T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ SİNGÜLER DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

Meltem KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Eylül-2022

MUŞ

T.C.

MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ SİNGÜLER DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

Meltem KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Eylül-2022
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Meltem KAYA tarafından hazırlanan "**GECİKMELİ RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ SİNGÜLER DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI**" adlı tez çalışması 07/09/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Zeliha KÖRPINAR Muş Alparslan Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme	....
Danışman Doç. Dr. Erdal KORKMAZ Muş Alparslan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik	....
Üye Doç. Dr. Emel BİÇER Bingöl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik	....

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu ../../.... Tarih ve .../... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI

FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Meltem KAYA

Tarih:07/09/2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GECİKMELİ RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ SİNGÜLER DENKLEM SİSTEMLERİNİN KARARLILIĞI

Meltem KAYA

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Bu tez çalışması beş bölümden oluşur. Giriş bölümünden sonra gelen ikinci bölümde literatürdeki kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalar özetlenir. Üçüncü bölümde konuyla ilişkili temel tanım ve teoremler verilerek kullanılan metod hakkında bilgi verilir. Tezin orijinal sonuçlarını içeren dördüncü bölümde ise açık bir problem olarak devam etmekte olan belli singüler kesirli nötr diferansiyel denklemler ele alınır. Riemann-Liouvilli kesirli türev ve integralin birleşme özelliğinden faydalanılarak Lyapunov fonksiyonun türevi hesaplanır. Lineer matris eşitsizliği yardımıyla Lyapunov metodu kullanılarak çözümlerin asimptotik kararlılığı için yeter şartlar elde edilir. Son bölümde elde edilen sonuçlar tartışılır ve okuyucuya konu ile ilgili yeni problemler önerilir.

2022, 36 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Gecikmeli Denklemler, Kesirli Mertebeden Denklemler, Lyapunov Metodu, Riemann-Liouville, Singüler Nötr Denklemler

ABSTRACT

MS THESIS

STABILITY OF RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL SINGULAR SYSTEM WITH MULTIPLE TIME-VARYING DELAYS

Meltem KAYA

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Erdal KORKMAZ

This thesis consists of five parts. In the second chapter, which comes after the introduction, studies on fractional differential equations in literature are summarized. In the third part, basic definitions and theorems related to the subject are given and information about the method used is given. In the fourth chapter, which contains the original results of the thesis, certain singular fractional neutral differential equations, which continue as an open problem, are discussed. The derivative of the Lyapunov function is calculated by using the union property of the Riemann-Liouvilli fractional derivative and integral. By using the Lyapunov method with the help of linear matrix inequality, sufficient conditions for the asymptotic stability of the solutions are obtained. In the last section, the results are discussed and new problems are proposed to the reader.

2022, 36 Pages

Keywords: Delayed Equations, Fractional Order Equations, Lyapunov Method, Riemann-Liouville, Singular Neutral Equations

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında her türlü desteği eksik etmeyen danışman hocam Doç. Dr. Erdal KORKMAZ'a tüm içtenliğimle teşekkür ederim.

Meltem KAYA

MUŞ-2022

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

R^n	: n-boyutlu öklit uzayı
R^{nxn}	: nxn tipinde matrislerin kümesi
det(.)	: Determinant
diag(.,.,.)	: Diyagonal matris
inf(.)	: İnfimum
V(.)	: Liapunov fonksiyon
$\|.\|$	: Norm
$\Gamma(.)$	: Gamma Fonksiyonu
Ω	: R^n'de orijini içeren açık bir küme
Σ	: Toplam sembolü
x^T	: x'in transpozu
${}_{t_0}D_t^q$	: Riemann türevi
${}_{t_0}^{RL}D_t^q$	: Riemann türevi
${}_{t_0}D_t^{-q}$	: Riemann integrali
${}_{t_0}^{C}D_t^q$	: Caputo türevi

Kısaltmalar

LMI	: Linear Matrix Inequality (Lineer Matris Eşitsizliği)

1. GİRİŞ

Üç yüz yıldan fazla bir geçmişe sahip kesirli kalkülüsün, mühendislik, fizik, kontrol sistemleri, difüzyon, salgın model, sinir ağları, biyolojik modeller, kuantum mekaniği, finansal sistemler gibi çeşitli alanlarda birçok olgunun modellenmesinde kullanılan değerli bir araç olduğu kanıtlanmıştır (Hale, 1969; Kilbas ve ark., 2006; Podlubny, 1999). Tamsayı mertebeden türev ve integralin bir genellemesi olan kesirli türev ve integralin farklı araştırmacılar tarafından tanımlanan Caputo, Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Hadamard gibi çeşitli tanımları vardır (Podlubny, 1999). Literatürü incelediğimizde Caputo ve Riemann-Liouville türevlerin diğerlerine göre daha çok kullanıldığı görülür. Özellikle Caputo türevi en çok kullanılanıdır. Bunun sebebi Caputo anlamda ifade edilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin başlangıç şartları tamsayı mertebeden türevler ile verilir. Bu da fiziksel koşulların daha anlaşılır ve kolay olduğu anlamına gelir. Diğer taraftan Riemann-Liouville türevin Caputo türeve göre avantajı, türeve göre birleşme özelliğinin var olması ve q mertebeden kesirli türevin sürekli bir operatör olmasıdır (Podlubny, 1999). Özellikle son 20 yılda kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığı (düzgün, asimptotik, üstel kararlılık gibi) ve sınırlılığı gibi davranışları üzerine araştırmacılar tarafından birçok çalışma yapılmıştır. Çözümlerin davranışları incelenirken çeşitli metodlar kullanılmıştır. Bu metotlardan en etkili olanı Lyapunov metodudur. Lyapunov metodu, bir diferansiyel denklemi çözmeksizin uygun bir Lyapunov fonksiyoneli yardımı ile çözümlerin nitel davranışlarının incelenmesini sağlayan etkili bir metottur. Bu metodun zorluğu Lyapunov fonksiyonelinin seçilmesindedir. Çünkü bu fonksiyonelin seçilmesinde herhangi bir yöntem ya da formül yoktur, tamamen hissi olarak tahmin edilip denenerek elde edilir. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nitel davranışları incelenirken Lyapunov fonksiyonelinin türevi iki şekilde hesaplanabilir: Kesirli olarak ya da birinci mertebe olarak. Biz burada Riemann-Liouville türevin birleşme özelliğinin avantajını kullanarak birinci mertebeden türevi hesaplayarak arzu edilen sonuçları elde ettik.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin davranışları üzerine yapılan literatürdeki bazı çalışmaların özetleri sunulur. Bilindiği üzere kesirli türev ilk olarak 1695 yılında Marquis de L'Hopital'in Gottfried Wilhelm Leibniz'e gönderdiği mektupta sorduğu "$(d^n y)/(dx^n)$ türev operatöründe n kesirli bir sayı olursa bu nasıl bir anlam ifade eder " sorusu ortaya atıldığı günden bugüne araştırmacıların ilgi odağı olmuştur. Kesirli türev üzerine yazılan ve literatürdeki çalışmaların ilham kaynağı olan Hale (1969, 1977); Kilbas ve ark. (2006); Podlubny (1999) kitapları yazılmıştır. Özellikle son 20 yılda kesirli türev üzerine yapılan çalışmalar artarak devam etmektedir. Bu çalışmalardan bazılarının özeti aşağıda verilmiştir.

Heymans ve Podlubny (2006)'da Riemann-Liouville kesirli türevleri cinsinden ifade edilen başlangıç koşullarına fiziksel anlam yüklemenin mümkün olduğunu viskoelastisite alanındaki bir dizi örnek üzerinden gösterirler. Bu tür başlangıç koşulları için uygun ölçümler veya gözlemler ile başlangıç değerleri elde etmenin de mümkün olduğunu gösterirler.

Deng ve ark. (2007)'de zaman gecikmeli n-boyutlu kesirli lineer diferansiyel denklem sisteminin kararlılığını ele alırlar. Laplace dönüşümünü kullanarak çoklu zaman gecikmeli bu sistem için karakteristik bir denklem oluştururlar. Eğer karakteristik denklemin tüm köklerinin negatif kısımları varsa, o zaman ilgili kesirli mertebeden lineer sistemin denge noktasının Lyapunov global asimptotik kararlı olduğunu gösterirler.

Tan (2008)'de

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i x(t - \tau_i(t)) + F_0(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} F_i x(t - \tau_i(t))$$

şeklindeki sınırsız gecikmeli nonlineer fonksiyonel diferansiyel denklem sistemleri için bazı asimptotik kararlılık kriterleri elde ederler. Kriterleri, hesaplama açısından esnek ve verimli olan matris denklemleri veya matris eşitsizlikleri olarak tanımlarlar.

Lu ve Chen (2009)'da

$$\frac{d^{\alpha} x(t)}{dt^{\alpha}} = Ax(t) + Bu(t)$$

şeklindeki kesirli mertebeden aralıklı sistemlerin kararlılığı için gerekli ve yeterli koşulları elde ederler. Sonuçları LMI cinsinden verirler.

Li ve ark. (2010)'da Mittag Leffler kararlılık ve genelleştirilmiş Mittag Leffler kararlılık kavramlarını tanıtırlar. Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak kesirli mertebeden nonlineer dinamik sistemlerin kararlılığını incelerler.

Qian ve ark. (2010a)'da

$$
\begin{aligned}
&{}_{RL}D^{\alpha}_{0,t}x(t) = Ax(t) \\
&{}_{RL}D^{\alpha}_{0,t}x(t) = Ax(t) + B(t)x(t) \\
&{}_{RL}D^{\alpha_i}_{0,t}x_i(t) = a_{i1}x_1(t-\tau_{i1}) + a_{i2}x_2(t-\tau_{i2}) + \ldots + a_{in}x_n(t-\tau_{in}), \quad 1 \le i \le n
\end{aligned}
$$

şeklindeki sırasıyla Riemann-Liouville türevli kesirli lineer, pertürbe ve gecikmeli diferansiyel sistemler için kararlılık teoremleri oluştururlar.

Qian ve ark. (2010b)'de

$$
\dot{z}(t) = -C(t)b(z(t)) + A(t)g(z(t)) + B(t)g(z(t-\tau(t))) + D(t)\int_{t-\rho(t)}^{t} g(z(s))ds + I_0
$$

şeklindeki hem aralıklı zamanla değişen gecikme hem de zamanla değişen dağıtılmış (distributed) gecikme ile genelleştirilmiş sinir ağlarındaki robust kararlılığı ele alırlar. Zaman gecikmesini bölümlere ayırarak, genişletilmiş (augmented) bir Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli seçerek, serbest ağırlıklı (free-weighting) matris yöntemi ve dışbükey kombinasyonu kullanarak, ilgili sistemlerin robust kararlılığı için yeterlilik koşullarını elde ederler. Bu kararlılık kriterlerini LMI'lar cinsinden ifade ederler.

Liu ve ark. (2012)'de Caputo ve Riemann-Liouville türevleri altında

$$
{}^{C}_{t_0}D^{q}_{t}(Ex(t) - Ax(t-r)) = f(t, x_t)
$$

şeklindeki nonlineer kesirli nötr singüler sistemlerin Mittag-Leffler kararlılığını ele alırlar. Lyapunov'un ikinci yöntemini bu tür sistemlere genişleterek birkaç yeterlilik koşulu elde ederler. Bulunan teorik sonuçların genel kesirli gecikmeli, nötr ve singüler sistemlere de uygulanabileceğini belirtirler.

Aguila-Camacho ve ark. (2014)'te Caputo kesirli türevleri için

$$\frac{1}{2}{}^{C}_{t_0}D^{q}_{t}x^2(t) \leq x(t){}^{C}_{t_0}D^{q}_{t}x(t), \quad \forall q \in (0,1)$$

şeklinde olduğunu gösteren yeni bir lemmayı ele alırlar. Bu lemmanın nonlineer ve değişen zamanlı birçok kesirli mertebeden sistemin kararlılığını göstermek için Lyapunov'un ikinci metodunun kesirli mertebeye genişletilmiş haline uygulamada kullanışlı olduğunu kanıtlarlar.

Chen ve ark. (2014)'te

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}} = f(x(t)) = Ax(t) + h(x(t))$$

şeklindeki Caputo türevli kesirli mertebeden nonlineer sistemler sınıfının asimptotik kararlılığını ele alırlar. Mittag-Leffler fonksiyonu, Laplace dönüşümü ve genelleştirilmiş Gronwall eşitsizliğini kullanarak bahsi geçen sistemin yerel asimptotik kararlılığı ve kararlılığı için yeni bir yeterlilik şartı elde ederler. Daha sonra böyle bir sistemin global asimptotik kararlılığı ve kararlılığı için bir yeterlilik şartı bulurlar.

Zhou ve ark. (2014)'te

$$D^{\alpha}_{0,t}x(t) = f(x)$$

şeklinde gösterdikleri nonlineer bir kesirli diferansiyel sistem sınıfı için Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak yeni bir kararlılık kriteri elde ederler. Literatürdeki kararlılık kriterleri ile karşılaştırıldığında buradaki kriterin basit ve uygulamaya uygun olduğunu belirtirler.

Li ve ark. (2015)'te

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}(x(t) - Cx(t-\tau)) = Ax(t) + Bx(t-\tau)$$

şeklindeki sistemi zaman gecikmeli doğrusal ve aralıklı doğrusal kesirli mertebeden nötr sistemler olarak ele alarak asimptotik kararlılığını gerçek başlangıç koşulları ile incelerler. Tamsayılı sistem ile kesirli sistemlerin karakteristik denklemleri arasındaki ilişkiyi kullanarak kararlılık için bazı kısa yeterlilik şartları elde ederler.

Liu ve ark. (2015)'te

$$E\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + f(x_i(t),t) + c_1 \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\Gamma x_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^{N} \hat{b}_{ij}\hat{\Gamma} x_j(t-\tau_i(t))$$

şeklindeki hem gecikmesiz eşleme hem de sınırsız zaman gecikmeli eşleme ile singüler dinamik ağları ele alırlar. Lyapunov-Krasovskii fonksiyonel yöntemine ve matris analiz tekniğine dayalı olarak yeterli bir senkronizasyon koşulu elde ederler.

Duarte-Mermoud ve ark. (2015)'te Caputo kesirli türevleriyle ilgili iki yeni lemma sunarlar: Genel kuadratik formlar ve bir dikdörtgen matris ile transpozunun çarpımının izinin olduğu durum için. Bu lemmalardan biri kesirli mertebeden sistemlerin kararlılığını analiz etmek için Lyapunov fonksiyonun içindeki bir matrisin izinin kullanılmasına izin verir. Diğer lemma ise Lyapunov'un ikinci metodunun kesirli mertebeye genişletilmiş halini uygulamak için genel kuadratik Lyapunov fonksiyonlarının kullanılmasına izin verir. Ayrıca kesirli dereceli sistemler için Lyapunov düzgün kararlılığı kanıtlamak için bir teorem sunarlar.

Liu ve ark. (2016a)'da

$${}_{t_0}^{C}D_t^q x(t) = Ax(t) + f(t,x(t))$$

kesirli nonlineer sistemlerini ele alırlar. S-prosedür ve analitik teknikler kullanarak Mittag-Leffler'in çeşitli cebirsel kriterlerini ve asimptotik kararlılıklarını belirlerler.

Liu ve ark. (2016b)'de

$${}_{t_0}D_t^q x(t) = Ax(t) + f(t,x(t)) \qquad (2.1)$$

$${}_{t_0}D_t^q x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau(t)) + F_1(x(t)) + F_2(x(t-\tau(t))) \qquad (2.2)$$

Riemann-Liouville kesirli-türevli nonlineer diferansiyel sistemlerin kararlılığını ele alırlar. Riemann-Liouville kesirli türevi üzerinde iki yeni eşitsizlik elde ederler. Bu eşitsizlikler kararlılığın araştırılmasında önemli rol oynarlar. Ayrıca Lyapunov'un ikinci metodunu uygulayarak, gecikmesiz (2.1) ve gecikmeli (2.2) nonlineer kesirli sistemlerin asimptotik kararlılığı için yeterlilik şartlarını elde ederler. Kullandıkları yöntem sayesinde Lyapunov fonksiyonunun tamsayı dereceli türevleri doğrudan hesaplanabilir.

Liu ve ark. (2016c)'de

$$E_{t_0}^{C}D_t^q x(t) = Ax(t) + f(t, x(t))$$

şeklindeki kesirli nonlineer tekil sistemlerin kararlılığı ve bunun karmaşık dinamik ağların senkronizasyonundaki uygulamalarını araştırırlar. Kesirli Lyapunov direkt yöntemi (Lyapunov'un ikinci metodu) ve S-prosedür lemmasını uygulayarak kararlılıkla ilgili birkaç yeterlilik şartı elde ederler. Ayrıca kesirli tekil dinamik ağ sınıfının global senkronizasyonu için LMI olarak basit bir koşul elde ederler.

Chen ve ark. (2016)'da

$$\begin{aligned} D^{\alpha} x_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} g_j(x_j(t-\tau)) + I_i, \\ x_i(t) = \phi_i(t), \quad t \in [-\tau, 0] \end{aligned}$$

şeklindeki kesirli mertebeli gecikmeli sinir ağlarının bir sınıfının sonlu zaman kararlılıklarını ele alırlar. Eşitsizlik tekniğini kullanarak, bu tür kesirli mertebeden sinir ağlarının sonlu bir zaman aralığında kararlılığını sağlayan gecikmeye bağlı iki yeni yeterlilik şartı elde ederler.

Yang ve ark. (2017)'de

$$\begin{aligned} D_{0,t}^{\alpha} u(t) = Au(t) + g(t, u(t)), \quad t \neq t_k, \\ \Delta u(t_k) = u(t_k^{+}) - u(t_k^{-}) = J_k(u(t_k)), \quad t = t_k, \quad k \in \mathbf{Z}_{+} \end{aligned}$$

şeklindeki impulslu kesirli mertebeden nonlineer sistemlerin Lyapunov kararlılık analizini ele alırlar. Bu sistemin Mittag-Leffler kararlılığı için yeterli şartları elde ederler.

Liu ve ark. (2017a)'da

$${}_{t_0}D_t^q x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + C_{t_0}D_t^q x(t-\tau)$$

şeklindeki Riemann-Liouville kesirli nötr sistemlerin asimptotik kararlılığını doğrudan Lyapunov yöntemini uygulayarak araştırırlar. Asimptotik kararlılık için LMI olarak kolayca çözülebilen yeni yeterli koşullar sunarlar. Kullandıkları yöntemin avantajı, Lyapunov fonksiyonlarının tamsayı dereceli türevlerinin doğrudan hesaplanabilmesidir.

Liu ve ark. (2017b)'de

$$E_{t_0}D_t^q x(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i x(t - \tau_i(t))$$

şeklindeki zamanla değişen çoklu gecikmelere sahip Riemann-Liouville kesirli singüler sistemleri için iki asimptotik kararlılık kriteri bulurlar. Kriterleri, hesaplama açısından esnek ve verimli olan matris denklemleri veya matris eşitsizlikleri olarak tanımlarlar. Kullandıkları yöntemin avantajı ise Lyapunov fonksiyonlarının tamsayı dereceli türevlerinin doğrudan hesaplanabilmesidir.

Zhang ve ark. (2018)'de

$${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha} x(t) = -Ax(t) + B_1 f_1(x(t)) + B_2 f_2(x(t-h)) + B_3 \int_{t-\tau}^{t} f_3(x(s))ds, \quad t \geq 0$$

şeklindeki ayrık (discrete) ve dağıtılmış (distributed) gecikmeli Riemann-Liouville kesirli dereceli sinir ağlarının asimptotik kararlılığını araştırırlar. Uygun bir Lyapunov fonksiyoneli oluşturarak çalıştıkları sinir ağının asimptotik olarak kararlı olmasını sağlamak için iki yeterli koşul elde edip bu kararlılık kriterlerini LMI olarak ifade ederler. Bu yöntemin avantajı, Lyapunov fonksiyonelinin kesirli dereceli türevinin hesaplanmasına gerek kalmamasıdır.

Korkmaz ve Özdemir (2019)'da

$$x' + {}_0D_t^{\alpha} x(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0$$
$$x''(t) + g(x'(t)) + {}_0D_t^{\alpha} x'(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0$$

şeklindeki tamsayı ve kesirli mertebe içeren nonlineer otonom diferansiyel denklem sistemlerinin kararlılığını araştırırlar. Lyapunov'un ikinci metodunu kullanarak nonlineer otonom kesirli sistemlerin asimptotik kararlılığı için bazı yeterlilik şartları elde ederler.

Altun ve Tunç (2020)'de

$${}_{t_0}D_t^q x(t) = A_0 x(t) + G_0(x(t)) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - h_i(t)) + \sum_{i=1}^{m} G_i(x(t - h_i(t)))$$

şeklindeki çoklu değişken gecikmeli nonlineer kesirli mertebeden bir diferansiyel sistemi ele alırlar. Uygun bir Lyapunov fonksiyoneli bularak bu sistemin sıfır çözümünün asimptotik kararlılığı için yeterlilik koşullarını elde ederler.

Bu tez çalışmasında yukarıdaki çalışmalardan ve özellikle Liu ve ark. (2017a) ve Liu ve ark. (2017b) çalışmalarından esinlenerek

$$E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau_1(t)) + C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t))$$

ve

$$E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t) = Ax(t) + B_1x(t-\tau_1(t)) + B_2x(t-\tau_2(t)) + C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t))$$

kesirli singüler diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinin davranışları araştırılır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Temel Tanım ve Teoremler

Burada $x(t_0) = x_0$ başlangıç verisi ile birlikte

$$x' = F(t,x) \tag{3.1}$$

formundaki adi diferansiyel denklemler ile çalışılmaktadır. Aşağıda (3.1)'in $x(t,t_0,x_0)$ çözümü için çeşitli kararlılık kavramları tanımlanmaktadır. Bundan itibaren kararlılık derken, $[t_0,\infty)$ aralığı üzerindeki kararlılık kastedilmektedir.

Tanım 3.1. $x(t)$, (3.1)'in çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (3.1)'in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t,t_0,\bar{x}_0)$ çözümü için $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.1)'in $x(t)$ çözümüne kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.2. Eğer (3.1)'in $x(t)$ çözümü kararlı ve bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| \to 0$ oluyorsa (3.1)'in $x(t)$ çözümüne asimptotik kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.3. Eğer (3.1)'in $x(t)$ çözümü kararlı değilse kararsız olarak bilinir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.1 ve 3.3 1892'de A. M. Liapunov tarafından önerilmiştir. Bunlar (3.1) denkleminin sağ tarafındaki küçük farklılıklar altında kararlılığın korunmasına izin vermedikleri için biraz zayıftırlar. Bu nedenle, sürekli hareket eden pertürbasyonlar altında çözümlerin kararlılığını tartışmak için aşağıdaki güçlü kavramlara ihtiyacımız vardır.

Tanım 3.4. $x(t)$, (3.1)'in çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (3.1)'in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t,t_0,\bar{x}_0)$ çözümü ve $t_1 \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_1$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.1)'in $x(t)$ çözümüne düzgün kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.5. Eğer (3.1)'in $x(t)$ çözümü düzgün kararlı ve bir $\delta_0 > 0$ vardır ve her bir $\eta > 0$ için bir $T = T(\eta) > 0$ vardır ki $t_1 \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta_0$ iken her $t \geq t_1 + T$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \eta$ oluyorsa (3.1)'in $x(t)$ çözümüne düzgün asimptotik kararlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Teorem 3.1. $\Phi(t)$,

$$x' = A(t)x \tag{3.2}$$

sisteminin $\Phi(t_0) = I$ şartını sağlayan bir temel matrisi olsun. O zaman (3.2) sistemi

(i) kararlıdır ancak ve ancak her $t \geq t_0$ için

$$\|\Phi(t)\| \leq M$$

olacak şekilde bir M pozitif sayısı vardır.

(ii) düzgün kararlıdır ancak ve ancak her $t_0 \leq s \leq t < \infty$ için

$$\left\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\right\| \leq M$$

olacak şekilde pozitif bir M sayısı vardır.

(iii) güçlü kararlıdır ancak ve ancak her $t \geq t_0$ için

$$\|\Phi(t)\| \leq M, \quad \left\|\Phi^{-1}(t)\right\| \leq M$$

olacak şekilde pozitif bir M sayısı vardır.

(iv) asimptotik kararlıdır ancak ve ancak $t \to \infty$ iken

$$\|\Phi(t)\| \to 0$$

olur.

(v) düzgün asimptotik kararlıdır ancak ve ancak her $t_0 \leq s \leq t < \infty$ için

$$\left\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\right\| \leq Me^{-a(t-s)}$$

olacak şekilde pozitif M ve α sayıları vardır (Ahmad ve Rao, 1999).

Teorem 3.1'de verilen ifadeler, yukarıda verilen tanımlardan çok daha kullanışlıdır. Bu kısımdan sonra $f \in C[R^n, R^n]$ olmak üzere

$$x' = f(x) \tag{3.3}$$

formundaki otonom diferansiyel denklem sistemi ele alınmaktadır. (3.3) sisteminin çözümlerinin varlık ve tekliğini sağlamak için f fonksiyonunun yeterince düzgün olduğunu kabul edelim. $f(0) = 0$ ve orijinin bir komşuluğunda $x \neq 0$ için $f(x) \neq 0$ olsun ki böylece (3.3) sistemi $x \equiv 0$ denilen sıfır çözümünü sağlar ve orijin, (3.3)'ün izole edilen kritik noktası olur.

Ω , R^n-de orijini içeren bir açık küme olsun. Farzedelim ki $V(x)$, Ω üzerinde tanımlanan bir sürekli skaler fonksiyondur (yani $x_1, x_2, ..., x_n$ değişkenleri ile reel değerli, sürekli ve skaler bir fonksiyon). Burada geometrik olarak kolay yorumlanması adına öklit normu

$$||x||_e^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

kullanılmaktadır. Kolaylık için, alt simge e kullanılmamaktadır.

Burada geliştirilen teori $||x|| = \sum_{j=1}^{n} |x_i|$ ile tanımlanan bir $x \in R^n$ vektör fonksiyonunun normu için de eş derecede geçerlidir.

Tanım 3.6. $x \in \Omega$ olsun. $V(0) = 0$ ve $x \neq 0$ için $V(x) > 0$ ise $V(x)$ skaler fonksiyonuna Ω kümesi üzerinde *pozitif tanımlı*dır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.7. $x \in \Omega$ olsun. Eğer $V(x)$ skaler fonksiyonu, sıfır değerini aldığı, orijini içeren belirli noktalar dışında Ω boyunca $V(x) > 0$ oluyorsa $V(x)$ skaler fonksiyonuna Ω kümesi üzerinde *yarı pozitif tanımlı*dır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.8. $-V(x)$ skaler fonksiyonu pozitif tanımlı ise $V(x)$ fonksiyonuna *negatif tanımlı*dır, $-V(x)$ fonksiyonu yarı pozitif tanımlı ise $V(x)$ fonksiyonuna *yarı negatif tanımlı*dır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.9. $\phi \in C[[0,p), R^+]$, $\phi(0) = 0$ ve $\phi(r)$, r'ye göre sıkı monoton artan ise $\phi(r)$ fonksiyonuna K sınıfına aittir denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.10. $V(0) = 0$ ve $x \in \Omega$ için $a(||x||) \leq V(x)$ olacak şekilde bir $a(r) \in K$ fonksiyonu varsa V fonksiyonuna Ω kümesi üzerinde pozitif tanımlıdır denir. $-V(x)$ pozitif tanımlı ise $V(x)$ fonksiyonuna negatif tanımlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Elverişli olmasından dolayı çoğunlukla tanım 3.10 kullanılmaktadır.

Tanım 3.11. (Sylvester kriteri) $n \times n$ tipinde reel ve simetrik $B = (b_{ij})$ matrisinin bütün ardışık baş minörlerinin determinantının pozitif olmasıdır. Yani, $\det B_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$'ler $\det B$'nin baş minörleri olmak üzere

$$\det B_j = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jj} \end{vmatrix} > 0, \qquad j = 1,2,...,n.$$

olur (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.12. $m \times m$ tipinde reel ve simetrik $B = (b_{ij})$ matrisi pozitif tanımlıdır ancak ve ancak $x^T Bx$ kuadratik formu pozitif tanımlıdır (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.13. $m \times m$ tipinde reel ve simetrik $B = (b_{ij})$ matrisi pozitif tanımlıdır ancak ve ancak B matrisi Sylvester kriterini sağlıyordur (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.14. $m \times m$ tipinde reel ve simetrik $B = (b_{ij})$ matrisi negatif tanımlıdır ancak ve ancak $-B$ pozitif tanımlıdır [yani, her $j = 1,2,...,n$ için $(-1)^j \det B_j > 0$] (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.15. $\Omega \in R^n$ orijini içeren bir bölge ve $V : [0,\infty) \times \Omega \to [0,\infty)$ birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer $t \geq 0$ için V pozitif tanımlı ise o zaman V'ye bir Lyapunov fonksiyon denir (Ahmad ve Rao, 1999).

$$V(x) = x^T Bx = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \tag{3.4}$$

simetrik B matrisi (yani $b_{ij} = b_{ji}$) ile birlikte bir kuadratik form olsun.

(3.4)'teki $V(x)$'in pozitif tanımlılığını test etmek için Sylvester kriteri uygulanabilir.

(3.3)'e göre V'nin türevi

$$\dot{V}(x) = gradV(x).f(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x) \tag{3.5}$$

skaler çarpımıdır. (3.3)'ün herhangi bir çözümü $x = x(t)$ ise o zaman (3.5) ve zincir kuralından

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1'(t) + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2'(t) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} x_n'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \tag{3.6}$$

elde edilir. Burada doğrudan (3.3)'ten $\frac{dV(x(t))}{dt}$ hesaplanabilir.

$S_\rho = \{x \in R^n : \|x\| < \rho\}$, $R^+ = [0,\infty)$ ve $t_0 \geq 0$ için $J = [t_0,\infty)$ olsun. Farz edelim ki $t \in J$ için $\|x(t)\| < \rho$ olacak şekilde $x(t_0) = x_0$ başlangıç değeri ile birlikte (3.3)'ün herhangi bir çözümü $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ olsun. Aynı zamanda (3.3) otonom olduğundan dolayı ayrıca $t_0 = 0$ kabul edilebilir.

Teorem 3.2. Eğer S_ρ üzerinde $\dot{V}(x) \leq 0$ [yani (3.3)'e göre (3.5) pozitif olmayan türev] olacak şekilde pozitif tanımlı skaler bir $V(x)$ fonksiyonu varsa o zaman (3.3)'ün sıfır çözümü kararlıdır (Ahmad ve Rao, 1999).

İspat. $V(x)$ pozitif tanımlı olduğundan $x \in S_\rho$ için $b(\|x\|) \leq V(x)$ olacak şekilde bir $b \in K$ fonksiyonu vardır. $0 < \varepsilon < \rho$ verilsin. $V(x)$ sürekli ve $V(0) = 0$ olduğundan dolayı $\|x_0\| \leq \delta$ iken $V(x_0) < b(\varepsilon)$ sağlayan bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabilir. Şimdi (3.3)'ün sıfır çözümünün kararlı olduğunu iddia ediyoruz. Bu iddianın doğru olmadığını kabul edelim. O zaman $\|x_0\| \leq \delta$ iken bazı $t = \tilde{t} > 0$ için $\|x(\tilde{t})\| = \varepsilon$ sağlayan (3.3)'ün bir $x(t) = x(t,0,x_0)$ çözümü vardır. S_ρ'da $\dot{V}(x) \leq 0$ olduğundan dolayı $V(x(\tilde{t})) \leq V(x_0)$ olur. Bu yüzden,

$$b(\varepsilon) = b(\|x(\tilde{t})\|) \leq V(x(\tilde{t})) \leq V(x_0) < b(\varepsilon)$$

olur. Bu bir çelişkidir. Bu (3.3)'ün sıfır çözümünün kararlı olduğunu gösterir (Ahmad ve Rao, 1999). □

Teorem 3.3. Eğer S_ρ'da $\dot{V}(x)$ negatif tanımlı olacak şekilde pozitif tanımlı skaler bir $V(x)$ fonksiyonu varsa o zaman (3.3)'ün sıfır çözümü asimptotik kararlıdır (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.16. Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevi sadece t gibi bir bağımsız değişkene bağlı ve bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin denklemde bulunan diğer bileşenleri t'ye veya t'den küçük bir argümana bağlı ise denkleme gecikmeli (delay, retarded), eğer t'ye veya t'den büyük bir argümana bağlı ise denkleme ileri argümanlı (advanced) denklem denir. Bu tür denklemlerin dışında kalan denklemler ise nötr veya nötral (neutral) diferansiyel denklemler olarak adlandırılır.

Bu kısımda kesirli kalkülüste kullanılan önemli tanımlar verilmektedir. Bu tanımlarda Γ, Gamma fonksiyonunu ifade etmektedir.

Tanım 3.17. Riemann-Liouville kesirli integrali

$${}_{t_0}D_t^{-q}x(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{q-1} x(s) \mathrm{d}s, \quad (q > 0) \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Podlubny, 1999).

Tanım 3.18. Riemann-Liouville kesirli türevi

$$ {}_{t_0}D_t^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \int_{t_0}^{t} \frac{x(s)}{(t-s)^{q+1-n}}\,\mathrm{d}s, \quad (n-1 \leq q < n), \tag{3.8} $$

ile tanımlanmaktadır (Podlubny, 1999).

Tanım 3.19. Caputo türevi ise

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^{t} \frac{x^{(n)}(s)}{(t-s)^{q+1-n}}\,\mathrm{d}s, \quad (n-1 \leq q < n), \tag{3.9} $$

olarak tanımlanmaktadır (Podlubny, 1999).

3.2. Lyapunov Metodu

Lineer ve zayıf nonlineer sistemlerin çözümlerinin kararlılık davranışları integral eşitsizlikleri ve sabitlerin değişim formülü kullanılarak analiz edilebilmektedir. Ancak bu analizler, çalışılan noktasının küçük bir komşuluğu ile, yani küçük veya lokal kararlılıktaki kararlılıkla sınırlı kalmaktadır. Ayrıca kullanılan tekniklerde, lineer sistemlerle çalışıldığında açık çözüm bilgisi ve zayıf lineer olmayan sistemler ile çalışıldığında ise karşılık gelen lineer sistemlerin çözümlerinin tam olarak kavranması gerekmektedir. Bu nedenlerden dolayı da fiziksel bir sistemin kararlılık davranışını araştırırken ilgili tekniklerin uygulanması zorlaşmakta ve kullanım alanları sınırlanmaktadır. Dolayısıyla yeni teknik arayışlarına girilmiştir.

Bu bölümde bu yeni tekniklerin en önemlilerinden biri olan bir teknik tanıtılmaktadır. Bu, lineer ve nonlineer sistemlerin çözümlerinin kararlılık davranışlarını belirlemek için *Lyapunov'un ikinci metodu* olarak bilinen tamamen farklı bir tekniktir. Bu metodun en büyük avantajı, çözümlerle ilgili herhangi bir ön bilgi sahibi olmaksızın, kararlılığın bütün bir kapsamı ile elde edilebilmesidir. 1892'de bu metodu bilim dünyası ile tanıştıran A. M. Liapunov bunu sadece basit kararlılık teoremlerini oluşturmak için kullanmıştır. Ancak onun bu basit teoremleri yaklaşık son yarım asırdır fizik ve mühendislik alanlarında tamamen yeni problemlere etkili bir şekilde uygulanmış ve böylece geniş kapsamda fayda sağlanmıştır. Bugün bu metod diferansiyel denklem çalışmaları başta olmak üzere kontrol sistemleri, dinamik sistemler, zaman gecikmeli sistemler, enerji sistem analizleri, zaman değişkenli nonlinear feedback sistemleri ve bunun gibi daha birçok sistemin teorisinde mükemmel bir araç olarak yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Lyapunov (Liapunov) fonksiyon adındaki bu metodun temel özelliği skaler bir fonksiyon oluşturmasıdır. Maalesef bazen verilen bir sistem için uygun bir Lyapunov fonksiyon oluşturmak çok zordur. Bu nedenle bu metodun da sınırlılıkları bulunmaktadır. Bu metot diferansiyel denklemi çözmeksizin doğrudan kararlılık bilgisini verdiğinden dolayı, aynı zamanda *Lyapunov'un direkt metodu* olarak da bilinmektedir.

3.3. Lineer Matris Eşitsizliği (LMI)

Tanım 3.20. $x \in \mathbf{R}^n$ değişkenindeki lineer matris eşitsizliği (LMI) $F_0 \in \mathbf{R}^{m\times m}, \ldots, F_n \in \mathbf{R}^{m\times m}$ simetrik matrisler olmak üzere

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_n F_n \geq 0,$$

şeklindedir.

Birçok eşitsizlik LMI olarak ifade edilebilmektedir.

Örnek 3.1.

$$a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

şeklindeki bir lineer eşitsizlikler kümesi bir LMI olarak

$$\begin{bmatrix} b_1 - a_1^T x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 - a_2^T x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_k - a_k^T x \end{bmatrix} \geq 0.$$

şeklinde ifade edilebilir.

Örnek 3.2. x bir değişken olmak üzere

$$a_i^T x = b_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

şeklindeki sabit lineer eşitliklerini LMI şeklinde nasıl ifade edebiliriz?

Çözüm. Sabitleri

$$a_i^T x \leq b_i, \quad a_i^T x \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

şeklinde de yazabiliriz. Bunlar

$$\operatorname{diag}\left(b_1 - a_1^T x, \ldots, b_k - a_k^T x, a_1^T x - b_1, \ldots, a_k^T x - b_k\right) \geq 0.$$

şeklindeki LMI'ya denktir.

Örnek 3.3. Lyapunov teorisinde sıklıkla karşılaşılan, P bir değişken olmak üzere,

$$A^T P + PA + Q \leq 0$$

şeklindeki matris de bir LMI'dır. Bu durumda $A^T P + PA + Q = 0$ Lyapunov denklemini çözerek LMI'yı analitik olarak çözebiliriz.

Örnek 3.4. $A \in \mathbf{R}^{k \times k}$ olmak üzere

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

şeklindeki matrisi ele alalım. $A > 0$ ise, o zaman $X \geq 0$ ancak ve ancak $S = C - B^T A^{-1} B \geq 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. (Bu sonuç ile Schur complement'ini LMI'lar olarak temsil etmiş oluyoruz.)

Çözüm. Bunu göstermek için

$$\inf_u \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = v^T \left(C - B^T A^{-1} B\right) v$$

eşitliği kullanılır. Dolayısıyla eğer $C - B^T A^{-1} B \geq 0$ ise o zaman her $v \in \mathbf{R}^{n-k}$ için $v^T \left(C - B^T A^{-1} B\right) v \geq 0$ olur. Bu, yukarıdaki kuadratik formun her $u \in \mathbf{R}^k$ ve $v \in \mathbf{R}^{n-k}$ için negatif olmaması gerektiği anlamına gelir, yani $X \geq 0$ olur. Benzer şekilde, eğer $X \geq 0$ ise o zaman her u ve v için kuadratik form negatif değildir. Bu da herhangi bir v için u üzerindeki infimumun negatif olmaması gerektiği anlamına gelir. Böylece, her $v \in \mathbf{R}^{n-k}$ için $v^T \left(C - B^T A^{-1} B\right) v \geq 0$ olur ve böylece $C - B^T A^{-1} B \geq 0$ olur.

Bu örnekteki sonucun birkaç uygulamasına göz atalım.

Örnek 3.5. $k > 0$ ve x bir değişken olmak üzere

$$\|Ax - b\| \leq k$$

eşitsizliğini lineer matris eşitsizliği olarak ifade ediniz.

Çözüm. $\|Ax-b\| \leq k$ eşitsizliği

$$k^2 - (Ax-b)^T(Ax-b) \geq 0$$

şeklinde yazılabilecek olan $\|Ax-b\|^2 \leq k^2$ eşitsizliğine denktir. Örnek 3.4'te Shur complement ile ilgili elde edilen sonuç kullanılarak

$$\begin{bmatrix} I & Ax-b \\ (Ax-b)^T & k^2 \end{bmatrix} \geq 0$$

şeklindeki LMI elde edilir.

Örnek 3.6. Matris norm eşitsizlikleri. $k > 0$ ve A bir değişken olmak üzere

$$\|A\| \leq k$$

eşitsizliğini bir LMI olarak temsil ediniz.

Çözüm. $\|A\| \leq k$ eşitsizliği $\lambda_{\max}\left(A^T A\right) \leq k^2$ eşitsizliğine denktir ve

$$A^T A \leq k^2 I$$

şeklinde yazılabilir. Bu da LMI olarak

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & k^2 I \end{bmatrix} \geq 0$$

şeklinde ifade edilebilir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

4.1. Gecikmeli Kesirli Singüler Denklem Sistemleri

Lemma 4.1. $p > q > 0$ olsun. ”Yeterince iyi” $x(t)$ fonksiyonları için

$$ {}_{t_0}D_t^q \left({}_{t_0}D_t^{-p} x(t) \right) = {}_{t_0}D_t^{q-p} x(t) \tag{4.1}$$

eşitliği sağlanmaktadır. Özellikle de $x(t)$ integrallenebilir olduğunda bu eşitlik sağlanmaktadır (Kilbas ve ark., 2006).

Aşağıdaki lemmalar genel Lyapunov fonksiyonunun Caputo kesirli türevlerinde kullanılmaktadır.

Lemma 4.2. $x(t) \in \mathbf{R}$ sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman her $t \geq t_0$ zamanında

$$\frac{1}{2} {}_{t_0}^{C}D_t^q x^2(t) \leq x(t) {}_{t_0}^{C}D_t^q x(t), \quad \forall q \in (0,1) \tag{4.2}$$

olur (Aguila-Camacho ve ark., 2014).

Lemma 4.3. $x(t) \in \mathbf{R}^n$ türevlenebilir bir vektör fonksiyon olsun. O zaman $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ sabit, kare, simetrik ve pozitif tanımlı bir matris olmak üzere her $t \geq t_0$ anında

$$\frac{1}{2} {}_{t_0}^{C}D_t^q \left(x^T(t) P x(t) \right) \leq x^T(t) P {}_{t_0}^{C}D_t^q x(t), \quad \forall q \in (0,1) \tag{4.3}$$

eşitsizliği sağlanır (Duarte-Mermoud ve ark., 2015).

Yukarıdaki iki sonuç aşağıdaki lemmalar ile Riemann-Liouville kesirli türevine genişletilmiştir.

Lemma 4.4. $x(t) \in \mathbf{R}$ sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $x(t)$’nin türevi integrallenebilir ise o zaman

$$\frac{1}{2} {}_{t_0}D_t^q x^2(t) \leq x(t) {}_{t_0}D_t^q x(t), \quad \forall q \in (0,1), \quad \forall t \geq t_0 \tag{4.4}$$

eşitsizliği sağlanır (Liu ve ark., 2016b).

İspat. (4.4) ilişkisini ispatlamak

$$x(t) {}_{t_0}D_t^q x(t) - \frac{1}{2} {}_{t_0}D_t^q x^2(t) \geq 0, \quad \forall q \in (0,1) \tag{4.5}$$

eşitsizliğini ispatlamaya denktir. Newton-Leibniz formülünden

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s=x(t_0)+{}_{t_0}D_t^{-1}x(t) \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) eşitliğini (3.8) eşitliğinde yerine koyarsak (4.1) eşitliğinden

$${}_{t_0}D_t^{q}x(t)={}_{t_0}D_t^{q}x(t_0)+{}_{t_0}D_t^{q-1}x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-q)}\left[\frac{x(t_0)}{(t-t_0)^{q}}+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-q}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right] \tag{4.7}$$

elde edilir. Böylece

$$x(t)_{t_0}D_t^{q}x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-q)}\left[\frac{x(t)x(t_0)}{(t-t_0)^{q}}+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-q}x(t)\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right] \tag{4.8}$$

olur. Benzer bir hesaplama ile

$$\frac{1}{2}{}_{t_0}D_t^{q}x^2(t)=\frac{1}{\Gamma(1-q)}\left[\frac{x^2(t_0)}{2(t-t_0)^{q}}+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-q}x(s)\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right] \tag{4.9}$$

elde edilir. Böylece (4.5) ilişkisi

$$\frac{1}{\Gamma(1-q)}\left[\frac{x(t)x(t_0)-\frac{1}{2}x^2(t_0)}{(t-t_0)^{q}}+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-q}(x(t)-x(s))\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right]\geq 0 \tag{4.10}$$

şeklinde yazılabilir. (4.10) ifadesinin ikinci terimine kısmi integrasyon uygulandığında

$$\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-q}(x(t)-x(s))\dot{x}(s)\mathrm{d}s=\frac{(x(t)-x(t_0))^2}{2(t-t_0)^{q}}+\frac{q}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{(x(t)-x(s))^2}{(t-s)^{q+1}}\,\mathrm{d}s \tag{4.11}$$

elde edilir. Böylece (4.10) ifadesi

$$\frac{1}{\Gamma(1-q)}\left[\frac{x^2(t)}{2(t-t_0)^{q}}+\frac{q}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{(x(t)-x(s))^2}{(t-s)^{q+1}}\,\mathrm{d}s\right]\geq 0 \tag{4.12}$$

eşitsizliğine indirgenir. (4.12) ifadesinin doğru olduğu aşikardır. Böylece ispat tamamlanmış olur (Liu ve ark., 2016b). □

Not 4.1. $x(t)\in\mathbf{R}^n$ olması durumunda da Lemma 4.4 doğrudur. Yani,

$$\frac{1}{2}{}_{t_0}D_t^{q}\left(x^T(t)x(t)\right)\leq x^T(t)_{t_0}D_t^{q}x(t),\quad \forall q\in(0,1),\quad \forall t\geq t_0 \tag{4.13}$$

olur.

Lemma 4.4'ün ispatına benzer şekilde aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Lemma 4.5. $x(t) \in \mathbf{R}^n$ türevlenebilir (differentiable) bir fonksiyon olsun. O zaman $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ sabit, kare, simetrik ve yarı pozitif tanımlı bir matris olmak üzere

$$\frac{1}{2}{}_{t_0}D_t^q\left(x^T(t)Px(t)\right) \leq x^T(t)P_{t_0}D_t^q x(t), \quad \forall q \in (0,1), \quad \forall t \geq t_0 \tag{4.14}$$

ilişkisi sağlanır (Liu ve ark., 2016b).

Lemma 4.6. Her $x, y \in \mathbf{R}^n, \varepsilon > 0$ için

$$2x^T y \leq \varepsilon x^T x + \frac{1}{\varepsilon} y^T y$$

eşitsizliği sağlanır (Liu ve ark., 2015).

Lemma 4.7. $M > 0$ ve $N \geq 0$'ın gerçel simetrik matrisler olduğunu kabul edelim. O zaman

$$M > N \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{\max}\left(NM^{-1}\right) < 1 \Leftrightarrow \lambda_{\max}\left(M^{-\frac{1}{2}}NM^{-\frac{1}{2}}\right) < 1 \tag{4.15}$$

olur (Tan, 2008).

Bu kısımda, zamanla değişen gecikmelere sahip kesirli lineer nötr sistemlerin çözümlerinin kararlılığı sunulmaktadır. Ayrıca bu sistemlerin çözümlerinin asimptotik kararlılığı üzerinde yeterli koşulları belirlemek için doğrusal matris eşitsizliği dikkate alınmaktadır.

$0 < \alpha < 1$, $x(t) \in R^n$ bir durum vektörü, $0 < rankE = r < n$ iken $E, A, B, C \in R^{n\times n}$ sabit matrisler ve her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t) > 0$ zamanla değişen gecikmeler olmak üzere kesirli nötr sistem

$$E_{t_0}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau_1(t)) + C_{t_0}D_t^\alpha x(t-\tau_2(t)) \tag{4.16}$$

şeklinde verilsin.

Ayrıca $\Phi : \Phi(x_t) = x(t) - Cx(t-\tau_2(t))$ operatörü verilsin. Eğer $\|C\| < 1$ ise Φ operatörü kararlı olmaktadır.

Eğer $\Phi(x_t) = 0$, $t \geq 0$ homojen fark denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı ise Φ operatörü kararlı olarak adlandırılmaktadır (Hale, 1977).

Teorem 4.1. Her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$ $(i = 1, 2)$, $\tau_2(t)$ sınırlı bir fonksiyon ve $\|C\| < 1$ olsun.

$$M_{11} = PA + A^T P + Q + A^T(R_1 + mR_2)A,$$
$$M_{12} = PB + A^T(R_1 + mR_2)B,$$
$$M_{13} = PC + A^T(R_1 + mR_2)C$$
$$M_{22} = B^T(R_1 + mR_2)B - (1 - d_1)Q,$$
$$M_{23} = B^T(R_1 + mR_2)C,$$
$$M_{33} = C^T(R_1 + mR_2)C - (1 - d_2)R_1,$$

ve m, $|\tau_2(t)| \leq m$ olacak şekilde bir sabit olmak üzere $P^T E = E^T P \geq 0$ ve

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12}^T & M_{22} & M_{23} \\ M_{13}^T & M_{23}^T & M_{33} \end{pmatrix} < 0, \tag{4.17}$$

LMI'sı sağlanacak şekilde pozitif tanımlı ve simetrik P, Q, R_1, R_2 matrisleri vardır ve (4.16) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyonu

$$\begin{aligned} V(t) =& {}_{t_0}D_t^{\alpha-1}(x^T(t)P^T Ex(t)) + \int_{t-\tau_1(t)}^{t} x^T(s)Qx(s)ds \\ &+ \int_{-\tau_2(t)}^{0} (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t+s))^T R_1(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t+s))ds \\ &+ \int_{t-\tau_2(t)}^{t}\int_{\theta}^{t} (E_{t_0}D_s^{\alpha}x(s))^T R_2(E_{t_0}D_s^{\alpha}x(s))dsd\theta \end{aligned} \tag{4.18}$$

şeklinde tanımlı olsun.

$$\begin{aligned} 2x^T(t)P^T E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t) =& 2x^T(t)P^T\left[Ax(t) + Bx(t-\tau_1(t)) + C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t))\right] \\ =& x^T(t)(P^T A + A^T P)x(t) + 2x^T(t)P^T Bx(t-\tau_1(t)) \\ &+ 2x^T(t)P^T C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t)) \end{aligned} \tag{4.19}$$

olarak bulunur. Aynı zamanda,

$$
\begin{aligned}
&(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))^T R_1(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t)) + m(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))^T R_2(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t)) \\
&\quad = [Ax(t) + Bx(t-\tau_1(t)) + C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t))]^T (R_1 + mR_2) \\
&\qquad \times [Ax(t) + Bx(t-\tau_1(t)) + C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t))] \\
&\quad = x^T(t)A^T(R_1+mR_2)Ax(t) + x^T(t)A^T(R_1+mR_2)Bx(t-\tau_1(t)) \\
&\qquad + x^T(t)A^T(R_1+mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t)) + x^T(t-\tau_1(t))B^T(R_1+mR_2)Ax(t) \\
&\qquad + x^T(t-\tau_1(t))B^T(R_1+mR_2)Bx(t-\tau_1(t)) \\
&\qquad + x^T(t-\tau_1(t))B^T(R_1+mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t)) \\
&\qquad + ({}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t)))^T C^T(R_1+mR_2)Ax(t) \\
&\qquad + ({}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t)))^T C^T(R_1+mR_2)Bx(t-\tau_1(t)) \\
&\qquad + ({}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t)))^T C^T(R_1+mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t))
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

şeklinde elde edilir.

(4.1) eşitsizliği ve (4.14) denkleminden (4.16) sisteminin eğrileri boyunca $V(t)$'nin türevleri ise

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(t) =& {}_{t_0}D_t^{\alpha}(x^T(t)P^T Ex(t)) + x^T(t)Qx(t) - (1-\tau_1'(t))x^T(t-\tau_1(t))Qx(t-\tau_1(t)) \\
&+ (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))^T R_1(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t)) \\
&- (1-\tau_2'(t))(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t)))^T R_1(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t))) \\
&+ \tau_2(t)(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))^T R_2(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t)) \\
&- (1-\tau_2'(t))\int_{t-\tau_2(t)}^{t}(E_{t_0}D_s^{\alpha}x(s))^T R_2(E_{t_0}D_s^{\alpha}x(s))ds \\
\le& 2x^T(t)P^T E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t) + x^T(t)Qx(t) - (1-d_1)x^T(t-\tau_1(t))Qx(t-\tau_1(t)) \\
&+ (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))^T R_1(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t)) \\
&- (1-d_2)(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t)))^T R_1(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t))) \\
&+ m(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))^T R_2(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

olarak elde edilir.

$$
M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12}^T & M_{22} & M_{23} \\ M_{13}^T & M_{23}^T & M_{33} \end{pmatrix} < 0,
$$

$$M_{11} = PA + A^T P + Q + A^T(R_1 + mR_2)A,$$
$$M_{12} = PB + A^T(R_1 + mR_2)B,$$
$$M_{13} = PC + A^T(R_1 + mR_2)C$$
$$M_{22} = B^T(R_1 + mR_2)B - (1 - d_1)Q,$$
$$M_{23} = B^T(R_1 + mR_2)C,$$
$$M_{33} = C^T(R_1 + mR_2)C - (1 - d_2)R_1,$$
$$\xi = (x^T(t), x^T(t - \tau_1(t)), ({}_{t_0}D_t^{\alpha} x(t - \tau_2(t)))^T)^T.$$

olmak üzere (4.19) ve (4.20) eşitlikleri (4.21)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \leq & x^T(t)(P^T A + A^T P)x(t) + 2x^T(t)P^T Bx(t - \tau_1(t)) \\
& + 2x^T(t)P^T C_{t_0}D_t^{\alpha} x(t - \tau_2(t)) + x^T(t)Qx(t) - (1 - d_1)x^T(t - \tau_1(t))Qx(t - \tau_1(t)) \\
& - (1 - d_2)(E_{t_0}D_t^{\alpha} x(t - \tau_2(t)))^T R_1(E_{t_0}D_t^{\alpha} x(t - \tau_2(t))) \\
& + x^T(t)A^T(R_1 + mR_2)Ax(t) + x^T(t)A^T(R_1 + mR_2)Bx(t - \tau_1(t)) \\
& + x^T(t)A^T(R_1 + mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha} x(t - \tau_2(t)) \\
& + x^T(t - \tau_1(t))B^T(R_1 + mR_2)Ax(t) \\
& + x^T(t - \tau_1(t))B^T(R_1 + mR_2)Bx(t - \tau_1(t)) \\
& + x^T(t - \tau_1(t))B^T(R_1 + mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha} x(t - \tau_2(t)) \\
& + ({}_{t_0}D_t^{\alpha} x(t - \tau_2(t)))^T C^T(R_1 + mR_2)Ax(t) \\
& + ({}_{t_0}D_t^{\alpha} x(t - \tau_2(t)))^T C^T(R_1 + mR_2)Bx(t - \tau_1(t)) \\
& + ({}_{t_0}D_t^{\alpha} x(t - \tau_2(t)))^T C^T(R_1 + mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha} x(t - \tau_2(t))
\end{aligned}$$

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T M \xi \tag{4.22}$$

elde edilir.

(4.17)'deki lineer matris eşitsizliğinden (LMI), $\dot{V}(t)$'nin negatif tanımlı olduğu bulunur. Teorem 3.3'den de (4.16) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. □

Teorem 4.2. Her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$ $(i = 1, 2)$, $\tau_2(t)$ sınırlı bir fonksiyon ve $\|C\| < 1$ olsun.

$$N_{11} = E^T PA + A^T PE + Q_1 + Q_2 + mA^T RA,$$
$$N_{12} = E^T PB + mA^T RB,$$
$$N_{13} = -A^T PC,$$
$$N_{22} = mB^T RB - (1 - d_1)Q_1,$$
$$N_{23} = -B^T PC,$$
$$N_{33} = -(1 - d_2)Q_2,$$

ve m, $|\tau_2(t)| \leq m$ eşitsizliğini sağlayacak bir sabit olmak üzere

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{12}^T & N_{22} & N_{23} \\ N_{13}^T & N_{23}^T & N_{33} \end{pmatrix} < 0, \tag{4.23}$$

LMI'sını sağlayacak şekilde pozitif tanımlı ve simetrik P, Q_1, Q_2, R matrisleri vardır ve (4.16) sisteminin çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyonu

$$\begin{aligned} V(t) =& {}_{t_0}D_t^{\alpha-1}((Ex(t) - Cx(t-\tau_2(t)))^T P^T (Ex(t) - Cx(t-\tau_2(t)))) \\ &+ \int_{t-\tau_1(t)}^{t} x^T(s)Q_1 x(s)ds + \int_{t-\tau_2(t)}^{t} x^T(s)Q_2 x(s)ds \\ &+ \int_{t-\tau_2(t)}^{t}\int_{\theta}^{t} ({}_{t_0}D_s^{\alpha}(Ex(s) - Cx(s-\tau_2(s))))^T R({}_{t_0}D_s^{\alpha}(Ex(s) - Cx(s-\tau_2(s))))dsd\theta. \end{aligned} \tag{4.24}$$

şeklinde tanımlı olsun.

$$\begin{aligned} 2(Ex(t)-&Cx(t-\tau_2(t)))^T P {}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t) - Cx(t-\tau_2(t))) \\ &= 2(Ex(t) - Cx(t-\tau_2(t)))^T P(Ax(t) + Bx(t-\tau_1(t))) \\ &= x^T(t)(E^T PA + A^T PE)x(t) - 2x^T(t-\tau_2(t))C^T PAx(t) \\ &\quad + 2x^T(t)E^T PBx(t-\tau_1(t)) - 2x^T(t-\tau_2(t))C^T PBx(t-\tau_1(t)) \end{aligned} \tag{4.25}$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
&m({}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_2(t))))^T R({}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_2(t))))\\
&\quad = m\left[Ax(t)+Bx(t-\tau_1(t))\right]^T R\left[Ax(t)+Bx(t-\tau_1(t))\right]\\
&\quad = mx^T(t)A^TRAx(t)+mx^T(t)A^TRBx(t-\tau_1(t))+mx^T(t-\tau_1(t))B^TRAx(t)\\
&\qquad + mx^T(t-\tau_1(t))B^TRBx(t-\tau_1(t))
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

olarak elde edilir.

(4.1) eşitsizliği ve (4.14) denkleminden, (4.16) sisteminin eğrileri boyunca $V(t)$'nin türevleri

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(t) =& {}_{t_0}D_t^{\alpha}((Ex(t)-Cx(t-\tau_2(t)))^T P(Ex(t)-Cx(t-\tau_2(t))))\\
& + x^T(t)Q_1x(t)-(1-\tau_1'(t))x^T(t-\tau_1(t))Q_1x(t-\tau_1(t))\\
& + x^T(t)Q_2x(t)-(1-\tau_2'(t))x^T(t-\tau_2(t))Q_2x(t-\tau_2(t))\\
& + \tau_2(t)({}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_2(t))))^T R({}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_2(t))))\\
& - (1-\tau_2'(t))\int_{t-\tau_2(t)}^{t}({}_{t_0}D_s^{\alpha}(Ex(s)-Cx(s-\tau_2(s))))^T R({}_{t_0}D_s^{\alpha}(Ex(s)-Cx(s-\tau_2(s))))ds\\
\leq & 2(Ex(t)-Cx(t-\tau_2(t)))^T P_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_2(t)))\\
& + x^T(t)Q_1x(t)-(1-d_1)x^T(t-\tau_1(t))Q_1x(t-\tau_1(t))\\
& + x^T(t)Q_2x(t)-(1-d_2)x^T(t-\tau_2(t))Q_2x(t-\tau_2(t))\\
& + m({}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_2(t))))^T R({}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_2(t))))
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

olarak elde edilir.

$$
N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{12}^T & N_{22} & N_{23} \\ N_{13}^T & N_{23}^T & N_{33} \end{pmatrix} < 0,
$$

$$
\begin{aligned}
N_{11} &= E^TPA + A^TPE + Q_1 + Q_2 + mA^TRA,\\
N_{12} &= E^TPB + mA^TRB,\\
N_{13} &= -A^TPC,\\
N_{22} &= mB^TRB - (1-d_1)Q_1,\\
N_{23} &= -B^TPC,\\
N_{33} &= -(1-d_2)Q_2,
\end{aligned}
$$

$$\xi = (x^T(t), x^T(t-\tau_1(t)), x^T(t-\tau_2(t)))^T.$$

olmak üzere (4.25) ve (4.26) eşitlikleri (4.27)'de yerine yazılarak

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leq & x^T(t)(E^T PA + A^T PE)x(t) - 2x^T(t-\tau_2(t))C^T PAx(t) \\ & + 2x^T(t)E^T PBx(t-\tau_1(t)) - 2x^T(t-\tau_2(t))C^T PBx(t-\tau_1(t)) \\ & + x^T(t)Q_1x(t) - (1-d_1)x^T(t-\tau_1(t))Q_1x(t-\tau_1(t)) \\ & + x^T(t)Q_2x(t) - (1-d_2)x^T(t-\tau_2(t))Q_2x(t-\tau_2(t)) \\ & + mx^T(t)A^T RAx(t) + mx^T(t)A^T RBx(t-\tau_1(t)) + mx^T(t-\tau_1(t))B^T RAx(t) \\ & + mx^T(t-\tau_1(t))B^T RBx(t-\tau_1(t))\end{aligned}$$

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T M \xi \tag{4.28}$$

elde edilir.

(4.23)'teki LMI'dan $\dot{V}(t)$'nin negatif tanımlı olduğu bulunur. Teorem 3.3'den de (4.16) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. □

4.2. Çoklu Gecikmeli Singüler Denklem Sistemleri

Bu bölümde, zamanla değişen çoklu gecikmelere sahip kesirli lineer nötr sistemlerin çözümlerinin kararlılığı sunulmaktadır. Ayrıca bu sistemlerin çözümlerinin asimptotik kararlılığı üzerinde yeterli koşulları belirlemek için doğrusal matris eşitsizliği dikkate alınmaktadır.

$0 < \alpha < 1$, $x(t) \in R^n$ bir durum vektörü, $0 < rankE = r < n$ iken $E, A, B, C \in R^{n\times n}$ sabit matrisler ve her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t) > 0$ zamanla değişen gecikmeler olmak üzere kesirli nötr sistem

$$E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t) = Ax(t) + B_1x(t-\tau_1(t)) + B_2x(t-\tau_2(t)) + C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)) \tag{4.29}$$

şeklinde verilsin.

Ayrıca $\Phi : \Phi(x_t) = x(t) - Cx(t-\tau_3(t))$ operatörü verilsin. Eğer $\|C\| < 1$ ise Φ operatörü kararlı olmaktadır.

Eğer $\Phi(x_t) = 0$, $t \geq 0$ homojen fark denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı ise Φ operatörü kararlı olarak adlandırılmaktadır (Hale, 1977).

Teorem 4.3. Her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$ $(i = 1,2,3)$, $\tau_3(t)$ sınırlı bir fonksiyon ve $\|C\| < 1$ olsun.

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= PA + A^T P + 2Q + A^T(R_1 + mR_2)A,\\
M_{12} &= PB_1 + A^T(R_1 + mR_2)B_1,\\
M_{13} &= PB_2 + A^T(R_1 + mR_2)B_2,\\
M_{14} &= PC + A^T(R_1 + mR_2)C,\\
M_{22} &= B_1^T(R_1 + mR_2)B_1 - (1 - d_1)Q,\\
M_{23} &= B_1^T(R_1 + mR_2)B_2\\
M_{24} &= B_1^T(R_1 + mR_2)C,\\
M_{33} &= B_2^T(R_1 + mR_2)B_2 - (1 - d_2)Q,\\
M_{34} &= B_2^T(R_1 + mR_2)C,\\
M_{44} &= C^T(R_1 + mR_2)C - (1 - d_3)R_1,
\end{aligned}
$$

ve m, $|\tau_3(t)| \leq m$ olacak şekilde bir sabit olmak üzere $P^T E = E^T P \geq 0$ ve

$$
M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14}\\ M_{12}^T & M_{22} & M_{23} & M_{24}\\ M_{13}^T & M_{23}^T & M_{33} & M_{34}\\ M_{14}^T & M_{24}^T & M_{34}^T & M_{44} \end{pmatrix} < 0, \tag{4.30}
$$

LMI'sı sağlanacak şekilde pozitif tanımlı ve simetrik $P, Q, R_1,\ R_2$ matrisleri vardır ve (4.29) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
V(t) = {}_{t_0}D_t^{\alpha-1}(x^T(t)P^T Ex(t)) &+ \int_{t-\tau_1(t)}^{t} x^T(s)Qx(s)ds + \int_{t-\tau_2(t)}^{t} x^T(s)Qx(s)ds\\
&+ \int_{-\tau_3(t)}^{0} (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t+s))^T R_1 (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t+s))ds\\
&+ \int_{t-\tau_3(t)}^{t}\int_{\theta}^{t} (E_{t_0}D_s^{\alpha}x(s))^T R_2 (E_{t_0}D_s^{\alpha}x(s))dsd\theta
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

şeklinde tanımlı olsun.

$$\begin{aligned}2x^T(t)P^T E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t) =& 2x^T(t)P^T\left[Ax(t)+B_1x(t-\tau_1(t))+B_2x(t-\tau_2(t))+C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t))\right]\\ =& x^T(t)(P^TA+A^TP)x(t)+2x^T(t)P^TB_1x(t-\tau_1(t))\\ &+2x^T(t)P^TB_2x(t-\tau_2(t))+2x^T(t)P^TC_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)) \qquad (4.32)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}&(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))^TR_1(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))+m(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))^TR_2(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))\\ &=\left[Ax(t)+B_1x(t-\tau_1(t))+B_2x(t-\tau_2(t))+C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t))\right]^T(R_1+mR_2)\\ &\quad\times\left[Ax(t)+B_1x(t-\tau_1(t))+B_2x(t-\tau_2(t))+C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t))\right]\\ &=x^T(t)A^T(R_1+mR_2)Ax(t)+x^T(t)A^T(R_1+mR_2)B_1x(t-\tau_1(t))\\ &\quad+x^T(t)A^T(R_1+mR_2)B_2x(t-\tau_2(t))+x^T(t)A^T(R_1+mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t))\\ &\quad+x^T(t-\tau_1(t))B_1^T(R_1+mR_2)Ax(t)+x^T(t-\tau_1(t))B_1^T(R_1+mR_2)B_1x(t-\tau_1(t))\\ &\quad+x^T(t-\tau_1(t))B_1^T(R_1+mR_2)B_2x(t-\tau_2(t)))\\ &\quad+x^T(t-\tau_1(t))B_1^T(R_1+mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t))\\ &\quad+x^T(t-\tau_2(t))B_2^T(R_1+mR_2)Ax(t)+x^T(t-\tau_2(t))B_2^T(R_1+mR_2)B_1x(t-\tau_1(t))\\ &\quad+x^T(t-\tau_2(t))B_2^T(R_1+mR_2)B_2x(t-\tau_2(t))\\ &\quad+x^T(t-\tau_2(t))B_2^T(R_1+mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t))\\ &\quad+({}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)))^TC^T(R_1+mR_2)Ax(t)\\ &\quad+({}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)))^TC^T(R_1+mR_2)B_1x(t-\tau_1(t))\\ &\quad+({}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)))^TC^T(R_1+mR_2)B_2x(t-\tau_2(t))\\ &\quad+({}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)))^TC^T(R_1+mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)) \qquad (4.33)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

(4.1) eşitsizliği ve (4.14) denkleminden (4.29) sisteminin eğrileri boyunca $V(t)$'nin türevleri

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(t) =& {}_{t_0}D_t^{\alpha}(x^T(t)P^TEx(t)) + x^T(t)Qx(t) - (1-\tau_1'(t))x^T(t-\tau_1(t))Qx(t-\tau_1(t)) \\
&+ x^T(t)Qx(t) - (1-\tau_2'(t))x^T(t-\tau_2(t))Qx(t-\tau_2(t)) \\
&+ (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))^T R_1 (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t)) \\
&- (1-\tau_3'(t))(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)))^T R_1 (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t))) \\
&+ \tau_3(t)(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))^T R_2 (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t)) \\
&- (1-\tau_3'(t))\int_{t-\tau_3(t)}^{t}(E_{t_0}D_s^{\alpha}x(s))^T R_2 (E_{t_0}D_s^{\alpha}x(s))ds \\
\leq& 2x^T(t)P^TE_{t_0}D_t^{\alpha}x(t) + 2x^T(t)Qx(t) - (1-d_1)x^T(t-\tau_1(t))Qx(t-\tau_1(t)) \\
&- (1-d_2)x^T(t-\tau_2(t))Qx(t-\tau_2(t)) + (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))^T R_1 (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t)) \\
&- (1-d_3)(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)))^T R_1 (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t))) \\
&+ m(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))^T R_2 (E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t))
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

olarak elde edilir.

$$
M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12}^T & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13}^T & M_{23}^T & M_{33} & M_{34} \\ M_{14}^T & M_{24}^T & M_{34}^T & M_{44} \end{pmatrix} < 0,
$$

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= PA + A^TP + 2Q + A^T(R_1 + mR_2)A, \\
M_{12} &= PB_1 + A^T(R_1 + mR_2)B_1, \\
M_{13} &= PB_2 + A^T(R_1 + mR_2)B_2, \\
M_{14} &= PC + A^T(R_1 + mR_2)C, \\
M_{22} &= B_1^T(R_1 + mR_2)B_1 - (1-d_1)Q, \\
M_{23} &= B_1^T(R_1 + mR_2)B_2 \\
M_{24} &= B_1^T(R_1 + mR_2)C, \\
M_{33} &= B_2^T(R_1 + mR_2)B_2 - (1-d_2)Q, \\
M_{34} &= B_2^T(R_1 + mR_2)C, \\
M_{44} &= C^T(R_1 + mR_2)C - (1-d_3)R_1,
\end{aligned}
$$

$$
\xi = (x^T(t), x^T(t-\tau_1(t)), x^T(t-\tau_2(t)), ({}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)))^T)^T
$$

olmak üzere (4.32) ve (4.33) eşitlikleri (4.34)'te yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) \leq & x^T(t)(P^TA+A^TP)x(t)+2x^T(t)P^TB_1x(t-\tau_1(t))+2x^T(t)P^TB_2x(t-\tau_2(t)) \\
& +2x^T(t)P^TC_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t))+2x^T(t)Qx(t)-(1-d_1)x^T(t-\tau_1(t))Qx(t-\tau_1(t)) \\
& -(1-d_2)x^T(t-\tau_2(t))Qx(t-\tau_2(t)) \\
& -(1-d_3)(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)))^TR_1(E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t))) \\
& +x^T(t)A^T(R_1+mR_2)Ax(t)+x^T(t)A^T(R_1+mR_2)B_1x(t-\tau_1(t)) \\
& +x^T(t)A^T(R_1+mR_2)B_2x(t-\tau_2(t))+x^T(t)A^T(R_1+mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)) \\
& +x^T(t-\tau_1(t))B_1^T(R_1+mR_2)Ax(t)+x^T(t-\tau_1(t))B_1^T(R_1+mR_2)B_1x(t-\tau_1(t)) \\
& +x^T(t-\tau_1(t))B_1^T(R_1+mR_2)B_2x(t-\tau_2(t))) \\
& +x^T(t-\tau_1(t))B_1^T(R_1+mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)) \\
& +x^T(t-\tau_2(t))B_2^T(R_1+mR_2)Ax(t)+x^T(t-\tau_2(t))B_2^T(R_1+mR_2)B_1x(t-\tau_1(t)) \\
& +x^T(t-\tau_2(t))B_2^T(R_1+mR_2)B_2x(t-\tau_2(t)) \\
& +x^T(t-\tau_2(t))B_2^T(R_1+mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)) \\
& +({}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)))^TC^T(R_1+mR_2)Ax(t) \\
& +({}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)))^TC^T(R_1+mR_2)B_1x(t-\tau_1(t)) \\
& +({}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)))^TC^T(R_1+mR_2)B_2x(t-\tau_2(t)) \\
& +({}_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)))^TC^T(R_1+mR_2)C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t))
\end{aligned}$$

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T M \xi \tag{4.35}$$

elde edilir.

(4.30)'daki LMI'dan $\dot{V}(t)$'nin negatif tanımlı olduğu bulunur. Teorem 3.3'den de (4.29) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. □

Teorem 4.4. Her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$ $(i = 1,2,3)$, $\tau_3(t)$ sınırlı bir fonksiyon ve $\|C\| < 1$ olsun.

$$
\begin{aligned}
N_{11} &= E^T PA + A^T PE + Q_1 + Q_2 + mA^T RA, \\
N_{12} &= E^T PB + mA^T RB, \\
N_{13} &= -A^T PC, \\
N_{22} &= mB^T RB - (1-d_1)Q_1, \\
N_{23} &= -B^T PC, \\
N_{33} &= -(1-d_2)Q_2,
\end{aligned}
$$

ve m, $|\tau_3(t)| \leq m$ eşitsizliğini sağlayacak bir sabit olmak üzere

$$
N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{12}^T & N_{22} & N_{23} \\ N_{13}^T & N_{23}^T & N_{33} \end{pmatrix} < 0, \tag{4.36}
$$

LMI'sını sağlayacak şekilde pozitif tanımlı ve simetrik P, Q_1, Q_2, Q_3, R matrisleri vardır ve (4.29) sisteminin çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
V(t) =& {}_{t_0}D_t^{\alpha-1}((Ex(t) - Cx(t-\tau_3(t)))^T P^T (Ex(t) - Cx(t-\tau_3(t)))) \\
&+ \int_{t-\tau_1(t)}^{t} x^T(s)Q_1 x(s)ds + \int_{t-\tau_2(t)}^{t} x^T(s)Q_2 x(s)ds + \int_{t-\tau_3(t)}^{t} x^T(s)Q_3 x(s)ds \\
&+ \int_{t-\tau_3(t)}^{t}\int_{\theta}^{t} ({}_{t_0}D_s^{\alpha}(Ex(s) - Cx(s-\tau_3(s))))^T R({}_{t_0}D_s^{\alpha}(Ex(s) - Cx(s-\tau_3(s))))dsd\theta.
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı olsun.

$$
\begin{aligned}
2(Ex(t)-&Cx(t-\tau_3(t)))^T P_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t) - Cx(t-\tau_3(t))) \\
&= 2(Ex(t) - Cx(t-\tau_3(t)))^T P(Ax(t) + B_1 x(t-\tau_1(t)) + B_2 x(t-\tau_2(t))) \\
&= x^T(t)(E^T PA + A^T PE)x(t) - 2x^T(t-\tau_3(t))C^T PAx(t) \\
&\quad + 2x^T(t)E^T PB_1 x(t-\tau_1(t)) + 2x^T(t)E^T PB_2 x(t-\tau_2(t)) \\
&\quad - 2x^T(t-\tau_3(t))C^T PB_1 x(t-\tau_1(t)) - 2x^T(t-\tau_3(t))C^T PB_2 x(t-\tau_2(t))
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

olarak bulunur. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
m&({}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_3(t))))^T R({}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_3(t))))\\
&=m\left[Ax(t)+B_1x(t-\tau_1(t))+B_2x(t-\tau_2(t))\right]^T R\left[Ax(t)+B_1x(t-\tau_1(t))+B_2x(t-\tau_2(t))\right]\\
&=mx^T(t)A^TRAx(t)+mx^T(t)A^TRB_1x(t-\tau_1(t))+mx^T(t)A^TRB_2x(t-\tau_2(t))\\
&\quad+mx^T(t-\tau_1(t))B_1^TRAx(t)+mx^T(t-\tau_1(t))B_1^TRB_1x(t-\tau_1(t))\\
&\quad+mx^T(t-\tau_1(t))B_1^TRB_2x(t-\tau_2(t))+mx^T(t-\tau_2(t))B_2^TRAx(t)\\
&\quad+mx^T(t-\tau_2(t))B_2^TRB_1x(t-\tau_1(t))+mx^T(t-\tau_2(t))B_2^TRB_2x(t-\tau_2(t))
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

olarak elde edilir.

(4.1) eşitsizliği ve (4.14) denkleminden, (4.29) sisteminin eğrileri boyunca $V(t)$'nin türevleri

$$
\begin{aligned}
\dot V(t)=&{}_{t_0}D_t^{\alpha}((Ex(t)-Cx(t-\tau_3(t)))^T P(Ex(t)-Cx(t-\tau_3(t))))\\
&+x^T(t)Q_1x(t)-(1-\tau_1'(t))x^T(t-\tau_1(t))Q_1x(t-\tau_1(t))\\
&+x^T(t)Q_2x(t)-(1-\tau_2'(t))x^T(t-\tau_2(t))Q_2x(t-\tau_2(t))\\
&+x^T(t)Q_3x(t)-(1-\tau_3'(t))x^T(t-\tau_3(t))Q_2x(t-\tau_3(t))\\
&+\tau_3(t)({}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_3(t))))^T R({}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_3(t))))\\
&-(1-\tau_3'(t))\int_{t-\tau_3(t)}^{t}({}_{t_0}D_s^{\alpha}(Ex(s)-Cx(s-\tau_3(s))))^T R({}_{t_0}D_s^{\alpha}(Ex(s)-Cx(s-\tau_3(s))))ds\\
\le&2(Ex(t)-Cx(t-\tau_3(t)))^T P{}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_3(t)))\\
&+x^T(t)Q_1x(t)-(1-d_1)x^T(t-\tau_1(t))Q_1x(t-\tau_1(t))\\
&+x^T(t)Q_2x(t)-(1-d_2)x^T(t-\tau_2(t))Q_2x(t-\tau_2(t))\\
&+x^T(t)Q_3x(t)-(1-d_3)x^T(t-\tau_3(t))Q_3x(t-\tau_3(t))\\
&+m({}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_3(t))))^T R({}_{t_0}D_t^{\alpha}(Ex(t)-Cx(t-\tau_3(t))))
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

olarak elde edilir.

$$
N=\begin{pmatrix}
N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14}\\
N_{12}^T & N_{22} & N_{23} & N_{24}\\
N_{13}^T & N_{23}^T & N_{33} & N_{34}\\
N_{14}^T & N_{24}^T & N_{34}^T & N_{44}
\end{pmatrix}<0,
$$

$$
\begin{aligned}
N_{11} &= E^T PA + A^T PE + Q_1 + Q_2 + Q_3 + mA^T RA, \\
N_{12} &= E^T PB_1 + mA^T RB_1, \\
N_{13} &= E^T PB_2 + mA^T RB_2, \\
N_{14} &= -A^T PC, \\
N_{22} &= mB_1^T RB_1 - (1-d_1)Q_1, \\
N_{23} &= mB_1^T RB_2 \\
N_{24} &= -B_1^T PC, \\
N_{33} &= mB_2^T RB_2 - (1-d_2)Q_2, \\
N_{34} &= -B_2^T PC, \\
N_{44} &= -(1-d_3)Q_3
\end{aligned}
$$

$$\xi = (x^T(t), x^T(t-\tau_1(t)), x^T(t-\tau_2(t)), x^T(t-\tau_3(t)))^T.$$

olmak üzere (4.37) ve (4.38) eşitlikleri (4.39)'de yerine yazılarak

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(t) \leq & x^T(t)(E^T PA + A^T PE)x(t) - 2x^T(t-\tau_3(t))C^T PAx(t) \\
& + 2x^T(t)E^T PB_1 x(t-\tau_1(t)) + 2x^T(t)E^T PB_2 x(t-\tau_2(t)) \\
& - 2x^T(t-\tau_3(t))C^T PB_1 x(t-\tau_1(t)) - 2x^T(t-\tau_3(t))C^T PB_2 x(t-\tau_2(t)) \\
& + x^T(t)Q_1 x(t) - (1-d_1)x^T(t-\tau_1(t))Q_1 x(t-\tau_1(t)) \\
& + x^T(t)Q_2 x(t) - (1-d_2)x^T(t-\tau_2(t))Q_2 x(t-\tau_2(t)) \\
& + x^T(t)Q_3 x(t) - (1-d_3)x^T(t-\tau_3(t))Q_3 x(t-\tau_3(t)) \\
& + mx^T(t)A^T RAx(t) + mx^T(t)A^T RB_1 x(t-\tau_1(t)) + mx^T(t)A^T RB_2 x(t-\tau_2(t)) \\
& + mx^T(t-\tau_1(t))B_1^T RAx(t) + mx^T(t-\tau_1(t))B_1^T RB_1 x(t-\tau_1(t)) \\
& + mx^T(t-\tau_1(t))B_1^T RB_2 x(t-\tau_2(t)) + mx^T(t-\tau_2(t))B_2^T RAx(t) \\
& + mx^T(t-\tau_2(t))B_2^T RB_1 x(t-\tau_1(t)) + mx^T(t-\tau_2(t))B_2^T RB_2 x(t-\tau_2(t))
\end{aligned}
$$

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T M \xi \tag{4.40}$$

elde edilir.

(4.36)'daki LMI'dan $\dot{V}(t)$'nin negatif tanımlı olduğu bulunur. Teorem 3.3'den de (4.29) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. □

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında Riemann-Liouville türevin birleşme özelliğinden yararlanarak gecikmeye bağlı singüler nötr

$$E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau_1(t)) + C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t)) \tag{5.1}$$

ve

$$E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t) = Ax(t) + B_1x(t-\tau_1(t)) + B_2x(t-\tau_2(t)) + C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)) \tag{5.2}$$

diferansiyel denklem sistemleri ele alındı. Uygun Lyapunov fonksiyoneli oluşturularak Lyapunov'un ikinci metodu kullanılarak çözümlerinin asimptotik kararlılığı için yeter şartlar elde edildi. Elde edilen bu şartlar matris eşitsizliği ile ifade edildi. Sonuçlar uygun ve uygulanabilirdir.

5.2. Öneriler

Diferansiyel denklemlerin nitel davranışları üzerine çalışan araştırmacılar için açık problemler olan

$$E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t) = Ax(t) + Bf(x(t-\tau_1(t))) + C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_2(t)) \tag{5.3}$$

ve

$$E_{t_0}D_t^{\alpha}x(t) = Ax(t) + B_1f_1(x(t-\tau_1(t))) + B_2f_2(x(t-\tau_2(t))) + C_{t_0}D_t^{\alpha}x(t-\tau_3(t)) \tag{5.4}$$

nötr kesirli diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin araştırılması önerilir.

KAYNAKLAR

Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M., Gallegos, J. 2014. Lyapunov functions for fractional order systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19 (9), 2951–2957.

Ahmad, S., Rao, M.R.M., 1999, Theory of Ordinary Differantial Equations, *Affiliated East-West Press*, New Delhi.

Altun, Y., Tunç, C. 2020. On the asymptotic stability of a nonlinear fractional-order system with multiple variable delays, *Applications and Applied Mathematics*, 15, 458–468.

Chen, L. P., He, Y.G., Chai, Y., Wu, R.C. 2014. New results on stability and stabilization of a class of nonlinear fractional-order systems, *Nonlinear Dynamics*, 75, 633–641.

Chen, L.P., Liu, C., Wu, R.C., He, Y.G., Chai, Y. 2016. Finite-time stability criteria for a class of fractional-order neural networks with delay, *Neural Computing and Applications*, 27, 549–556.

Deng, W.H., Li, C.P., Lü, J.H. 2007. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays, *Nonlinear Dynamics*, 48, 409–416.

Duarte-Mermoud, M., Aguila-Camacho, N., Gallegos, J., Castro-Linares, R. 2015. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22, 650–659.

Hale, J.K., 1969, Ordinary Differantial Equations, *Wiley Interscience*, New York.

Hale, J.K., 1977, Theory of Functional Differential Equations, *Springer-Verlag*, New York.

Heymans, N., Podlubny, I. 2006. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives, *Rheologica Acta*, 45 (5), 765–771.

Kilbas, A., Srivastava, H., Trujillo, J., 2006, Theory and Application of Fractional Differential Equations, *Elsevier*, New York.

Korkmaz, E., Özdemir, A. 2019. On Stability of Fractional Differential Equations with Lyapunov Functions, *Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7, 635–638.

Li, H., Zhong, S., Li, H. 2015. Asymptotic stability analysis of fractional-order neutral systems with time delay, *Advances in Difference Equations*, 2015 (1), 325–335.

Li, Y., Chen, Y.Q., Podlubny, I. 2010. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag–Leffler stability, *Computers & Mathematics with Applications*, 59 (5), 1810–1821.

Liu, S., Jiang, W., Li, X., Zhou, X.F. 2016a. Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems, *Applied Mathematics Letters*, 51, 13–19.

Liu, S., Li, X., Jiang, W., Zhou, X.F. 2012. Mittag-Leffler stability of nonlinear fractional neutral singular systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 3961–3966.

Liu, S., Li, X., Zhou, X.F., Jiang, W. 2015. Synchronization analysis of singular dynamical networks with unbounded time-delays, *Advances in Difference Equations*, 193, 1–9.

Liu, S., Wu, X., Zhang, Y.J., Yang, R. 2017a. Asymptotical stability of Riemann–Liouville fractional neutral systems, *Applied Mathematics Letters*, 69, 168–173.

Liu, S., Wu, X., Zhou, X.F., Jiang, W. 2016b. Asymptotical stability of Riemann-Liouville fractional nonlinear systems, *Nonlinear Dynamics*, 86, 65–71.

Liu, S., Zhou, X.F., Li, X., Jiang, W. 2016c. Stability of fractional nonlinear singular systems and its applications in synchronization of complex dynamical networks, *Nonlinear Dynamics*, 84, 2377–2385.

Liu, S., Zhou, X.F., Li, X., Jiang, W. 2017b. Asymptotical stability of Riemann-Liouville fractional singular systems with multiple time-varying delays, *Applied Mathematics Letters*, 65, 32–39.

Lu, J.G., Chen, G.R. 2009. Robust stability and stabilization of fractional-order interval systems: An LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54 (6), 1294–1299.

Podlubny, I., 1999, Fractional Differential Equations, *Academic Press*, New York.

Qian, D., Li, C., Agarwal, R.P., Wong, P.J.Y. 2010a. Stability analysis of fractional differential system with Riemann-Liouville derivative, *Mathematical and Computer Modelling*, 52, 862–874.

Qian, W., Li, T., Cong, S., Fei, S.M. 2010b. Improved stability analysis on delayed neural networks with linear fractional uncertainties, *Applied Mathematics and Computation*, 217, 3596–3606.

Tan, M.C. 2008. Asymptotic stability of nonlinear systems with unbounded delays, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337 (2), 1010–1021.

Yang, X., Li, C., Huang, T. 2017. Mittag-Leffler stability analysis of nonlinear fractional-order systems with impulses, *Applied Mathematics and Computation*, 293, 416–422.

Yoshizawa, T., 1966, The Stability Theory by Liapunov's Second Method, *Mathematical Society of Japan*, Tokyo.

Zhang, H., Ye, R., Liu, S., Cao, J., Alsaedi, A., Li, X. 2018. LMI-based approach to stability analysis for fractional-order neural networks with discrete and distributed delays, *International Journal of Systems Science*, 49 (3), 537–545.

Zhou, X.F., Hu, L.G., Liu, S., Jiang, W. 2014. Stability criterion for a class of nonlinear fractional differential systems, *Applied Mathematics Letters*, 28, 25–29.