



T.C.  
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ KİSMİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİNİN PARÇALANMA İLE SAYISAL  
ÇÖZÜMLERİ

Emrah KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2024  
MUŞ  
Her Hakkı Saklıdır



T.C.  
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ KİSMİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİNİN PARÇALANMA İLE SAYISAL  
ÇÖZÜMLERİ

Emrah KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdal KORKMAZ  
Jüri Üyesi: Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU  
Jüri Üyesi: Doç. Dr. Osman TUNÇ

Temmuz-2024  
MUŞ  
Her Hakkı Saklıdır

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### KESİRLİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN PARÇALANMA İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Emrah KAYA

Muş Alparslan Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdal KORKMAZ

Bu tez, kesirli mertebeden Burgers' ve Korteweg-de Vries (KdV) denklemlerinin çözümlerini konumda sonlu fark ve çoklu kuadrik radyal baz metodları ile, zamanda ise "Zaman Parçalama Metodu" kullanarak elde etmeye ve bu çözümleri karşılaştırmaya odaklanmaktadır. Öncelikle, diferansiyel denklemlerinin tarihsel gelişimi incelenmiş ve kesirli diferansiyel denklemlerin teorik temelleri detaylandırılmıştır. Deneysel sonuçlar, "Çoklu Kuadrik Radyal Baz Fonksiyonu" yönteminin, "Merkezi Sonlu Fark" yöntemine kıyasla daha kesin sonuçlar verdiğini göstermiştir. Elde edilen sonuçların kararlılığı incelenerek matlab yardımıyla simüle edilmiştir.

**2024, 59 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Çoklu Kuadrik Radyal Baz Yöntemi, Kesirli Burgers' Denklemi, Kesirli KdV Denklemi, Merkezi Sonlu Fark Yöntemi, Nümerik Çözüm, Zaman Parçalama Yöntemi .

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**NUMERICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL  
EQUATIONS BY FRACTIONATION**

**Emrah KAYA**

**Muş Alparslan University  
Natural and Applied Science  
Department of Mathematics**

**Advisor: Prof. Dr. Erdal KORKMAZ**

This thesis focuses on obtaining and comparing the solutions of fractional order Burgers' and Korteweg-de Vries (KdV) equations using finite difference and multiquadric radial basis methods in space, and the "Time Splitting Method" in time. Firstly, the historical development of differential equations is examined, and the theoretical foundations of fractional differential equations are detailed. Experimental results have shown that the "Multiquadric Radial Basis Function" method yields more accurate results compared to the "Central Finite Difference" method. The stability of the obtained results was examined and simulated with the help of MATLAB.

**2024, 59 Pages**

**Keywords:** Central Finite Difference Method, Fractional Burger's Equation, Fractional KdV Equation Multiquadric Radial Basis Method, Numerical Solution, Time-splitting Method.

## TEŞEKKÜR

Bu tezin tamamlanmasında beni yönlendiren ve destekleyen ve yaptığım çalışmalar boyunca bilgeliği, yol gösterici desteği ve değerli önerileriyle bana rehberlik eden danışmanım Prof. Dr. Erdal KORKMAZ'a teşekkür etmek istiyorum. Aynı zamanda, bu çalışmanın gerçekleştirilmesindeki motivasyonumun temel kaynağı olan sevgili eşime teşekkür ederim. Ayrıca, tez çalışmam süresince beni destekleyen aileme ve sevdiklerime teşekkür etmek istiyorum. Son olarak, bu çalışmada kullanılan kaynaklardan, makalelerden ve diğer bilimsel çalışmalardan sağladığım bilgiler için tüm yazarlara teşekkür etmek istiyorum. Umarım bu çalışma, bu konuya ilgi duyanlar için faydalı bir kaynak olur ve ileri araştırmaların temelini oluşturur.

Emrah KAYA  
MUŞ-2024

## İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>vii</b>
<b>SİMGELER ve KISALTMALAR</b> .....	<b>viii</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	<b>ix</b>
<b>ÇİZELGELER DİZİNİ</b> .....	<b>x</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI</b> .....	<b>2</b>
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM</b> .....	<b>6</b>
3.1. Temel Kavramlar .....	6
3.2. Sonlu Fark Yöntemleri .....	13
3.3. Çoklu Kuadrik Radyal Baz Yöntemi .....	18
3.4. Zaman-Parçalama Yöntemi .....	21
3.5. Kararlılık Analizi .....	30
<b>4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA</b> .....	<b>39</b>
4.1. Kesirli Mertebeden Burgers' Denkleminin Numerik Çözümleri .....	39
<b>5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER</b> .....	<b>56</b>
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>57</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	<b>59</b>

## SİMGELER ve KISALTMALAR

### Kısaltmalar

HATM	Taylor Modelinin Hermite Yaklaşımı
KdV	Korteweg-de Vries Denklemi
MQRBF	Çoklu Kuadrik Radyal Baz Fonksiyonu
MSF	Merkezi Sonlu Fark Denklemi
ODE	Adi Diferansiyel Denklem



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Düşüm Noktalarının Gösterimi .....	14
Şekil 3.2. Açık Form Gösterimi .....	15
Şekil 3.3. Merkezi fark formülünün grid üstünde gösterimi .....	16
Şekil 3.4. Kapalı formun grid üzerinde gösterimi .....	17
Şekil 3.5. Crank-Nicolson yönteminin grid üstünde gösterimi .....	18
Şekil 3.6. Birim daire üzerinde şekil parametresi $c=2$ olan bir MQRBF fonksiyonu (Sarra ve Kansa, 2009) .....	20
Şekil 3.7. Şekil parametresinin değişimine göre MQRBF fonksiyonu grafiğinin değişimleri .....	21
Şekil 3.8. $-L$ ve $+L$ arasında bir dalga gösterimi .....	31
Şekil 3.9. $[0,N]$ aralığının parçalanması .....	31
Şekil 3.10. Sinüs eğrileri arasındaki faz farkı .....	32
Şekil 3.11. $0 < \alpha < 1$ için $\alpha = 0.3$ , $\alpha = 0.5$ ve $\alpha = 0.7$ değerlerin $\Sigma_\alpha$ sektörüne göre kararlılık bölgeleri .....	38
Şekil 3.12. TS-1 şemasının $\alpha = 0.3$ ve $\alpha = 0.7$ değerleri için kararlılık bölgesi .....	38
Şekil 4.1. $q$ ve $k$ değişkenlerine göre çözümlerin karşılaştırılması (MSF) .....	44
Şekil 4.2. $q = 0.9$ ve $k = 0.01$ değişkenlerine göre çözümlerin karşılaştırılması ve hataları (MQRBF) .....	47
Şekil 4.3. $q = 0.9$ ve $k = 0.001$ değişkenlerine göre çözümlerin karşılaştırılması ve hataları (MQRBF) .....	48
Şekil 4.4. $q = 0.9$ ve $k = 0.0001$ değişkenlerine göre çözümlerin karşılaştırılması ve hatası (MQRBF) .....	48
Şekil 4.5. $\varepsilon=0.5$ ve $q=0.8$ olması durumunda nümerik ve tam çözümler (MSF) .....	54
Şekil 4.6. $\varepsilon=0.5$ ve $q=0.8$ olması durumunda nümerik ve tam çözümler (MSF) .....	54
Şekil 4.7. $\varepsilon=0.5$ ve $q=0.8$ olması durumunda nümerik ve tam çözümler ve hataları (MQRBF) .....	55

## ÇİZELGELER DİZİNİ

<b>Çizelge 4.1.</b> $q$ ve $k$ değişkenlerine göre çözümler (MSF) .....	44
<b>Çizelge 4.2.</b> $q$ ve $k$ değişkenlerine göre çözümler(MQRBF) .....	47
<b>Çizelge 4.3.</b> $q$ ve $\varepsilon$ değerlerine göre hata normları (MSF) .....	53
<b>Çizelge 4.4.</b> HATM tam çözümlüne göre hata normları (MSF).....	53



## 1. GİRİŞ

Fiziksel problemleri çözmeye girişimleri, aşamalı olarak bir fonksiyonun türevlerini de içeren bazı matematiksel modellemelerin gelişimine katkı sağladı. Bu matematiksel modellemeler bazı problemlere ve sadece amacı bu tür problemlerin çözümleri olan bağımsız bir disipline yol açtı. Diferansiyel denklemler olarak adlandırılan bu tür denklemler kimi matematik tarihçilerine göre Gottfried Wilhelm Leibniz'in, 1675 yılında şu denklemi yazıp, sorgulamasıyla başladı:

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2.$$

Diferansiyel denklemleri sisteme entegre etme çabaları ise Isaac Newton' un diferansiyel denklemleri, aşağıdaki gibi sınıflandırmasıyla devam etmiştir.

$$f(x) = \frac{dy}{dx} \quad (1.1)$$

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx} \quad (1.2)$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad (1.3)$$

(1.1) ve (1.2) denklemleri bugün yalnızca bir bağımsız değişkene göre bir veya daha fazla bağımlı değişkenin sadece adi türevlerini içerdiğinden dolayı adi diferansiyel denklemler olarak, (1.3) ise bağımlı değişkenin kısmi türevlerini içerdiğinden dolayı kısmi diferansiyel denklemler olarak bilinir(Sasser, 1992).

Bu tezde, kesirli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri üzerinde durulmaktadır. İlk bölümde, konunun arka planı ve literatür araştırması detaylı bir şekilde sunulmuştur. İkinci bölümde, kesirli diferansiyel denklemler ve bu denklemlerin çözümlerinde kullanılan yöntemler, özellikle sonlu fark ve çoklu kuadrik radyal baz yöntemleri, ele alınmıştır. Üçüncü bölümde, Burgers' ve Korteweg-de Vries (KdV) denklemlerinin sayısal çözümlerine yönelik adımlar ve uygulanan 'Zaman Parçalama Metodu' ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, Matlab kullanılarak yapılan deney sonuçları ve bu sonuçların analizi sunulmuştur. Son bölümde ise, elde edilen bulgular tartışılmış, kullanılan yöntemlerin avantajları ve dezavantajları değerlendirilmiş ve gelecekteki çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Birinci dereceden diferansiyel denklemleri çözebilmek için bütün temel yöntemlerin orijinal keşiflerinin temeli Nikolaus Bernoulli zamanında atılmıştır . Bernoulli bir parçacığın bir noktadan yere düşeceği yolun denklemini bulmaya yarayan brakistokron problemini ortaya atmış ve bu problem diferansiyel denklemlerin araştırılmasında bir mihenk taşı olmuştur. Bugün Bernoulli denklemi olarak bilinen

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)\frac{d^n y}{dx^n}$$

denklemi de 1695 yılında Bernoulli tarafından önerilmiştir (Sasser, 1992). 1734 yıllarına gelindiğinde Alexis Claude Clairaut(1713-1765),

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\frac{dy}{dx}$$

denklemine diferansiyellenme süreci uyguladı ve araştırmasını yayınladı (Formey, 1752). Clairaut, genel çözüm ile temsil edilen eğriler ailesinin bir teğet eğrisinin denklemini bularak tekil çözümler problemini ilk çözen kişiler arasındadır (Lagrange, 1743).

Joseph Louis Lagrange (1736-1813), genel lineer denklem için bir integral çarpanı belirleme problemi üzerinde çalışırken, adjoint denklem kavramını formüle etti. Lagrange, yalnızca genel lineer denklem için bir bütünleştirici faktör belirlemekle kalmadı, aynı zamanda n mertebesinden homojen bir lineer denklemin genel çözümünün kanıtını gösterdi ve parametrelerin değişimi yöntemini keşfetti.

Lagrange' nin çalışmalarını temel alan Jean Le Rond d'Alembert(1717-1783), lineer diferansiyel denklemin mertebesinin düşürülebileceği koşulları buldu. 1747 yılında titreşen cisimlere adanmış araştırmasında d'Alembert, bu alandaki asıl işini yaptığı kısmi diferansiyel denklemlere yönlendirildi. Adi diferansiyel denklemler ile ilgili problemlere özet olarak aşağıda değinilmiştir:

Sasser (1992) tarafından kaydedilen bilgilere göre 1690 yılında James Bernoulli tarafından geliştirilen "Bir cismin düzgün dikey hızla düşeceği bir eğri bulma" isimli İzokron Problemi, 1694 yılında G.W. Leibniz tarafından geliştirilen "Belirli bir aralıkta eğrinin altındaki alana eşit bir kare bulma işlemi" isimli hiperbolün karenmesi, 1696 yılında John Bernoulli tarafından geliştirilen "Bir parçacığın bir noktadan diğerine en

kısa sürede düşeceği yolun denklemini bulma” isimli brakistokron problemi, 1698 yılında John Bernoulli tarafından geliştirilen ”Bir eğri ailesinin tüm eğrilerini dik açılarda kesen bir eğri bulma” isimli ortogonal yörünge problemi, 1701 yılında Daniel Bernoulli tarafından geliştirilen ”Bir integrali maksimum veya minimum yaparken, verilen ikinci bir fonksiyonun integralini sabit tutarken gerekli olan bir problem” isimli izoperimetrik problem, 1728 yılında G.W. Leibniz tarafından geliştirilen ”Bir integrasyon faktörü bulma” isimli 2. dereceden denklemleri 1. dereceden denklemlere indirgeme Problemi, 1734 yılında G.W. Leibniz tarafından geliştirilen ”Genel çözümle temsil edilen eğri ailesinin bir teğet eğrisinin denklemini bulma” isimli tekil çözüm problemleri, 1743 yılında Joseph Lagrange tarafından geliştirilen ”Bir diferansiyel denklemde adjoint kavramı” isimli genel lineer denklem için integral çarpanını belirleme problemi ve 1762 yılında Jean d’Alembert tarafından geliştirilen ”Hangi koşullar altında lineer diferansiyel denklemin mertebesi düşürülebilir?” isimli sabit katsayılı lineer denklem problemi, diferansiyel denklemlerin tarihsel gelişimi açısından önemli adımlardır.

Adi diferansiyel denklemlerle ilgili yapılan çalışmalar ışığında, birçok önemli gelişmeler yaşanmıştır . 1822 yılında bir matematikçi ve fizikçi olan Joseph Fourier sıcaklık dağılımının matematiksel bir modelini oluştururken,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

parçalı diferansiyel denklemini kullanmaya başlamıştır (Fourier, 1888). Kullandığı ısı denklemini trigonometrik seriler ile çözmeye çalışan Fourier, günümüzde de bilinip modern matematiğin alanı olan Fourier Analizi konusunun temellerini oluşturmuştur (Freeman ve ark., 1878). Bazı makalelerde yer alan ve günümüze kadar ulaşılmış bazı diferansiyel denklem örnekleri de aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -w_0^2 u$$

denklemini özellikle basit harmonik hareket olmak üzere mekanik alanda geniş bir uygulama yelpazesi vardır (Wan Hassan, 2023).

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = ga(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

denklemindeki  $\theta$  fonksiyonu basit bir sarkacın  $t$  anındaki konumunu belirler (Rivera-Figueroa ve Lima-Zempoalteca, 2021).

$$EIy^{iv} = w(x)$$

denklemini inşaat mühendisliğinde kullanılan kirişlerin sapması ve bükülmesi teorisinde kullanılan Euler-Bernoulli kirişinin diferansiyel denklemidir (Yavari ve ark., 2000).

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_b}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_b}{\partial x} \right)^2$$

denklemini asma köprülerdeki kablolar için kullanılan aksel gerilme denklemidir (Hui-Li ve ark., 2010).

$$v + m \frac{\partial v}{\partial m} = v^2$$

denklemini roket uçuşunda oluşacak problemleri ele alır (Ahsan, 2016).

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

denklemini ısı, elektrik, potansiyel teorisi, yerçekimi, aerodinamik ve bir çok farklı mühendislik alanlarında kullanılmış, bilinen Laplace denklemidir (Mitra, 2010).

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]$$

denklemini, ısı iletimi teorisinde olduğu kadar nükleer enerji üretimi için bir atom yığındaki nötronların difüzyonunda da bulunur. Aynı zamanda (Brown, 1829) hareketinin incelenmesinde de ortaya çıkmıştır (Ahsan, 2016).

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

denklemini, çubukların, tellerin ve kaplamaların titreşiminin yanı sıra elektrik sinyallerinin ve nükleer reaktörlerin yayılmasıyla bağlantılı olarak kullanılır (Lindemann, 1880).

$$\beta x''(t) - x'(t) + pf(x(t)) = 0$$

denklemini, kimyasal reaktör teorisinde yaygın olarak kullanılmaktadır (Williams ve Leg-

gett, 1982).

Diferansiyel denklemlerin gelişmesiyle birlikte bazı sistemlerin davranışlarının tam sayı dereceden türevlerle ifade edilemeyeceği anlaşılmış ve bu sistemlerin davranışlarını daha iyi tarif eden bir gelişme gerekli olmuştur. Örneğin, elektriksel ağların modellenmesi için kullanılan parçalı diferansiyel denklemlerin çözümleri tutarlıdır fakat bazı özel durumlarda (yüksek frekanslı, yüksek hızlı elektrik sinyallerinin iletimi vb.) kesirli diferansiyel denklemler kullanılır. Elektrik alanında kullanılan

$$u_L(t) = L \frac{d^q i_L(t)}{dt^q}$$

kesirli diferansiyel denklemi,  $q$  kesirli mertebeden türev olmak üzere elektrik bobinindeki akımı modellemektedir (Kaczorek ve Rogowski, 2015).

$$i\hbar \frac{d\xi}{dt} = -D_\alpha(k) \nabla^\alpha \xi + V(x)\xi$$

denklemi kuantum mekaniğinde kullanılan kesirli mertebeden Schrödinger denklemdir (Laskin, 2000).

$$\begin{cases} D^{q_1} x = y \\ D^{q_2} y = z \\ D^{q_3} z = -\alpha z - y + \beta x(1 - x^2) \end{cases}$$

denklemi ise optik alanında kullanılan kesirli mertebeden diferansiyel denklemdir (Abdelouahab ve ark., 2012).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde kesirli dereceden diferansiyel denklemleri çözümlenebilmek için gerekli bazı tanım ve teoremleri inceleyeceğiz.

#### 3.1. Temel Kavramlar

**Tanım 3.1.** Gamma fonksiyonu özellikle reel sayılar için tanımlanmış, özellikle integral hesaplamalarında kullanılan bir fonksiyondur. Bu fonksiyon:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{z-1} dx \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Gamma fonksiyonu yarı düzlemde ( $\text{Re}(z) > 0$ ) analitiktir. Bunun nedeni gamma fonksiyonundaki integralin sıfırdan sonsuza gittikçe yaklaşan bir fonksiyon olması sebebiyle, integralin yarı sonsuz bölgede  $e^{-x}$  fonksiyonu tarafından üstel olarak baskılanmasıyla, integralin yakınsak olmasındandır. Dolayısıyla gamma fonksiyonu  $\text{Re}(z) > 0$  yarı düzleminde yakınsaktır.

(2.1) fonksiyonunda  $z \rightarrow z + 1$  alınırsa

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^z dx$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca  $u = x^z$  ve  $dv = e^{-x} dx$  olarak alınırsa,

$$\Gamma(z + 1) = -e^{-x} x^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$$

elde edilir. Buradan  $\Gamma(z + 1) = -e^{-x} x^z \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$  olarak alınırsa:

$$\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$$

olarak bulunur. O halde,

$$\Gamma(z) = (z - 1) \Gamma(z - 1)$$

buradan

$$\Gamma(z) = (z - 1)(z - 2)(z - 3) \dots \Gamma(z - (z - 1))$$

şeklinde de alınabilir. Bu da gamma fonksiyonunun faktöriyel hesaplamalarında kullanılabilceğini gösterir. O halde,

$$\Gamma(1) = 1$$

ifadesi (2.1) den dolayı açıktır.

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1.1 = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1 = 2$$

şeklindedir.

**Tanım 3.2.**  $w$ ,  $(a, t)$  aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun.  $m \in \mathbb{N}^+$ ,  $m - 1 \leq q < m$  ve  $q > 0$  olarak kabul edelim.  $\tau > a$  için  $q$ . dereceden bir gerçekte fonksiyon  $w$  düşünelim. Riemann-Liouville kesirli türevi:

$$\frac{d^q}{dx^q} w(t) = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-q-1} w(\tau) d\tau$$

şeklindedir.

**Tanım 3.3.** Caputo (1966) tarafından yayınlanan çalışmada hem nümerik çözümlerde hem de matematiksel fizik konusunda yeni bir yaklaşım sunmak için ayrıca kesirli türevlerin daha düzenli bir matematiksel yapıya sahip olması ve belirli özellikleri koruyabilmesi için üzerine çalıştığı Caputo kesirli türevi:

$m \in \mathbb{N}^+$  ve  $m - 1 \leq q < m$  olmak üzere,

$${}_a D_t^q w(t) = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \int_a^t (t-\tau)^{m-q-1} \frac{d^m}{d\tau^m} w(\tau) d\tau$$

şeklindedir. Riemann-Liouville kesirli türevine göre avantajları oldukça fazladır. Bunlardan bir tanesi özellikle başlangıç koşullarını doğrudan tanımlama avantajına sahip olmasıdır. Örneğin, Riemann-Liouville kesirli türevinde başlangıç koşullarını  $w(0)$  ve  $w'(0)$  olarak alırsak:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Gamma(m-q)} \int_0^t \frac{w^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{q+1-m}} d\tau$$

şeklinde elde ederiz.  $t$  değeri istediği kadar 0 sayısına yakın olsun yine integral içindeki terimler  $(0,t)$  arasında değer alacaktır. Bu yüzden integralin üst sınırı  $t$  olduğundan, integralin değerinin sonsuza kadar artacağını söyleyebiliriz. Bu yüzden limiti tanımsızdır. Bu da Riemann-Liouville kesirli türevinin başlangıç değerlerini belirlemek için kullanılmayacağı anlamına gelir. Fakat Caputo kesirli türevinde bu durum söz konusu değildir (Herrmann, 2011).

**Tanım 3.4.** Riemann-Liouville kesirli integrali aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\left( I_a^{1-q} \frac{dw}{d\tau} \right) (t) = {}^C D_0^q w(t)$$

O halde, Caputo türev formülünden yola çıkarak yazarsak  $I_a^q$  elde etmek için Caputo türev derecesi yerine  $-q + 1$  yazmamız gerekir. O halde,  $m = 1$  için,

$${}^C D_0^{-q+1} w(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - (-q + 1))} \int_a^t (t - \tau)^{-(-q+1)} \frac{d}{d\tau} w(\tau) d\tau$$

$${}^C D_0^{-q+1} w(t) = I_a^q w(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t - \tau)^{q-1} w(\tau) d\tau$$

şeklinde elde edilir (Cao ve ark., 2015).

**Teorem 3.1.**  $w$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli ise,

$$\int_a^b w(x) dx = w(\Psi) (b - a)$$

olacak şekilde en az bir  $\Psi \in [a, b]$  vardır.

**İspat.**  $w$  fonksiyonu sürekli olduğundan  $[a, b]$  aralığında sınırlıdır. O halde,

$$m = \inf w(x) : x \in [a, b]$$

$$M = \sup w(x) : x \in [a, b]$$

olmak üzere  $\forall x \in [a, b]$  için  $m \leq w(x) \leq M$  dir.  $w$  fonksiyonu  $[a, b]$  arasında integrallenebilir olduğundan,

$$m(b-a) \leq \int_a^b w(x) dx \leq M(b-a)$$

olur. Buradan,

$$m \leq \frac{\int_a^b w(x) dx}{(b-a)} \leq M$$

elde edilir.  $w$ ,  $[a, b]$  de sürekli olduğundan ara değer teoremine göre,

$$w(\Psi) = \frac{\int_a^b w(x) dx}{(b-a)}$$

buradan da

$$\int_a^b w(x) dx = w(\Psi)(b-a)$$

olacak şekilde bir  $\Psi \in [a, b]$  olduğu ispatlanmış olur. □

**Tanım 3.5.** Ağırlıklı sol dikdörtgen kuralı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I_{k+1} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{k+1} (t-\tau)^{q-1} w(\tau) d\tau, \quad h = \frac{T}{n}$$

integralini ele alalım. Bu kural integralin sol uç noktasına yakın bir noktada fonksiyon değerini kullanarak hesaplanır (Li ve Zeng, 2013). O halde integrali küçük toplamlar halinde parçalayalım,

$$\sum_{j=0}^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{n+1} - \tau)^{q-1} w(\tau) d\tau$$

burada integralin sol sınırı yani  $t_j$  ye göre yazarsak,

$$I_{n+1} \sim \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{n+1} (t - \tau)^{q-1} w(t_j) d\tau$$

$$I_{n+1} \sim \frac{w(t_j)}{\Gamma(q)} \int_0^{n+1} (t - \tau)^{q-1} d\tau$$

$$I_{n+1} \sim \frac{w(t_j) h}{\Gamma(q) q} \tag{3.2}$$

şeklinde yazılır. Burada  $h$  adım aralığı büyüklüğüdür.

**Tanım 3.6.** Ağırlıklı sağ dikdörtgen kuralı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I_{k+1} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{k+1} (t - \tau)^{q-1} w(\tau) d\tau, \quad h = \frac{T}{n}$$

integralini ele alalım. Bu kural integralin sağ uç noktasına yakın bir noktada fonksiyon değerini kullanarak hesaplanır(Li ve Zeng, 2013). O halde integrali küçük toplamlar halinde parçalayalım,

$$\sum_{j=0}^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{n+1} - \tau)^{q-1} w(\tau) d\tau$$

burada integralin sol sınırı yani  $t_{j+1}$  e göre yazarsak,

$$I_{n+1} \sim \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{n+1} (t - \tau)^{q-1} w(t_{j+1}) d\tau$$

$$I_{n+1} \sim \frac{w(t_{j+1})}{\Gamma(q)} \int_0^{n+1} (t - \tau)^{q-1} d\tau$$

$$I_{n+1} \sim \frac{w(t_{j+1}) h^q}{\Gamma(q) q} \quad (3.3)$$

şeklinde yazılır.

**Tanım 3.7.** Ağırlıklı trapez(yamuk) kuralı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I_{n-1} = \int_{t_0}^{t_{n-1}} (t - \tau)^{q-1} u(\tau) d\tau, \quad h = \frac{T}{n} \quad \text{ve} \quad t_j = jh \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

integralini ele alalım. Şimdi integrali küçük toplamlar şeklinde yazalım,

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - \tau)^{q-1} u(\tau) d\tau$$

trapez kuralı bir yamuk alanı şeklinde çalıştığından dolayı,

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - \tau)^{q-1} u(\tau) d\tau \sim \sum_{j=1}^{n-1} \frac{u_j + u_{j-1}}{2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - \tau)^{q-1} d\tau$$

denklemin en sağındaki integrali çözümlersek,

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - \tau)^{q-1} u(\tau) d\tau \sim \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{u_j + u_{j-1}}{2} \right) \left[ \frac{(t_n - t_{j-1})^q}{q} - \frac{(t_n - t_j)^q}{q} \right]$$

$t_n = nh$ ,  $t_j = jh$  ve  $t_{j-1} = (j-1)h$  olduğundan

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - \tau)^{q-1} u(\tau) d\tau \sim \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{u_j + u_{j-1}}{2} \right) \left[ \frac{(nh - (j-1)h)^q}{q} - \frac{(nh - jh)^q}{q} \right].$$

Denklemin sağ tarafında  $h$  parantezine alıp düzenlersek,

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - \tau)^{q-1} u(\tau) d\tau \sim \frac{h^q (u_j + u_{j-1})}{q} \sum_{j=1}^{n-1} [(n - (j-1))^q - (n - j)^q]$$

denklemin sağ tarafını düzenlersek,

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - \tau)^{q-1} u(\tau) d\tau \sim \frac{h^q (u_j + u_{j-1})}{q} \sum_{j=1}^{n-1} [(n - j + 1)^q - (n - j)^q]$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - \tau)^{q-1} u(\tau) d\tau \sim \frac{h^q}{q} \sum_{j=1}^{n-1} w_{n,j} (u_j + u_{j-1}) \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada

$$w_{n,j} = (n - j + 1)^q - (n - j)^q \quad (3.5)$$

olmak üzere denklemin ağırlık fonksiyonu olarak tanımlanır.

**Tanım 3.8.** Ağırlıklı orta nokta kuralı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I_{n-1} = \int_{t_0}^{t_{n-1}} (t - \tau)^{q-1} f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) d\tau, \quad h = \frac{T}{n} \quad \text{ve} \quad t_j = jh \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

integralini ele alalım. Ağırlıklı orta nokta kuralı,  $[a, b]$  aralığını  $n$  eşit parçaya bölelim ve  $[a, b]$  aralığındaki her bir alt aralığın orta noktasını bulalım. Örneğin alt aralıklar  $[t_{j-1}, t_j]$

şeklinde ise orta noktayı  $m_j = t_{t_{j-\frac{1}{2}}} = \frac{t_{j-1}+t_j}{2}$  şeklinde yazabiliriz. Buradan  $\int_a^{t_b} u(\tau)d(\tau) \approx \sum_{j=1}^n w_j u(m_j)$  elde edilebilir. Şimdi kuralımızı uygulayalım.

$$\int_{t_0}^{t_{n-1}} (t - \tau)^{q-1} f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) d\tau$$

$$\int_{t_0}^{t_{n-1}} (t - \tau)^{q-1} f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) d\tau \sim \sum_{j=1}^{n-1} f\left(t_{j-\frac{1}{2}}, \frac{u_{j-1} + u_j}{2}\right) \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - \tau)^{q-1} d\tau$$

buradan da ağırlık fonksiyonunu da tanımlarsak,

$$\int_{t_0}^{t_{n-1}} (t - \tau)^{q-1} f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) d\tau \sim \frac{h^q}{q} \sum_{j=1}^{n-1} w_{n,j} f\left(t_{j-\frac{1}{2}}, \frac{u_{j-1} + u_j}{2}\right) \quad (3.6)$$

şeklinde bulunur.

**Tanım 3.9.**  $a_0, a_1, a_2, \dots$  katsayıları göstermek üzere:

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \quad (3.7)$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyonda  $a_0$  terimi sabit terimi gösterir. O halde  $w(0) = a_0$  olacaktır. Şimdi  $a_1$  katsayısını tanımlayabilmek için  $w(x)$  fonksiyonunun türevini alalım.

$$w'(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots$$

burada  $w'(0) = a_1$  olduğunu görüyoruz. Şimdi  $a_2$  katsayısını bulalım. Bunun için  $w'(x)$  fonksiyonunun türevini alalım:

$$w''(x) = 2 a_2 + 3.2 a_3 x + \dots$$

burada  $w''(0) = 2 a_2$  ifadesini elde ederiz. Şimdi de son kez  $w''(x)$  fonksiyonunun türevini alalım:

$$w^{(3)}(x) = 3.2 a_3 + 4.3.2 a_4 x + \dots$$

Burada  $w^{(3)}(0) = 3.2 a_3$  olduğunu görüyoruz. O halde tüm katsayıları (2.7) denkleminde yerlerine yazarsak:

$$w(x) = w(0) + w'(0)x + \frac{w''(0)}{2}x^2 + \frac{w^{(3)}(0)}{3.2}x^3 + \frac{w^{(3)}(0)}{4.3.2}x^4 + \dots$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem  $w(x)$  fonksiyonunun 0 noktası etrafındaki Taylor serisi açılımını temsil eder. O halde  $x$  değişkeninin  $a$  noktası etrafında Taylor serisi açılımı:

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

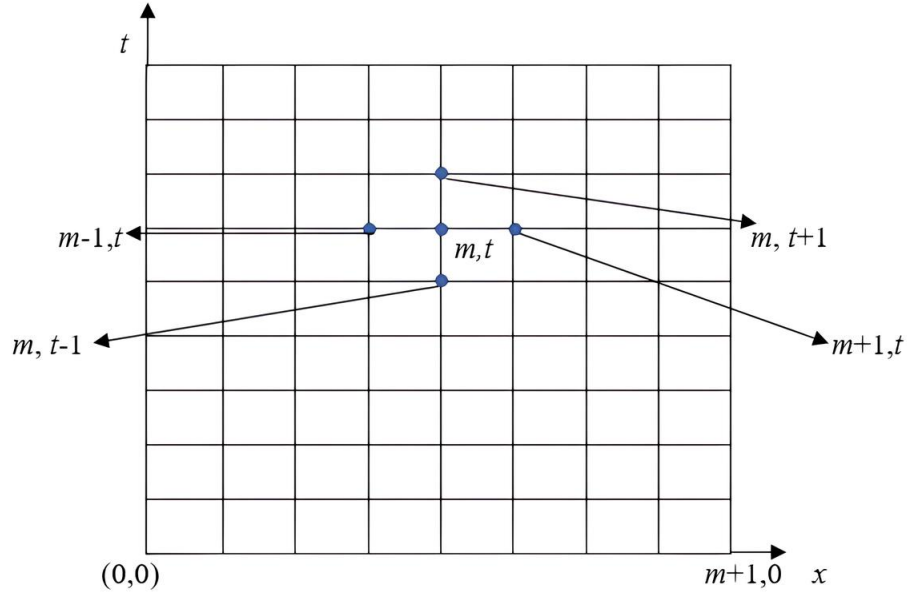
şeklinde dir.

### 3.2. Sonlu Fark Yöntemleri

Sonlu fark yöntemleri, sayısal analizde kullanılan bir yaklaşım yöntemidir. Bu yöntemler, herhangi bir fonksiyonun bir noktasındaki türevini, fonksiyonun bu nokta civarındaki diğer değerlerinden hesaplayarak bulur. Bu yöntemlerin temel fikri, bir fonksiyonun türevinin, o noktada alınan iki değer arasındaki farkın, ilgili noktanın aralıktaki konumuna göre ağırlıklandırılması ile hesaplanabileceğidir. Bu yaklaşım, türev hesaplamalarında kullanılan diğer yöntemlere göre daha basit bir yaklaşım sunar ve hesaplama süresi daha kısadır. Sonlu fark yöntemleri hem lineer hem de lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanılabilir. Ayrıca, diferansiyel denklemler gibi birçok nümerik analiz probleminde de kullanılır (Chapra, 2010).

Cheney ve Kincaid (2012)' ye göre sonlu fark yöntemini kullanılarak problemin nümerik çözümlerine ulaşılabilmesi için,  $x$  ve  $t$  değişkenlerinden oluşan bir ızgara sistemi oluşturulur. Bu sistem, çözüm alanını birçok küçük hücreye ayırır ve her hücredeki çözüm değerleri hesaplanır. Diferansiyel denklem, sonlu fark yaklaşımı kullanılarak ayrıklaştırılır. Bu, birinci veya ikinci türevlerin sonlu fark yaklaşımlarını kullanarak diferansiyel denklemin fark denklemine dönüştürülmesi anlamına gelir. Başlangıç veya sınır koşulları ızgara sistemindeki uygun noktalara uygulanır. Izgara sistemi boyunca sonlu fark yaklaşımı kullanılarak, her noktadaki çözüm değeri hesaplanır. Hesaplama, bir sonraki zaman adımına ve bir sonraki uzay adımına geçmek için kullanılan bir iteratif

süreçtir. Hesaplanan çözüm değerleri, sonlu fark hatası dahil edilerek, çözüm alanındaki tüm noktalarda veya belirli noktalarda alınır. Çözümün doğruluğu kontrol edilir. Bunun için, ızgara sistemi daha küçük hürelere ayrılarak veya daha yüksek düzeyli sonlu fark yaklaşımları kullanılarak çözüm doğruluğu artırılabilir.

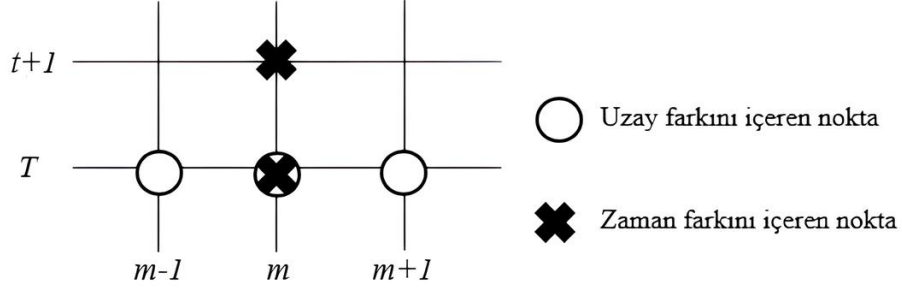


Şekil 3.1. Düğüm Noktalarının Gösterimi

Genellikle, bir fonksiyonun türevi, limit tanımı kullanılarak hesaplanır ancak bu yöntem, hesaplamalar için fazla zaman harcayabilir. Açık sonlu farklar ise bir fonksiyonun türevini hesaplamak için limit tanımına ihtiyaç duymadan, fonksiyonun değerleri arasındaki farkları kullanır. İleri fark formülü, geri fark formülü ve merkezi fark formülü gibi çeşitli açık sonlu fark formülleri vardır. Bu formüller, türevin yaklaşık bir değerini hesaplamak için kullanılır. Aşağıdaki ısı transfer denklemini ele alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

Burada u, ısı transferi ve sıcaklık dağılımını, t, zamanı, x uzay koordinatını, v ise viskoziteyi ifade eder.



Şekil 3.2. Açık Form Gösterimi

İleri fark yöntemi, Bir fonksiyonun türevini hesaplamak için kullanılan basit bir yöntemdir. İleri fark formülü:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{m+1}^t - u_m^t}{h} + O(h)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_m^{t+1} - u_m^t}{k} + O(k) \quad (3.9)$$

şeklindedir. Burada,  $h$  ve  $k$  adım uzunluğunu,  $O(h)$  ve  $O(k)$  ise kesme hatasının,  $h$  ve  $k$  değerine doğru orantılı olduğunu gösterir.

Geri fark yöntemi, ileri fark yönteminden farklı olarak türevi hesaplamak için bir fonksiyonun sol tarafındaki bir başka noktadaki fonksiyon değeri ile ilgili farkı kullanır.

Geri fark formülü:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_m^t - u_{m-1}^t}{h} + O(h)$$

şeklindedir.

Merkezi fark yöntemi, hem fonksiyonun sol hem de sağ tarafındaki noktalardaki fonksiyon değerlerini kullanan bir yöntemdir. Merkezi fark formülü:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{m+1}^t - u_{m-1}^t}{2h} + O(h^2)$$

şeklindedir. İkinci dereceden merkezi fark formülü ise:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{m+1}^t - 2u_m^t + u_{m-1}^t}{h^2} + O(h^2) \quad (3.10)$$

şeklindedir. Isı iletim denkleminde (3.9) ve (3.10) denklemlerini yerlerine yazarsak:

$$\frac{u_m^{t+1} - u_m^t}{k} \approx v \frac{u_{m+1}^t - 2u_m^t + u_{m-1}^t}{h^2}$$

$$u_m^{t+1} - u_m^t \approx \frac{k \cdot v}{h^2} [u_{m+1}^t - 2u_m^t + u_{m-1}^t]$$

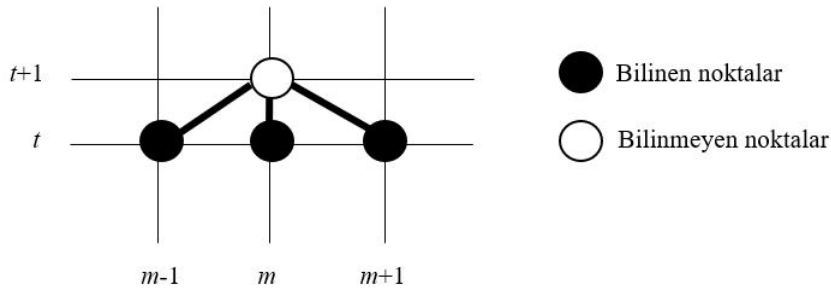
burada  $\frac{k \cdot v}{h^2} = r$  olarak alırsak:

$$u_m^{t+1} - u_m^t \approx r \cdot [u_{m+1}^t - 2u_m^t + u_{m-1}^t]$$

buradan da

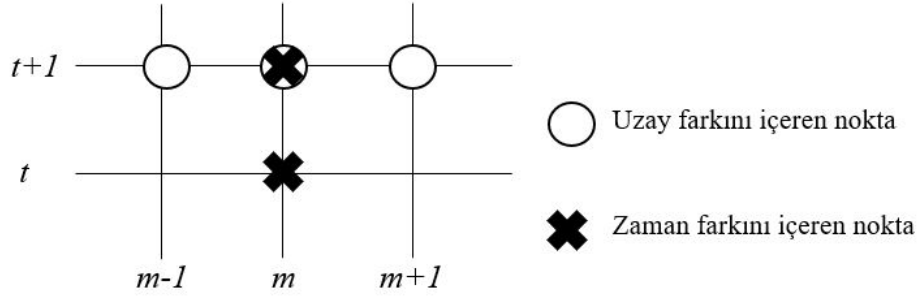
$$u_m^{t+1} \approx r \cdot u_{m-1}^t + r \cdot u_{m+1}^t + (1 - 2r) \cdot u_m^t$$

şeklinde bulunur. Burada hata mertebesi  $O(h^2) + O(k)$  şeklindedir. Ayrıca  $t = [0, T]$  ve  $m = [1, M - 1]$  dir. Merkezi fark yöntemi (Şekil 3.3. ) deki gibi gösterilebilir.



Şekil 3.3. Merkezi fark formülünün grid üstünde gösterimi

Açık sonlu farkların daha hızlı çözümler verdiğini ve kesme hatasının büyük olduğunu biliyoruz. Kapalı sonlu farklar ise açık sonlu farklara nazaran daha az kesme hatasına sahiptir fakat hesaplama süresi uzundur. Bu yüzden kapalı sonlu fark yöntemleri daha kararlı sonuçlar için uygun bir yöntemdir. Chapra (2010)'a göre basit kapalı yöntemin koşulsuz kararlı olduğu, ancak büyük zaman adımlarının kullanımı için bir doğruluk sınırı olduğu belirtilmelidir. Bu nedenle, çoğu zaman değişkenli problemler için açık yaklaşımlardan çok daha etkili değildir. Ancak sabit durum problemleri için oldukça iyidir. Kapalı sonlu farklar eşitliğin her iki tarafında ileri zaman barındıran eşitliklerdir. Kapalı sonlu farklar aşağıdaki gibi ızgara üzerinde gösterilebilir:



Şekil 3.4. Kapalı formun grid üzerinde gösterimi

Kapalı sonlu farklar için merkezi fark formülü şu şekilde verilir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{m+1}^{t+1} - 2u_m^{t+1} + u_{m-1}^{t+1}}{h^2} + O(h^2). \quad (3.11)$$

(3.11) ve (3.9) denklemleri, (3.8) ısı iletimi denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{u_m^{t+1} - u_m^t}{k} \approx v \frac{u_{m+1}^{t+1} - 2u_m^{t+1} + u_{m-1}^{t+1}}{h^2} \quad (3.12)$$

$$u_m^{t+1} - u_m^t \approx \frac{k \cdot v}{h^2} [u_{m+1}^{t+1} - 2u_m^{t+1} + u_{m-1}^{t+1}]$$

burada  $\frac{k \cdot v}{h^2} = r$  olarak alalım:

$$u_m^{t+1} - u_m^t \approx r \cdot [u_{m+1}^{t+1} - 2u_m^{t+1} + u_{m-1}^{t+1}]$$

buradan da

$$u_m^t = -r \cdot u_{m-1}^{t+1} - r \cdot u_{m+1}^{t+1} + (1 + 2r) \cdot u_m^{t+1}$$

şeklinde bulunur. Burada hata mertebesi  $O(h^2) + O(k)$  şeklindedir. Ayrıca  $t = [0, T]$  ve  $m = [1, M - 1]$  dir. Burada  $M - 1$  bilinmeyenli,  $M - 1$  tane denklem çözülmelidir.

Crank-Nicolson yöntemi, ikinci dereceden bir zaman türevi içeren çeşitli diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan bir nümerik yöntemdir. Bu yöntem, diferansiyel denklemlerinin sınır koşulları ve başlangıç koşulları gibi belirli girdilerini kullanarak, belirli bir zamanda sistemin çıktısını tahmin etmek için kullanılır. Crank-Nicolson yöntemi, birçok farklı bilimsel alanlarda kullanılır, özellikle ısı iletimi, difüzyon, akışkan dinamiği ve elektromanyetik dalga problemlerinin çözümünde sıkça kullanılır. Crank-

Nicolson yöntemi, (3.10) ve (3.12) denklemlerinin sağ taraflarının ortalamalarının alınmasıyla elde edilir ve (3.8) denklemi için aşağıdaki formül ile ifade edilir:

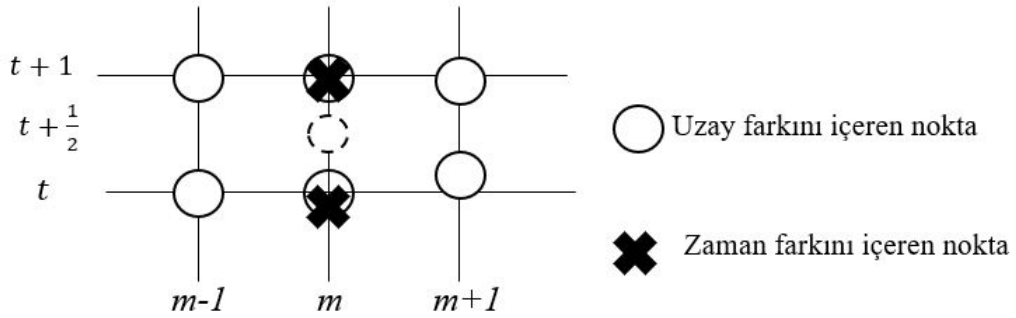
$$\frac{u_m^{t+1} - u_m^t}{k} = \frac{1}{2}v \left( \frac{u_{m+1}^{t+1} - 2u_m^{t+1} + u_{m-1}^{t+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^t - 2u_m^t + u_{m-1}^t}{h^2} \right)$$

$$u_m^{t+1} - u_m^t = \frac{k}{2h^2}v [u_{m+1}^{t+1} - 2u_m^{t+1} + u_{m-1}^{t+1} + u_{m+1}^t - 2u_m^t + u_{m-1}^t]$$

$\frac{k}{h^2}v = r$  olarak alıp, denklemin her tarafını 2 ile çarparsak ve gerekli düzenlemeleri yaparsak:

$$-r \cdot u_{m-1}^{t+1} + 2(1+r)u_m^{t+1} - r \cdot u_{m+1}^{t+1} = r \cdot u_{m-1}^t + 2(1-r)u_m^t + r \cdot u_{m+1}^t$$

şeklinde yazılabilir. Burada,  $u_m^t$ ,  $m$  indisindeki uzay noktasının  $t$  zamanındaki sıcaklığını ifade eder.  $k$  ve  $h$  ise sırasıyla zaman ve uzay aralıklarını ifade eder.  $v$  ise sıcaklık, difüzyon katsayısı veya benzeri bir sabittir.



Şekil 3.5. Crank-Nicolson yönteminin grid üstünde gösterimi

### 3.3. Çoklu Kuadrik Radyal Baz Yöntemi

Çoklu Kuadrik (MQ) Radyal Baz Fonksiyonu (RBF) interpolasyon yöntemi, 1968 yılında Iowa State Üniversitesi jeodezist Roland Hardy tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntemi 1971 yılında yayımlanan 97 numaralı makalesinde tanımlayan ve adını veren Hardy'nin buluşu, kartografiden kaynaklanan bir problemle ilham alınarak gerçekleştirilmiştir (Sarra ve Kansa, 2009).

Çoklu kuadrik radyal baz fonksiyonları, 1977 yılında tanıtılmıştır. Bu fonksiyon-

lar, dağınık veri noktalarını interpolasyon yöntemiyle doğru ve verimli bir şekilde aralamak amacıyla kullanılmaktadır. İlerleyen bulgular sayesinde, çoklu kuadrik radyal baz fonksiyonlarının az sayıda parametre ile geniş bir fonksiyon yelpazesini yaklaşık olarak temsil edebildiği keşfedilmiştir.

Çoklu kuadrik radyal taban fonksiyonları üzerinde yapılan çalışmalar genişletildi ve bu fonksiyonları kullanarak sinir ağlarını eğitmek için bir yöntem geliştirildi. Yöntemleri en küçük kareler prensibine dayanıyordu ve çeşitli fonksiyonları yaklaşık olarak öğrenmek, sinir ağlarını eğitmek için çok etkili olduğu kanıtlandı. Çoklu kuadrik radyal taban fonksiyonlarının gelişimi 1990'larda devam etti ve bu fonksiyonları kullanarak sinir ağlarını eğitmek için birçok yeni yöntem önerildi. En önemli gelişmelerden biri, radyal taban fonksiyon çekirdeğinin (RBF çekirdeği) tanıtılmasıydı, bu da makine öğrenimi için güçlü bir araçtır.

Makine öğrenimi alanında, Çoklu kuadrik radyal baz fonksiyonları hızla benimsenmiştir. Bu fonksiyonlar, giriş ve çıkış verileri arasındaki doğrusal olmayan ilişkileri yaklaşık olarak hesaplayabilmeleri nedeniyle sinir ağlarının eğitimi için özellikle faydalıdır. Sınıflandırma, regresyon ve kümeleme gibi birçok makine öğrenimi uygulamasında hala yaygın olarak kullanılmaktadırlar.

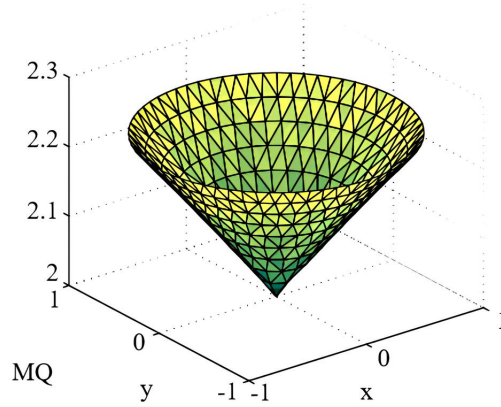
Çoklu kuadrik radyal baz fonksiyonlarının kullanımının, göreceli olarak az sayıda parametre ile geniş bir fonksiyon yelpazesini yaklaşık olarak temsil edebilme yeteneği, eğitim ve değerlendirme süreçlerinin verimliliği, gürültüye(hatalı veri) ve aykırı değerlere karşı dayanıklılık, farklı makine öğrenimi problemlerinin çözümünde kullanılabilme gibi bir çok faydası ve hiperparametre(öğrenme hızı, epoch sayısı vs.) seçimine duyarlılık, büyük veri kümeleri için eğitim sürecinin hesaplama açısından maliyetli olabilme ve bazı problemlerde diğer makine öğrenimi yöntemlerine göre daha az doğruluk sağlayabilme gibi bir çok sınırlamaları mevcuttur.

Çoklu kuadrik radyal baz fonksiyonu şu şekilde elde edilir:

$$\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}. \quad (3.13)$$

Çoklu kuadrik radyal baz fonksiyonunun formülü, baz fonksiyonunun şeklini belirleyen ve grafiksel olarak nasıl davrandığını açıklayan bir yapıya sahiptir. Formüldeki  $\phi(r)$  ifadesi, herhangi bir  $r$  değeri için baz fonksiyonunun çıktısını temsil eder. Bu çıktı,  $r$  değeri ile birlikte şekil parametresi  $c$  tarafından belirlenen bir denkleme göre hesap-

lanır. Grafik açısından düşünüldüğünde Sarra ve Kansa (2009)'a göre (Şekil 3.6.) için, baz fonksiyonunun şeklini belirleyen faktörler şunlardır:

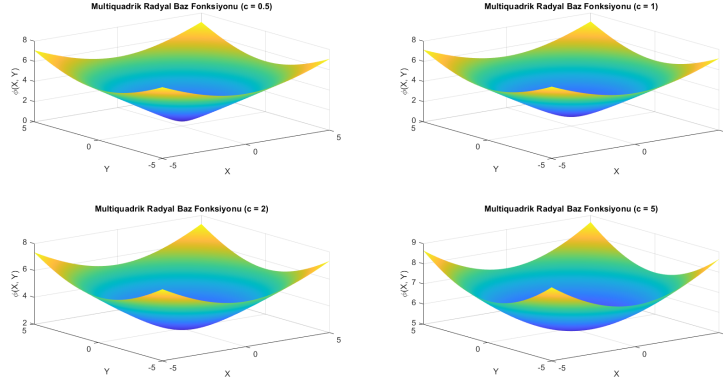


Şekil 3.6. Birim daire üzerinde şekil parametresi  $c=2$  olan bir MQRBF fonksiyonu (Sarra ve Kansa, 2009)

**i. Uzaklık ( $r$ ) :** İki nokta arasındaki uzaklık, baz fonksiyonunun değerini belirler.  $r$  değeri arttıkça, baz fonksiyonunun değeri de artar, ancak bu artış şekil parametresi  $c$  tarafından etkilenir.

**ii. Şekil parametresi ( $c$ ) :**  $c$  değeri, baz fonksiyonunun şeklini etkiler. Daha büyük bir  $c$  değeri, baz fonksiyonunun daha düzgün bir şekle sahip olmasını sağlar. Bu durumda, baz fonksiyonunun genişlikleri artar ve yüzey daha yumuşak bir şekilde değişir. Daha küçük bir  $c$  değeri ise baz fonksiyonunun daha keskin bir şekle sahip olmasını sağlar. Bu durumda, baz fonksiyonunun genişlikleri azalır ve yüzey daha hızlı bir şekilde değişir.

Dolayısıyla, çoklu quadrik radyal baz fonksiyonunun formülü,  $r$  ve  $c$  parametrelerinin birleşimiyle baz fonksiyonunun şeklini ve davranışını belirler. Bu parametrelerin değerleri, baz fonksiyonunun düzgünlüğünü, keskinliğini ve nasıl değiştiğini grafiksel olarak etkiler. İstenilen şekle ulaşmak için bu parametrelerin doğru bir şekilde ayarlanması önemlidir. Şekil (2.7) 'de  $c=0.5$ ,  $c=1$ ,  $c=2$  ve  $c=5$  değerlerine göre MQRBF fonksiyon grafiğinin değişimleri gösterilmiştir.



Şekil 3.7. Şekil parametresinin değişimine göre MQRBF fonksiyonu grafiğinin değişimleri

### 3.4. Zaman-Parçalama Yöntemi

Zaman parçalama yöntemi, bir zaman adımını birden fazla alt adıma bölen ve her alt adımda sistemin farklı kısımlarını çözen bir sayısal çözüm yöntemidir ve bazı diferansiyel denklemlerin doğrudan çözümünü zor veya imkânsız olduğunda kullanılabilir. Zaman parçalama yönteminin kökenleri, ilk olarak 1960’larda gözlemlenen bir dalganın hareketini açıklamak için kullanılan ”split-operator” yöntemine dayanmaktadır. Daha sonra ilk olarak Klemp ve Wilhelmson tarafından 1978’de tanıtılmıştır (Klemp ve ark., 2007). Bu yöntem, sıkıştırılabilir olmayan hidrostatik olmayan denklemler için en yaygın kullanılan ayrıca Hamiltoniyen operatörünün (sistemin toplam enerjisi) etkisi altında bir dalga fonksiyonunun evrimini hesaplamak için kullanılan bölme yöntemlerinden biridir. Daha sonra yöntem, çeşitli farklı sistemlerin sayısal çözümünde kullanılmak üzere genişletilmiştir. Zaman parçalama yöntemi, sonlu farklar veya sonlu elemanlar yöntemleri ile birleştirilebilir ve birçok farklı fiziksel sistemde kullanılabilir ve genellikle birçok farklı alternatif yöntemle karşılaştırıldığında hızlı ve doğru sonuçlar verir. Şimdi zaman parçalama metodunu daha anlaşılır olması için basit bir şekilde ifade edelim:

$$\frac{du}{dt} = f(u) + g(u), \quad t \in [t_b, t_b + k], \quad u(t_b) = c \quad (3.14)$$

problemini ele alalım. Zaman parçalama yöntemi, bir diferansiyel denklemi birden fazla alt-probleme bölerek çözer. Her bir alt-problem için ayrı bir çözüm hesaplanır ve ardından bu çözümler birleştirilerek genel çözüm elde edilir. O halde

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = f(\bar{u}), \quad t \in [t_b, t_b + k], \quad \bar{u}(t_b) = c \quad (3.15)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = g(\tilde{u}), \quad t \in [t_b, t_b + k], \quad \tilde{u}(t_b) = \bar{u}(t_b + k) \quad (3.16)$$

burada  $\bar{u}(t_b)$  olarak yazdığımız başlangıç zamanından bir sonraki zamana geçtiğimizde bu zaman  $\tilde{u}(t_b)$  in başlangıç zamanıdır. Yani  $f(\bar{u})$  fonksiyonunun bir  $k$  zaman sonrası  $g(\tilde{u})$  fonksiyonu için başlangıç değeridir. Şimdi zaman parçalama yöntemi için ve hata araştırması yapmak için aşağıdaki teoremi kullanalım:

**Teorem 3.2.**  $(\sigma, |\cdot|)$  doğrusal bir normlu uzay olsun ve ayrıca,

i.  $f, g : \sigma \rightarrow \sigma$ ,

ii.  $u, v, w : [t_b, t_{b+1}] \rightarrow \sigma, \quad t_{b+1} = t_b + k, \quad k > 0$

iii.  $(\sigma_k, \|\cdot\|_\infty), x : [t_b, t_{b+1}] \rightarrow \sigma$  fonksiyonunun doğrusal bir B uzayı olsun, öyle ki

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [t_b, t_{b+1}]} |x(t)| < \infty$$

olsun (Brunner, 2004). (3.14), (3.15) ve (3.16) için,

i.  $u, \bar{u}, \tilde{u} \in \sigma_k$

ii. Eğer  $x = u, \bar{u}, \tilde{u}$  ise,  $L_f, L_g, K_f, K_g$  olmak üzere pozitif sabitler vardır,

$|f(x)|_\infty \leq K_f, |g(x)|_\infty \leq K_g$  ve tüm  $x, y \in \sigma$  için

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f |x - y|, \quad |g(x) - g(y)| \leq L_g |x - y|$$

Lipschitz koşulları geçerlidir.

Şimdi  $\bar{u}(t_{b+1})$  i tanımlayalım. (3.14) için her iki tarafın da  $t_b$  den  $t$  ye integralini alalım.

$$u(t) = c + \int_{t_b}^t f(u(\tau)) d\tau + \int_{t_b}^t g(u(\tau)) d\tau. \quad (3.17)$$

Şimdi de (3.15) de ve (3.16) de her iki tarafın integralini alalım.

$$\bar{u}(t) = c + \int_{t_b}^t f(\bar{u}(\tau)) d\tau \quad (3.18)$$

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}(t_b) + \int_{t_b}^t g(\tilde{u}(\tau)) d\tau$$

daha sonra  $\tilde{u}(t_b) = \bar{u}(t_b + k)$  olduğundan

$$\bar{u}(t_b + k) = c + \int_{t_b}^{t_{b+1}} f(\bar{u}(\tau)) d\tau$$

olmak üzere,

$$\tilde{u}(t) = c + \int_{t_b}^{t_{b+1}} f(\bar{u}(\tau)) d\tau + \int_{t_b}^t g(\tilde{u}(\tau)) d\tau \quad (3.19)$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi de (3.17) ve (3.18) arasındaki farkı araştıralım.

$$u(t) - \bar{u}(t) = \int_{t_b}^t [f(u(\tau)) - f(\bar{u}(\tau))] d\tau + \int_{t_b}^t g(u(\tau)) d\tau$$

bulunur. Dolayısıyla  $\forall t \in [t_b, t_{b+1}]$  için,

$$|u(t) - \bar{u}(t)| \leq kL_f \|u - \bar{u}\|_\infty + kK_g$$

eşitsizliğinde sup alınırsa,

$$\|u - \bar{u}\|_\infty - kL_f \|u - \bar{u}\|_\infty \leq kK_g$$

elde edilir. İşlem devam ettirilirse

$$\|u - \bar{u}\|_\infty (1 - kL_f) \leq kK_g$$

buradan da

$$\|u - \bar{u}\|_\infty \leq \frac{kK_g}{1 - kL_f} \quad (3.20)$$

elde edilir. Şimdi de (3.19) ve (3.17) arasındaki farkı araştıralım.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) - u(t) &= \int_{t_b}^{t_{b+1}} f(\bar{u}(\tau)) d\tau + \int_{t_b}^t g(\tilde{u}(\tau)) d\tau \\ &\quad - \int_{t_b}^t f(u(\tau)) d\tau - \int_{t_b}^t g(u(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (3.21)$$

şeklinde denkleme elde ederiz ve denkleme:

$$- \int_{t_b}^t f(\bar{u}(\tau)) d\tau + \int_{t_b}^t f(\bar{u}(\tau)) d\tau$$

eklersek

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) - u(t) &= \int_{t_b}^{t_{b+1}} f(\bar{u}(\tau)) d\tau + \int_{t_b}^t g(\tilde{u}(\tau)) d\tau \\ &\quad - \int_{t_b}^t f(u(\tau)) d\tau - \int_{t_b}^t g(u(\tau)) d\tau \\ &\quad - \int_{t_b}^t f(\bar{u}(\tau)) d\tau + \int_{t_b}^t f(\bar{u}(\tau)) d\tau\end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz ve buradan da:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) - u(t) &= \int_t^{t_{b+1}} f(\bar{u}(\tau)) d\tau + \int_{t_b}^t [f(\bar{u}(\tau)) - f(u(\tau))] d\tau \\ &\quad + \int_{t_b}^t [g(\tilde{u}(\tau)) - g(u(\tau))] d\tau\end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Burada ilk integralin alt sınırına dikkat edilmelidir çünkü  $-\int_{t_b}^t f(\bar{u}(\tau)) d\tau$  integralinin nereye gittiği kafa karıştırabilir. Ayrıca

$$|\tilde{u}(t) - u(t)| \leq |t_{b+1} - t|K_f + kL_f \|\bar{u} - u\|_\infty + kL_g \|\tilde{u} - u\|_\infty$$

eşitsizliğinde sup alınırsa,

$$\|\tilde{u} - u\|_\infty \leq kK_f + kL_f \|\bar{u} - u\|_\infty + kL_g \|\tilde{u} - u\|_\infty$$

elde edilir. (3.20) eşitsizliğini yerine yazarsak,

$$\|\tilde{u} - u\|_\infty - kL_g \|\tilde{u} - u\|_\infty \leq kK_f + k^2 \frac{K_g L_f}{1 - kL_f}$$

buradan

$$\|\tilde{u} - u\|_\infty (1 - kL_g) \leq kK_f + k^2 \frac{K_g L_f}{1 - kL_f}$$

buradan da

$$\|\tilde{u} - u\|_\infty \leq \frac{kK_f}{1 - kL_g} + k^2 \frac{K_g L_f}{(1 - kL_f)(1 - kL_g)} = O(k)$$

olur. Şimdi de (3.21) denkleminde  $t = t_{b+1}$  olarak alırsak,

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) - u(t) &= \int_{t_b}^{t_{b+1}} f(\bar{u}(\tau)) d\tau + \int_{t_b}^{t_{b+1}} g(\tilde{u}(\tau)) d\tau \\ &\quad - \int_{t_b}^{t_{b+1}} f(u(\tau)) d\tau - \int_{t_b}^{t_{b+1}} g(u(\tau)) d\tau\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) - u(t) &= \int_{t_b}^{t_{b+1}} [f(\bar{u}(\tau)) - f(u(\tau))] d\tau \\ &\quad + \int_{t_b}^{t_{b+1}} [g(\tilde{u}(\tau)) - g(u(\tau))] d\tau\end{aligned}$$

Buradan Lipschitz eşitsizliği yardımıyla,

$$|\tilde{u}(t_{b+1}) - u(t_{b+1})| \leq kL_f \|\bar{u} - u\|_\infty + kL_g \|\tilde{u} - u\|_\infty$$

$\|\bar{u} - u\|_\infty$  ve  $\|\tilde{u} - u\|_\infty$  eşitsizliklerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}|\tilde{u}(t_{b+1}) - u(t_{b+1})| &\leq kL_f \frac{kK_g}{1 - kL_f} + \\ &\quad kL_g \left( \frac{kK_f}{1 - kL_g} + k^2 \frac{K_g L_f}{(1 - kL_f)(1 - kL_g)} \right)\end{aligned}$$

ve işlemleri devam ettirirsek ve sup alırsak:

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}(t_{b+1}) - u(t_{b+1})\|_\infty &\leq k^2 \frac{K_g L_f}{1 - kL_f} + k^2 \frac{L_g K_f}{1 - kL_g} \\ &\quad + k^3 \frac{K_g L_f L_g}{(1 - kL_f)(1 - kL_g)} = O(k^2)\end{aligned}\tag{3.22}$$

(3.22) eşitsizliği,  $t_{b+1}$  noktasında süper yakınsamanın gerçekleştiğini gösterir. Bu da,  $t_{b+1}$  noktasındaki yaklaşım mertebesinin normdaki yaklaşım mertebesinden daha büyük olduğu anlamına gelir.

Cao ve ark. (2015) tarafından yapılan çalışmada bahsedilen kesirli diferansiyel denklemler için bir zaman parçalama şeması oluşturalım. Öncelikle, zaman kesirli dereceden bir diferansiyel denklem düşünelim.

$$\left({}^C D_0^q u\right)(t) = \xi u(t) + \eta u(t), \quad u(0) = u_0, \quad 0 < t \leq T, \quad \xi, \eta \in \mathbb{C}\tag{3.23}$$

burada  $({}^C D_0^q u)(t)$ ,  $q \in (0, 1)$  Caputo kesirli türevini ifade eder. Klasik zaman bölme yöntemi bir zaman adımı için  $0 \leq t \leq h$  şu şekilde düşünülebilir:

$$({}^C D_0^q \bar{u})(t) = \xi \bar{u}(t), \quad \bar{u}(0) = u_0$$

$$({}^C D_0^q \tilde{u})(t) = \eta \tilde{u}(t), \quad \tilde{u}(0) = \bar{u}(h)$$

Şimdi denklemi uygun bir biçimde ikiye ayırdık. Bu iki denklem ayrı ayrı ve ardışık olarak çözülür. bu şekilde çözüm de kolaylaştırılmış olacaktır.  $u \approx \tilde{u}$  olduğundan, (3.23)  $\tilde{u}$  kesirli denklemi için yaklaşık bir çözüm olsun ve çözümün hatası aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} u(h) - \tilde{u}(h) &= \tilde{u}_0 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi + \eta)^k h^{kq}}{\Gamma(1+kq)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi h^q)^k}{\Gamma(1+kq)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\eta h^q)^k}{\Gamma(1+kq)} \right] \\ &= \left[ \frac{2\xi\rho}{\Gamma(1+2q)} - \frac{\xi\eta}{(\Gamma(1+q))^2} \right] h^{2q} + O(h^{3q}), \end{aligned}$$

Klasik bölme yönteminin yakınsama derecesi  $O(h^{2q})$  olarak ifade edilebilir. Bu nedenle, bir adım için elde edilen zaman bölme şemasının yakınsama derecesi olan  $q$  sıfıra yaklaştıkça azalır denilebilir. Bu problemi çözmek için kesirli olmayan lineer olmayan diferansiyel denklemlerin bölünmesi için bir bölme yöntemi geliştirilmiştir . Bu yeni bölme yönteminin yakınsama derecesi  $O(h^{1+q})$  olarak ifade edilir ve bu yöntemi kesirli diferansiyel denklemlerini çözmek için uygularız. Sürekli fonksiyon  $u$ , uygun bir alan  $G$  bölgesi üzerinde Lipschitz eşitsizliğini sağlar, yani

$$|g(t, u_1) - g(t, u_2)| \leq K|u_1 - u_2|, \forall u_1, u_2 \in G. \quad (3.24)$$

Kesirli türev ve integrali daha önce verilmişti. Kolaylık sağlaması açısından taraftan kullanılan gösterimi verelim:

$$({}^C_{[s]} D_a^q u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_a^t \frac{u'(\tau)}{(s-\tau)^q} d\tau,$$

$$({}_{[s]} I_a^q u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{u(\tau)}{(s-\tau)^{1-q}} d\tau,$$

$$({}_{[s]} I_a^q f)(t, u(t)) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t \frac{f(\tau, u(\tau))}{(s-\tau)^{1-q}} d\tau.$$

Şimdi kesirli dereceden bir diferansiyel denklem formunu ele alalım:

$$\left({}^C D_0^q u\right)(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad (3.25)$$

olsun. Burada,  $q \in (0, 1)$  dir ve  $A, f : [0, T] \times R^{m+1} \rightarrow R^{m+1}$  de  $(m+1) \times (m+1)$  boyutunda gerçel matrislerden oluşur,

Splitting(bölme) şemasını elde etmek için, denklemde her iki tarafın kesirli integralini alalım:

$$u(t) = u(0) + A(I_0^\alpha u)(t) + (I_0^\alpha f)(t, u(t)), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.26)$$

Eğer  $t_n = nh$ ,  $0 \leq n \leq N$  olarak tanımlanırsa,  $[0, T]$  aralığında eşit aralıklı noktalar olarak dağıtılan  $t_n$ 'leri kullanarak ((3.26)) denklemini  $(t_{n-1}, t_n]$  aralığında ( $n \geq 1$ ) için aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$u(t) = u(t_0) + I_{t_{n-1}}^q Au(t) + ([t]I_{t_0}^q Au)(t_{n-1}) + (I_{t_0}^q f)(t, u(t)), \quad (3.27)$$

Bir bölme şeması oluşturmak için aşağıdakini tanımlayabiliriz:

$$\bar{u}(t) = \tilde{u}(t_{n-1}) + ([t]I_{t_0}^q A\bar{u})(t_{n-1}) + (I_{t_{n-1}}^q A\bar{u})(t), \quad t_{n-1} < t \leq t_n. \quad (3.28)$$

Burada  $[0, t_{n-1}]$  aralığındaki çözüm  $\tilde{u}$  olarak gösterilir ve  $0 \leq t \leq t_{n-1}$  için geçerlidir.  $\bar{u}$ 'nin ilk iki elemanı  $t_{n-1}$  noktasındaki başlangıç değeri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{u}^c(t_{n-1}) = \tilde{u}(t_{n-1}) + ([t]I_{t_0}^q A\tilde{u})(t_{n-1}). \quad (3.29)$$

Daha sonra, (3.28) şu şekilde yazılabilir:

$$\bar{u}(t) = \tilde{u}^c(t_{n-1}) + (I_{t_{n-1}}^q A\bar{u})(t), \quad t_{n-1} < t \leq t_n. \quad (3.30)$$

$u \sim \bar{u}$  olduğundan (3.27) denkleminde  $u$  yerine  $\bar{u}$  yazılıp bu denklemden (3.28) denklemini çıkarılırsa aşağıdaki denkleme ulaşılabilir:

$$\bar{u}(t) = \tilde{u}^c(t_n) + (I_{t_0}^q f)(t, \bar{u}(t)), \quad t_{n-1} < t \leq t_n, \quad (3.31)$$

burada

$$\bar{u}^c(t_n) = \bar{u}(t) - v(t_{n-1}) + \bar{u}(t_0) - (I_{t_{n-1}}^q A(\bar{u} - \tilde{u}))(t). \quad (3.32)$$

şeklindedir.  $t \in (t_n, t_{n+1}]$  aralığındaki  $\tilde{u}(t)$  çözümü yukarıdaki süreçlerin tekrarlamaıyla hesaplanabilir.

(3.28) - (3.32) denklemlerinin tamamı kullanılarak (3.27) denkleminde ulaşılabilir. Bu sebeple herhangi bir bölme hatası bulunmamaktadır.  $t = t_n$  olarak yazarsak (3.28) - (3.32) denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$\bar{u}(t_n) = \bar{u}^c(t_{n-1}) + (I_{t_{n-1}}^q A\bar{u})(t_n), \quad (3.33)$$

$$\bar{u}^c(t_{n-1}) = \tilde{u}(t_{n-1}) + (I_{t_0}^q A\tilde{u})(t_{n-1}), \quad \tilde{u}_0 = u_0, \quad (3.34)$$

$$\tilde{u}(t_n) = \bar{u}^c(t_n) + (I_{t_0}^q f)(t_n, \tilde{u}(t_n)), \quad (3.35)$$

$$\bar{u}^c(t_n) = \bar{u}(t_n) - \tilde{u}(t_{n-1}) + u(t_0) - (I_{t_{n-1}}^q A(\bar{u} - \tilde{u}))(t_n). \quad (3.36)$$

Tamamen kesikli zamana bölme yöntemi, (3.33) - (3.36) denklemlerinin ayrıklaştırılmasıyla şekillendirilebilir. (3.36) üzerinde sağ dikdörtgen kuralını uygularsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} \bar{u}^c(t_n) &\approx \bar{u}(t_n) - \tilde{u}(t_{n-1}) + u(t_0) - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{A(\bar{u}(t_n) - \tilde{u}(t_n))}{(t_n - \tau)^{1-q}} d\tau \\ &= \bar{u}(t_n) - \tilde{u}(t_{n-1}) + u(t_0) - \frac{Ah^q}{\Gamma(1+q)} (\bar{u}(t_n) - \tilde{u}(t_n)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

(3.35) ifadesi  $\bar{u}(t_n) = \bar{u}_n$  ve  $\tilde{u}(t_n) = \tilde{u}_n$  şeklinde yeni bir formda yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$C_h^q \tilde{u}_n = C_h^q \bar{u}_n + u_0 - \tilde{u}_{n-1} + (I_{t_0}^q f)(t_n, \tilde{u}(t_n)). \quad (3.38)$$

burada  $\bar{u}(t_n) = \bar{u}_n$ ,  $\tilde{u}(t_n) = \tilde{u}_n$  ve  $C_h^q = I - A \frac{h^q}{\Gamma(1+q)}$  olarak tanımlanır. (3.38) de verilen bilinen tüm bilgileri  $\bar{u}_n^c$  ile tanımlarsak, aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$C_h^q \tilde{u}_n = \bar{u}_n^c + (I_{t_{n-1}}^q f)(t_n, \tilde{u}(t_n)), \quad (3.39)$$

$$\bar{u}_n^c = C_h^q \bar{u}_n + u_0 - \tilde{u}_{n-1} + ([t_n] I_{t_0}^q f)(t_{n-1}, \tilde{u}(t_{n-1})). \quad (3.40)$$

Diğer yandan, (3.34) ve (3.40) ifadelerindeki integral, sırasıyla ağırlıklı yamuk kuralı (3.4) ve ağırlıklı orta nokta kuralı (3.6) kullanılarak hesaplanır. Burada  $\tilde{u}(t_{j-\frac{1}{2}}) \approx \frac{1}{2}(\tilde{u}(t_{j-1}) + \tilde{u}(t_j))$  kabul edilir. Ancak, (3.33) ve (3.39) ifadelerindeki integral, sırasıyla ağırlıklı sağ dikdörtgen kuralı (3.3) ve ağırlıklı sol dikdörtgen kuralı (3.2) kullanılarak hesaplanır. Bu durumda aşağıdaki zaman bölme şeması elde edilir:

$$\bar{u}_n = \tilde{u}_{n-1}^c + \frac{Ah^q}{\Gamma(1+q)} \bar{u}_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (3.41)$$

$$\tilde{u}_{n-1}^c = \tilde{u}_{n-1} + \frac{Ah^q}{2\Gamma(1+q)} \sum_{j=1}^{n-1} w_{n,j}^q (\tilde{u}_{j-1} + \tilde{u}_j), \quad \tilde{u}_0 = u_0, \quad (3.42)$$

$$C_h^q \tilde{u}_n = \bar{u}_n^c + \frac{h^q}{\Gamma(1+q)} f(t_{n-1}, \tilde{u}_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (3.43)$$

$$\bar{u}_n^c = C_h^q \bar{u}_n + u_0 - \tilde{u}_{n-1} + \frac{h^q}{\Gamma(1+q)} \sum_{j=1}^{n-1} w_{n,j}^q f(t_{j-\frac{1}{2}}, \frac{\tilde{u}_{j-1} + \tilde{u}_j}{2}), \quad (3.44)$$

burada (3.4) ve (3.5) den

$$w_{n,j}^q = \frac{q}{h^q} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{(t_n - \tau)^{1-q}} d\tau = (n-j+1)^q - (n-j)^q.$$

şeklindedir. (3.42)'i elde etmek için aşağıdaki yaklaşım yapılır:

$$\begin{aligned} ([t_n] I_{t_0}^q A \tilde{u})(t_{n-1}) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t_{n-1}} \frac{A \tilde{u}(\tau)}{(t_n - \tau)^{1-q}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{A \tilde{u}(\tau)}{(t_n - \tau)^{1-q}} d\tau \\ &\approx \frac{A}{\Gamma(q)} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{(\tilde{u}_j + \tilde{u}_{j+1})}{2(t_n - \tau)^{1-q}} d\tau \\ &= \frac{Ah^q}{2\Gamma(1+q)} \sum_{j=1}^{n-1} w_{n,j}^q (\tilde{u}_{j-1} + \tilde{u}_j) \end{aligned}$$

Bu zaman bölme şeması TS-I olarak adlandırılır ve aşağıdaki yakınsama teoremi geçerlidir

(Cao ve ark., 2015).

### 3.5. Kararlılık Analizi

Sayısal yöntemlerde kararlılık analizi, bir sayısal çözüm yönteminin gerçek çözüme ne kadar doğru taklit ettiğini ve ne kadar istikrarlı olduğunu değerlendiren bir süreçtir. Bu analiz, sayısal hataların nasıl yayıldığını ve bir çözüm yönteminin bu hataları nasıl etkilediğini anlamamıza yardımcı olur. Genellikle diferansiyel veya integral denklemlerin sayısal çözümü için kullanılır.

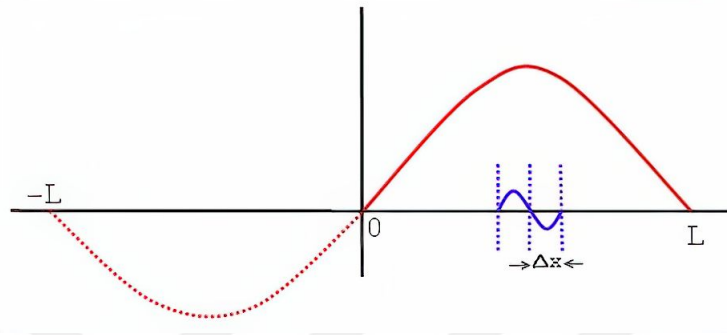
Kararlılık analizinin temel amacı, sayısal çözüm yönteminin küçük giriş hatalarının zamanla veya iterasyonlarla nasıl büyüdüğünü belirlemektir. Kararlı bir yöntem, hata büyüklüğünü kontrol altında tutarak çözümün sürekli olarak gerçek çözüme yaklaşmasını sağlar. Buna karşın, kararsız bir yöntem hataların hızla büyümesine ve çözümün bozulmasına yol açar.

Bu analizde, kararlılık fonksiyonları ve kararlılık koşulları kullanılır. Kararlılık fonksiyonu, sayısal çözüm yönteminin hata amplifikasyonunu ifade eder ve genellikle Fourier uzayında analiz edilir. Kararlılık koşulları ise, hata amplifikasyon faktörünün belirli bir aralıkta kalması gereken eşitsizlikler veya denklemlerdir.

Matematiksel analiz ve teorik hesaplamalar kullanılarak yapılan bu değerlendirme, sayısal yöntemin matematiksel modelini ve yaklaşık çözüm tekniklerini inceler. Analiz sonucunda, sayısal yöntemin kararlılığını sağlamak için bazı sınırlamalar veya koşullar ortaya çıkabilir.

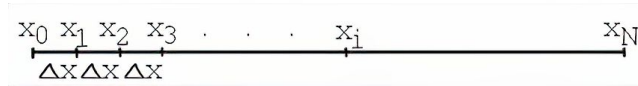
Kararlılık analizi, sayısal yöntemlerin tasarımında önemli bir adımdır. Bir yöntemin kararlı olup olmadığını belirlemek, doğru ve güvenilir sonuçlar elde etme açısından kritiktir. Bu analiz, sayısal hataların kontrol edilmesi ve azaltılması için de rehberlik sağlar. Sonuç olarak, kararlılık analizi, sayısal yöntemlerin doğruluğunu, güvenilirliğini ve performansını değerlendirmek için vazgeçilmezdir. Hata amplifikasyonunu ve hataların yayılmasını anlamak, doğru ve kararlı sayısal çözümler elde etmek için önemlidir.

**Tanım 3.10.** Şekil 2.8 deki gibi bir boyutlu  $(0,L)$  bölgesi düşünelim. Ayrıca bunu  $(-L,0)$  üzerine de yansıtalım. Ağ noktalarını ise  $\Delta x$  ile oluşturalım. Şekil 2.8 e göre çözülebilir en kısa dalga uzunluğu  $\lambda_{min} = 2\Delta x$  dir. O halde maksimum dalga sayısı,  $k_{max} = \frac{2\pi}{2\Delta x}$  olmalıdır. Şekil 2.8 e göre çözülebilir en uzun dalga uzunluğu  $\lambda_{max} = 2L$  dir. O halde minimum dalga sayısı,  $k_{min} = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$  olmalıdır.



**Şekil 3.8.**  $-L$  ve  $+L$  arasında bir dalga gösterimi

Şekil 2.9 a göre ızgara  $i = 0, \dots, N$  aralığına bölünsün.  $x_i = i\Delta x$   $L$ , dalga uzunluğu,  $N$ , aralık olmak üzere,

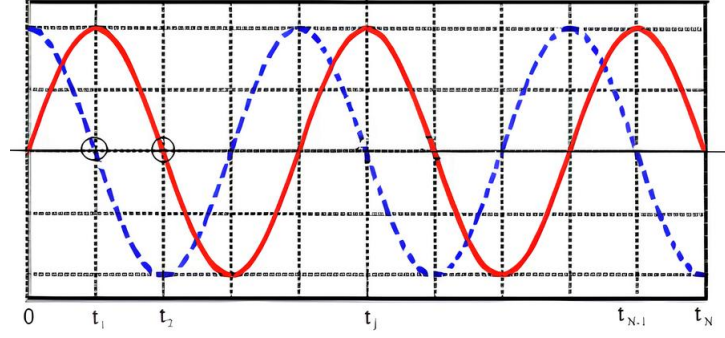


**Şekil 3.9.**  $[0.N]$  aralığının parçalanması

$x_1 = 1\Delta x$ ,  $x_2 = 2\Delta x$ ,  $x_3 = 3\Delta x$  ...  $x_i = i\Delta x$  ve  $\Delta x = \frac{L}{N}$  şeklindedir. O halde  $j = 0, \dots, N$  olmak üzere

$$k_j = jk_{min} \quad (3.45)$$

şeklindedir. Frekansları aynı olan iki dalga düşünelim: Şekil 2.10 da düz çizgiyle ve kesikli çizgiyle gösterilen iki tane sinüs grafiği vardır. Düz çizgili olan sinüs grafiği tam sinüs formunu takip ettiği için fazı sıfırdır. Ayrıca düz çizgili sinüs grafiğinin genliği maksimum noktasından sıfır noktasına düşmesi  $t_2$  ms sürmektedir. Kesikli gösterilen sinüs grafiği ise maksimum genliğe sıfır noktasında ulaşmış ve sıfır noktasına düşmesi  $t_1$  ms sürmüştür. Bu iki nokta yuvarlak içine alınmıştır. Bu noktalar sinüs grafikleri için benzer noktalardır ve faz farkı veya faz açısı şu şekilde ifade edilir:



Şekil 3.10. Sinüs eğrileri arasındaki faz farkı

$$\phi = \frac{t2\pi}{2L} = \frac{t\pi}{L}$$

burada  $L$ ,  $f$  frekans olmak üzere,  $T = \frac{1}{f}$  olarak ifade edilir ve 360 dereceyi tarayan periyot olarak bilinir.  $(-\pi, \pi)$  bölgesi içinde  $\frac{\pi}{N}$  adımlarıyla gidersek ve  $t=j$  olarak alınırsa :

$$\phi = \frac{j2\pi}{2N} = \frac{j\pi}{N}$$

olarak yazılabilir.

Genel olarak bir fourier serisi:

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^N a_j \cos(k_j x_i) + \sum_{j=1}^N b_j \sin(k_j x_i) \quad (3.46)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer  $I = \sqrt{-1}$  olmak üzere,  $\cos\phi = \frac{e^{I\phi} + e^{-I\phi}}{2}$  ve  $\sin\phi = \frac{e^{I\phi} - e^{-I\phi}}{2I}$  olarak alıp (3.46) denkleminde yerine yazarsak:

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^N a_j \frac{e^{Ik_j x_i} + e^{-Ik_j x_i}}{2} + \sum_{j=1}^N b_j \frac{e^{Ik_j x_i} - e^{-Ik_j x_i}}{2I} \quad (3.47)$$

elde edilir. Daha sonra,

$$\frac{I e^{Ik_j x_i} - e^{-Ik_j x_i}}{2I} = \frac{I e^{-Ik_j x_i} - I e^{Ik_j x_i}}{2}$$

şeklinde yazarsak:

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^N a_j \frac{e^{Ik_j x_i} + e^{-Ik_j x_i}}{2} + \sum_{j=1}^N b_j \frac{I e^{-Ik_j x_i} - I e^{Ik_j x_i}}{2} \quad (3.48)$$

(3.48) denklemini düzenlersek:

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^N \frac{a_j - Ib_j}{2} e^{Ik_j x_i} + \sum_{j=1}^N \frac{a_j - Ib_j}{2} e^{-Ik_j x_i} \quad (3.49)$$

(3.49) denkleminin sağ tarafının ikinci toplamında  $j$  değerini  $-j$  değeriyle değiştirirsek:

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^N \frac{a_j - Ib_j}{2} e^{Ik_j x_i} + \sum_{j=-N}^1 \frac{a_{-j} - Ib_{-j}}{2} e^{-Ik_j x_i}$$

$a_0 = V_0^n$ , birbirinin eşleniği olduğundan  $a_j - Ib_j$  ve  $a_{-j} - Ib_{-j}$  değerlerini  $V_j^n$  olarak alırsak:

$$f(x) = \sum_{j=-N}^N V_j^n e^{Ik_j x_i}$$

şeklinde fourier serisi yardımıyla oluşturabiliriz.

Açık bir sonlu fark yönteminde

$$\frac{u_m^{t+1} - u_m^t}{k} = v \left( \frac{u_{m+1}^t - 2u_m^t + u_{m-1}^t}{h^2} \right)$$

$$u_m^{t+1} = u_m^t + \frac{kv}{h^2} (u_{m+1}^t - 2u_m^t + u_{m-1}^t)$$

$u_m^t = V^t e^{Ik_j m \Delta x}$  olarak alırsak

$$V^{t+1} e^{Ik_j m \Delta x} = V^t e^{Ik_j m \Delta x} + \frac{kv}{h^2} \left( V^t e^{Ik_j (m+1) \Delta x} - 2V^t e^{Ik_j m \Delta x} + V^t e^{Ik_j (m-1) \Delta x} \right).$$

Her iki tarafı da  $V^t e^{Ik_j m \Delta x}$  ile sadeleştirelim:

$$V = 1 + \frac{kv}{h^2} (e^{Ik_j \Delta x} - 2 + e^{-Ik_j \Delta x})$$

$$V = 1 + \frac{kv}{h^2} (\cos(k_j \Delta x) + i \sin(k_j \Delta x) - 2 + \cos(k_j \Delta x) - i \sin(k_j \Delta x))$$

$$V = 1 + \frac{2kv}{h^2} (2\cos(k_j \Delta x) - 2)$$

$$V = 1 + \frac{2kv}{h^2} (\cos(k_j \Delta x) - 1).$$

Burada  $V$ ,  $t$ . kuvvetten dalga genliği,  $I$ , imajiner,  $k_j$ , dalga parametresidir. Eğer  $|V| > 1$  ise herhangi bir  $k$  için kararsızdır.

Kapalı bir sonlu fark yönteminde ise,

$$\frac{u_m^{t+1} - u_m^t}{k} = v \left( \frac{u_{m+1}^{t+1} - 2u_m^{t+1} + u_{m-1}^{t+1}}{h^2} \right)$$

$$u_m^{t+1} = u_m^t + \frac{kv}{h^2} (u_{m+1}^{t+1} - 2u_m^{t+1} + u_{m-1}^{t+1})$$

$u_m^t = V^t e^{I.k_j.m.\Delta x}$  olarak alınırsa,

$$V^{t+1} e^{I.k_j.m.\Delta x} = V^t e^{I.k_j.m.\Delta x} + \frac{kv}{h^2} \left( V^{t+1} e^{I.k_j.(m+1).\Delta x} - 2V^{t+1} e^{I.k_j.m.\Delta x} + \zeta^{t+1} e^{I.k_j.(m-1).\Delta x} \right)$$

Her tarafı  $V^{t+1} e^{I.k_j.m.\Delta x}$  ile sadeleştirelim.

$$1 = \frac{1}{V} + \frac{kv}{h^2} (e^{I.k_j.\Delta x} - 2 + e^{-I.k_j.\Delta x})$$

$$1 = \frac{1}{V} + \frac{k.v}{h^2} (\cos(k_j.\Delta x) + i\sin(k_j.\Delta x) - 2 + \cos(k_j.\Delta x) - i\sin(k_j.\Delta x))$$

$$1 = \frac{1}{V} + \frac{k.v}{h^2} (2\cos(k_j.\Delta x) - 2)$$

$$1 = \frac{1}{V} + \frac{2k.v}{h^2} (\cos(k_j.\Delta x) - 1)$$

$$\frac{1}{V} = 1 - \frac{2.k.v}{h^2} (\cos(k_j.\Delta x) - 1)$$

$$V = \frac{1}{1 + \frac{2.k.v}{h^2} (1 - \cos(k_j.\Delta x))}$$

Burada eğer  $0 < V \leq 1$  oluyorsa koşulsuz kararlıdır denir.

TS-1 Şemasının kararlılık analizi şu şekilde yapılır:

(3.14) denkleminde benzer bir şekilde

$$\left( {}^C D_0^q f \right) (t) = \rho f(t) + \psi g(t), \quad t(0) = t_0, \quad \rho, \psi \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.50)$$

denklemini ele alalım ve burada  $\psi = 0$  olarak düşünelim. O halde (3.14) denkleminde benzer bir şekilde

$$\left( {}^C D_0^q u \right) (t) = \rho u(t), \quad t \geq 0, \quad \rho \in \mathbb{C} \quad (3.51)$$

denklemini ele alıyoruz. Öncelikle denklemin her iki tarafının kesirli mertebeden integralini alırız ve

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} \rho u(s) ds \quad (3.52)$$

denklemini elde ederiz (Garrappa, 2010).

(3.52) integral ifadesini her bir zaman adımı için ayrıklaştırmak gereklidir. Çarpım integrasyonu kuralları, integralin her bir zaman adımı arasında hesaplanmasını sağlar. Her bir zaman adımında integral şu şekilde ayrıklaştırılabilir.  $t_n$  zaman grid noktaları,  $h$  zaman adımı ve  $n$  grid noktasının indeksi olmak üzere  $t_n = t_0 + nh$  şeklinde ayrıklaştırma yaptığımızda

$$u_n = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - s)^{\alpha-1} \rho u(s) ds$$

şeklinde bir denklem elde ederiz. Bu integralin her bir zaman adımında nasıl hesaplanacağını belirlemek için ağırlık katsayıları ( $\omega_{n-j}$ ) hesaplanır. Bu katsayılar, integralin belirli bir aralıkta yaklaşık olarak hesaplanmasını sağlar. o halde

$$\omega_{n-j} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - s)^{\alpha-1} ds$$

şeklinde alırız ve bu katsayılar,  $t_{j-1}$  ve  $t_j$  zaman noktaları arasındaki integralin yaklaşık değerini temsil eder. Buradan Trapez (yamuk) kuralı kullanarak  $\omega_{n-j}$  katsayılarını hesaplayalım. Trapez kuralı, integralin yaklaşık olarak hesaplanmasını sağlar ve şu şekilde ifade edilir:

$$\omega_{n-j} \approx \frac{h^\alpha}{2} [(t_n - t_{j-1})^{\alpha-1} + (t_n - t_j)^{\alpha-1}].$$

O halde denklem

$$u_n = u_0 + h^\alpha \rho \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} f_j$$

şeklinde konvolüsyon quadratürü şeklinde yazılır. Şimdi de bu denklemin kararlılık bölgesini belirleyeceğiz.

**Teorem 3.3.**  $\alpha > 0$  ve  $\rho h^\alpha = z$  olarak alalım.  $g_n$ ,  $f_n$  in başlangıç koşulu dizisi yakınsak ve

$$\omega_n = \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + v_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| < \infty \quad (3.53)$$

kuadratür ağırlıkları  $n \geq 1$  ve

$$f_n = g_n + z \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} f_j \quad (3.54)$$

konvolüsyon kuadratürü aşağıdaki

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - z\omega^\alpha(\xi) \neq 0 : |\xi| \leq 1\}, \quad \omega^\alpha(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \xi^n. \quad (3.55)$$

kararlılık bölgesini sağlar (Lubich, 1986).

**İspat:**

$$f_n = g_n + z \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} f_j$$

konvolüsyon kuadratürünün fouier dönüşümünü alalım. Konvolüsyonun fourier dönüşümü  $h_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$  için  $h(\xi) = a(\xi)b(\xi)$  şeklindedir. O halde  $f_n = g_n + z \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} f_j$  denkleminin her iki tarafının fourier dönüşümünü alırsak,

$$f(\xi) = g(\xi) + z \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} f_j \right) \xi^n$$

elde ederiz ve içerideki ifadeye dikkat edersek,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} f_j \right) \xi^n = \omega^\alpha(\xi) f(\xi)$$

konvolüsyonun fourier dönüşümü olduğundan bu eşitlik gerçekleşir. Şimdi yerine yazalım ve çözümü ilerletelim:

$$f(\xi) = g(\xi) + z\omega^\alpha(\xi)f(\xi)$$

denklemini düzenlersek,

$$f(\xi) - z\omega^\alpha(\xi)f(\xi) = g(\xi)$$

buradan  $f(\xi)$  parantezine alırsak,

$$f(\xi)(1 - z\omega^\alpha(\xi)) = g(\xi)$$

her iki tarafı da  $1 - z\omega^\alpha(\xi)$  ifadesine bölersek,

$$f(\xi) = \frac{g(\xi)}{1 - z\omega^\alpha(\xi)}$$

elde edilir ve  $1 - z\omega^\alpha(\xi) \neq 0$  olacağından dolayı  $G$  bölgesi aşağıdaki gibi olmalıdır.

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - z\omega^\alpha(\xi) \neq 0 : |\xi| \leq 1\}, \quad \omega^\alpha(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \xi^n.$$

Şimdi (3.25) denklemini,  $f(t, u(t)) = 0$  olacak şekilde (3.41)- (3.44) zaman parçalama şemalarıyla işleme tabi tutarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

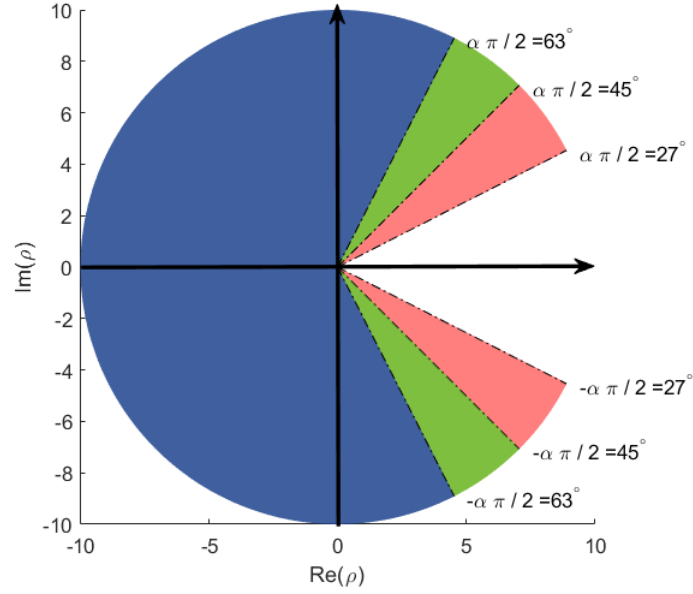
$$\tilde{u}_n = \left(1 - \frac{\lambda h^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} [(n+1)^\alpha - n^\alpha]\right) u_0 + \lambda h^\alpha \sum_{j=0}^n w_{n-j}^{(I)} \tilde{u}_j,$$

burada  $w_0^{(TS)} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$ ,  $w_1^{(TS)} = \frac{2^\alpha - 1^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}$ ,  $w_n^{(TS)} = \frac{(n+1)^\alpha - (n-1)^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}$  (Cao ve ark., 2015). O halde Teorem (3.3)'ye göre TS-1 şemasının kararlılık bölgesi aşağıdaki gibidir (Lubich, 1986):

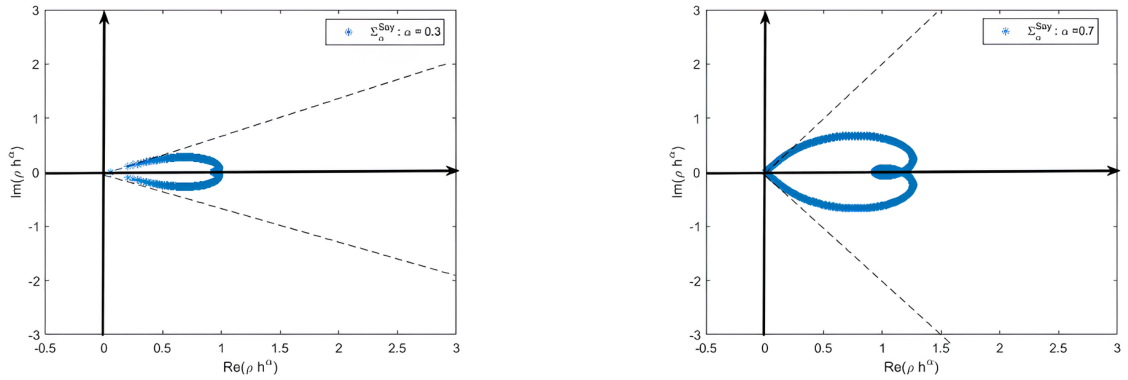
$$\Sigma_\alpha^{Say} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{1}{w^{TS}(\xi)} : |\xi| \leq 1 \right\}, \quad \text{burada } w^{TS}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(TS)} \xi^n.$$

**Tanım 3.11.** Bir sayısal yöntem, hangi adım büyüklüğünde çalışırsa çalışsın kararlılığını yitirmiyorsa, A-kararlıdır denir.

Örneğin bir uçak, daha geniş bir rüzgar açısına kadar (örneğin, yan rüzgarlar) güvenle uçabilir. Bu, uçağın daha geniş bir şartta kararlılığını koruması anlamına gelmektedir. A-kararlılık, bir yöntemin zaman adımı ne kadar değişirse değişsin kararlı olmasını sağlar, yani çözümün zamanla büyümemesinin veya dalgalanmamasının garantisini size verir. Bu, özellikle sert diferansiyel denklemler için önemlidir, çünkü bu tür denklemler, büyük zaman adımlarında bile kararlı kalmayı gerektirir. Bir konvolüsyon kuadratürünün (örn.  $(\omega_n)$ ) kararlılık bölgesi  $G$ , tüm karmaşık  $z = h\rho$  için, sayısal çözüm  $(y_n)$ 'nin  $(f_n)$  sonlu bir limite sahip olduğunda  $y_n \rightarrow 0$  olarak tanımlanır. Bu metodun güçlü kararlı olması, her  $\rho$  için  $|\arg \rho - \pi| < (1 - \frac{a}{2})\pi$  ve  $0 < h \leq h_0(\rho)$  için geçerli olmasını gerektirir. Ayrıca, eğer  $G$  sektörü  $|\arg z - \pi| < \theta$ 'yi içeriyorsa, metod  $A(\theta)$ -kararlı olarak adlandırılır. Yani Yöntemin kararlı olacağı açısız bölgeyi genişletiriz. Bu durumda  $|\arg z - \pi| < \theta$ 'lık bir sektörü kapsayan bir bölge tanımlarız. Eğer yöntem bu bölge içinde kararlı kalabiliyorsa,  $A(\theta)$ -kararlı olarak adlandırırız. Örneğin,  $\theta = \pi/2$  ise, yöntemin kararlılık bölgesi,  $\pi$ 'den  $\pi/2$ 'lik bir açı farkıyla tanımlanır. (Şekil 3.11.)'de farklı  $\alpha$  değerlerine göre kararlılık bölgelerinin çizimi gösterilmiştir.



Şekil 3.11.  $0 < \alpha < 1$  için  $\alpha = 0.3, \alpha = 0.5$  ve  $\alpha = 0.7$  değerlerin  $\Sigma_\alpha$  sektörüne göre kararlılık bölgeleri



Şekil 3.12. TS-1 şemasının  $\alpha = 0.3$  ve  $\alpha = 0.7$  değerleri için kararlılık bölgesi

(Şekil 3.12.)de TS-1 şemasının  $\alpha = 0.3$  and  $\alpha = 0.7$  değerlerine göre kararlılık bölgeleri çizdirilmiştir. Burada Teorem (3.3) için  $n = 10^4$  alınmıştır çünkü  $w^I(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{TS} \xi^n$  açıkça bilinmemektedir. Görülüyor ki TS-I şeması  $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_\alpha^{Say}$  durumunda ve  $\alpha = 0.3$  ve  $\alpha = 0.7$  için  $A\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$ -kararlıdır (Cao ve ark., 2015).

## 4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

### 4.1. Kesirli Mertebeden Burgers' Denkleminin Numerik Çözümleri

Bu bölümde zamana göre kesirli mertebeden Burgers' denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için denklem, merkezi sonlu fark yöntemi ile adi bir diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür. Sonra zaman parçalanma tekniği ile çözümlenir. Elde edilen sayısal çözümler belli değerler için tam çözüm ve MQRBF sayısal çözümleri ile karşılaştırılır.

Kesirli mertebeden Burgers' denklemi

$$\frac{\partial^q u}{\partial t^q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (x, t) \in (a, b) \times (0, T], \quad (4.1)$$

verilsin başlangıç koşulu:

$$u(x, t_0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b,$$

ve sınır koşulları

$$u(a, t) = u_1(t), \quad u(b, t) = u_2(t) \quad t_0 \leq t \leq T,$$

olsun. Burada  $0 < q \leq 1$  Caputo anlamda kesirli türevi,  $t$ ,  $x$  sırasıyla zaman ve uzay değişkenleri,  $T$  toplam zaman,  $\nu > 0$  kinematik viskozite parametresi ve  $u_0(x)$ ,  $u_1(t)$  ve  $u_2(t)$  verilen fonksiyonlar olup  $u_0(x)$  yeterince düzgündür (sürekli ve sürekli türevli).

$[a, b]$  aralığının  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  parçalanması verilsin.

Merkezi fark formülünü tekrar hatırlayalım:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0 - h)}{2h}.$$

Şimdi  $h = x_i - x_{i-1}$  olmak üzere  $[a, b]$  aralığında  $u(x, t)$  yi merkezi fark formülü kullanılarak aşağıdaki gibi diskretize edilsin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x_1, t) &= \frac{u(x_2, t) - u(x_0, t)}{2h}, \\ \frac{\partial}{\partial x} u(x_2, t) &= \frac{u(x_3, t) - u(x_1, t)}{2h}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_{M-1}, t) = \frac{u(x_M, t) - u(x_{M-2}, t)}{2h}.$$

Yukarıdaki diskretizasyonu matris formunda ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2h} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

olarak yazılır.

Şimdi, ikinci türevin merkezi fark formülünü bulalım.  $x$  noktası etrafında  $u(x-h)$  ve  $u(x+h)$  fonksiyonlarının Taylor serilerini düşünelim.

$$u(x+h, t) = u(x, t) + h \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \dots \quad (4.3)$$

$$u(x-h, t) = u(x, t) - h \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \dots \quad (4.4)$$

(4.3) ve (4.4) denklemlerini topladığımızda, aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$u(x+h, t) + u(x-h, t) = 2u(x, t) + 2 \cdot \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \dots$$

Bu durumda, şu denklemi elde ederiz:

$$\frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2)$$

Bu da yaklaşık olarak,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \cong \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}.$$

Şimdi, ikinci türevin diskretizasyonunu önceki gibi yapalım.

$$\frac{\partial^2 u(x_1, t)}{\partial x^2} \cong \frac{u(x_2, t) - 2u(x_1, t) + u(x_0, t)}{h^2},$$

$$\frac{\partial u^2(x_2, t)}{\partial x^2} \cong \frac{u(x_3, t) - 2u(x_2, t) + u(x_1, t)}{h^2},$$

$$\frac{\partial u^2(x_3, t)}{\partial x^2} \cong \frac{u(x_4, t) - 2u(x_3, t) + u(x_2, t)}{h^2},$$

$$\frac{\partial u^2(x_{M-1}, t)}{\partial x^2} \cong \frac{u(x_M, t) - 2u(x_{M-1}, t) + u(x_{M-2}, t)}{h^2}. \quad (4.5)$$

Yukarıdaki diskretizasyonu matris formunda yazdığımızda,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{h^2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Yukarıdaki (4.2) ve (4.6) matrislerini (4.1) denkleminde yerine koyarsak, şu denklemi elde ederiz:

$$\frac{\partial^q u}{\partial t^q} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{v}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix} + g(x, t).$$

Bu denklemi daha kullanışlı hale getirmek için aşağıdaki gibi temsil edelim:

$$\frac{\partial^q u(t)}{\partial t^q} + u(t) \cdot [B \cdot u(t)] = v \cdot A \cdot u(t) + g(t)$$

Böylece, denklem adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülebilir:

$$\frac{\partial^q u(t)}{\partial t^q} = v.A.u(t) - u(t).*[B.u(t)] + g(t) \quad (4.7)$$

burada,

$$A = \frac{v}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ve

$$u = \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix},$$

$$g = \begin{bmatrix} g(x_1, t) \\ g(x_2, t) \\ \vdots \\ g(x_{M-1}, t) \end{bmatrix}.$$

Sonuç olarak, verilen parabolik denklemi,  $q$ -genelleştirilmiş difüzyon denklemine dönüştürdük ve bir ODE sistemine indirgedik. Bu sistemde  $u(t)$ ,  $v$  ve  $g(t)$  bilinmektedir. Şimdi, (4.7) denkleminde

$$f(t, u(t)) = -u(t).*[B.u(t)] + g(t)$$

alırsak:

$$({}_t^C D_0^q u)(t) = A.u(t) + f(t, u(t)), t \in [0, T], u(0) = u_0$$

şeklinde (3.25)'e dönüştürmüş oluruz . Burada,  $q \in (0, 1)$  dir ve  $A, f : [0, T] \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  de  $(M + 1) \times (M + 1)$  boyutunda gerçel matrislerden oluşur.

**Tanım 4.1.** Örnek problemlerin çözümlerini karşılaştırmak için mutlak hata,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları kullanılacaktır.

$$\|u_{\text{sayısal}} - u_{\text{tam}}\|_{L_2} = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{j=0}^k (u_{j,N} - u(x_j, t))^2},$$

$$\|u_{\text{sayısal}} - u_{\text{tam}}\|_{L_\infty} = \max_{0 \leq j \leq k} |u_{j,N} - u(x_j, t)|,$$

$$\text{Mutlak Hata} = |u_{j,N} - u(x_j, t)|, \quad 0 \leq j \leq k.$$

### Örnek 3.1

$$u(x, 0) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = t^2, u(1, t) = -t^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u^T(x, t) = t^2 \cos(\pi x)$$

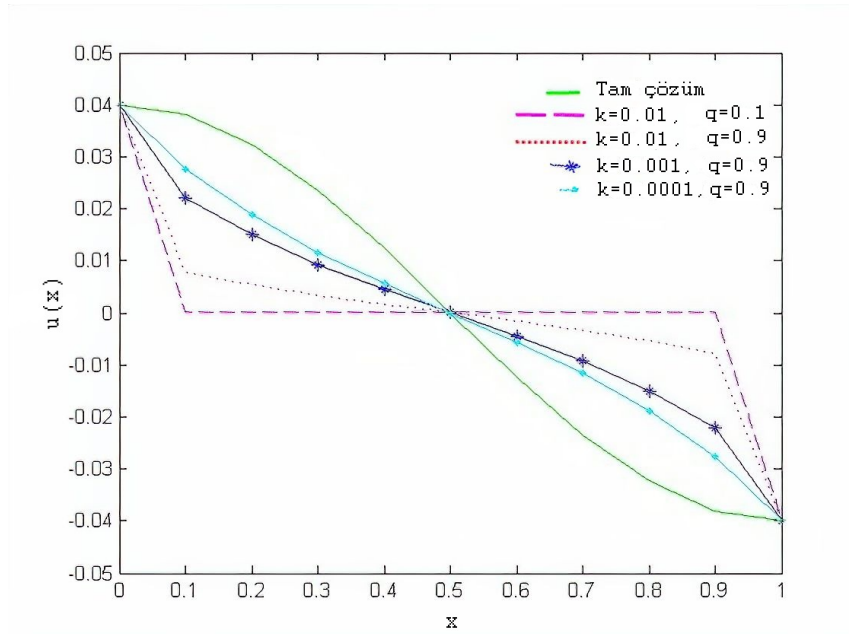
$$g(x, t) = \left( \frac{2 \cdot t^2 - q}{\Gamma(3 - q)} - \pi^4 t^4 \sin(\pi x) + v \pi^2 t^2 \right) \cos(\pi x) \quad (4.8)$$

burada  $u^T(x, t)$  tam çözüm,  $g(x, t)$  ise kuvvet fonksiyonudur.

**Çözüm (MSF):**  $T=1$ ,  $v=1$  ve  $N=10$  olmak üzere,

**Çizelge 4.1.**  $q$  ve  $k$  değişkenlerine göre çözümler (MSF)

v=1 T=0.2 N=10					
	Zaman adımı	Sayısal Çözümler	Tam Çözümler	Mutlak Hata	
$q=0.1$ $k=0.01$	0.2000000	0.0001000	0.0323607	0.0322607	$L_2x10^2=2.526$ $L_\infty x10^2=3.798$
	0.4000000	0.0000679	0.0123607	0.0122928	
	0.6000000	0.0000395	-0.0123607	0.0124001	
	0.8000000	0.0000132	-0.0323607	0.0323738	
$q=0.9$ $k=0.01$	0.2000000	0.0052979	0.0323607	0.0270628	$L_2x10^2=2.085$ $L_\infty x10^2=3.022$
	0.4000000	0.0015590	0.0123607	0.0108017	
	0.6000000	-0.0015433	-0.0123607	0.0108174	
	0.8000000	-0.0052707	-0.0323607	0.0270900	
$q=0.9$ $k=0.001$	0.2000000	0.0150347	0.0323607	0.0173260	$L_2x10^2=1.279$ $L_\infty x10^2=1.732$
	0.4000000	0.0044511	0.0123607	0.0079096	
	0.6000000	-0.0044508	-0.0123607	0.0079099	
	0.8000000	-0.0150336	-0.0323607	0.0173271	
$q=0.9$ $k=0.0001$	0.2000000	0.0187489	0.0323607	0.0136118	$L_2x10^3=9.822$ $L_\infty x10^2=1.359$
	0.4000000	0.0055573	0.0123607	0.0068034	
	0.6000000	-0.0055600	-0.0123607	0.0068007	
	0.8000000	-0.0187524	-0.0323607	0.0136083	



**Şekil 4.1.**  $q$  ve  $k$  değişkenlerine göre çözümlerin karşılaştırılması(MSF)

v kinematik viskozite parametresi, T zaman sonu, N uzay büyüklüğü, h uzay adım büyüklüğü, k zaman adım büyüklüğü olmak üzere, v=1, T=0.2, N=10 değerlerine göre alınan q değerlerinin karşılaştırılması Çizelge 3.1’de gösterilmiştir. Görüldüğü üzere zaman adımını azalttığımızda hata oranı azalmaktadır. Hatanın çok fazla azalmama sebebi merkezi sonlu fark kullanmamızdan kaynaklanmaktadır.

### Çözüm (MQRBF):

Kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemini elde etmek için (3.1) denklemini, radyal baz fonksiyonlar yöntemiyle uzayda ayrıştırılabilir (Kansa, 1990). Bunun için (3.1) denkleminin nümerik çözümünü,  $u(x,t)$  olarak gösterip aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$u(x,t) \approx \sum_{i=0}^N b_i(t) \theta_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^l, \quad (4.9)$$

burada  $\theta_i(x)$  sürekli türevlenebilir radyal baz fonksiyonlarıdır, N eşit aralıklı olan düğüm sayısını temsil eder,  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{l-1})$  l boyutlu bir vektördür,  $b_i$ ’ler kolokasyon yöntemleri kullanılarak tanımlanmalıdır. Diğer yandan (3.13) MQRBF fonksiyonunu kullanabiliriz:

$$\theta_i(x) = \sqrt{r_i^2 + c^2},$$

burada c şekil sabitini,  $r_i = \|x - x_i\|$  ise Öklit normunu gösterir.

Yaklaşık çözüm  $u(x,t)$ ’yi  $u^N(x,t)$  olarak tanımlayalım ve devam edelim:

$$u^N(x,t) = \sum_{i=0}^N b_i(t) \theta_i(x) = \Theta^T(x) b, \quad (4.10)$$

burada  $\theta_i(x) = \sqrt{(x - x_i)^2 + c^2}$ ,  $x_i = i/N$ , ( $i = 0, 1, \dots, N$ ),  $[0, 1]$  aralığında eşit dağılımlı düğümlerdir ve

$$\Theta(x) = (\theta_0(x), \theta_1(x), \dots, \theta_N(x))^T, \quad b = (b_0(t), b_1(t), \dots, b_N(t))^T.$$

şeklinde yazılır. Denklem (4.10) aşağıdaki formda yeniden yazılabilir:

$$\rho b = y, \quad (4.11)$$

burada  $y = (u_0(t), u_1(t), \dots, u_N(t))$  ve  $u^N(x_j, t) = u_j(t)$  ( $j = 1, \dots, N$ ) için  $x_j = \frac{j}{N}$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ) olan kolokasyon düğümleri ile belirtilir, ve

$$\rho = \begin{bmatrix} \Theta^T(x_0) \\ \Theta^T(x_1) \\ \vdots \\ \Theta^T(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0(x_0) & \theta_1(x_0) & \dots & \theta_N(x_0) \\ \theta_0(x_1) & \theta_1(x_1) & \dots & \theta_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_0(x_N) & \theta_1(x_N) & \dots & \theta_N(x_N) \end{bmatrix}.$$

şeklinde yazılır. (4.9), (4.10) ve (4.11) denklemleri göz önünde bulundurularak,

$$u(x, t) \approx u^N(x, t) = \sum_{j=0}^N b_j \theta_j(x) = \Theta^T(x) b = \Theta^T(x) \rho^{-1} y = \Phi(x) y. \quad (4.12)$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer (4.12) ve türevleri, (3.1) denklemindeki ilgili terimlerle  $[0, 1]$  aralığındaki  $x_j = \frac{j}{N}$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ) kolokasyon noktalarında yerine konulursa,

$$\left( {}^C D_0^q u \right) (t) + u(t) \cdot * (\Phi_x u(t)) = v \Phi_{xx} u(t) + g(t),$$

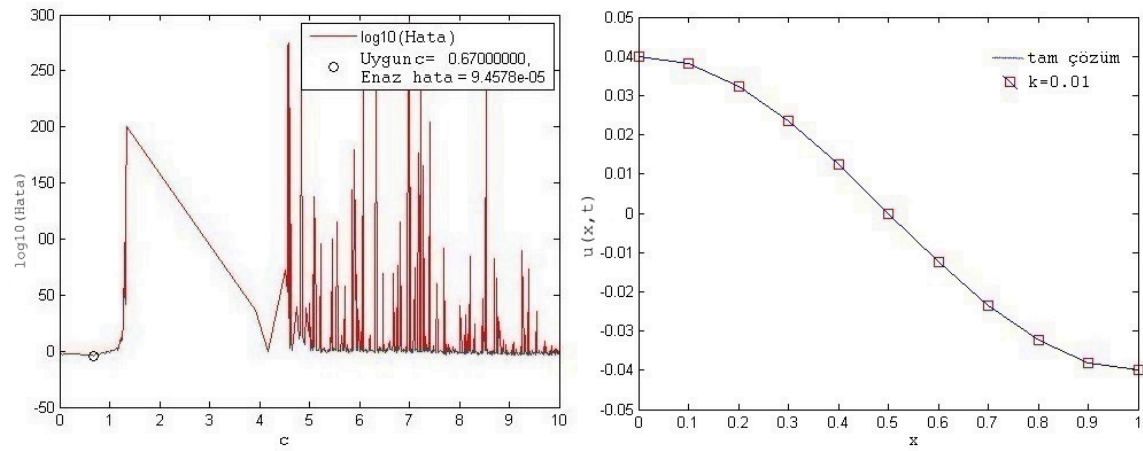
elde edilir. Burada  $\left( {}^C D_0^q u \right) (t)$ ,  $q \in (0, 1)$  Caputo türevidir,  $u = (u_0, u_1, \dots, u_N)$ ,  $g(t) = (g(x_0, t), g(x_1, t), \dots, g(x_N, t))$  ve  $\Phi_x = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \Phi_i(x_j) \right]_{(N+1) \times (N+1)}$ ,  $\Phi_{xx} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_i(x_j) \right]_{(N+1) \times (N+1)}$  şeklindedir. ”.” operatörü nokta(skaler) çarpım için tanımlanmıştır. Ayrıca, (4.1.) denklemini zaman parçalama yöntemimiz için uygun olan aşağıdaki forma dönüştürülebilir:

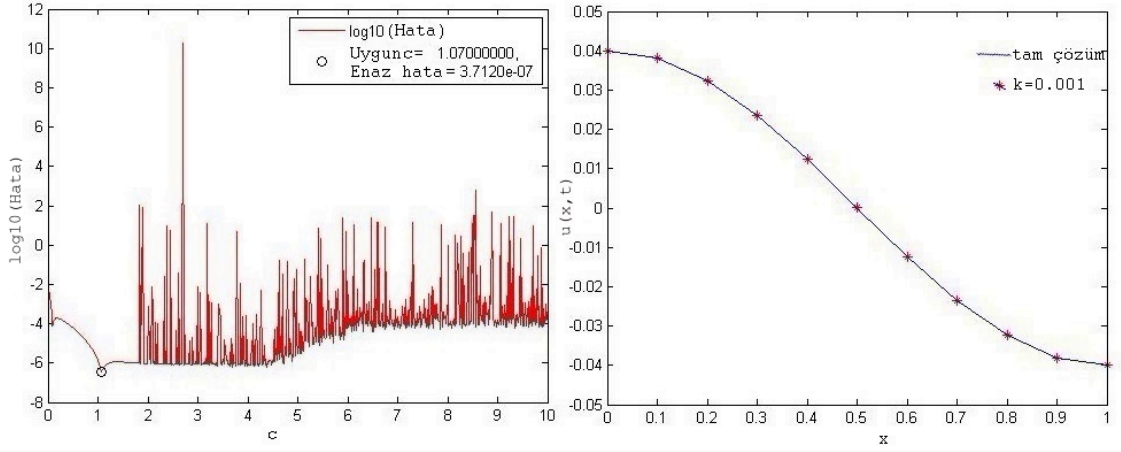
$$\left( {}^C D_0^q u \right) (t) = A u(t) + f(t, u(t)), \quad (4.13)$$

burada  $A = v \Phi_{xx}$ ,  $f(t, u(t)) = g(t) - u(t) \cdot * (\Phi_x u(t))$  şeklindedir.

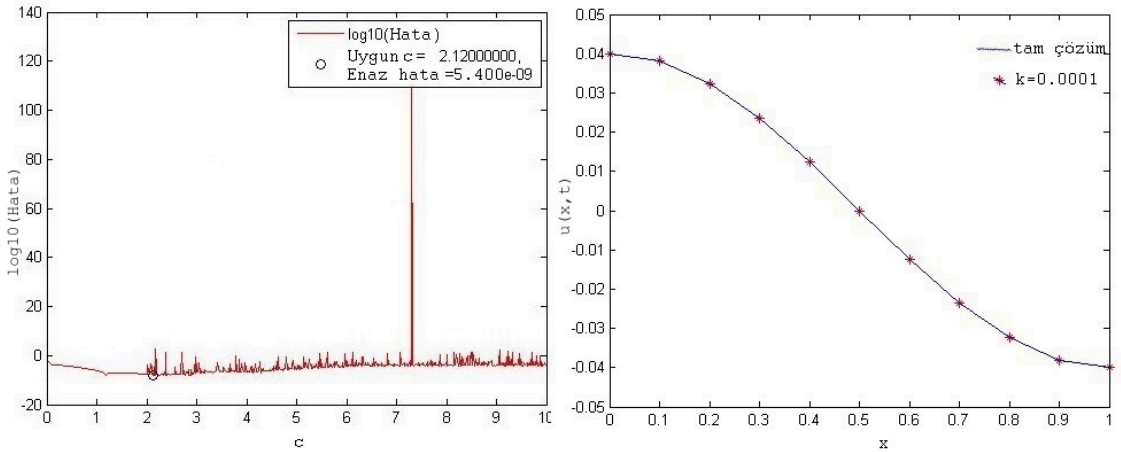
**Çizelge 4.2.**  $q$  ve  $k$  değişkenlerine göre çözümler(MQRBF)

v=1 T=0.2 N=10				
	Zaman adımı	Sayısal Çözümler	Tam Çözümler	Mutlak Hata
$q=0.9$ $k=0.01$	0.200000	0.0324507	0.0323607	0.0000901
	0.400000	0.0123848	0.0123607	0.0000241
	0.600000	-0.0123848	-0.0123607	0.0000241
	0.800000	-0.0324507	-0.0323607	0.0000901
$q=0.9$ $k=0.001$	0.200000	0.0323605	0.0323607	0.0000002
	0.400000	0.0123604	0.0123607	0.0000002
	0.600000	-0.0123604	-0.0123607	0.0000003
	0.800000	-0.0323605	-0.0323607	0.0000002
$q=0.9$ $k=0.0001$	0.200000	0.0323606824	0.0323606798	0.0000000026
	0.400000	0.0123606775	0.0123606798	0.0000000022
	0.600000	-0.0123606778	-0.0123606798	0.0000000020
	0.800000	-0.0323606803	-0.0323606798	0.0000000006

**Şekil 4.2.**  $q = 0.9$  ve  $k = 0.01$  değişkenlerine göre çözümlerin karşılaştırılması ve hataları(MQRBF)



Şekil 4.3.  $q = 0.9$  ve  $k = 0.001$  değişkenlerine göre çözümlerin karşılaştırılması ve hataları(MQRBF)



Şekil 4.4.  $q = 0.9$  ve  $k = 0.0001$  değişkenlerine göre çözümlerin karşılaştırılması ve hatası(MQRBF)

Çoklu Kuadrik radyal bazlı fonksiyonlar yöntemi ve zaman parçalama metodu ile çözülen Problem 1' in görüldüğü üzere merkezi sonlu farklar yöntemine göre, tam çözüme daha yakın sonuçlar verdiği Çizelge 3.2 ve Şekil 3.2, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 de açıkça görülmektedir.  $k$ (zaman adım büyüklüğü) değerlerini azalttığımızda tam çözüme daha da yaklaşmıştır. Şekil 3.2, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 de  $l_{sonsuz} = \max|u_{sayısal} - u_{tam}|$  hatası kullanılmıştır.

### Örnek 3.2.

Aşağıdaki tek soliton örneği olan standart bir Korteweg-de Vries (KdV) denklemini ele alalım:

$$D_t^q u(x,t) + \varepsilon u(x,t)u_x(x,t) + \nu u_{xxx}(x,t) = g(x,t), t > 0, x \in \Omega \quad (4.14)$$

$$u(x,t=0) = 6.\xi^2.\sec^2 h(\xi.x)$$

başlangıç koşulu ve

$$u^T(x,t) = 6.\xi^2.\sec^2 h(\xi.x - 2.\xi^3.t)$$

tam çözümleri olan bir denklem olsun (Saad ve ark., 2020). Burada  $u^T(x,t)$  tam çözüm,  $q$  ise Caputo türev mertebesini temsil etmektedir.

Birinci türevin matrisini merkezi sonlu farklar ile (4.2)'de göstermiştik ve B değişkenini atamıştık. Şimdi üçüncü türevin merkezi sonlu farklar ile diskretleştirmesini yapalım.

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!}.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \dots \quad (4.15)$$

$$u(x-h,t) = u(x,t) - h.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!}.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \dots \quad (4.16)$$

$$u(x+2h,t) = u(x,t) + 2h.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{4h^2}{2!}.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{8h^3}{3!}.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \dots \quad (4.17)$$

$$u(x-2h,t) = u(x,t) - 2h.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{4h^2}{2!}.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{8h^3}{3!}.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \dots \quad (4.18)$$

şeklide Taylor seri açılımlarını yazalım. Şimdi (4.15) eşitliğinden (4.16) eşitliğini çıkar-

lim:

$$u(x+h,t) - u(x-h,t) = 2h \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{2h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \dots \quad (4.19)$$

Şimdi ise (4.17) eşitliğinden (4.18) eşitliğini çıkaralım:

$$u(x+2h,t) - u(x-2h,t) = 4h \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{16h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \dots \quad (4.20)$$

Şimdi de (4.19) eşitliğini 2 ile genişletip, (4.20) eşitliğinden çıkarırsak:

$$u(x+2h,t) - 2u(x+h,t) + 2u(x-h,t) - u(x-2h,t) \approx 2h^3 \cdot \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + O(h^2)$$

gerekli düzenlemeleri yaparsak:

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} \approx \frac{u(x+2h,t) - 2u(x+h,t) + 2u(x-h,t) - u(x-2h,t)}{2h^3}$$

şeklinde üçüncü türev elde edilir. Şimdi ise diskretizasyon yapalım.

$$\frac{\partial^3 u(x_2,t)}{\partial x^3} \approx \frac{u(x_4,t) - 2u(x_3,t) + 2u(x_1,t) - u(x_0,t)}{2h^3}$$

$$\frac{\partial^3 u(x_3,t)}{\partial x^3} \approx \frac{u(x_5,t) - 2u(x_4,t) + 2u(x_2,t) - u(x_1,t)}{2h^3}$$

.

.

.

$$\frac{\partial^3 u(x_M-2,t)}{\partial x^3} \approx \frac{u(x_M,t) - 2u(x_M-1,t) + 2u(x_M-3,t) - u(x_M-4,t)}{2h^3}$$

$$\frac{\partial u^3}{\partial x^3} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2h^3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

elde ettiğimiz tüm eşitlikleri (4.14)'de yerine yazarsak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^q u}{\partial t^q} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix} \cdot \frac{\varepsilon}{2h} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} \\ &- \frac{\nu}{2h^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix} + g(x, t). \end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz. Daha kullanışlı bir formda adi diferansiyel denklem olarak yazarsak:

$$\frac{\partial^q u(t)}{\partial t^q} = -A \cdot u(t) - u(t) \cdot [r_1 \cdot u(t)] + g(t) \quad (4.22)$$

burada,

$$r_1 = \frac{\varepsilon}{2h} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$r_2 = \frac{\nu}{2h^3}$$

olmak üzere,

$$A = r_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

ve

$$u = \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{M-1}, t) \end{bmatrix},$$

$$g = \begin{bmatrix} g(x_1, t) \\ g(x_2, t) \\ \vdots \\ g(x_{M-1}, t) \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

şeklinde. Sonuç olarak, verilen parabolik denklemi,  $q$ -genelleştirilmiş difüzyon denklemine dönüştürdük ve bir ODE sistemine indirgedik. Bu sistemde tam çözüm,  $\varepsilon$  ve  $g(t)$  bilinmektedir. Şimdi, (4.22) denkleminde

$$f(t, u(t)) = -u(t) \cdot r_1 \cdot u(t) + g(t)$$

alırsak:

$$({}^C D_0^q u)(t) = -A \cdot u(t) + f(t, u(t)), \quad t \in [0, T], \quad u(0) = u_0 \quad (4.24)$$

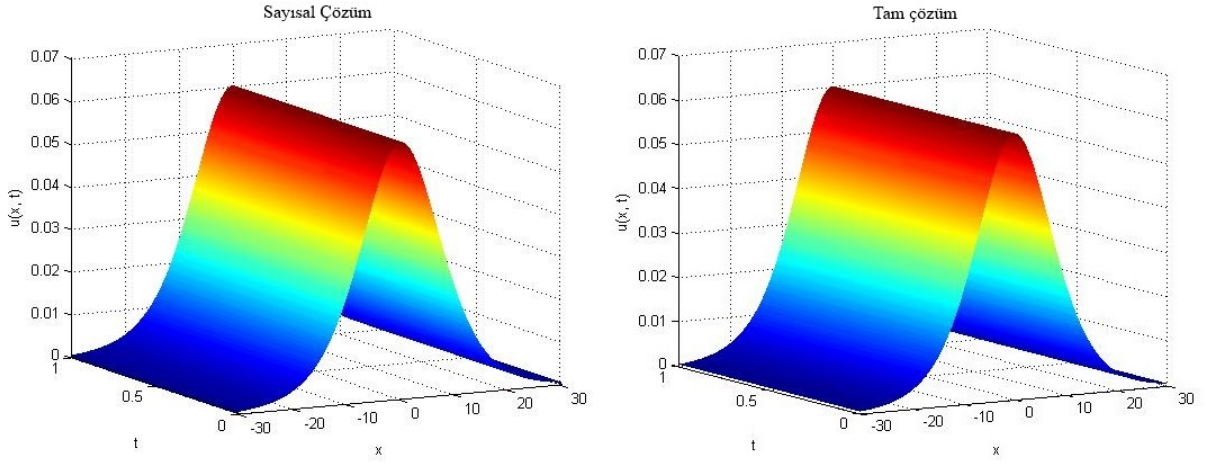
şeklinde elde ederiz. Burada,  $q \in (0, 1)$  dir ve  $r_2, f : [0, T] \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  de  $(M+1) \times (M+1)$  boyutunda gerçel matrislerden oluşur.

**Çözüm(MSF):****Çizelge 4.3.** q ve  $\varepsilon$  değerlerine göre hata normları (MSF)

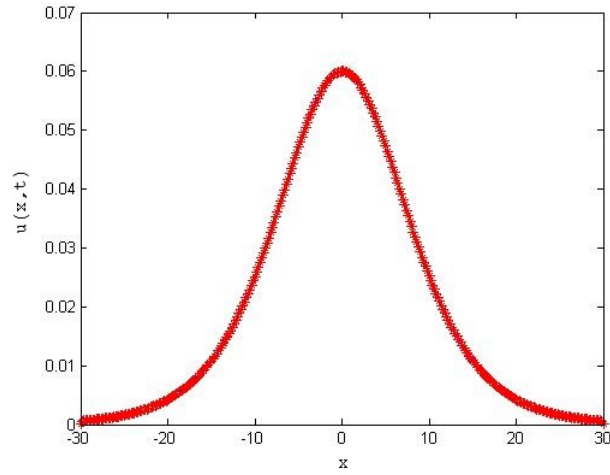
	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 3$	$\varepsilon = 6$
q=0.2	$L_2 = 4.877 \times 10^{-4}$ $L_\infty = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 3.975 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 5.824 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 2.044 \cdot 10^{-3}$ $L_\infty = 5.947 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 4.384 \cdot 10^{-3}$ $L_\infty = 1.289 \cdot 10^{-3}$
q=0.4	$L_2 = 4.862 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 3.990 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 6.029 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 2.126 \cdot 10^{-3}$ $L_\infty = 6.180 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 4.552 \cdot 10^{-3}$ $L_\infty = 1.336 \cdot 10^{-3}$
q=0.6	$L_2 = 4.865 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 3.987 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 5.987 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty S = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 2.110 \cdot 10^{-3}$ $L_\infty = 6.123 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 4.521 \cdot 10^{-3}$ $L_\infty = 1.323 \cdot 10^{-3}$
q=0.8	$L_2 = 4.885 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 3.973 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 5.744 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 2.013 \cdot 10^{-3}$ $L_\infty = 5.834 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 4.326 \cdot 10^{-3}$ $L_\infty = 1.261 \cdot 10^{-3}$

**Çizelge 4.4.** HATM tam çözümüne göre hata normları (MSF)

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 3$	$\varepsilon = 6$
q=0.6	$L_2 = 3.652 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 8.370 \cdot 10^{-5}$	$L_2 = 1.659 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 3.718 \cdot 10^{-5}$	$L_2 = 4.380 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty S = 1.372 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 2.036 \cdot 10^{-3}$ $L_\infty = 6.020 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 4.464 \cdot 10^{-3}$ $L_\infty = 1.313 \cdot 10^{-3}$
q=0.8	$L_2 = 3.503 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 8.029 \cdot 10^{-5}$	$L_2 = 1.592 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 3.565 \cdot 10^{-5}$	$L_2 = 1.592 \cdot 10^{-4}$ $L_\infty = 3.565 \cdot 10^{-5}$	$L_2 = 1.953 \cdot 10^{-3}$ $L_\infty = 5.764 \cdot 10^{-4}$	$L_2 = 4.285 \cdot 10^{-3}$ $L_\infty = 1.255 \cdot 10^{-3}$

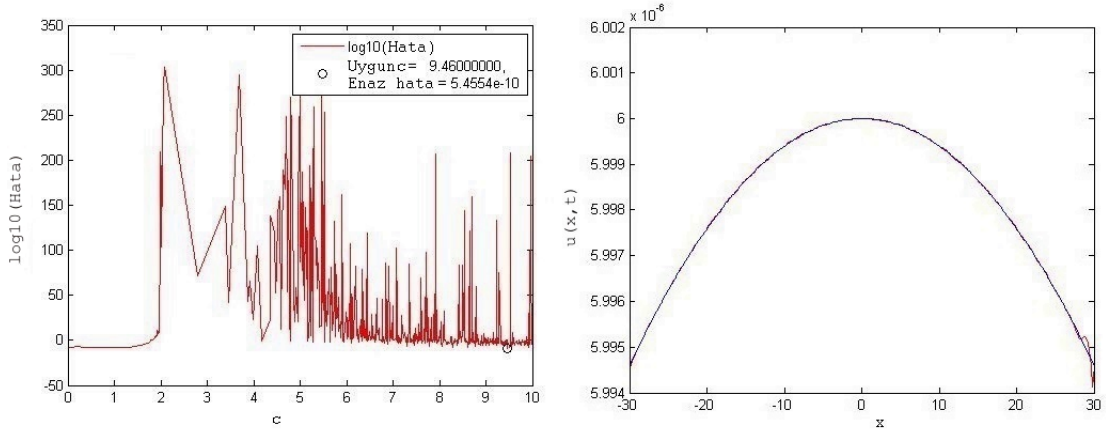


Şekil 4.5.  $\varepsilon=0.5$  ve  $q=0.8$  olması durumunda nümerik ve tam çözümler (MSF)



Şekil 4.6.  $\varepsilon=0.5$  ve  $q=0.8$  olması durumunda nümerik ve tam çözümler (MSF)

### Çözüm(MQRBF):



Şekil 4.7.  $\varepsilon=0.5$  ve  $q=0.8$  olması durumunda nümerik ve tam çözümler ve hataları (MQRBF)

Uzay adımları sayısı  $N=300$ , uzay adım boyutu  $h=0.2$ , zaman adımı boyutu  $k=0.01$ , zaman sonu  $T=0.2$ ,  $\xi=0.1$ , ve  $x \in [-30, 30]$  olmak üzere, matlab üzerinden merkezi sonlu farklar ile diskretleştirip, adi diferansiyel denkleme dönüştürdüğümüz denklemi, zaman parçalama yöntemiyle çözümlenmek için yaptığımız deneyde,  $L_\infty$  ve  $L_2$  hata normları  $q$  ve  $\varepsilon$  değerlerine göre tablo haline getirilmiştir. Çizelge 4.3’ te kesirli türev mertebesi olan  $q$  ve dalgaların lineerlik davranışını etkileyen  $\varepsilon$  değerleri karşılaştırılmış,  $\varepsilon=0.5$  ve  $q=0.8$  değerlerinde en verimli sonuçları vermiştir. Çizelge 4.4 ise (Saad ve ark., 2020)’nin Hermite Approximation of the Taylor Model çözümüyle elde ettiği analitik çözüm kullanılarak elde edilmiştir ve bu tam çözümün Çizelge 4.4’ te görüldüğü üzere nümerik çözüme daha yakın olduğu saptanmıştır. Ayrıca Şekil 4.5 ve Şekil 4.6’ da ise nümerik çözümün dalga formları verilmiştir. Şekil 4.7, MQRBF yöntemi kullanılarak oluşturulmuş,  $l=-0.99999998$ ,  $\xi=0.001$  ve şekil parametresi  $r=9.4600000000000009$  alınmıştır. Şekil 4.7 de hata normu olarak da  $l_{sonsuz} = \max |u_{sayisal} - u_{tam}|$  hatası kullanılmıştır. Ayrıca  $L_\infty = 5.4554 \cdot 10^{-10}$  ve  $L_2 = 3.307 \cdot 10^{-10}$  olarak elde edilmiştir. Ayrıca  $\xi$  değerinin artması durumunda HATM tam çözümünün daha hızlı yakınsadığı görülmektedir.

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, zaman ve uzayda Burgers tipi denklemlerin ve standart Korteweg-de Vries (KdV) denklemlerinin sayısal çözümlerini elde etmek için Merkezi Sonlu Fark (MSF), Çoklu Kuadrik Radyal Bazlı Fonksiyon (MQRBF) ve zaman parçalama yöntemleri kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar, aşağıdaki şekilde özetlenebilir: Merkezi Sonlu Fark ve Çoklu Kuadrik Radyal Bazlı Fonksiyon yöntemlerinin karşılaştırılması sonucunda, MQRBF yönteminin daha kesin ve kararlı sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Özellikle zaman adım büyüklüğünün azaltılmasıyla, MQRBF yöntemi tam çözüme daha yakın sonuçlar üretmiştir. Bu sonuç, MQRBF yönteminin Burgers' tipi denklemler ve KdV denklemleri gibi doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerde uygulanabilirliğini ve etkinliğini göstermektedir. Zaman parçalama metodunun uygulanması, diferansiyel denklemleri daha küçük alt problemlere ayırarak çözüm sürecini hızlandırmış ve doğruluğunu artırmıştır. Zaman parçalama metodunun, özellikle kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için yüksek doğruluk ve hesaplama süresi maliyeti sağladığı ortaya konmuştur. MQRBF ve Zaman parçalama yöntemlerinin daha karmaşık ve yüksek boyutlu sistemlere uygulanabilirliğinin araştırılması önerilmektedir. Bu öneri, metodların kapsamını genişletecek ve daha çeşitli problemlere çözüm sunacaktır. Yöntemlerin performansını artırmak için, kullanılan parametrelerin (örneğin, zaman adım büyüklüğü, çoklu kuadrik radyal bazlı fonksiyonun şekil parametresi) optimize edilmesi gerekmektedir. Parametre optimizasyonu, çözümlerin doğruluğunu ve kararlılığını daha da artırabilir. MQRBF ve zaman parçalama yöntemlerinin diğer sayısal yöntemlerle birleştirilerek hibrit yöntemlerin geliştirilmesi önerilmektedir. Bu, mevcut yöntemlerin avantajlarını birleştirerek daha güçlü ve esnek çözümler sunabilir. Bu çalışmanın sonuçları, Burgers ve KdV gibi doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerin etkinliğini ortaya koymuş ve bu alanda gelecekte yapılacak araştırmalar için bir temel oluşturmuştur.

## KAYNAKLAR

- Abdelouahab, M.S., Hamri, N.E., Wang, J. 2012. Hopf bifurcation and chaos in fractional-order modified hybrid optical system, *Nonlinear Dynamics*, 69, 275–284.
- Ahsan, Z., 2016, Differential equations and their applications, *PHI Learning Pvt. Ltd.*
- Ben-Menahem, A., Singh, S.J., 2012, Seismic waves and sources, *Springer Science & Business Media*.
- Brown, R. 1829. XXIV. Additional remarks on active molecules, *The Philosophical Magazine*, 6 (33), 161–166.
- Brunner, H., 2004, Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations, volume 15, *Cambridge university press*.
- Cao, W., Zhang, Z., Karniadakis, G.E. 2015. Time-splitting schemes for fractional differential equations I: smooth solutions, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37 (4), A1752–A1776.
- Caputo, M. 1966. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, *Annals of Geophysics*, 19 (4), 383–393.
- Chapra, S.C., 2010, Numerical methods for engineers, *Mcgraw-hill*.
- Cheney, E.W., Kincaid, D.R., 2012, Numerical mathematics and computing, *Cengage Learning*.
- Dağ, İ., Dereli, Y. 2008. Numerical solutions of KdV equation using radial basis functions, *Applied Mathematical Modelling*, 32 (4), 535–546.
- Farlow, S.J., 1993, Partial differential equations for scientists and engineers, *Courier Corporation*.
- Formey, J.H.S., 1752, Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres depuis son origine jusqu'à présent: avec les pièces originales, *Haude et Spener*.
- Fourier, J.B.J., 1888, Théorie analytique de la chaleur, volume 1, *Gauthier-Villars*.
- Freeman, A., ve ark., 1878, The analytical theory of heat, *The University Press*.
- Garrappa, R. 2010. On linear stability of predictor–corrector algorithms for fractional differential equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 87 (10), 2281–2290.
- Gerya, T., 2019, Introduction to numerical geodynamic modelling, *Cambridge University Press*.
- Hackl, K., Gilbert, R.P., 1995, Asymptotic theories for plates and shells, volume 319, *CRC Press*.
- Herrmann, R., 2011, Fractional calculus: an introduction for physicists, *World Scientific*.
- Hethcote, H.W. 2000. The mathematics of infectious diseases, *SIAM review*, 42 (4), 599–653.
- Hui-Li, W., Si-Feng, Q., Zhe, Z., Cai-Liang, H., Wen-Jun, X. 2010. The Basic Differential Equations of Self-Anchored Cable-Stayed Suspension Bridge, *Mathematical Problems in Engineering*, 2010 (1), 805195.
- Kaczorek, T., Rogowski, K., 2015, Fractional linear systems and electrical circuits, *Springer*.
- Kansa, E.J. 1990. Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Computers & mathematics with applications*, 19 (8-9), 147–161.
- Kittrell, J. 1970. Mathematical modeling of chemical reactions. in: *Advances in Chemical Engineering*, volume 8, Elsevier, pp. 97–183.

- Klemp, J.B., Skamarock, W.C., Dudhia, J. 2007. Conservative split-explicit time integration methods for the compressible nonhydrostatic equations, *Monthly Weather Review*, 135 (8), 2897–2913.
- Krafft, O. 1970. Das L/K- und das M/L-Einfangverhältnis von 65 Zink, *Zeitschrift für Physik*, 238 (1), 78–89.
- Kreyszig, E., Stroud, K., Stephenson, G. 2008. Advanced engineering mathematics, *Integration*, 9 (4).
- Kristensen, D. 2008. Estimation of partial differential equations with applications in finance, *Journal of Econometrics*, 144 (2), 392–408.
- Lagrange, J. 1743. *Miscellanea Berolinensia*, Berlin, 7.
- Laskin, N. 2000. Fractional quantum mechanics, *Physical Review E*, 62 (3), 3135.
- Li, C., Zeng, F. 2013. The finite difference methods for fractional ordinary differential equations, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 34 (2), 149–179.
- Lindemann, F. 1880. XXVII. On the forms of the vibrations of twitched and stroked strings, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 9 (55), 197–221.
- Lubich, C. 1986. A stability analysis of convolution quadrature for Abel-Volterra integral equations, *IMA journal of numerical analysis*, 6 (1), 87–101.
- Mitra, A.K. 2010. Finite difference method for the solution of Laplace equation, *Department of aerospace engineering Iowa state University*.
- Rivera-Figueroa, A., Lima-Zempoalteca, I.a. 2021. Motion of a simple pendulum: A digital technology approach, *International journal of mathematical education in science and technology*, 52 (4), 550–564.
- Saad, K., AL-Shareef, E.H., Alomari, A., Baleanu, D., Gómez-Aguilar, J. 2020. On exact solutions for time-fractional Korteweg-de Vries and Korteweg-de Vries-Burger's equations using homotopy analysis transform method, *Chinese Journal of Physics*, 63, 149–162.
- Sarra, S.A., Kansa, E.J. 2009. Multiquadric radial basis function approximation methods for the numerical solution of partial differential equations, *Advances in Computational Mechanics*, 2 (2), 220.
- Sasser, J.E. 1992. History of ordinary differential equations: The first hundred years, *Proceedings of the Midwest Mathematics History Society*, 1.
- Strauss, W.A., 2007, *Partial differential equations: An introduction*, John Wiley & Sons.
- Wan Hassan, W.M.S. 2023. Oscillation and Simple Harmonic Motion. in: *Physics—Problems, Solutions, and Computer Calculations: Vol. 1 Mechanics, Properties of Matter, and Heat*, Springer, pp. 385–431.
- Williams, L.R., Leggett, R.W. 1982. Unique and multiple solutions of a family of differential equations modeling chemical reactions, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 13 (1), 122–133.
- Yavari, A., Sarkani, S., Moyer Jr, E.T. 2000. On applications of generalized functions to beam bending problems, *International Journal of Solids and Structures*, 37 (40), 5675–5705.