sıfıra eşit değil ise, α eğrisi **regüler bir eğri** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.5 Bir, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ s \to \alpha(s)$
eğrisi için, $\|\alpha'(s)\| = 1, \forall s \in I$ olduğunda α eğrisi **birim hızlı eğri** olarak adlandırılır. Burada eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** olarak adlandırılır (Izumiya ve Takeuchi**,** 2004; Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.6 $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için,

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) \tag{2.5}$$

eşitliğiyle tanımlı $\mathbf{T}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** olarak ifade edilir. **T** vektör alanına, α eğrisinin **teğet vektör alanı** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.7 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisiyle ilgili olarak, $\kappa: I \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| \tag{2.6}$$

fonksiyonuna α nın **eğrilik fonksiyonu** olarak ifade edilir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.8 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için ,

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{T}'(s) \tag{2.7}$$

eşitliğiyle belirli $\mathbf{N}(s)$ vektörü, α eğrisinin $\alpha(s)$ daki **asli normali** olarak adlandırılır. **N** vektör alanına, α eğrisinin **asli normal vektör alanı** olarak ifade edilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.9 $\mathbb{R}^3$ deki birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisiyle ilgili,

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) \tag{2.8}$$

eşitliğiyle tanımlı $\mathbf{B}(s)$ vektörü, α eğrisinin $\alpha(s)$ daki **binormali** olarak ifade edilir. **B** vektör alanı, α eğrisinin **binormal vektör alanı** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.10 $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ vektörlerine, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ daki **Serret-Frenet vektörleri** olarak adlandırılır. $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ elemanlarına, α nın $\alpha(s)$ daki **Frenet çatısı** olarak ifade edilir ve **T**, **N**, **B** vektör alanlarına, α üzerinde **Frenet vektör alanları** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.11 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları **T**, **N**, **B** ve $\tau: I \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \tag{2.9}$$

fonksiyonuna, α nın $\alpha(s)$ noktasındaki torsionu olarak ifade edilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.1 $\mathbb{R}^3$ deki birim hızlı $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisini dikkate alalım. Frenet vektör alanları **T**, **N**, **B** ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırayla **κ** ve **τ** olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \kappa \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}' &= -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= -\tau \mathbf{N}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

olarak bulunur (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.2 Birim hızlı olmayan, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $u \to \alpha(u)$

eğrisini dikkate alalım. Frenet vektör alanları **T**, **N**, **B** ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırayla κ ve τ olmak üzere,

$$\mathbf{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|},$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T},$$

$$\mathbf{B} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|},$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3},$$

$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$ dir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.3 $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olarak kabul edelim. α nın eğriliği sıfır ise $\alpha(I)$ kümesi $\mathbb{R}^3$ de bir doğrunun alt kümesidir. Buna karşın $\alpha(I)$ kümesi $\mathbb{R}^3$ de bir doğrunun alt kümesi ise α nın eğriliği sıfır olur (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.4 $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi düzlemsel ise $\tau = 0$ dır ve eğrinin her bir noktasındaki dokunum düzlemi, eğrinin içinde olduğu E düzlemidir. Karşıt olarak, $\tau = 0$ ise $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi düzlemseldir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.12 Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile ortak aralıkta ifade edilen $\overline{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için α nın $\alpha(s)$ daki teğeti $\overline{\alpha}(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle \overline{\mathbf{T}}(s), \mathbf{T}(\mathbf{s}) \rangle = 0$ ise $\overline{\alpha}$, α nın bir **involütü** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.5 $\overline{\alpha}$ nın α eğrisinin bir involütü olduğunu varsayalım. $\overline{\alpha}$ nın Frenet vektör alanları $\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{B}}$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{T}} &= \mathbf{N} \\ \overline{\mathbf{N}} &= -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{T} + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{B} \\ \overline{\mathbf{B}} &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{T} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{B} \end{aligned} \tag{2.11}$$

olarak elde edilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.6 $\overline{\alpha}$ eğrisi α eğrisinin bir involütü olduğunu varsayalım. $\overline{\alpha}$ nın eğrilik ve burulması $\overline{\kappa}$ ve $\overline{\tau}$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \overline{\kappa} &= \frac{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)(s)}}{|(-s+\kappa)| + \kappa(s)} \\ \overline{\tau} &= \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(s)}{(\kappa^2+\tau^2)(s)} \end{aligned} \tag{2.12}$$

olarak elde edilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.13 Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile ortak aralıkta ifade edilen $\overline{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için $\overline{\alpha}$ eğrisinin $\overline{\alpha}(s)$ noktasındaki teğeti $\alpha(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle \overline{\mathbf{T}}(s), \mathbf{T}(\mathbf{s}) \rangle = 0$ ise $\overline{\alpha}$ eğrisine α eğrisinin bir **evolütü** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.7 $\overline{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi, birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin bir evolütü olarak kabul edelim. $\overline{\alpha}$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{B}}$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{T}} &= \cos(\varphi + c)\mathbf{N} - \sin(\varphi + c)\mathbf{B} \\ \overline{\mathbf{N}} &= -\mathbf{T} \\ \overline{\mathbf{B}} &= \sin(\varphi + c)\mathbf{N} + \cos(\varphi + c)\mathbf{B} \end{aligned} \tag{2.13}$$

olarak elde edilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.8 $\overline{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi, birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin bir evolütü olarak kabul edelim. $\overline{\alpha}$ nın eğrilik ve burulması $\overline{\kappa}$ ve $\overline{\tau}$ ise,

$$\begin{aligned} \overline{\kappa} &= \frac{\kappa^3 \cos^3(\varphi + c)}{\kappa\tau \sin(\varphi + c) - \kappa' \cos(\varphi + c)} \\ \overline{\tau} &= \frac{-\kappa^3 \sin(\varphi+c)\cos^2(\varphi+c)}{\kappa\tau\sin(\varphi+c) - \kappa'\cos(\varphi+c)} \end{aligned} \tag{2.14}$$

olarak elde edilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.9 $\overline{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi, birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin bir evolütü olarak kabul edelim. $\overline{\alpha}$ nın eğrilik ve burulması $\overline{\kappa}$ ve $\overline{\tau}$ ise,

$$\frac{\overline{\tau}}{\overline{\kappa}} = -\tan(\varphi + c) \tag{2.15}$$

Tanım 2.14 Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile ortak aralıkta ifade edilen $\overline{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için $\overline{\alpha}(s)$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasını birleştiren doğru, $\overline{\alpha}$ eğrisinin $\overline{\alpha}(s)$ daki birinci normalini ve α nın $\alpha(s)$ daki birinci normalini kapsıyorsa, $\overline{\alpha}$ eğrisi α eğrisiyle **Bertrand eğri çifti** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.10 $\overline{\alpha}$ eğrisi α eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyorsa, k durağan bir sayı olmak üzere, $\overline{\alpha}$ eğrisi

$$\overline{\alpha} = \alpha + k\mathbf{N} \tag{2.16}$$

denklemi ile tanımlanır (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.11 $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun, $\overline{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi α eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluştursun. $\overline{\alpha}$ nın Frenet vektör alanları $\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{B}}$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{T}} &= (\cos\theta)\mathbf{N} - (\sin\boldsymbol{\theta})\mathbf{B} \\ \overline{\mathbf{N}} &= -\mathbf{N} \\ \overline{\mathbf{B}} &= (\sin\theta)\mathbf{T} + (\cos\theta)\mathbf{B} \end{aligned} \tag{2.17}$$

dir. Burada $\cos\theta = \langle \overline{\mathbf{T}}, \mathbf{T} \rangle$ dır (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.12 $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun, $\overline{\alpha}: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi α ile Bertrand eğri çifti oluştursun. $\overline{\alpha}$ nın eğrilik ve burulması $\overline{\kappa}$ ve $\overline{\tau}$ olarak seçilirse,

$$\begin{aligned} \overline{\kappa} &= \frac{k\kappa - \sin^2\boldsymbol{\theta}}{k(1 - k\kappa)} \\ \overline{\tau} &= \frac{1}{k^2\tau}\sin^2\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \tag{2.18}$$

olarak elde edilir. Burada $\cos\theta = \langle \overline{\mathbf{T}}, \mathbf{T} \rangle$ dır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.15 α, birim hızlı, burulması sıfırdan farklı $(\tau \neq 0)$ bir eğri ve α nın Frenet vektörleri $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olsun. α nın asli yön eğrisi;

$$\overline{\alpha}\,(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbf{N}(s)ds \tag{2.19}$$

olarak ifade edilir (Choi ve Kim, 2012).

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA UZAY EĞRİLERİNİN ADJOİNT EĞRİLERİ

α, birim hızlı, burulması sıfırdan farklı $\tau \neq 0$ bir eğri ve α nın Frenet vektörleri $\{\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha\}$ olsun. α'nın adjoint eğrisi;

$$\beta(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbf{B}_\alpha(s) ds \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır. α eğrisinin eğriliği κ_α ve burulması τ_α olsun. Frenet vektörleri ve Frenet denklemleri

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\alpha(s) &= \alpha'(s) \\ \mathbf{N}_\alpha(s) &= \frac{\alpha''(s)}{||\alpha''(s)||} \\ \mathbf{B}_\alpha(s) &= \mathbf{T}_\alpha(s) \times \mathbf{N}_\alpha(s) \end{aligned} \tag{3.2}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_\alpha(s) &= \kappa_\alpha(s)\ \mathbf{N}_\alpha(s) \\ \mathbf{N}'_\alpha(s) &= -\kappa_\alpha(s)\mathbf{T}_\alpha(s) + \ \tau_\alpha(s)\mathbf{B}_\alpha(s) \\ \mathbf{B}'_\alpha(s) &= -\tau_\alpha(s)\ \mathbf{N}_\alpha(s) \end{aligned} \tag{3.3}$$

olarak elde edilir (Kühnel, 2006).

Teorem 3.1 Eğer α yay uzunluğu parametresi s olan bir eğri ise, α nın adjoint eğrisinin yay uzunluğu parametresi de s'dir (Nurkan ve ark., 2018).

İspat: α'nın adjoint eğrisi β olsun. (3.1) denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{d}{ds}\beta(s) = \mathbf{B}_\alpha(s)$$

olarak elde edilir. İki tarafın da normu alınırsa

$$||\frac{d}{ds}\beta(s)|| = ||\mathbf{B}_\alpha(s)|| = 1$$

elde edilir. Böylece, β birim hızlı eğridir ve yay uzunluğu parametresi s'dir.

Teorem 3.2 α yay uzunluğu parametresi s ve adjoint eğrisi β olan bir eğri olsun. α ve β'nın Frenet vektörleri $\{\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha\}$ ve $\{\mathbf{T}_\beta, \mathbf{N}_\beta, \mathbf{B}_\beta\}$, eğrilik ve burulmaları $\kappa_\alpha, \tau_\alpha$ ve κ_β, τ_β olsun. Böylece;

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\beta &= \mathbf{B}_\alpha \\ \mathbf{N}_\beta &= -\mathbf{N}_\alpha \\ \mathbf{B}_\beta &= \mathbf{T}_\alpha \end{aligned} \tag{3.4}$$

ve

$$\begin{aligned} \kappa_\beta &= \tau_\alpha \\ \tau_\beta &= \kappa_\alpha \end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak elde edilir (Nurkan ve ark., 2018).

İspat: (3.1) denkleminin türevini alıp (3.3) denklemi kulanılırsa

$$\beta' = \mathbf{B}_\alpha \tag{3.6}$$

elde edilir. İki tarafında türevi alınırsa ;

$$\beta'' = \mathbf{B}'_\alpha$$

$\mathbf{B}'_\alpha = -\tau_\alpha \ \mathbf{N}_\alpha$ denklemindeki eşitlik kullanıldığında β'' aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\beta'' = -\tau_\alpha \ \mathbf{N}_\alpha \tag{3.7}$$

(3.2) ve (3.6) denkleminden tanjant vektörüne ulaşılır:

$$\mathbf{T}_\beta = \beta'$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik aşağıdaki

$$\beta' = \mathbf{B}_\alpha$$

eşitlikte yerine koyulursa

$$\mathbf{T}_\beta = \mathbf{B}_\alpha$$

(3.7) denkleminin iki tarafının da normu alınırsa (3.2) denklemiyle karşılaştırıldığında normal vektörü

$$||\beta''|| = \tau_\alpha || \ \mathbf{N}_\alpha || = \tau_\alpha \tag{3.8}$$

elde edilir. Böylece

$$\mathbf{N}_\alpha = \frac{\alpha''}{||\alpha''||}$$

ya da

$$\mathbf{N}_\beta = \frac{\beta''}{||\beta''||}$$

denkleminde

$$\beta'' = -\tau_\alpha \ \mathbf{N}_\alpha$$

ve

$$||\beta''|| = \tau_\alpha$$

eşitlikleri kullanılırsa:

$$\mathbf{N}_\beta = \frac{-\tau_\alpha \ \mathbf{N}_\alpha}{\tau_\alpha}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\mathbf{N}_\beta = -\mathbf{N}_\alpha \tag{3.9}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik doğrultuları aynı yönleri farklı iki vektör elde edildiğini gösterir. (3.2) denkleminde gerekli hesaplamalar yapılırsa binormal vektörü

$$\mathbf{B}_\alpha(s) = \mathbf{T}_\alpha(s) \times \mathbf{N}_\alpha(s)$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\mathbf{B}_\beta = \mathbf{T}_\beta \times \mathbf{N}_\beta$$

denkleminde, (3.9) denklemindeki eşitlikten yararlanarak $\mathbf{N}_\beta$ yerine $-\mathbf{N}_\alpha$ yazılırsa;

$$\mathbf{B}_\beta = \mathbf{B}_\alpha \times (-\mathbf{N}_\alpha)$$

eşitliği ortaya çıkar. Frenet vektörlerinden $\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{B}_\alpha$ olduğu biliniyor. Buna göre son durumda

$$\mathbf{B}_\beta = \mathbf{T}_\alpha$$

elde edilir.

Eğrilik tanımından $\kappa_\beta = ||\beta''||$ eşitliğinde $||\beta''||$ yerine (3.8) denkleminden $||\beta''|| = \tau_\alpha$ yazılırsa;

$$\kappa_\beta = ||\beta''|| = \tau_\alpha$$

elde edilir. Buradan

$$\kappa_\beta = \tau_\alpha$$

olarak elde edilir. Burulma için (3.9) denklem ve $\tau(s) =< \mathbf{N}'(s), \mathbf{B}(s) >$ burulma tanımı kullanılırsa;

$\mathbf{N}_\beta = -\mathbf{N}_\alpha$

denkleminin iki tarafının da türevi alındığında

$\mathbf{N}'_\beta = -\mathbf{N}'_\alpha$

olarak elde edilir. $\mathbf{N}'_\alpha = -\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha$ eşitliği verilen denklemde yerine yazılıp $-$ parantezine alınırsa;

$\mathbf{N}'_\beta = -(-\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha)$

elde edilir. $\tau =< \mathbf{N}', \mathbf{B} >$ burulma tanımında β eğrisinin burulma denklemi

$\tau_\beta = \langle \mathbf{N}'_\beta, \mathbf{B}_\beta \rangle$

olarak elde edilir.

$\mathbf{N}'_\beta = \kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha$

ve

$\mathbf{B}_\beta = \mathbf{T}_\alpha$

eşitlikleri $\tau_\beta = \langle \mathbf{N}'_\beta, \mathbf{B}_\beta \rangle$ denkleminde yerine yazıldığında;

$\tau_\beta = \langle \kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha, \mathbf{T}_\alpha \rangle$

elde edilir. İç çarpım özelliklerinden eşitliğin sağ tarafında sadece κ_α kalır. Son olarak elde etmek istenilen τ_β'nın eşiti

$\tau_\beta = \kappa_\alpha$

olarak elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1 α adjoint eğrisi β olan bir eğri olsun. α ve β nın Darboux vektörleri $\mathbf{W}_\alpha$ ve $\mathbf{W}_\beta$

$$\mathbf{W}_\alpha = \mathbf{W}_\beta$$

eşitliği sağlanır (Nurkan ve ark., 2018).

İspat: (3.4), (3.5) denklemleri ve Darboux vektör tanımı kullanılarak $\mathbf{W}_\alpha = \tau_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{B}_\alpha$ denkleminde;

$$\tau_\alpha = \kappa_\beta$$
$$\kappa_\alpha = \tau_\beta$$

ve

$$\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{B}_\beta$$
$$\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{T}_\beta$$

eşitleri yazılıp yeniden düzenlenir. Buradan

$$\mathbf{W}_\alpha = \kappa_\beta \mathbf{B}_\beta + \tau_\beta \mathbf{T}_\beta$$

denklemindeki terimlerin yerleri değiştirildiğinde

$$\mathbf{W}_\alpha = \tau_\beta \mathbf{T}_\beta + \kappa_\beta \mathbf{B}_\beta$$

elde edilir. Gösterilmek istenen eşitlik sağlanır ve

$$\mathbf{W}_\alpha = \mathbf{W}_\beta$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.2 α yay uzunluğu parametresi s olan bir genel helis ise α'nın adjoint eğrisi olan β bir genel helistir (Nurkan ve ark., 2018).

İspat: α bir genel helis olsun. O halde $\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}$ bir sabittir. β adjoint eğrisi için (3.6) denklemi kullanılırsa;

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = \frac{1}{\frac{\kappa_\beta}{\tau_\beta}} = \frac{1}{\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}} = sabit$$

elde edilir. Böylece β genel helis olur.

Teorem 3.3 α adjoint eğrisi β olan bir eğri olsun. α ve β Bertrand eğrileri ve involute-evolute eğri çiftidir (Nurkan ve ark., 2018).

İspat: $\mathbf{N}_\beta = -\mathbf{N}_\alpha$, α ve β lineer bağımlı normal vektörlerine karşılık gelir.

$$\lambda\kappa_\alpha + \mu\tau_\alpha = 1$$

denkleminde λ ve μ sabit (Kühnel, 2006). Son denklemi ve (3.5) denklemi kullanılarak;

$$\kappa_\beta = \tau_\alpha$$
$$\tau_\beta = \kappa_\alpha$$
$$\lambda\tau_\beta + \mu\kappa_\beta = 1$$

elde edilir. Böylece α ve β Bertrand eğrileri olur. β eğrisinin tanjant vektörünü (3.4) denkleminden

$$\mathbf{T}_\beta = \mathbf{B}_\alpha$$

ve $\{\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha\}$ Frenet vektörlerinden;

$$< \mathbf{T}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha >= 0$$
$$< \mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\beta >= 0$$

involute-evolute eğrilerinin tanımından ve son denklemden yararlanarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.4 α bir eğik helis ise adjoint eğrisi olan β eğrisi de bir eğik helistir (Nurkan ve ark., 2018).

İspat: α bir eğik helis ise (2.3) denklemi gereği;

$$\frac{\kappa_\alpha^2}{(\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' = sabit.$$

elde edilir. Ayrıca

$$\tau_\alpha = \kappa_\beta$$
$$\kappa_\alpha = \tau_\beta$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\frac{\kappa_\alpha^2}{(\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' = \frac{\kappa_\alpha^2}{(\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\kappa_\beta}{\tau_\beta}\right)'$$

elde edilir. Bu denklemin de türevi alınıp çarpım durumunda tekrar yazılırsa

$$\frac{\kappa_\alpha^2}{(\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' = \frac{\tau_\beta^2}{(\tau_\beta^2+\kappa_\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\kappa_\beta'\tau_\beta-\tau_\beta'\kappa_\beta}{\tau_\beta^2}$$

elde edilir. Pay ve paydadaki τ_β^2 çarpanları sadeleşir. Dolayısıyla

$$\frac{\kappa_\alpha^2}{(\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' = \frac{\kappa_\beta'\tau_\beta-\tau_\beta'\kappa_\beta}{(\tau_\beta^2+\kappa_\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak elde edilir. Elde edilen sonucun payı - parantezine alınıp, payı ve paydası κ_β^2 ile çarpılırsa sonuç değişmez ve

$$\frac{\kappa_\alpha^2}{(\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' = \frac{-(\kappa_\beta'\tau_\beta-\tau_\beta'\kappa_\beta)}{(\tau_\beta^2+\kappa_\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\kappa_\beta^2}{\kappa_\beta^2}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse;

$$\frac{\kappa_\alpha^2}{(\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' = -\frac{\kappa_\beta^2}{(\kappa_\beta^2+\tau_\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta}\right)'$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

4. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ASLİ YÖN EĞRİLERİNİN MANYETİK ALAN DENKLEMLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında; ilişkili eğrilerin bir türü olan asli yön eğrilerinin manyetik alanlarını ele alacağız. Özel olarak asli yön eğrisinin Frenet elemanlarıyla belirlenen $\overline{\mathbf{T}}$-manyetik, $\overline{\mathbf{N}}$-manyetik ve $\overline{\mathbf{B}}$-manyetik eğrilerinin manyetik alan denklemlerini inceleyeceğiz. (2.19) denlemi kullanılarak

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{T}} \\ \overline{\mathbf{N}} \\ \overline{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} & 0 & \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \\ \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} & 0 & \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$a = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$
$$b = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

kısaltmaları kullanılarak yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\overline{\mathbf{T}} = \mathbf{N}$$
$$\overline{\mathbf{N}} = -a\mathbf{T} + b\mathbf{B}$$
$$\overline{\mathbf{B}} = b\mathbf{T} + a\mathbf{B}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\bar{\kappa} = \sqrt{\kappa^2+\tau^2}$$
$$\bar{\tau} = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa^2+\tau^2}$$

olarak hesaplanır (Choi ve Kim, 2012).

4.1 3-Boyutlu Öklid Uzayında $\overline{\mathbf{T}}$-Manyetik Alan Denklemleri

$\bar{\alpha}$ ilişkili eğrisi, 3-boyutlu Öklid uzayında

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = \mathbb{B} \times \overline{\mathbf{T}}$$

eşitliğini sağlarsa $\bar{\alpha}$ ya $\overline{\mathbf{T}}$-manyetik eğri denir.

Lemma 4.1.1 $\bar{\alpha}$, Frenet-Serret çatısında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\overline{\mathbf{T}}$-manyetik eğri ve $\mathbb{B}$ manyetik alan olarak verilsin. Buna göre

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = \mathbb{B} \times \overline{\mathbf{T}} = \overline{\mathbf{T}}\ ' = \mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \tag{4.1}$$

Frenet Lorentz kuvvet denklemini karşılar.

Önerme 4.1.1 $\bar{\alpha}$, Frenet-Serret çatısında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\overline{\mathbf{T}}$-manyetik eğri ve $\mathbb{B}$ manyetik alan olarak verilsin. Frenet çerçevesinin ilkeleri $\{\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{B}}, \kappa, \bar{\kappa}, \tau, \bar{\tau}\}$ olsun. Buradan, $\mathbb{B}$ manyetik alanının ϕ Lorentz kuvvetleri

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = \bar{\kappa}\overline{\mathbf{N}}$$
$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = -\bar{\kappa}\overline{\mathbf{T}} + \chi_1\overline{\mathbf{B}}$$
$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = -\chi_1\overline{\mathbf{N}}$$

ya da

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$
$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = \chi_1\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{T} - \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\mathbf{N} + \chi_1\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{B}$$
$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = \chi_1\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{T} - \chi_1\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{B}$$

olarak elde edilir. Burada $\chi_1 = \phi(\overline{\mathbf{N}}) \cdot \overline{\mathbf{B}}$, $\bar{\alpha}$ eğrisi boyunca diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

İspat: $\overline{\alpha}$, Frenet-Serret çatısında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\overline{\mathbf{T}}$-manyetik eğri olarak verilsin. Bu durumda Frenet çerçevesinin ilkeleri $\{\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{B}}, \kappa, \overline{\kappa}, \tau, \overline{\tau}\}$ olsun. Frenet Lorentz kuvvet denklemine göre

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = \mathbb{B} \times \overline{\mathbf{T}} = \overline{\mathbf{T}}\ ' = \mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde

$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = a_1\overline{\mathbf{T}} + a_2\overline{\mathbf{N}} + a_3\overline{\mathbf{B}}$$

seçelim. Burada anti-simetrik özelliği, Lorentz kuvveti ve bilinen uzayda tanımlanan metrik dikkate alınarak yapılan hesaplamalar sonucunda

$$a_1 = -\overline{\kappa}, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = \chi_1$$

elde edilir. Bu eşitlikler yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = -\overline{\kappa}\overline{\mathbf{T}} + \chi_1\overline{\mathbf{B}}$$

ya da

$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = \chi_1\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\mathbf{T} - \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\mathbf{N} + \chi_1\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\mathbf{B}$$

elde edilir ve benzer yolları izleyerek

$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = a_1\overline{\mathbf{T}} + a_2\overline{\mathbf{N}} + a_3\overline{\mathbf{B}}$$

seçelim. Burada anti-simetrik özelliği, Lorentz kuvveti ve bilinen uzayda tanımlanan metrik dikkate alınarak yapılan hesaplamalar sonucunda

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -\chi_1, \qquad a_3 = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikler yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = -\chi_1\overline{\mathbf{N}}$$

ya da

$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = \chi_1\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{T} - \chi_1\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{B}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1 $\bar{\alpha}$ Frenet-Serret çatısında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\overline{\mathbf{T}}$-manyetik eğri olarak verilsin. Manyetik alan denklemi,

$$\mathbb{B} = \chi_1\overline{\mathbf{T}} + \bar{\kappa}\overline{\mathbf{B}}$$

ya da

$$\mathbb{B} = \tau\mathbf{T} + \chi_1\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}$$

olarak elde edilir.

İspat: $\mathbb{B} = a_1\overline{\mathbf{T}} + a_2\overline{\mathbf{N}} + a_3\overline{\mathbf{B}}$ fonksiyonu a_i, $i = 1,2,3$ için bazı fonksiyonlar elde edilir. Frenet manyetik eğri tanımına göre

$$\begin{aligned}
\mathbb{B} \times \overline{\mathbf{T}} &= -a_2\overline{\mathbf{B}} + a_3\overline{\mathbf{N}} \\
&= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \\
&= -a_2b\mathbf{T} - a_2a\mathbf{B} - a_3a\mathbf{T} + a_3b\mathbf{B} \\
&= (-a_2b - a_3a)\mathbf{T} + (-a_2a + a_3b)\mathbf{B}
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$a_2 = 0 \quad , \quad a_3 = \bar{\kappa}$$

olarak hesaplanır. Vektör ürününün temel özelliklerini kullanarak

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = \mathbb{B} \times \overline{\mathbf{T}} = \overline{\mathbf{T}}\ ' = \mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$$

eşitliğini verir. Lorentz kuvveti tanımına göre $\phi(\mathbb{B}) = \mathbb{B} \times \mathbb{B} = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\begin{aligned}
&\phi(\mathbb{B}) = a_1\phi(\overline{\mathbf{T}}) + \overline{\kappa}\phi(\overline{\mathbf{B}}) \\
&= -a_1\kappa\mathbf{T} + a_1\tau\mathbf{B} + \overline{\kappa}(-\chi_1(-a\mathbf{T} + b\mathbf{B})) = 0 \\
&= \mathbf{T}(-a_1\kappa + a\chi_1\overline{\kappa}) + \mathbf{B}(a_1\tau - \chi_1 b\overline{\kappa})
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$a_1 = \chi_1$$

bulunur. Manyetik alan

$$\mathbb{B} = \chi_1\overline{\mathbf{T}} + \overline{\kappa}\overline{\mathbf{B}}$$

ya da

$$\mathbb{B} = \tau\mathbf{T} + \chi_1\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B}$$

olarak elde edilir.

4.2 3-Boyutlu Öklid Uzayında $\overline{\mathbf{N}}$-Manyetik Alan Denklemleri

$\overline{\alpha}$ ilişkili eğrisi, 3-boyutlu Öklid uzayında

$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = \mathbb{B} \times \overline{\mathbf{N}}$$

eşitliğini sağlarsa $\overline{\alpha}$ ya $\overline{\mathbf{N}}$-manyetik eğri denir.

Lemma 4.2.1 $\overline{\alpha}$, Frenet-Serret çatısında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\overline{\mathbf{N}}$-manyetik eğri ve $\mathbb{B}$ manyetik alan olarak verilsin. Bu durumda

$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = -(\frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}})\mathbf{T} - \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\mathbf{N} + (\frac{\kappa^2\tau' - \kappa\kappa'\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}})\mathbf{B}$$

Frenet Lorentz kuvvet denklemini karşılar.

Önerme 4.2.1 $\bar{\alpha}$, Frenet-Serret çatısında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\overline{\mathbf{T}}$-manyetik eğri ve $\mathbb{B}$ manyetik alan olarak verilsin. Frenet çerçevesinin ilkeleri $\{\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{B}}, \kappa, \bar{\kappa}, \tau, \bar{\tau}\}$ olsun. Buradan, $\mathbb{B}$ manyetik alanının ϕ Lorentz kuvvetleri

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = \bar{\kappa}\overline{\mathbf{N}} + \chi_2\overline{\mathbf{B}}$$
$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = -\bar{\kappa}\overline{\mathbf{T}} + \bar{\tau}\overline{\mathbf{B}}$$
$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = -\chi_2\overline{\mathbf{T}} - \bar{\tau}\overline{\mathbf{N}}$$

ya da

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = -(\kappa + \chi_2\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\mathbf{T} + (\chi_2\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \tau)\mathbf{B}$$
$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = -(\frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}})\mathbf{T} - \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\mathbf{N} + (\frac{\kappa^2\tau' - \kappa\kappa'\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}})\mathbf{B}$$
$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = \frac{\kappa^2\tau' - \kappa\kappa'\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{T} - \chi_2\mathbf{N} - \frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{B}$$

olarak elde edilir. Burada $\chi_2 = \phi(\overline{\mathbf{T}}) \cdot \overline{\mathbf{B}}$, $\bar{\alpha}$ eğrisi boyunca diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

İspat: $\bar{\alpha}$, Frenet-Serret çatısında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\overline{\mathbf{N}}$-manyetik eğri olarak verilsin. Bu durumda Frenet çerçevesinin ilkeleri $\{\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{B}}, \kappa, \bar{\kappa}, \tau, \bar{\tau}\}$ olsun. Frenet Lorentz kuvvet denklemine göre

$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = \mathbb{B} \times \overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{N}}'$$
$$= (-a\mathbf{T} + b\mathbf{B})' = -a'\mathbf{T} + (-a\kappa - b\tau)\mathbf{N} + b'\mathbf{B}$$
$$= -(\frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}})\mathbf{T} - \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\mathbf{N} + (\frac{\kappa^2\tau' - \kappa\kappa'\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}})\mathbf{B}$$

elde edilir. O halde

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = a_1\overline{\mathbf{T}} + a_2\overline{\mathbf{N}} + a_3\overline{\mathbf{B}}$$

seçelim. Burada anti-simetrik özelliği, Lorentz kuvveti ve bilinen uzayda tanımlanan metrik dikkate alınarak yapılan hesaplamalar sonucunda

$$a_1 = -0, \qquad a_2 = \overline{\kappa}, \qquad a_3 = \chi_2$$

elde edilir. Bu eşitlikler yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = \overline{\kappa}\overline{\mathbf{N}} + \chi_2\overline{\mathbf{B}}$$

ya da

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = -(\kappa + \chi_2\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\mathbf{T} + (\chi_2\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \tau)\mathbf{B}$$

elde edilir ve benzer yollar izlenerek

$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = a_1\overline{\mathbf{T}} + a_2\overline{\mathbf{N}} + a_3\overline{\mathbf{B}}$$

seçelim. Burada anti-simetrik özelliği, Lorentz kuvveti ve bilinen uzayda tanımlanan metrik dikkate alınarak yapılan hesaplamalar sonucunda

$$a_1 = -\chi_2, \qquad a_2 = -\overline{\tau}, \qquad a_3 = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikler yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = -\chi_2\overline{\mathbf{T}} - \overline{\tau}\overline{\mathbf{N}}$$

ya da

$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = \frac{\kappa^2\tau' - \kappa\kappa'\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{T} - \chi_2\mathbf{N} - \frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{B}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1 $\bar{\alpha}$, Frenet-Serret çatısında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\overline{\mathbf{N}}$-manyetik eğri olarak verilsin. Manyetik alan denklemi,

$$\mathbb{B} = \bar{\tau}\overline{\mathbf{T}} - \chi_2\overline{\mathbf{N}} + \bar{\kappa}\overline{\mathbf{B}}$$

ya da

$$\mathbb{B} = (\chi_2\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \tau)\mathbf{T} + \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa^2+\tau^2}\mathbf{N} + (\kappa - \chi_2\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\mathbf{B}$$

olarak elde edilir.

İspat: $\mathbb{B} = a_1\overline{\mathbf{T}} + a_2\overline{\mathbf{N}} + a_3\overline{\mathbf{B}}$ fonksiyonu $a_i,\ i = 1,2,3$ için bazı fonksiyonlar elde edilir. Frenet manyetik eğri tanımına göre

$$\mathbb{B} \times \overline{\mathbf{N}} = a_1\overline{\mathbf{B}} - a_3\overline{\mathbf{T}}$$
$$= -a'\mathbf{T} + (-a\kappa - b\tau)\mathbf{N} + b'\mathbf{B}$$
$$= (a_1 b)\mathbf{T} + (-a_3)\mathbf{N} + (a_1 a)\mathbf{B}$$

eşitliğinden

$$a_1 = \bar{\tau} \quad , \quad a_3 = \bar{\kappa}$$

olarak hesaplanır. Vektör ürününün temel özelliklerini kullanarak

$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = \mathbb{B} \times \overline{\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{N}}'$$
$$= (-a\mathbf{T} + b\mathbf{B})'$$
$$= -a'\mathbf{T} + (-a\kappa - b\tau)\mathbf{N} + b'\mathbf{B}$$
$$= -(\frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}})\mathbf{T} - \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\mathbf{N} + (\frac{\kappa^2\tau' - \kappa\kappa'\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}})\mathbf{B}$$

eşitliğini verir. Lorentz kuvveti tanımına göre $\phi(\mathbb{B}) = \mathbb{B} \times \mathbb{B} = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\phi(\mathbb{B}) = \bar{\tau}\phi(\overline{\mathbf{T}}) + a_2\phi(\overline{\mathbf{N}}) + \bar{\kappa}\phi(\overline{\mathbf{B}})$$
$$= \bar{\tau}\bar{\kappa}\overline{\mathbf{N}} + \bar{\tau}\chi_2\overline{\mathbf{B}} + a_2(-a'\mathbf{T} - \bar{\kappa}\mathbf{N} + b'\mathbf{B}) + \bar{\kappa}(-\chi_2\overline{\mathbf{T}} - \bar{\tau}\overline{\mathbf{N}}) = 0$$
$$= \mathbf{T}(\bar{\tau}\chi_2 b - a_2 a') + \mathbf{N}(-a_2\bar{\kappa} - \chi_2\bar{\kappa}) + \mathbf{B}(\bar{\tau}\chi_2 a + a_2 b') = 0$$

elde edilir. Buradan

$$a_2 = -\chi_2$$

bulunur. Manyetik alan

$$\mathbb{B} = \bar{\tau}\overline{\mathbf{T}} - \chi_2\overline{\mathbf{N}} + \bar{\kappa}\overline{\mathbf{B}}$$

ya da

$$\mathbb{B} = (\chi_2\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \tau)\mathbf{T} + \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa^2+\tau^2}\mathbf{N} + (\kappa - \chi_2\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})\mathbf{B}$$

olarak elde edilir.

4.3 3-Boyutlu Öklid Uzayında $\overline{\mathbf{B}}$-Manyetik Alan Denklemleri

$\bar{\alpha}$ ilişkili eğrisi, 3-boyutlu Öklid uzayında

$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = \mathbb{B} \times \overline{\mathbf{B}}$$

eşitliğini sağlarsa $\bar{\alpha}$ ya $\overline{\mathbf{B}}$-manyetik eğri denir.

Lemma 4.3.1 $\bar{\alpha}$, Frenet-Serret çatısında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\overline{\mathbf{B}}$-manyetik eğri ve $\mathbb{B}$ manyetik alan olarak verilsin. Bu durumda

$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = \frac{\kappa^2\tau' - \kappa\kappa'\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{T} - \frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{B}$$

Frenet Lorentz kuvvet denklemini karşılar.

Önerme 4.3.1 $\bar{\alpha}$, Frenet-Serret çatısında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\overline{\mathbf{T}}$-manyetik eğri ve $\mathbb{B}$ manyetik alan olarak verilsin. Frenet çerçevesinin ilkeleri $\{\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{B}}, \kappa, \bar{\kappa}, \tau, \bar{\tau}\}$ olsun. Buradan, $\mathbb{B}$ manyetik alanının ϕ Lorentz kuvvetleri

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = \chi\overline{\mathbf{N}}$$
$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = -\chi\overline{\mathbf{T}} + \bar{\tau}\overline{\mathbf{B}}$$
$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = \bar{\tau}\overline{\mathbf{N}}$$

ya da

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = -\chi_3 \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{T} + \chi_3 \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{B}$$
$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = \frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{T} - \chi_3\mathbf{N} + \frac{\kappa^2\tau' - \kappa\kappa'\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{B}$$
$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = \frac{\kappa^2\tau' - \kappa\kappa'\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{T} - \frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{B}$$

olarak elde edilir. Burada $\chi_3 = \phi(\overline{\mathbf{T}}) \cdot \overline{\mathbf{N}}$, $\bar{\alpha}$ eğrisi boyunca diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

İspat: $\bar{\alpha}$, Frenet-Serret çatısında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\overline{\mathbf{B}}$-manyetik eğri olarak verilsin. Bu durumda Frenet çerçevesinin ilkeleri $\{\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{B}}, \kappa, \bar{\kappa}, \tau, \bar{\tau}\}$ olsun. Frenet Lorentz k0uvvet denklemine göre

$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = \mathbb{B} \times \overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}}'$$
$$= (b\mathbf{T} + a\mathbf{B})' = b'\mathbf{T} + (b\kappa - a\tau)\mathbf{N} + a'\mathbf{B}$$
$$= b'\mathbf{T} + a'\mathbf{B} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}(\kappa\mathbf{T} - \tau\mathbf{B})$$
$$= \frac{\kappa^2\tau' - \kappa\kappa'\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{T} - \frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{B}$$

denklemini karşıladığını biliyoruz. O halde

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = a_1\overline{\mathbf{T}} + a_2\overline{\mathbf{N}} + a_3\overline{\mathbf{B}}$$

seçelim. Burada anti-simetrik özelliği, Lorentz kuvveti ve bilinen uzayda tanımlanan metrik dikkate alınarak yapılan hesaplamalar sonucunda

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = \chi_3, \qquad a_3 = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikler yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = \chi_3\overline{\mathbf{N}}$$

ya da

$$\phi(\overline{\mathbf{T}}) = -\chi_3\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{T} + \chi_3\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{B}$$

elde edilir ve benzer yollar izlenerek

$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = a_1\overline{\mathbf{T}} + a_2\overline{\mathbf{N}} + a_3\overline{\mathbf{B}}$$

seçelim. Burada anti-simetrik özelliği, Lorentz kuvveti ve bilinen uzayda tanımlanan metrik dikkate alınarak yapılan hesaplamalar sonucunda

$$a_1 = -\chi_3, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = \overline{\tau}$$

elde edilir. Bu eşitlikler yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\phi(\overline{\mathbf{N}}) = -\chi_3\overline{\mathbf{T}} + \overline{\tau}\overline{\mathbf{B}} = \frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{T} - \chi_3\mathbf{N} + \frac{\kappa^2\tau' - \kappa\kappa'\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{B}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.1 $\overline{\alpha}$, Frenet-Serret çatısında 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\overline{\mathbf{B}}$-manyetik eğri olarak verilsin. Manyetik alan denklemi,

$$\mathbb{B} = \bar{\tau}\overline{\mathbf{T}} + \chi_3\overline{\mathbf{B}}$$

ya da

$$\mathbb{B} = \chi_3 \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{T} + \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa^2+\tau^2}\mathbf{N} + \chi_3 \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\mathbf{B}$$

olarak elde edilir.

İspat: $\mathbb{B} = a_1\overline{\mathbf{T}} + a_2\overline{\mathbf{N}} + a_3\overline{\mathbf{B}}$ fonksiyonu $a_i,\ i = 1,2,3$ için bazı fonksiyonlar elde edilir. Frenet manyetik eğri tanımına göre

$$\mathbb{B} \times \overline{\mathbf{B}} = -a_1\overline{\mathbf{N}} + a_2\overline{\mathbf{T}} = b'\mathbf{T} + a'\mathbf{B}$$
$$= -a_1(-a\mathbf{T} + b\mathbf{B}) + a_2\mathbf{N} = \mathbf{T}(a_1 a) + \mathbf{B}(-a_1 b)$$

eşitliğinden

$$a_1 = \bar{\tau} \qquad , \qquad a_2 = 0$$

olarak hesaplanır. Vektör ürününün temel özelliklerini kullanarak

$$\phi(\overline{\mathbf{B}}) = \mathbb{B} \times \overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}}'$$
$$= (b\mathbf{T} + a\mathbf{B})' = b'\mathbf{T} + (b\kappa - a\tau)\mathbf{N} + a'\mathbf{B}$$
$$= b'\mathbf{T} + a'\mathbf{B} = \frac{\bar{\tau}}{\kappa}(\kappa\mathbf{T} - \tau\mathbf{B})$$
$$= \frac{\kappa^2\tau' - \kappa\kappa'\tau}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{T} - \frac{\kappa\tau\tau' - \kappa'\tau^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{B}$$

eşitliğini verir. Lorentz kuvveti tanımına göre $\phi(\mathbb{B}) = \mathbb{B} \times \mathbb{B} = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\phi(\mathbb{B}) = \bar{\tau}\phi(\overline{\mathbf{T}}) + a_3\phi(\overline{\mathbf{B}}) = 0$$
$$= \bar{\tau}\chi_3\overline{\mathbf{N}} + a_3\left(\frac{\bar{\tau}}{\kappa}(\kappa\mathbf{T} - \tau\mathbf{B})\right)$$

$$= \overline{\tau}\chi_3(-a\mathbf{T} + b\mathbf{B}) + a_3(\frac{\overline{\tau}}{\overline{\kappa}}(\kappa\mathbf{T} - \tau\mathbf{B}))$$

elde edilir. Buradan

$$a_3 = \chi_3$$

bulunur. Manyetik alan

$$\mathbb{B} = \overline{\tau}\overline{\mathbf{T}} + \chi_3\overline{\mathbf{B}}$$

ya da

$$\mathbb{B} = \chi_3 \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\mathbf{T} + \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa^2 + \tau^2}\mathbf{N} + \chi_3 \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\mathbf{B}$$

olarak elde edilir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada ilk olarak adjoint eğriler tanımlandıktan sonra Frenet-Serret çatısını oluşturan elemanların 3-boyutlu Öklid uzayında birbiri cinsinden karşılıkları ve incelenen eğrinin adjointi olan eğrinin eğrilik ve burulmaları elde edildi. Temel tanım ve teoremler kullanılarak yapılan ispatların ardından bu eğriler arasındaki ilişkiler ve eşitlikler tespit edildi.

Sonraki bölümde asli yön eğrilerinin temel tanım ve teoremlerine yer verildikten sonra bu eğrilerin Frenet-Serret çatısındaki karşılıklarına, eğrilik ve burulma değerlerinin karşılıklarına ve birbiri cinsinden ifadelerine yer verildi.

Bu işlemlerin her biri $\overline{\mathbf{T}}$-manyetik**,** $\overline{\mathbf{N}}$-manyetik **ve** $\overline{\mathbf{B}}$-manyetik eğriler için yapıldı.

Bu eğrilerin manyetik alan denklemleri Lorentz kuvveti yardımıyla asli yön eğriliği ve Frenet-Serret çatısı elemanları cinsinden farklı şekilde ifade edildi.

KAYNAKLAR

Choi, J.H., Kim, Y.H. 2012. Bir Frenet eğrisinin ilişkili eğrileri ve uygulamaları. *Uygulamalı Matematik ve Hesaplama*, *218* (18), 9116-9124.

Do Carmo, M.P., 1976, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Gray, A., Abbena, E., Salamon, S., 2006, Modern differantial geometry of curves and surfaces with mathematica, 3rd edn. Chapman and Hall, CRC, Boca Raton.

Guggenheimerv, H.W., 1963, Differential geometry, McGraw-Hill Comp, New York.

Guven, I.A., Ağaoğlu, I. 2014. Properties of Bertrand curves in dual space. *Int J Phys Sci* 9 (9), 208-213.

Hacıfazlıoğlu, H., 2013, Manyetik Ayırma ile Zenginleştirme, *İstanbul Üniversitesi,* İstanbul.

Izumiya, S., Takeuchi, N. 2004. New special curves and developable surfaces. *Turk J Math,* 28, 153–163.

Karacan, M.K., Bukcu, B. 2007. An alternative moving frame for tubular surface around the spacelike curve with a spacelike binormal in Minkowski 3-space, *Math Morav,* 11, 47–54.

Karacan, M.K., Yaylı, Y. 2008. On the geodesics of tubular surfaces in Minkowski 3-space, *Bull Malays Math Sci Soc,* 31 (1), 1–10.

Körpınar, T. 2014. New Characterization for Minimizing Energy of Biharmonic Particles in Heisenberg Spacetime, *Int J Phys*, 53, 3208-3218.

Körpınar, T., Demirkol, R.C. 2017. A New characterization on the energy of elastica with the energy of Bishop vector fields in Minkowski space, *Journal of Advanced Physics*, 6 (4), 562-569.

Körpınar, T., Demirkol, R.C. 2017. Energy on a timelike particle in dynamical and electrodynamical force fields in De-Sitter space, *Revista Mexicana de Fisica*, 63, 560-568.

Körpınar, T., Demirkol, R.C. 2017. Minimizing Energy of the Dynamical Force Fields via Parallel Vectors in the 3D Space, *Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics*, 6 (3), 184-190.

Körpınar, T., Demirkol, R.C., 2018, A new geometric model of the energy functional of lightlike elastic curves in Minkowski 4-space, *Journal of Advanced Physics,* 7 (3), 376-381.

Körpınar, T., Demirkol, R.C. 2018. On the energy of Dynamical and electrodynamical force fields via Bishop vector fields in Minkowski space E_1^4, *Journal of Advanced Physics,* 7 (3), 303-311.

Körpınar, T., Demirkol, R. C., Asil, V. 2018. A Geometric Approach to the Harmonicity of the Unit Frenet-Serret Vector Fields in a Minkowski Space E 3 1, *Journal of Advanced Physics*, 7 (3), 359-365.

Körpinar, T., & Demirkol, R. C. 2018. On the geometric modelling of the energy of quasi magnetic curves, *Journal of Advanced Physics*, 7 (3), 435-441.

Kruppa, E., 1957, Analytische und constructive differential geometrie. *Springer*, Wien.

Kühnel, W., 2006, Differential geometry of curves-surfacesmanifolds, 2nd edn, *AMS*, Providence.

Maekawa, T., Patrikalakis, M.N., Sakkalis, T., Yu, G. 1998. Analysis and applications of pipe surfaces. *Comput Aided Geom Des,* 15, 437–458.

Nurkan, S., Güven, İ.A., Karacan, M.K. 2018. Characterizations of Adjoint Curves in Euclidean 3-Space, 89, 155-161.

Sabuncuoğlu, A., 2004, Diferensiyel Geometri, Ankara, 556.

Synge, J.L., 1960, Relativity, The General Theory. North Holland, Amsterdam.

Tuncer, Y., Ünal, S. 2012. New representations of Bertrand pairs in Euclidean 3-space, *Appl Math Comput,* 219 (4), 1833–1842.

Yuksel, N., Tuncer, Y., Karacan, M.K. 2011. Tubular surfaces with Bishop frame of Weingarten types in Euclidean 3-space, *Acta Univ Apulensis,* 27, 39–50.

Xu, Z., Feng, R., Sun, G.J. 2006. Analytic and algebraic properties of canal surfaces, *J Comput Appl Math,* 195, 220–228.