



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BERTRAND NURBS EĞRİLERİ ÜZERİNE**

**Sara YILMAZ EVREN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Temmuz-2020**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**



**T.C.  
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BERTRAND NURBS EĞRİLERİ ÜZERİNE**

**Sara YILMAZ EVREN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman**

**Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU**

**Temmuz-2020**

**MUŞ**

**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL ve ONAYI

Sara YILMAZ EVREN tarafından hazırlanan “Bertrand Nurbs Eğrileri Üzerine” adlı tez çalışması 28 / 07 /2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

**Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI**

**(Başkan)**

Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü

.....

**Doç. Dr. Talat KÖRPINAR**

**(Üye)**

Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi  
Matematik Bölümü

.....

**Dr.Öğr.Üyesi Muhsin İNCESU**

**(Danışman)**

Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi  
Matematik Eğitimi ABD

.....

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 11/08/2020 Tarih ve 23/3 nolu kararı ile onaylanmıştır.

**Doç. Dr. Sedat BOZARI**  
**FBE Müdürü**

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Bu çalışma Muş Alparslan Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince desteklenmiştir. Proje Numarası: BAP-18-EMF-4902-01

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

This study was supported by Muş Alparslan University Scientific Research Coordination Unit. Project Number: BAP-18-EMF-4902-01

Sara YILMAZ EVREN

.../.../2020

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

### BERTRAND NURBS EĞRİLERİ ÜZERİNE

Sara YILMAZ EVREN

Muş Alparslan Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU

Bu çalışmanın araştırma, bulgular ve tartışma kısmı beş bölüm halinde sunulmuştur birinci bölümde açık B-spline eğrilerinin  $t = t_d$  ve  $t = t_{m-d}$  noktalarında ikinci, üçüncü türevleri ve Frenet vektör alanları ile eğrilikleri verilmiştir. İkinci bölümde açık B-spline eğri çiftlerinin Bertrand eğri çifti oluşturması durumunda ikinci spline eğrisinin kontrol noktalarının birinci spline eğrisinin kontrol noktaları cinsinden ifadeleri verilmiştir. Üçüncü bölümde açık NURBS eğrilerinin  $t = t_d$  ve  $t = t_{m-d}$  noktalarında birinci, ikinci ve üçüncü türevleri ile bu noktalarla herhangi bir noktada Frenet vektör alanları ve eğrilikleri ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde verilen iki eğrinin NURBS eğrisi olması durumunda bu iki eğrinin Bertrand eğri çifti oluşturabilme koşulları ifade edilmiştir. Son bölümde ise yapılan bu çalışmalara birer örnek verilerek Frenet vektör alanları, eğrilikleri, Bertrand çifti oluşturma koşulları sayısal örnek üzerinde ifade edilmiştir.

2020, 101 Sayfa

**Anahtar Kelimeler:** B-spline eğrileri, NURBS eğrileri, Bertrand eğri çifti, Frenet çatısı, eğrilikler.

**ABSTRACT**  
**MS THESIS**  
**ON THE BERTRAND NURBS CURVES**

**Sara YILMAZ EVREN**

**Muş Alparslan University**  
**Natural and Applied Science**  
**Department of Mathematics**

**Advisor: Asist. Prof. Dr. Muhsin İNCESU**

In the section of researchs, results and discussions of this study is divided into 5 subsections. In the first section, the second and third derivatives of open B-spline curves at the points  $t = t_d$  and  $t = t_{m-d}$  and the Frenet vector fields and curvatures of these curves are given. In the second section, the control points of the second B-spline curve are given in terms of the control points of the first B-spline curve when given two B-spline curves occurred a Bertrand curve pairs. In the third section the first, the second and the third derivatives of a NURBS curve at the points  $t = t_d$  and  $t = t_{m-d}$  are given with Frenet vector fields and curvatures at arbitrary point. In the 4th, the conditions of providing Bertrand curve pairs of given two NURBS curves are given. In the last section the numerical examples are given with the Frenet vector fields and curvatures and the conditions of being Bertrand curve pairs

**2020, 101 Pages**

**KeyWords:** B-spline curves, NURBS curves, Bertrand curve pairs, Frenet vector fields and curvatures.

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, çalışmamın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayıran saygıdeğer hocam Dr.Öğr.Üyesi Muhsin İNCESU'ya teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu süreç boyunca her daim yanımda olan ailemeve değerli eşim Yusuf EVREN'e teşekkür ederim.

**Sara YILMAZ EVREN**  
**MUŞ-2020**

# İÇİNDEKİLER

<b>TEZ BİLDİRİMİ</b> .....	<b>iii</b>
<b>ÖZET</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>vii</b>
<b>SİMGELER ve KISALTMALAR</b> .....	<b>ix</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	<b>x</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. KAYNAK ARAŞTIRMASI</b> .....	<b>2</b>
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM</b> .....	<b>4</b>
3.1 Temel Tanım ve Teoremler .....	4
3.2 Bezier ve Rasyonel Bezier Eğrileri .....	6
3.2.1 Kontrol poligonu .....	7
3.2.2 Bezier eğrilerinde türev kavramı .....	7
3.2.3 Bezier eğrileri için De Casteljau algoritması .....	9
3.2.4 Bezier eğrilerinde Sub-division .....	10
3.2.5 Parçalı Bezier eğrisi .....	11
3.2.6 Rasyonel Bezier eğrileri .....	15
3.2.7 Rasyonel Bezier eğrileri için De Casteljau algoritması .....	19
3.2.8 Rasyonel Bezier eğrilerinin türevleri .....	20
3.3 B-Spline Eğrileri .....	22
3.3.1 B-spline çeşitleri .....	27
3.3.1.1 Açık B-splinelar .....	27
3.3.1.2 Uniform (Düzgün) B-splinelar .....	30
3.3.1.3 Periyodik B-spline ve kapalı periyodik B-spline .....	32
3.3.1.4 Açık uniform B-splinelar .....	33
3.3.2 De Boor algoritması .....	34
3.3.3 B-spline eğrilerinin türevleri .....	36
3.3.4 Uniform olmayan rasyonel B-spline (NURBS) .....	37
3.3.5 NURBS eğrisinin türevi .....	40
3.3.6 Rasyonel De Boor algoritması .....	42
3.4 Bertrand Eğri Çiftleri .....	44
3.4.1. Bertrand eğri çiftlerinin belirlenmesi .....	45
3.4.2. Bertrand eğri çiftine ilişkin örnekler .....	46
3.5 $t=0$ İçin Başlangıç Noktasında Bezier ve Rasyonel Bezier Eğrisinin Eğrilikleri ve Frenet Formülü .....	48

3.6 $t_0 \in [0, 1]$ İçin Keyfi Bir Nuktada Frenet Formülü ve Bezier Eğrisinin Eğrilikleri .....	50
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA .....</b>	<b>57</b>
4.1 Açık B-Spline Eğrilerinde Frenet Çatısı .....	57
4.2 Bertrand Açık B-Spline Çiftleri .....	64
4.3 Açık NURBS Eğrilerinde Frenet Çatısı ve Eğrilikleri .....	69
4.4 Açık Bertrand NURBS Eğri Çiftleri .....	80
4.5 Sayısal Örnekler .....	86
<b>5. SONUÇ .....</b>	<b>97</b>
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>98</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>101</b>

## SİMGELER ve KISALTMALAR

### Simgeler

$R^3$	: Üç boyutlu Öklid uzay
$b_i$	: i. kontrol noktası
$w_i$	: i. kontrol noktasına ait ağırlık
$B_i^n(t)$	: Bernstein taban polinomu
$N_{i,d}(t)$	: B-spline taban polinomu
$R_{i,d}(t)$	: Rasyonel B-spline taban polinomu
$\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$	: Serret-Frenet Çatı
$\kappa(s)$	: Eğrilik
$\tau(s)$	: Burulma(Torsion)
$\mathfrak{B}(t)$	: Açık NURBS eğrisi
$t_i$	: i. knot vektörleri
$t^*$	: $[t_r, t_{r+1})$ aralığında alınan keyfi bir nokta

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<b>Şekil 1.</b> Kontrol noktalar $b_0 = (1, -2, 0)$ , $b_1 = (2, 0, 1)$ , $b_2 = (3, 1, 1)$ , $b_3 = (-1, 2, -1)$ olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu.....	7
<b>Şekil 2.</b> Bezier Eğrisinde Sub-division .....	10
<b>Şekil 3.</b> Kesme noktaları $t_0 = -2$ , $t_1 = 0$ , $t_2 = 3$ , $t_4 = 4$ ile verilen parçalı Bezier eğrisi .....	12
<b>Şekil 4. (a)</b> $(t, ft)$ 'nin grafiği <b>(b)</b> $f'(t)$ 'nin grafiği .....	13
<b>Şekil 5.</b> (b) ağırlıkları 1,0.6,2 ve (a) ağırlıkları 1,1,2 ile kontrol noktaları $(-1,0)$ , $(2,1)$ , $(4,-1)$ olan rasyonel bezier eğrisi .....	16
<b>Şekil 6.</b> Uzaysal rasyonel Bezier eğrisi.....	17
<b>Şekil 7.</b> Knot vektörleri $t_0 = 2$ , $t_1 = 2$ , $t_2 = 5$ , $t_3 = 7$ , $t_4 = 8$ , $t_5 = 10$ , $t_6 = 11$ olan birinci dereceden taban fonksiyonları .....	24
<b>Şekil 8.</b> Knot vektörleri $t_0 = 2$ , $t_1 = 2$ , $t_2 = 5$ , $t_3 = 7$ , $t_4 = 8$ , $t_5 = 10$ , $t_6 = 11$ olan ikinci dereceden taban fonksiyonları.....	25
<b>Şekil 9.</b> Örnek 3.44'ün B-spline .....	26
<b>Şekil 10.</b> 3. dereceden kapalı periyodik B-spline.....	33
<b>Şekil 11.</b> Bir birim çemberin NURBS gösterimi .....	39
<b>Şekil 12.</b> Bertrand eğri çiftleri .....	44
<b>Şekil 13.</b> Bir $\alpha$ eğrisi ve onun evolütü E.....	47
<b>Şekil 14.</b> $\alpha$ ve $\alpha_1$ helisleri .....	48
<b>Şekil 15.</b> Örnek 1 de verilen NURBS eğrisi .....	88
<b>Şekil 16.</b> Örnek 1 de verilen NURBS eğrisinin $t=0$ ve $t=3$ noktalarında Frenet vektör alanları	90
<b>Şekil 17.</b> Bertrand çifti oluşturan $\alpha$ ve $\beta$ açık NURBS eğrileri.....	95
<b>Şekil 18.</b> $t=0$ noktasında Bertrand çifti oluşturan iki NURBS eğrisinin Frenet vektör alanları..	96

## 1. GİRİŞ

Çizim terminolojisinde spline, noktalar kümesi tarafından belirlenen düzgün bir eğri oluşturmak için kullanılan esnek bir şerittir. Şerit boyunca dağıtılmış birçok küçük ağırlıklar, çizim masasında sabit konumda duran bir eğri oluşmasını sağlarlar. Spline'lar genelde endüstriyel tasarımda kullanılır. Otomobil, gemi, uçak, uzay aracı gövdeleri, ürün tasarımı gibi.

Hem düzgün olmayan rasyonel B-spline eğrileri ve hem de Bertrand eğrileri Bilgisayar Destekli Tasarım (CAD), Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım (CAGD), Bilgisayar Destekli Modellemelerde (CAM) çok temel olarak kullanılan eğrilerdir. NURBS eğrilerinin ve yüzeylerinin herhangi bir noktadaki invaryantlarının tespit edilmesinde her bir eğri ve yüzeyin analitik denkleminin bulunup istenilen noktada eğrilik, burulma, asal eğrilikler, ortalama ve Gauss eğrilikleri gibi invaryantlarının hesap edilmesi gerekmektedir. Oysa tasarım yapılacak eğri ya da yüzeyin analitik olarak bulunması oldukça güç olabilmektedir. Örneğin bir araba tasarımı yapıldığında arabadaki aerodinamik kıvrımlar arabanın bilinen yüzey denkleminde farklı olacaktır. Bu denklemi tam olarak yazabilmek oldukça güçtür. Bu güçlüğü yenmenin yolu tasarladığımız eğri ve yüzeyin NURBS gibi spline eğrileri ve yüzeyleriyle tasarlanmasıdır. Böyle bir tasarımda aerodinamik kıvrımların yüzey üzerindeki girinti ve çıkıntıları tamamen kontrol noktaları denilen yüzey ya da eğri dışından alınan noktaların hareket ettirilmesiyle istenilen tasarım elde edilebilecek ve böylece bu yüzeye ait invaryant değerleri kontrol noktaları cinsinden ifade edilebilecektir.

NURBS eğrileri düzgün dağılıma sahip olmayan rasyonel B-Spline eğrileridir. Bezier eğrileri, B-Spline eğrileri ve NURBS eğrileri bilgisayar grafiklerinde (CAD) (CAM) sistemlerinde oldukça geniş alanda uygulama örneklerini gördüğümüz eğrilerdir.

Bu çalışmada (İncesu,2003), (İncesu ve Gürsoy,2004) ve (İncesu ve ark.,2008) çalışmalarında verilen yöntem takip edilecektir. Yani A ve B iki NURBS eğrisi olsun. Bunların kontrol noktaları bijveqijler olsun. Bunlar Bertrand çifti oluştursun bu durumda bu eğrilere ait teğet vektör alanı, normal vektör alanı, binormal vektör alanı tamamen kontrol noktaları cinsinden ifade edilebilecektir. Bunların Bertrand eğri çifti olması durumunda her iki eğriye ait kontrol noktaları arasında bir bağıntı elde edilecektir.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

3-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerinde birçok çalışmalar yapılmıştır. Uzayda iki eğrinin karşılıklı noktalarında Frenet çatıları ve kurulacak diğer çatılar arasında birtakım bağıntılar kurularak, yeni açılımlar yapılmıştır. Eski tabirle Basit - mebsutyaniİnvolut - Evolüt eğrileri, Bertrand eğri çiftleri ve Manheim eğrileri bu tür yeni açılımlara birer örnek olarak gösterilebilir (Şenyurt ve Özgüner, 2013).

1850 de, J.Bertrand helis eğrilerinin diğer eğrileri aynı asli normal vektör alanı ile kabul ettiği özelliğini verdi (Bertrand, 1850). Bu özelliği sağlayan eğrilere Bertrand eğrileri denir.

$R^3$  de eğriliği  $\kappa$  ve burulması  $\tau$  olan bir eğri verildiğinde eğri düzlemsel ya da eğrilikleri arasında  $a, b$  sıfırdan farklı sabitler olmak üzere  $\kappa + a\tau = b$  bağıntısına sahip ise bu eğri Bertrand eğrisidir (Do Carm,1976). Asli normalleri paralel olan eğrileri Bertrand eğrileri olarak tanımlamak da mümkündür (Bertrand, 1850). Son yıllarda, Bertrand eğrileri bilgisayar destekli geometrik tasarımlarda (CAD) ve bilgisayar destekli modellemelerde (CAM) önemli bir rol oynamaktadır (Neill,1983), (Papaioannou ve Kiritsis, 1985),(Ünal ve ark.,2013). Bu öneminden ötürü Bertrand eğriler geometriciler tarafından farklı uzaylarda çalışılmıştır (Burke,1960), (Ravani ve Ku, 1991),(Izumiya ve Takeuchi, 2002), (Balgetirir ve ark.,2004),(Yılmaz ve Bektaş, 2008),(Öğrenmiş ve ark.,2009), (Kazaz ve ark.,2010), (Choi ve ark.,2012), (Lucas ve ark.,2012),(Tunçer ve Ünal, 2012), (Aksoyak ve ark.,2014), (Yerlikaya ve ark.,2016), (Kızıltuğ,2017).

B-spline eğrileri ve NURBS eğriler kontrol noktaları denilen bir grup noktanın oluşturduğu konvexhull'ünde kalma özelliğine sahiptirler. Ayrıca bu spline eğrilerinin kontrol noktalarından herhangi birinin değiştirilmesinde lokal olarak o noktanın bir komşuluğunda eğri değişim gösterir. Spline eğrilerinde kontrol noktaları sayısı ne kadar azalırsa kontrol noktasının koordinatındaki değişimin eğrinin diğer noktalarını etkilemesi o kadar artmaktadır. örneğin bir data setindeki noktalardan elde edilecek kübikspline eğrilerinde datadan herhangi biri değiştiğinde tüm noktalarda eğrilerin tamamı etkilenebilmektedir (Yükselen,2018).

B-spline eğrileri ve NURBS eğrilerle ilgili yapılan çalışmalara (Tiller,1992), (Hoschek,1992), (Meek ve Walton,1993), (Neamtu ve ark.,1998), (Juhasz,1999), (Piegl

ve Tiller, 1999,2002), (Liu ve Wang, 2002), (Selimovic,2006), (Samancı,2018) çalışmalar örnek olarak verilebilir.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölüm içerisinde araştırma bulguları ve tartışma kısmında kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

#### 3.1 Temel Tanım ve Teoremler

**Tanım 3.1.**  $V$  bir vektör uzay  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de bu vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$  olduğunda  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  skalerinin hepsi sıfır oluyorsa  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  kümesine lineer bağımsızdır denir.

**Tanım 3.2.**  $V$  bir vektör uzay  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$  olsun. Eğer  $\forall u \in V$  için  $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$  oluyorsa  $(a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R})$   $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  kümesi  $V$  uzayını gerer denir.

**Tanım 3.3.**  $V$  bir vektör uzay ve  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$  için

1.  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  lineer bağımsız
  2.  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$   $V$  - yi gererse
- o zaman  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  kümesine  $V$  'nin bir baz(taban) denir.

**Tanım 3.4.**  $V$  bir vektör uzay olsun.  $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow K$  fonksiyonu

$$(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$$

1. Pozitif tanımlı

2. Bi- lineer (İki değişkenli)

3. Üçgen eşitsizliği

sağlarsa  $\langle, \rangle$  fonksiyonuna  $V$  üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu denir.  $(v, \langle, \rangle)$

ikilisinde bir iç çarpım uzayı denir.

**Tanım 3.5.** Bir vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay  $A$  olsun.  $\forall p \in A$  ve  $v \in V$  olmak üzere  $(p, v)$  ve  $V_p$  şeklinde ifade edilen vektöre  $A$  afin uzayının bir  $p$  noktasındaki tanjant vektörü denir.

**Tanım 3.6.**  $n$ -boyutlu Öklid uzay  $E^n$  ve  $I, R$  nin irtibatlı açık alt cümlesi olmak üzere,

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$$

Dönüşümü diferansiyellenebilir ise  $\alpha(t)$  cümlesine  $E^n$  de bir eğri ve  $t \in I$  değişkenine de eğrinin parametresi denir (Gray, 1998).

**Tanım 3.7.**  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Bu durumda  $\Psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$  sistemi lineer bağımsız ve  $\forall \alpha^{(k)}, k > r$  için  $\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$  olmak üzere  $\Psi$  den elde edilen  $(V_1, V_2, \dots, V_r)$  ortonormal sistemine,  $M$  eğrisinin Frenet  $r$ - ayaklı alanı ve  $m \in M$  için  $(V_{1(m)}, V_{2(m)}, \dots, V_{r(m)})$  ye  $m \in M$  noktasındaki Frenet  $r$ - ayaklısı denir. Her bir  $V_i, 1 \leq i \leq r$  ye Frenet vektörü denir.(Gray, 1998).

**Tanım 3.8.**  $\alpha: I \subset R \rightarrow E^3$  eğrisi,  $t \in I$  için eğrinin teğet vektör alanı

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t), \quad (1)$$

Eğrinin binormal vektör alanı

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \quad (2)$$

ve eğrinin asli normal vektör alanı

$$N(t) = T(t) \wedge B(t) \quad (3)$$

olmak üzere bu vektörlerden oluşan  $\{T, N, B\}$  sistemine Frenet 3- ayaklısı denir.  $\{T, N, B\}$  frenet 3- ayaklısı ortonormal bir çatıdır (Gray, 1998).

**Tanım 3.9.**  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun.  $s \in I$  ya karşılık gelen  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet  $r$ - ayaklısı  $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$  olsun. Buna

$$k_i: I \rightarrow R, 1 \leq i \leq r$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı  $k_i$  fonksiyonuna  $M$  eğrisinin  $i$ - yinci eğrilik fonksiyonu ve  $s \in I$  için  $k_i(s)$  reel sayısına da  $\alpha(s)$  noktasında  $M$  nin  $i$ -yinci eğriliği denir (Gray, 1998).

**Tanım 3.10.**  $\alpha: I \subset R \rightarrow E^3$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

syay parametresi ile verilen bir eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet 3- ayaklısı  $\{T, N, B\}$  olsun.

$$\begin{aligned} T'(s) &= k_1(s)N(s), \\ N'(s) &= -k_1(s)T(s) + k_2(s)B(s), \\ B'(s) &= -k_2(s)N(s) \end{aligned} \quad (4)$$

Denklemlerine Frenet formülleri denir (Gray, 1998).

**Tanım 3.11.**  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisi için

$$\kappa(s) = k_1(s) = \|\alpha''(t)\|$$

değerine  $\alpha(s)$  eğrisinin  $s$ - noktasındaki eğriliği denir (Carmo, 1976).

**Tanım 3.12.**  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun.  $\alpha''(s) \neq 0$  olmak üzere

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

eşitliği ile tanımlı  $\tau(s)$  sayısına  $\alpha(s)$  eğrisinin  $s$ - noktasındaki burulması denir (Gray, 1998).

### 3.2 Bezier ve Rasyonel Bezier Eğrileri

**Tanım 3.13.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında Genel Bezier eğrisi, Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  olarak verilen ve başlangıç noktası  $b_0$ , bitim noktası  $b_n$  olan  $n$ . dereceden bir polinom eğridir. Genel Bezier eğrisi, vektörel formda,

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \quad t \in [0,1] \quad (5)$$

olarak tanımlanır. Burada  $B_i^n(t)$  fonksiyonları

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-i)!i!} (1-t)^{n-i} t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde verilen Bernstein taban fonksiyonlarıdır.  $\frac{n!}{i!(n-i)!}$  ifadeleri de Binom katsayılarıdır ve  $\binom{n}{i}$  ya da  ${}^n C_i$  ile gösterilir.

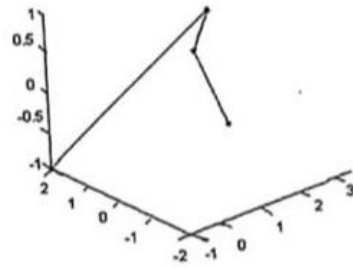
**Teorem 3.14.** Bernstein taban polinomları aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1)  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1 \quad t \in [0,1]$  (Toplamın birim olması)
- 2)  $B_i^n(t) \geq 0 \quad t \in [0,1]$  (Pozitiflik)
- 3)  $B_{n-i}^n(t) = B_i^n(1-t) \quad i = 0,1,2,\dots,n$  (Simetri)
- 4)  $B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + B_{i-1}^{n-1}(t)$  (İndirgeme)

### 3.2.1 Kontrol poligonu

**Tanım 3.15.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  olarak verilen  $n$ . mertebeden bir Bezier eğrisinin kontrol noktalarını sıra korumak şartıyla birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu geometrik şekle Bezier eğrisinin kontrol poligonu denir.

**Örnek 3.16.** Kontrol noktaları  $b_0 = (1, -2, 0)$  ,  $b_1 = (2, 0, 1)$  ,  $b_2 = (3, 1, 1)$  ,  $b_3 = (-1, 2, -1)$  olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu Şekil 1 de gösterilmiştir.



**Şekil 1.** Kontrol noktalar  $b_0 = (1, -2, 0)$  ,  $b_1 = (2, 0, 1)$  ,  $b_2 = (3, 1, 1)$  ,  $b_3 = (-1, 2, -1)$  olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu

**Tanım 3.17.**  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset R^3$  sisteminin konveks huluunvektörel ifadesi:

$$CH(X) = \left\{ a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n : x_i \in X, \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots, n \right\}$$

olarak tanımlanır. Yani uzayda  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktalarını birleştirmek suretiyle elde edilen en geniş bölgeye  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  sisteminin konveks hulu denir.

### 3.2.2 Bezier eğrilerinde türev kavramı

Bezier eğrilerinde türevler, Bernstein polinomlarının türevlerinden elde edilmektedir.

**Teorem 3.18.**  $0 \leq t \leq n$  için  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$  Bernstein taban fonksiyonlarının

birinci ve ikinci türevleri

$$1. \quad B_i^n(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \quad \text{ya da}$$

$$B_i^n(t) = \frac{i-n}{t(1-t)} B_i^n(t)$$

$$2. \quad B_i^n(t) = n(n-1)[B_i^{n-2}(t) - 2B_{i-1}^{n-2}(t) + B_{i-2}^{n-2}(t)] \quad \text{ya da}$$

$$B_i^{n''}(t) = \left( \frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_i^n(t)$$

biçimindedir.

**Teorem 3.19.** Kontrol noktaları  $b_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$  olan ve  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$  biçiminde verilen bir Bezier eğrisinin türevi, kontrol noktaları  $b_i^{(1)} = n(b_{i+1} - b_i), i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  olan  $(n-1)$ . dereceden bir Bezier eğrisidir. Yani,

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(1)} B_i^{n-1}(t), \quad b_i^{(1)} = n(b_{i+1} - b_i) \quad (6)$$

dir.

**Sonuç 3.20.** Kontrol noktaları  $b_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$  olan ve  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$  biçiminde verilen bir Bezier eğrisinin ikinci türevi, kontrol noktaları  $b_i^{(2)} = n(n-1)(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i), i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  olan  $(n-2)$ . dereceden bir Bezier eğrisidir. Yani;

$$B''(t) = \sum_{i=0}^{n-2} b_i^{(2)} B_i^{n-2}(t) \quad , \quad b_i^{(2)} = n(n-1)(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i) \quad (7)$$

dir.

**Sonuç 3.21.** Kontrol noktaları  $b_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$  olan  $n$ . dereceden bir  $B(t)$  Bezier eğri fonksiyonu için  $r$ . türev fonksiyonu; kontrol noktaları  $b_i, i = 0, 1, 2, \dots, n-r$  olmak üzere

$$b_i^{(r)} = n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j} \quad (8)$$

dir.

**Teorem 3.22.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  olarak verilen  $n$ . dereceden bir  $B = B(t)$  Bezier eğrisi aşağıdaki özellikleri sağlar.

1.  $B(0) = b_0$  ,  $B(1) = b_n$  (Son nokta interpolasyon özelliği)
2.  $B'(0) = \frac{dB}{dt} \Big|_{t=0} n(b_1 - b_0)$  (Son nokta teğet özelliği)
- $B'(1) = \frac{dB}{dt} \Big|_{t=1} n(b_n - b_{n-1})$
3.  $\forall t \in [0, 1]$  için  $B(t) \in CH(\{b_0, b_1, \dots, b_n\})$

(Bezier eğrisinin tamamı, kontrol noktalarının konvex alanı içinde kalmaktadır.)

4.  $F$ , bir afin dönüşüm olmak üzere  $F(B(t)) = F\left(\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^n F(b_i) B_i^n(t)$

dir. (Kontrol noktaları  $b_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$  olan Bezier eğrisinin bir Afin dönüşümü altındaki görüntüsü, kontrol noktaları  $F(b_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$  olan Bezier eğrisidir.)

5. Bir  $d$  doğrusu ile  $B(t)$  düzlemsel Bezier eğrisinin arakesit noktalarının sayısı  $m$ ,  $B(t)$  Bezier eğrisinin kontrol poligonunun arakesit noktalarının sayısı  $s$  ise  $m \diamond s$  dir. (Varvasyon Azaltma Özelliği)

### 3.2.3 Bezier eğrileri için De Casteljau algoritması

De Casteljau algoritması, bir Bezier eğrisinin  $t_0 \in [0, 1]$  noktasındaki  $B(t_0)$  değerini hesaplamak için geliştirilmiş bir algoritmadır. Ayrıca verilen bir Bezier eğrisinin iki ayrı parçaya ayrılmasında da yine sıklıkla bu algoritma kullanılmaktadır.

Kontrol noktaları  $b_0, b_1, b_2$  ve  $b_3$  olan bir kübik bezier eğrisi durumunda belirli bir parametre değeri için  $t \in [0, 1]$  de casteljau algoritması öz yineleme formülü  $j = 1, 2, 3$  ve  $i = 0, \dots, 3 - j$  için

$$\begin{cases} b_i^0 = b_i \\ b_i^j = (1-t)b_i^{j-1} + tb_{i+1}^{j-1} \end{cases} \quad (9)$$

ile ifade edilir.

Formül belirtilen  $t$  değeri için  $b_0^3 = B(t)$  için üçgen şeklinde değer kümesi (10)'nu üretir.

$$\begin{array}{cccc} b_0^0 & b_1^0 & b_2^0 & b_3^0 \\ b_0^1 & b_1^1 & b_2^1 & \\ b_0^2 & b_1^2 & & \\ b_0^3 & & & \end{array} \quad (10)$$

**Örnek 3.23.** Bir kübik bezier eğrisi kontrol noktaları  $b_0(1.0, 1.0)$ ,  $b_1(2.0, 7.0)$ ,  $b_2(8.0, 6.0)$  ve  $b_3(12.0, 2.0)$  olsun.  $B(0.25)$  noktasını  $t = 0.25$  ile de casteljau algoritması uygulanarak belirlenir. O zaman

$$\begin{aligned} b_0^1 &= \frac{3}{4}(1.0, 1.0) + \frac{1}{4}(2.0, 7.0) = (1.25, 2.5) \\ b_1^1 &= \frac{3}{4}(2.0, 7.0) + \frac{1}{4}(8.0, 6.0) = (3.5, 6.75) \\ b_2^1 &= \frac{3}{4}(8.0, 6.0) + \frac{1}{4}(12.0, 2.0) = (9.0, 5.0) \end{aligned}$$

$$b_0^2 = \frac{3}{4}(1.25, 2.5) + \frac{1}{4}(3.5, 6.75) = (1.8125, 3.5625) \text{ vb.}$$

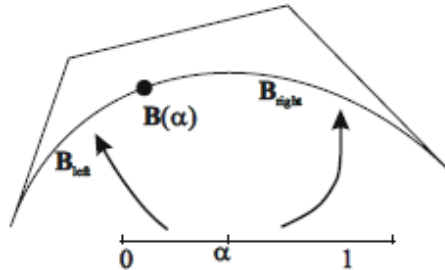
Algoritma aşağıdaki noktaların tablosunu verir.

$$\begin{array}{cccc} (1.0, 1.0) & (2.0, 7.0) & (8.0, 6.0) & (12.0, 2.0) \\ \frac{3}{4} \swarrow \searrow & \frac{1}{4} \frac{3}{4} \swarrow \searrow & \frac{1}{4} \frac{3}{4} \swarrow \searrow & \frac{1}{4} \\ (1.25, 2.5) & (3.5, 6.75) & (9.0, 5.0) & \\ \frac{3}{4} \swarrow \searrow & \frac{1}{4} \frac{3}{4} \swarrow \searrow & \frac{1}{4} \\ (1.8125, 3.5625) & (4.875, 6.3125) & & \\ & \frac{3}{4} \swarrow \searrow & \frac{1}{4} \\ (2.578, 4.25) & & & \end{array}$$

Algoritma  $B(0.25) = (2.578, 4.25)$  verir.

### 3.2.4 Bezier eğrilerinde Sub-division

Bir Bezier eğrisi genellikle  $[0, 1]$  aralığında tanımlanır ve  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$  ile verilir. Bazen eğrinin yalnızca bir kısmı ilgi çekicidir. Örneğin şekil 2'de gösterildiği gibi  $t = \alpha$  parametre değerinde  $[0, \alpha]$  ve  $[\alpha, 1]$  aralıklarında  $B_{sol}(t)$  ve  $B_{sağ}(t)$  ile gösterilen iki eğri parçasına ayrıldığını varsayalım. Çünkü  $B_{sol}(t)$  ve  $B_{sağ}(t)$   $[0, 1]$  aralığında Bezier formunda temsil edilebilen polinom eğrileridir.  $B_{sağ}(t)$  ve  $B_{sol}(t)$ 'nin kontrol noktalarını belirlemeyi teorem 3.25 gösterecek.  $t = \alpha$  ile  $B(t)$  için de casteljau algoritmasını uygulamak yeterlidir. Teorem bir kübik bezier eğrisi için  $B_{sağ}(t)$ 'nin kontrol noktaları  $b_0^3, b_1^2, b_2^1, b_3^0$ 'dır ve  $B_{sol}(t)$ 'in kontrol noktaları  $b_0^0, b_0^1, b_0^2, b_0^3$  olduğunu ima eder. Noktaların iki kümesi (10)'un kontrol noktaları üçgeninin iki kenarı olduğunu gözlemlemiştir. Alt bölüm eğri ölçüsüne fazladan özgürlük verebilmek için ekstra kontrol noktaları yaratmanın bir yoludur. Örneğin eğrinin sol bölümü bozulmamış olabilir oysaki eğrinin diğer bölümü değişmiştir.



Şekil 2. Bezier Eğrisinde Sub-division

**Örnek 3.24.**  $B(t)$  bir kübik bezier eğrisi ve kontrol noktaları  $b_0(1.0, 1.0)$ ,  $b_1(2.0, 7.0)$ ,  $b_2(8.0, 6.0)$  ve  $b_3(12.0, 2.0)$  olsun.  $t = 0.25$  parametre değerinde  $B(t)$  kesilerek elde edilen  $B_{sağ}(t)$  ve  $B_{sol}(t)$  iki eğri bölümünün kontrol noktaları örnek 3.23 de hesaplanan

noktaların üçgeninden belirlenir.  $B_{sol}$ 'ün kontrol noktaları  $b_0(1.0,1.0), b_1(1.25,2.5), b_2(1.8125,3.5625), b_3(2.578,4.25)$ 'dir ve  $B_{sağ}$ 'ın kontrol noktaları  $b_0(2.578,4.25), b_1(4.875,6.3125), b_2(9.0,5.0), b_3(12.0,2.0)$ dir.

### **Teorem 3.25. (Alt Bölüm)**

Bir genel Bezier eğrisi  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$  için t parametre değerinde alt bölümden elde edilen iki eğri bölümünün kontrol noktaları  $B_{sağ}$  için  $b_0^n, b_1^{n-1}, \dots, b_{n-1}^1, b_n^0$  ve  $B_{sol}$  için  $b_0^0, b_0^1, \dots, b_0^{n-1}, b_0^n$ 'dir. Burada  $b_i^j$  de castaljai algoritmasında hesaplanan noktadır.

### **3.2.5 Parçalı Bezier eğrisi**

ndereceli bir Bezier eğrisinin  $n + 1$  kontrol noktası vardır. Eğrinin şekli ile kontrol poligonunun şekli arasında sadece zayıf bir ilişki olduğu için yüksek dereceli eğriler genellikle kullanılmaz. Ayrıca noktaların değerlendirilmesi gibi işlemler çok sayıda aritmetik işlem gerektirir ve bu nedenle hesaplama hataları riski artar. Aksine düşük dereceli eğrilerin bir kaç kontrol noktası vardır ve bu nedenle sınırlı bir eğri şekli aralığı üretirler. Eğri derecesini arttırmadan şekil aralığını genişletmek için bir parça Bezier eğrisi adı verilen tek bir sürekli eğri oluşturmak için bir dizi eğri Bezier eğrisi uçtan uca birleştirilebilir. Uygulamada, eğrilerin birleşimlerinin pürüzsüz(düzgün) olması gerekir.

**Tanım 3.26.**  $[t_{min}, t_{max}]$  aralığı üzerinde tanımlanan kontrol noktası  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile n. dereceden rastgele aralıklı bir  $B(t)$  Bezier eğrisi

$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(\frac{t-t_{min}}{t_{max}-t_{min}})$  ile verilir; burada  $B_{i,n}$  n. dereceden Bernstein temel fonksiyonlarını gösterir.  $B(t)$  rastgele aralıklı Bezier eğrisi, sıradan Bezier eğrisinin  $t \in [0,1]$   $\hat{B}(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$  değerinin yeniden listelenmesidir.  $\hat{B}(t)B(t)$ 'nin normalleştirilmesi olarak söylenir.

**Tanım 3.27.**  $I = [a, b]$  olsun. Eğer  $t_0, t_1, \dots, t_{r-1}, t_r \in [a, b]$  değerleri  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r = b$  olacak şekilde bulunabilirse öyleki,  $j = 0, 1, \dots, r - 1$  için  $\forall [t_j, t_{j+1}]$  aralığında tanımlı bezier eğrisi  $B_j(t)$  olmak üzere

$$i) P(t) = B_j(t), \quad t \in (t_j, t_{j+1}) \text{ ise}$$

ii)  $j = 1, \dots, r - 1$  için  $P(t_j) = B_{j-1}(t_j)$  veya  $P(t_j) = B_j(t_j)$  (her ikisinde mümkün ise)

$$iii) P(t_0) = B_0(t_0) \text{ ve } P(t_r) = B_{r-1}(t_r)$$

şartları sağlanıyorsa  $P(t)$  eğrisine bir parçalı bezier eğrisi denir.  $t_j$  parametre

değerlerine kesme noktası denir  $B_j(t)$  eğrilerinin en büyük derecesi  $n$  ise, parçalı bezier eğrisinin derecesi  $n$  olduğu söylenir. Kübik, kuadratik vb. terimleri 3, 2, vb. dereceli parçalı eğrileri tanımlamak için kullanılır.

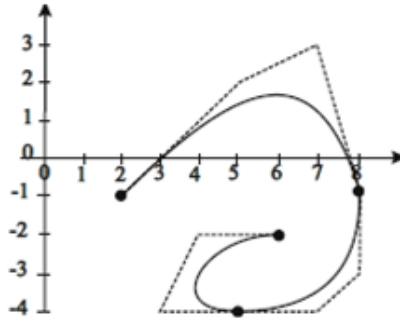
**Uyarı 3.28.** Tanım  $P(t)$ 'nin  $[a, b]$  aralığında tek değerli olmasını sağlar. Uygulamada parçalı bir Bezier eğrisi basitçe Bezier eğrilerinin birleşimi olarak kabul edilir ve bu nedenle  $P(t_j)$ 'nin ( $j = 1, \dots, r - 1$ ) yani  $B_{j-1}(t_j)$  ve  $B_j(t_j)$  olmak üzere iki değeri vardır. Birçok uygulamada kesintisiz eğriler düşünülür, bu durumda  $P(t_j) = B_{j-1}(t_j) = B_j(t_j)$  ve böylece  $P(t)$  her yerde tek değerlidir.

**Örnek 3.29.** Üç keyfi aralıktaki Bezier eğrilerini  $B_0(t), t \in [-2, 0]$ ;  $B_1(t), t \in [0, 3]$ ;  $B_2(t), t \in [3, 4]$  ile aşağıdaki kontrol noktaları  $B_0(t) = b_0(2, -1), b_1(5, 2), b_2(7, 3), b_3(8, -1)$   $B_1(t) = b_0(8, -1), b_1(8, -3), b_2(7, -4), b_3(5, -4)$   $B_2(t) = b_0(5, -4), b_1(3, -4), b_2(4, -2), b_3(6, -2)$  düşünün.  $P(t)$ ,

$$P(t) = \begin{cases} B_0(t), & -2 \leq t < 0 \\ B_1(t), & 0 \leq t < 3 \\ B_2(t), & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

tarafından verilen  $[-2, 4]$  aralığında tanımlanan parçalı Bezier eğrisi olsun. Kesme noktaları  $t_0 = -2, t_1 = 0, t_2 = 3, t_4 = 4$ 'dir.

Parametrizasyon bir eğrinin şeklini etkilemediğinden,  $P(t)$  aynı kontrol noktaları kümesi tarafından tanımlanan Bezier eğrileri olan  $B_j(t)$ 'nin normalizasyonları çizilerek çizilebilir. Eğri şekil 3 de gösterilmektedir.



**Şekil 3.** Kesme noktaları  $t_0 = -2, t_1 = 0, t_2 = 3, t_4 = 4$  ile verilen parçalı Bezier eğrisi

Tüm koordinat fonksiyonları  $C^k$ -sürekli olduğunda, parametrik bir  $C(t)$  eğrisi  $C^k$ 'de sürekli olduğu söylenebilir. Bir polinom fonksiyonu  $C^\infty$  olduğu için, parçalı bir polinom fonksiyonu her fonksiyonun birleşimine karşılık gelen parametre değerlerinin haricinde her yerde  $C^\infty$ 'dur.  $p$ veq derecelerinin iki polinom fonksiyonunun

birleşmesinde, parçalı fonksiyon en fazla  $C^k$ -sürekli  $k = \min(p, q)$  olduğu gösterilebilir.  $p$ ve $q$  derecelerine sahip iki polinom eğrisinin birleşiminde parçalı eğri en fazla  $C^k$ -sürekli, burada  $k = \min(p, q)$  şeklindedir.

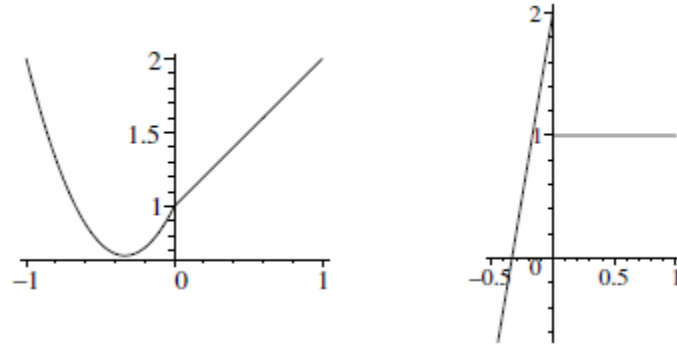
**Örnek 3.30.**  $(x(t), y(t) = (t, f(t))$  eğrisini düşünelim; burada

$$f(t) = \begin{cases} 3t^2 + 2t + 1, & \text{eğer } t \leq 0 \text{ ise} \\ t + 1, & \text{eğer } t > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Eğri şekil 4(a)'da gösterilmektedir. Herhangi bir polinom fonksiyonu  $C^\infty$  olduğu için,  $x(t) = t$  her yerde  $C^\infty$  ve  $y(t) = f(t)$  muhtemelen  $t = 0$  hariç olmak üzere her yerde  $C^\infty$ 'dur, ikinci polinom fonksiyonunun ilk olarak  $f$ 'nin tanımında  $f(t)$ 'nin  $C^0$  olduğu kolayca kontrol edilişr.  $f(t)$ 'nin  $C^1$  olup olmadığını belirlemek için ilk türevini

$$f'(t) = \begin{cases} 6t + 2, & \text{eğer } t \leq 0 \text{ ise} \\ 1, & \text{eğer } t > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dikkate almak gereklidir.



**Şekil 4.** (a)  $(t, f(t))$ 'nin grafiği (b)  $f'(t)$ 'nin grafiği

$f'(t)$ 'nin grafiği şekil 4(b) de gösterilmektedir.  $f$ 'nin  $C^1$  olmadığı açıktır; geometrik olarak  $f'(t)$ 'nin grafiği  $t = 0$  da kırılıyor. Dolayısıyla  $(t, f(t))$  bir  $C^0$ -sürekli eğridir, ancak  $C^1$  sürekli eğri değildir. Bu örnekteki parçalı eğri,  $(t, t + 1)$  ve  $(t, 3t^2 + 2t + 1)$  iki polinom eğrisinin birleşimidir.  $p = 2$ ve $q = 1$  derece eğrileri için  $k = \min(2, 1) = 1$  olduğu için mümkün olan maksimum süreklilik  $C^1$ ; örnek sadece  $C^0$ -sürekliliğe ulaşmaktadır.  $P(t)$ , tanım 3.27'de ifade edildiği gibi  $I_j = [t_j, t_{j+1}]$  ( $j = 0, 1, \dots, r - 1$ ) aralıklarında tanımlanan Bezier eğrileri  $B_j(t)$ 'yi içeren  $I = [a, b]$  üzerinde tanımlanan bir parçalı Bezier eğrisi olduğunu varsayalım.

$P(t)$ 'nin koordinat fonksiyonları parçalı polinom fonksiyonları olduğundan  $P(t)$  kırılma noktası olmayan tüm parametre değerlerinde  $C^\infty$  dur.  $B_j(t)$ 'nin  $n$  dereceli ve  $b_0^j, \dots, b_n^j$  kontrol noktaları olduğunu varsayalım. O halde  $P(t)$ ,  $t = t_j$ 'de süreklidir

ancak ve ancak  $\lim_{t \rightarrow t_j^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} P(t) = P(t_j)$ . (Bu, sürekli fonksiyonlar için standart bir ölçüttür, bkz.(Smith, G.,1998). Fakat

$$\lim_{t \rightarrow t_j^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow t_j^+} B_j(t) = b_0^j$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow t_j^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} B_{j-1}(t) = b_{n_{j-1}}^{j-1}$$

Böylece,  $P(t)$ ,  $t = t_j$ 'de süreklidir ancak ve ancak

$$P(t_j) = b_{n_{j-1}}^{j-1} = b_0^j$$

Dolayısıyla,  $B_{j-1}(t)$ 'nin son kontrol noktası  $B_j(t)$ 'nin ilk kontrol noktasına eşit olmalıdır. Bu nedenle  $P(t)$  süreklidir. ancak ve ancak  $j = 1, 2, \dots, r - 1$  (her değeri) için  $b_{n_{j-1}}^{j-1} = b_0^j$  dir.

**Örnek 3.31.** İki kübik Bezier eğrisinden oluşan parçalı kübik Bezier eğrisini göz önünde bulundurun  $B(t)$  ve  $C(t)$  kontrol noktaları sırasıyla  $b_0, b_1, b_2, b_3$  ve  $c_0, c_1, c_2, c_3$  olsun.

Varsayalım ki  $B(t)$  birinci eğri,  $C(t)$  ikinci eğri olsun, parçalı kübik Bezier eğrisi  $C^0$ 'dir ancak ve ancak  $b_3 = c_0$

$P^{(p)}$ ,  $P(t)$ 'nin  $p$ . türevini belirtsin. O zaman

$$\lim_{t \rightarrow t_j^+} P^{(p)}(t) = \lim_{t \rightarrow t_j^+} B_j^{(p)}(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_j^-} P^{(p)}(t) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} B_{j-1}^{(p)}(t).$$

Böylece  $B(t)$ ,  $C^k$ 'dir ancak ve ancak her  $p \leq k$  için ve her  $j = 1, \dots, r - 1$  için

$$B_{j-1}^{(p)}(t_j) = B_j^{(p)}(t_j) \quad (11)$$

$C^k$  sürekliliği için koşul (11) normalleştirilmiş Bezier eğrileri şartında ifade edilebilir.

$B_j(t) = \hat{B}_j\left(\frac{t-t_{min}}{t_{max}-t_{min}}\right)$  olduğundan zincir kuralı

$$\frac{1}{(t_j-t_{j-1})^p} \hat{B}_{j-1}^{(p)}(1) = \frac{1}{(t_{j+1}-t_j)^p} \hat{B}_j^{(p)}(0) \text{ verir.} \quad (12)$$

Bu,  $B_j^p$ 'nin türevleri, Teorem 3.19'u ve tefsirlerini kullanarak kontrol noktaları açısından kolayca elde edildiğinden daha yararlı bir formüldür.

**Teorem 3.32.** Birim uzunluk aralıklarında tanımlanan

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t) \text{ ve } C(t) = \sum_{i=0}^n c_i B_{i,n}(t)$$

$n$ . dereceden iki Bezier eğrisi

1)  $C^0$ -sürekli ancak ve ancak  $b_n = c_0$  (veya  $c_n = b_0$ ) ise;

2)  $C^1$ -sürekli ancak ve ancak  $b_n = c_0$  ve  $c_1 = 2b_n - b_{n-1}$  (veya  $c_n = b_0$  ve  $b_1 = 2c_n - c_{n-1}$ ) ise;

3) Görsel teğet sürekli ancak ve ancak  $b_n = c_0$  ve

$$c_1 = (1 + \mu)b_n - \mu b_{n-1}$$

Bazı  $\mu$  için (veya  $c_n = b_0$  ve  $b_1 = (1 + \mu)c_n - \mu c_{n-1}$ ) ile parça eğrisi oluşturmak üzere birleşir.

**Sonuç 3.33.** Daha önceki gösterimi kullanarak, parçalı Bezier eğrisi  $B(t)$ , bunun için Bezier  $B_j(t)$  eğrileri birim uzunluk aralıklarında

1)  $C^0$ -sürekli ancak ve ancak  $i = 1, \dots, r - 1$  için  $b_n^i = b_0^{i+1}$  ise;

2)  $C^1$ -sürekli ancak ve ancak  $i = 1, \dots, r - 1$  için  $b_n^i = b_0^{i+1}$  ve  $b_1^{i+1} = 2b_n^i - b_{n-1}^i$  ise ;

3) Görsel teğet sürekli ancak ve ancak  $i = 1, \dots, r - 1$  için  $b_n^i = b_0^{i+1}$  ve bazı  $\mu_i$  için  $b_1^{i+1} = (1 + \mu_i)b_n^i - \mu_i b_{n-1}^i$  olarak tanımlanır.

### 3.2.6 Rasyonel Bezier eğrileri

İndirgenemez koniklerin üç türü olduğu gösterilmiştir (Marsh, 1999), yani hiperbolalar, parabolalar ve elipsler. Parabolalar polinom fonksiyonları ile parametrize edilebilirken, hiperbolalar ve elipsler rasyonel fonksiyonlarla parametrelendirilir. Böylece, polinom parametrisasyonu olan kuadratik Bezier eğrileri, hiperbolalar ve elipsleri hariç tutmaktadır. Bu eğrileri temsil edebilmek için rasyonel Bezier eğrileri getirmek gerekir.

**Tanım 3.34.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve buna tekabül skaler ağırlıkları  $w_i$  olan  $n$ . derecen rasyonel Bezier eğrisi,

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}, \quad t \in [0,1] \quad (13)$$

olarak tanımlanır. Tüm ağırlıkların sıfır olmadığı varsayılmaktadır.  $b_i \in R^2$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) olduğunda eğri düzlemsel,  $b_i \in R^3$  olduğunda eğri uzaysaldır. İntegral Bezier eğrisi tanımı, rasyonel olmayan Bezier eğrilerini tanımlamak için kullanılır.

$b_i = (x_i, y_i, z_i)$  olsun. Homojen kontrol noktalarını  $\hat{b}_i$

$$\hat{b}_i = \begin{cases} (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i), & \text{eğer } w_i \neq 0 \text{ ise} \\ (x_i, y_i, z_i, 0), & \text{eğer } w_i = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

olarak tanımlayalım.

Homojen koordinatlarda rasyonel Bezier eğrisi, integral Bezier eğrisinin formunu alan ancak homojen kontrol noktaları olan

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \hat{b}_i B_{i,n}(t)$$

tarafından verilir. Çünkü  $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$ , birlik özelliğinin bölümüyle,  $w_0 = w_1 = \dots = w_n$  olduğunda integral Bezier eğrileri elde edilir. Rasyonel bir Bezier eğrisi,

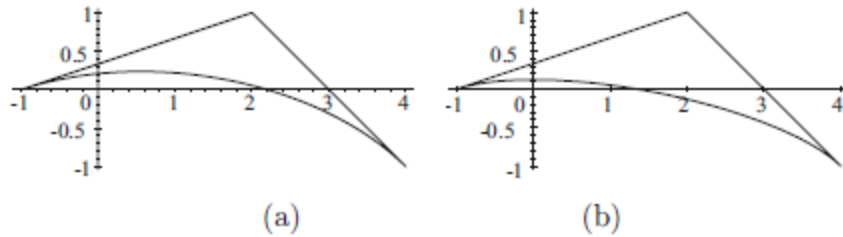
$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i R_{i,n}(t)$$

temel formunda yazılabilir. Burada

$$R_{i,n}(t) = \begin{cases} \frac{w_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_{j,n}(t)}, & \text{eğer } w_i \neq 0 \text{ ise} \\ \frac{B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_{j,n}(t)}, & \text{eğer } w_i = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

**Örnek 3.35.** Kontrol noktaları  $b_0(-1,0)$ ,  $b_1(2,1)$  ve  $b_2(4,-1)$  ve buna karşılık gelen 1,1 ve 2 ağırlıklarıyla rasyonel kuadratik, şekil 5(a)'da gösterilmiş ve ağırlıkları 1,0.6,2 ile şekil 5(b)'de gösterilmiştir.



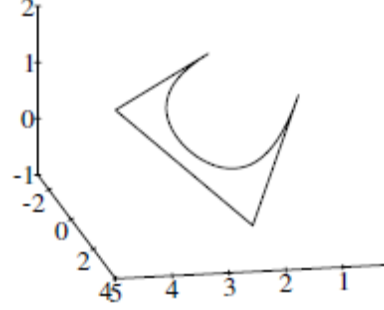
**Şekil 5.** (b) ağırlıkları 1,0.6,2 ve (a) ağırlıkları 1,1,2 ile kontrol noktaları  $(-1,0)$ ,  $(2,1)$ ,  $(4,-1)$  olan rasyonel Bezier eğrisi

**Örnek 3.36.** Kontrol noktaları  $b_0(1,0,1)$ ,  $b_1(2,1,-1)$ ,  $b_2(5,4,2)$  ve  $b_3(2,-3,1)$  ve ağırlıkları 1,2,2,1 olan uzaysal rasyonel kübik Bezier eğrisi şekil 6'da gösterilmektedir.

Kuadratik rasyonel bir Bezier eğrisi,

$$B(t) = \frac{w_0 b_0 B_{0,2}(t) + w_1 b_1 B_{1,2}(t) + w_2 b_2 B_{2,2}(t)}{w_0 B_{0,2}(t) + w_1 B_{1,2}(t) + w_2 B_{2,2}(t)} \quad (14)$$

şeklindedir.



**Şekil 6.** Uzaysal rasyonel Bezier eğrisi

Herhangi bir koniğin parametreleştirileceğinden dolayı (Marsh, 1999.) kuadratik rasyonel fonksiyonlar tarafından parametreleştirilen herhangi bir eğrinin bir koni olduğunu kabul eder. Dolayısıyla, kuadratik rasyonel Bezier eğrileri koniktir. Koniklerin sınıflandırılması aşağıdaki gibi alınırsa ikinci bir Bezier eğrisinin türü belirlenebilir.

$$\text{elips: } w_1^2 - w_0 w_2 < 0;$$

$$\text{parabol: } w_1^2 - w_0 w_2 = 0;$$

$$\text{hiperbol: } w_1^2 - w_0 w_2 > 0.$$

Rasyonel Bezier eğrileri, integral Bezier eğrilerinin özelliklerini taşır.

**Konveks Hull Özelliği:** tüm  $i = 0, 1, \dots, n$  için  $w_i > 0$  olduğunu varsayalım. Sonra eğri üzerindeki her nokta, kontrol poligonunun konveks hulunda yatmaktadır.

**Afin Dönüşümleri Altındaki Değişmezlik:** Eğer  $T$  bir afin dönüşüm ise, o zaman

$$T\left(\frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}\right) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i T(b_i) B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}$$

dir.

**Varvasyon Azaltma Özelliği:** Tüm  $i$  için  $w_i > 0$  olduğunu varsayalım. VDP, integral Bezier eğrileri için tutuyor. Teorem 3.22. bakınız.

**Son Nokta İnterpolasyonu:**  $B(0) = b_0$ ,  $B(1) = b_n$ .

**Son Nokta Teğet:**  $B'(0) = n \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0)$  ve  $B'(1) = n \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1})$ .

Bakınız Bölüm 3.2.8

**Projektif Dönüşümler Altındaki Değişmezlik:** Eğer  $T$  bir projektif dönüşüm ise, o zaman

$$T \left( \sum_{i=0}^n \hat{b}_i B_{i,n}(t) \right) = \sum_{i=0}^n T(\hat{b}_i) B_{i,n}(t)$$

Detaylar için bölüm 3.2.6'e bakınız.

**Lemma 3.37.** Son nokta  $(r, 0)$  ve  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$  ile orijin üzerinde merkezlenen dairesel yay, yarı çap  $r$ , kontrol noktaları

$$b_0(r, 0), b_1 \left( r, r \tan \frac{\theta}{2} \right), b_2(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

ve ağırlıkları  $w_0 = w_2 = 1$  ve  $w_1 = \cos \frac{\theta}{2}$  tarafından verilen rasyonel kuadratik Bezier gösterime sahiptir.

**Örnek 3.38.** Lemma 3.37,  $r = 1$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  alınarak elde edilen, birim çemberin ilk çeyrek yayı için  $b_0(1,0), b_1(1,1), b_2(0,1)$  olacaktır ayrıca ağırlıklarda  $w_0 = 1, w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ve  $w_2 = 1$  dir. Buna göre rasyonel bezier eğrisi

$$x(t) = \frac{(1-t)^2 + \sqrt{2}t(1-t)}{(1-t)^2 + t(1-t)\sqrt{2} + t^2} = \frac{\sqrt{2}(1-t)(t+1+\sqrt{2})}{(2t^2 - 2t + 2 + \sqrt{2})}$$

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}t(1-t) + t^2}{(1-t)^2 + \sqrt{2}t(1-t) + t^2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 2 - t)t}{(2t^2 - 2t + 2 + \sqrt{2})}$$

bulunur. Burada  $w_1 = 1$  ve  $w_2 = 2$  seçilirse elde edilecek rasyonel bezier eğrisi  $\gamma$  olsun.  $\gamma$  birim çeyrek oluşturmaz. Bu parametrelendirme için yay uzunluğu fonksiyonu, şaşırtıcı bir şekilde, birim hız yay uzunluğu fonksiyonundan  $s(t) = \frac{\pi}{2}t$  0.0167'den daha düşük bir aralıkta  $[0,1]$ 'den farklı olan  $s(t) = 2 \arctan \left( \frac{2t-1}{\sqrt{2}+1} \right) + \frac{\pi}{4}$ 'tir.  $\gamma$ 'nın parametrelendirilmesi,  $s(t) = \frac{\pi}{2}t$ 'den 0.1451'e kadar farklılık gösteren yay uzunluğu fonksiyonu  $s(t) = 2 \arctan t$  değerine sahiptir.

Rasyonel Bezier eğrileri, eğri tasarımı için daha fazla esneklik sunar çünkü belirli bir kontrol noktaları kümesinde, ağırlık seçimine bağlı olarak sonsuz sayıda eğri vardır. Bir ağırlık ayarlandığında tüm eğri değişir, ancak bir sonraki teoreme açıklandığı gibi, öngörülebilir bir şekilde olur.

**Teorem 3.39.** Bir  $w_k$  ağırlığının  $w_k + \delta w_k$  olarak değiştirildiğini varsayalım, sonra  $b = B(t)$

$b_w = (1 - \alpha)b + \alpha b_k$  noktasına gider. Burada

$$\alpha = \frac{\delta w_k B_{k,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t) + \delta w_k B_{k,n}(t)}$$

dir.

### 3.2.7 Rasyonel Bezier eğrileri için De Casteljau algoritması

İntegral Bezier eğrileri için de Casteljau algoritması rasyonel duruma uzanmaktadır. Algoritmayı gerçekleştirmenin iki yolu vardır.

**Yöntem 1:** Varsayalım ki

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}$$

olsun. Burada düzlemsel eğriler için  $b_i = (x_i, y_i)$  ve uzaysal eğriler için  $b_i = (x_i, y_i, z_i)$  dir. Düzlemsel eğriler için  $\hat{b}_i = (w_i x_i, w_i y_i, w_i)$  ve uzaysal eğriler için  $\hat{b}_i = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$  olsun. İntegral Bezier eğrileri için de Casteljau algoritmasını uygulayın. (Bölüm 3.2.3 de açıklanmıştır.), ağırlığı ek bir koordinat olarak ele alın.

**Yöntem 2:** İlk yöntem uygulanması ve sayısal olarak verimli olmasına rağmen, belirlili koşullar altında hesaplama hatalarına eğilimlidir. Homojen kontrol noktalarının her bir iterasyonu sonunda kartezyen koordinatlara dönüştürülmesi durumunda problemten kaçınılır. Yeni algoritma  $i = 0, 1, \dots, n - j$  ve  $j = 1, \dots, n$  için

$$\begin{cases} b_i^j = (1 - t) \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} b_i^{j-1} + t \frac{w_{i+1}^{j-1}}{w_i^j} b_{i+1}^{j-1} \\ w_i^j = (1 - t) w_i^{j-1} + t w_{i+1}^{j-1} \end{cases} \quad (15)$$

dir.

Rasyonel de Casteljau algoritması  $B(t)$  noktasını değerlendirir ve eğriyi parametre değeri  $t$ 'ye karşılık gelen noktada böler.

**Örnek 3.40.** Rasyonel bir kübik Bezier eğrisinin, kontrol noktaları  $b_0(1,1), b_1(2,7), b_2(8,6), b_3(12,1)$  ve ağırlıkları  $w_0 = 1, w_1 = 2, w_2 = 2, w_3 = 1$  olsun. Daha sonra  $t = 0.25$  olan rasyonel de Casteljau algoritması,

1.0	2.0	2.0	1.0
1.25	2.0	1.75	
1.4375	1.9375		

1.5625.

ağırlıkları ve kontrol noktaları

(1.0,1.0)                      (2.0,7.0)                      (8.0,6.0)                      (12.0,1.0)

(1.4,3.4)                      (3.5,6.75)                      (8.5714,5.2857)

(2.1304,4.5652)              (4.6452,6.4194)

(2.91,5.14).

Üçgenlerini verir.

Böylece  $B(0.25) = (2.91,5.14)$ 'dir.

### 3.2.8 Rasyonel Bezier eğrilerinin türevleri

Rasyonel fonksiyonların ayırt edilmesi için rasyonel Bezier eğrisinin türevini belirleyen öz yinelemeli formül aşağıdaki yöntemden elde edilir.  $F(t) = f(t)/g(t)$  olsun. Daha sonra bölüm kuralı

$$F'(t) = \frac{g(t)f'(t) - g'(t)f(t)}{g(t)^2} = \frac{f'(t) - g'(t)F(t)}{g(t)} \quad (16)$$

verir.

İki fonksiyonun bir sonucunun türevlerini elde etmek için Leibnitz kuralı (Spivak, 1967)

$f(t) = g(t)F(t)$  r. türevinin

$$\begin{aligned} f^{(r)}(t) &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} g^{(i)} F^{(r-i)}(t) \\ &= g(t)F^{(r)}(t) + \sum_{i=1}^r \binom{r}{i} g^{(i)}(t)F^{(r-i)}(t) \end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$F^{(r)}(t) = \frac{f^{(r)}(t) - \sum_{i=1}^r \binom{r}{i} g^{(i)}(t)F^{(r-i)}(t)}{g(t)} \quad \text{dir} \quad (17)$$

Böylece  $F(t)$ 'nin  $r$ . türevi  $F(t)$ 'nin birinci  $r - 1$  türevleri ve  $f(t)$  ve  $g(t)$ 'nin birinci  $r$  türevleri özelliğinden elde edilir.  $n$ . dereceden

$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}$  rasyonel Bezier eğrisini düşünün.

$f(t) = \sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)$  ve  $g(t) = \sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)$  olsun.  $f(t)$  ve  $g(t)$ 'nin türevleri, bölüm 3.2.2'de verilen integral Bezier eğrilerinin türevlerini belirlemek için

algoritma uygulanarak elde edilir. Burada  $w_i b_i$   $f(t)$ 'nin kontrol noktaları ve  $w_i$  ağırlığı  $g(t)$ 'nin kontrol noktaları olduğunu düşünün. Özellikle  $r = 1$  ve  $r = 2$  için

$$B'(t) = \frac{(\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t))' - (\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t))' B(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)},$$

$$B''(t) = \frac{(\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t))'' - 2(\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t))' B'(t) - (\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t))'' B(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}.$$

Bu nedenle

$$B'(0) = \frac{n(w_1 b_1 - w_0 b_0) - n(w_1 - w_0) b_0}{w_0} = n \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0).$$

Benzer şekilde,  $B'(1) = n \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1})$  dir. Son nokta tanjant durumu şimdi kanıtlanmıştır.

**Örnek 3.41.** Kontrol noktaları  $b_0(2,1), b_1(5,6), b_2(6,2), b_3(9,3)$  ve ağırlıkları  $w_0 = 3, w_1 = 2, w_2 = 1, w_3 = 4$  ile rasyonel kübik Bezier eğrisi düşünün.  $f(t) = \sum_{i=0}^3 w_i b_i B_{i,n}(t)$ :  $(6,3), (10,12), (6,2), (36,12)$  kontrol noktalarını vermek için  $w_i$  ile  $b_i$  çarpın. Dolayısıyla  $f'(t), 3((10,12) - (6,3)) = (12,27), 3((6,2) - (10,12)) = (-12, -30)$ , ve  $3((36,12) - (6,2)) = (90,30)$  kontrol noktalarına sahiptir.  $g'(t)$ 'nin kontrol değerleri  $3(2 - 3) = -3, 3(1 - 2) = -3, 3(4 - 1) = 9$  dur. Daha sonra  $B'(0.25)$  aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$f(0.25) = (1 - 0.25)^3(6,3) + 3(1 - 0.25)^2(0.25)(10,12) + 3(1 - 0.25)(0.25)^2(6,2) + (0.25)^3(36,12) = (8.156, 6.797)$$

$$g(0.25) = (1 - 0.25)^3 3 + 3(1 - 0.25)^2(0.25)^2 + 3(1 - 0.25)(0.25)^2 1 + (0.25)^3 4 = 2.313,$$

$$f'(0.25) = (1 - 0.25)^2(12,27) + 2(1 - 0.25)(0.25)(-12, -30) + (0.25)^2(90,30) = (7.875, 5.8125),$$

$$g'(0.25) = (1 - 0.25)^2(-3) + 2(1 - 0.25)(0.25)(-3) + (0.25)^2(9) = -2.25.$$

Dolayısıyla

$$B(0,25) = f(0.25)/g(0.25) = (8.156, 6.797)/(2.313) = (3.526, 2.939),$$

ve

$$\begin{aligned} B'(0.25) &= \frac{f'(0.25) - g'(0.25)B(0.25)}{g(0.25)} \\ &= \frac{(7.875, 5.813) - (-2.25)(3.526, 2.939)}{2.313} \\ &\approx (6.835, 5.372). \end{aligned}$$

### 3.3 B-Spline Eğrileri

Parçalı bir polinom eğrisi özellikleri ile Bezier eğrisine benzer şekilde B-spline taban gösterimine sahiptir.  $[a, b]$  aralığında tanımlanan bir B-spline eğrisi, aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. d. dereceden (veya  $d+1$ ) böylece parçalı polinom eğrisinin her bölümü d. derece veya daha azdır.

2. Knot vektörü olarak adlandırılan  $m+1$  reel sayıdan oluşan bir dizi  $t_0, t_1, \dots, t_m$  dizisi olsun. öyle ki  $t_i \leq t_{i+1}$  ( $i=0,1,\dots,m-1$ ),  $t_d = a$  ve  $t_{m-d} = b$  olsun.  $t_0, t_1, \dots, t_d$  ve  $t_{m-d}, t_{m-d+1}, \dots, t_m$  değerlerine uç (dış) knot vektör denir., ve  $t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}$  değerlerine iç knot vektör denir.

3. Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$ 'dir.

Bir B-spline eğrisi, B-spline temel fonksiyonların özelliğinden tanımlanmıştır.

**Tanım 3.42.** Knot vektörü  $t_0, t_1, \dots, t_m$  ile tanımlanan,  $N_{i,d}(t)$  ile belirtilen d. dereceden B-spline temel fonksiyonları aşağıdaki gibi ardışık olarak tanımlanır:

$i=0,1,\dots,n$  ve  $d \geq 1$  için

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (18)$$

$$N_{i,d}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+d}-t_i} N_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1}-t}{t_{i+d+1}-t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t). \quad (19)$$

Eğer knot vektörü yeterli sayıda tekrarlanan knot değeri içeriyorsa, tekrarlanan gerçekleştirilmesi sırasında (bazı i için)  $\frac{N_{i,d-1}(t)}{t_{i+d}-t_i} = 0/0$  formunun bir bölünmesi ile karşılaşılabilir. Bu meydana geldiğinde  $\frac{0}{0} = 0$  olduğu varsayılır.

**Tanım 3.43.** Knot noktaları  $t_0, t_1, \dots, t_m$  ve kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile d. dereceden (veya  $d+1$ ) B-spline eğrisi

$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t)$  tarafından  $[a, b] = [t_d, t_{m-d}]$  üzerinde tanımlanır. Burada  $N_{i,d}(t)$ , d. dereceden B-spline temel fonksiyonudur. B-spline eğrilerini rasyonel formdan ayırmak (Bölüm 3.3.4 'de tanıtılacaktır.) genellikle integral B-spline olarak adlandırılır.

**Örnek 3.44.** Kontrol noktaları  $b_0(1,2), b_1(3,5), b_2(6,2), b_3(9,4)$  ile  $t_0 = 2, t_1 = 4, t_2 = 5, t_3 = 7, t_4 = 8, t_5 = 10, t_6 = 11$  ve  $d=2$  olsun. Daha sonra  $k=0$  temel fonksiyonu

$$N_{0,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [2,4) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{1,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [4,5) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{2,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [5,7) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{3,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [7,8) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{4,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [8,10) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{5,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [10,11) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

k=1 temel fonksiyonu

$$N_{0,1}(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0} N_{0,0}(t) + \frac{t_2-t}{t_2-t_1} N_{1,0}(t) = \frac{t-2}{4-2} N_{0,0}(t) + \frac{5-t}{5-4} N_{1,0}(t) = \frac{t-2}{2} N_{0,0}(t) + (5-t)N_{1,0}(t),$$

$$N_{1,1}(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} N_{1,0}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2} N_{2,0}(t) = \frac{t-4}{5-4} N_{1,0}(t) + \frac{7-t}{7-5} N_{2,0}(t) = (t-4)N_{1,0}(t) + \frac{1}{2}(7-t)N_{2,0}(t),$$

$$N_{2,1}(t) = \frac{t-t_2}{t_3-t_2} N_{2,0}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_3} N_{3,0}(t) = \frac{1}{2}(t-5)N_{2,0}(t) + (8-t)N_{3,0}(t),$$

$$N_{3,1}(t) = \frac{t-t_3}{t_4-t_3} N_{3,0}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_4} N_{4,0}(t) = (t-7)N_{3,0}(t) + \frac{1}{2}(10-t)N_{4,0}(t)$$

$$N_{4,1}(t) = \frac{t-t_4}{t_5-t_4} N_{4,0}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_5} N_{5,0}(t) = \frac{1}{2}(t-8)N_{4,0}(t) + (11-t)N_{5,0}(t).$$

şartlarda belirlenir.

Son olarak, k=2 temel fonksiyonu

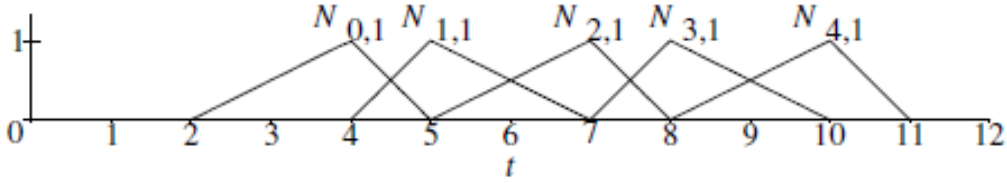
$$\begin{aligned} N_{0,2}(t) &= \frac{t-t_0}{t_2-t_0} N_{0,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) = \frac{t-2}{3} N_{0,1}(t) + \frac{7-t}{3} N_{1,1}(t) \\ &= \frac{t-2}{3} \left( \frac{t-2}{2} N_{0,0}(t) + (5-t)N_{1,0}(t) \right) \\ &\quad + \frac{7-t}{3} \left( (t-4)N_{1,0}(t) + \frac{7-t}{2} N_{2,0}(t) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}(t-2)^2 N_{0,0}(t) + \frac{1}{3}(-2t^2 + 18t - 38)N_{1,0}(t) + \frac{1}{6}(7-t)^2 N_{2,0}(t),$$

$$\begin{aligned} N_{1,2}(t) &= \frac{t-t_1}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_2} N_{2,1}(t) = \frac{t-4}{3} N_{1,1}(t) + \frac{8-t}{3} N_{2,1}(t) \\ &= \frac{t-4}{3} \left( (t-4)N_{1,0}(t) + \frac{7-t}{2} N_{2,0}(t) \right) \\ &\quad + \frac{8-t}{3} \left( \frac{t-5}{2} N_{2,0}(t) + (8-t)N_{3,0}(t) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}(t-4)^2 N_{1,0}(t) + \frac{1}{3}(-t^2 + 12t - 34)N_{2,0}(t) + \frac{1}{3}(8-t)^2 N_{3,0}(t),$$

$$\begin{aligned}
N_{2,2}(t) &= \frac{t-t_2}{t_4-t_2}N_{2,1}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_3}N_{3,1}(t) = \frac{t-5}{3}N_{2,1}(t) + \frac{10-t}{3}N_{3,1}(t) \\
&= \frac{t-5}{3} \left( \frac{t-5}{2}N_{2,0}(t) + (8-t)N_{3,0}(t) \right) \\
&\quad + \frac{10-t}{3} \left( (t-7)N_{3,0}(t) + \frac{10-t}{2}N_{4,0}(t) \right) \\
&= \frac{1}{6}(t-5)^2N_{2,0}(t) + \frac{1}{3}(-2t^2 + 30t - 110)N_{3,0}(t) + \frac{1}{6}(10-t)^2N_{4,0}(t), \\
N_{3,2}(t) &= \frac{t-t_3}{t_5-t_3}N_{3,1}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_4}N_{4,1}(t) = \frac{t-7}{3}N_{3,1}(t) + \frac{11-t}{3}N_{4,1}(t) \\
&= \frac{t-7}{3} \left( (t-7)N_{3,0}(t) + \frac{10-t}{2}N_{4,0}(t) \right) \\
&\quad + \frac{11-t}{3} \left( \frac{t-8}{2}N_{4,0}(t) + (11-t)N_{5,0}(t) \right) \\
&= \frac{1}{3}(t-7)^2N_{3,0}(t) + \frac{1}{3}(-t^2 + 18t - 79)N_{4,0}(t) + \frac{1}{3}(11-t)^2N_{5,0}(t).
\end{aligned}$$



Şekil 7. Knot vektörleri  $t_0 = 2, t_1 = 2, t_2 = 5, t_3 = 7, t_4 = 8, t_5 = 10, t_6 = 11$  olan birinci dereden taban fonksiyonları

k=2 temel fonksiyonu

$$N_{0,2}(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ \frac{1}{6}(t-2)^2, & 2 \leq t < 4 \\ \frac{1}{3}(-2t^2 + 18t - 38), & 4 \leq t < 5 \\ \frac{1}{6}(7-t)^2, & 5 \leq t < 7 \\ 0, & 7 \leq t \end{cases}$$

$$N_{1,2}(t) = \begin{cases} 0, & t < 4 \\ \frac{1}{3}(t-4)^2, & 4 \leq t < 5 \\ \frac{1}{3}(-t^2 + 12t - 34), & 5 \leq t < 7 \\ \frac{1}{3}(8-t)^2, & 7 \leq t < 8 \\ 0, & 8 \leq t \end{cases}$$

$$N_{2,2}(t) = \begin{cases} 0, & t < 5 \\ \frac{1}{6}(t-5)^2, & 5 \leq t < 7 \\ \frac{1}{3}(-2t^2 + 30t - 110), & 7 \leq t < 8 \\ \frac{1}{6}(10-t)^2, & 8 \leq t < 10 \\ 0, & 10 \leq t \end{cases}$$

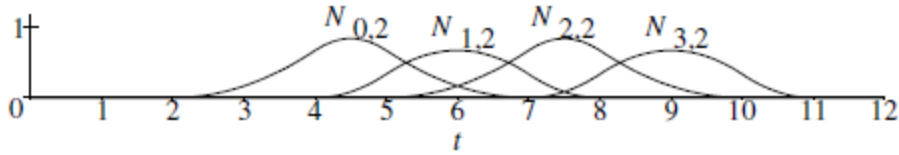
ve

$$N_{3,2}(t) = \begin{cases} 0, & t < 7 \\ \frac{1}{3}(t-7)^2, & 7 \leq t < 8 \\ \frac{1}{3}(-t^2 + 18t - 79), & 8 \leq t < 10 \\ \frac{1}{3}(11-t)^2, & 10 \leq t < 11 \\ 0, & 11 \leq t \end{cases}$$

biçiminde ifade edilebilir.

1. ve 2. dereceden olan temel fonksiyonun alanları şekil 7 ve 8 de gösterilmiştir. Temel fonksiyonların  $t \in (t_i, t_{i+3})$  için  $N_{i,2}(t) > 0$  ve  $N_{i,2}(t) = 0$ 'ı başka bir yerde inceleyiniz. Genel B-spline temel fonksiyonu benzer "pozitif" ve "yerel destek" özelliklerine sahiptir. (bkz. Teorem 3.46)

B-spline eğrisi

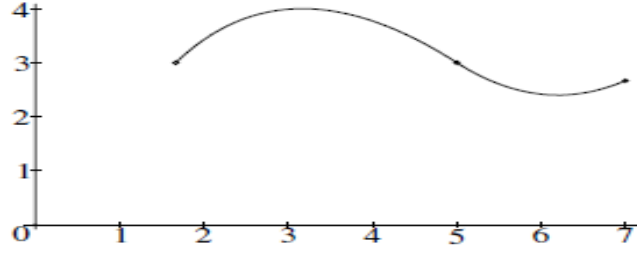


Şekil 8. Knot vektörleri  $t_0 = 2, t_1 = 2, t_2 = 5, t_3 = 7, t_4 = 8, t_5 = 10, t_6 = 11$  olan ikinci dereceden taban fonksiyonları

[5,8] aralığında

$$\begin{aligned} B(t) &= (1,2)N_{0,2}(t) + (3,5)N_{1,2}(t) + (6,2)N_{2,2}(t) + (9,4)N_{3,2}(t) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6}(7-t)^2(1,2) + \frac{1}{3}(-t^2 + 12t - 34)(3,5) + \frac{1}{6}(t-5)^2(6,2), & \text{eğer } 5 \leq t < 7, \\ \frac{1}{3}(8-t)^2(3,5) + \frac{1}{3}(-2t^2 + 30t - 110)(6,2) + \frac{1}{3}(t-7)^2(9,4), & \text{eğer } 7 \leq t \leq 8. \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

Şekil 9' da gösterilen, B-spline eğrisi, iki polinom eğri bölümünün birleşimidir.



Şekil 9. Örnek 3.44'ün B-spline

d. dereceden bir Bezier eğrisi tam olarak  $d+1$  kontrol noktalarına sahipken d. dereceden bir B-spline yeterli sayıda knot belirtildiği takdirde herhangi bir sayıda kontrol noktasına sahip olabilir. Bu nedenle, karmaşık eğri şekillerini tanımlamak için, B-spline'lar kontrol noktalarının sayısını arttırarak, eğrinin derecesini arttırmaksızın, ek bir özgürlük verilebilir.

Her temel fonksiyon  $N_{i,d}(t)$   $d+2$  knot  $t_i, \dots, t_{i+d+1}$  ile tanımlanır. Dolayısıyla,  $n+1$  kontrol noktaları gerekiyorsa  $n+d+2$  knot  $t_0, \dots, t_{n+d+1}$  belirtilmelidir. Bu nedenle, knot sayısı kontrol noktalarının sayısı artı derecesi artı 1 e eşittir ve  $m=n+d+1$  özdeşliğini verir.

Bir knot vektörü tekrar tekrar knot değerlerine sahip olabilir. Bir knot değerinin meydana gelme sayısı knotun çokluğu olarak adlandırılır. İç knotların farklı değerlerinden oluşan kırılma noktaları adı verilen yeni bir  $u_0, u_1, \dots, u_r$  ( $u_0 < u_1 < \dots < u_r$ ) dizisi tanımlayalım. Daha sonra B-spline, d. dereceden  $t \in [u_i, u_{i+1}]B_i(t)$  polinom eğri bölümlerinin birleşimidir.

**Örnek 3.45.** Örnek 3.44'ün kırılma noktaları  $u_0 = 5, u_1 = 7$  ve  $u_2 = 8$  dir ve B-spline iki bölümden oluşur Şekil 9'da her bölümün başlangıç ve bitiş noktaları eğri üzerinde bir • ile gösterilir. İki polinom eğri bölümlerinin parametrik denklemleri  $[u_0, u_1] = [5, 7)$  üzerinde tanımlanan

$$\begin{aligned} B_0(t) &= \frac{1}{6}(7-t)^2(1,2) + \frac{1}{3}(-t^2 + 12t - 34)(3,5) + \frac{1}{6}(t-5)^2(6,2) \\ &= \left(-\frac{65}{3} + 8t - \frac{2}{3}t^2, -\frac{701}{18} + \frac{133}{9}t - \frac{23}{18}t^2\right) \end{aligned}$$

ve  $[u_1, u_2) = [7, 8)$  üzerinde tanımlanan

$$\begin{aligned} B_1(t) &= \frac{1}{3}(8-t)^2(3,5) + \frac{1}{3}(-2t^2 + 30t - 110)(6,2) + \frac{1}{3}(t-7)^2(9,4) \\ &= \left(-\frac{155}{3} + \frac{38}{3}t - \frac{2}{3}t^2, -\frac{340}{9} + \frac{100}{9}t - \frac{7}{9}t^2\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 3.46.** B-spline temel fonksiyonu  $N_{i,k}(t)$  aşağıdaki özellikleri sağlar.

**Pozitiflik:**  $t \in (t_i, t_{i+k+1})$  için  $N_{i,k}(t) > 0$

**Bölgesel Destek:**  $t \notin (t_i, t_{i+k+1})$  için  $N_{i,k}(t) = 0$

**Parçalı Polinom:**  $N_{i,k}(t)$  k. dereceden parçalı polinom fonksiyonlardır.

**Birliğin Bölümü:**  $t \in [t_r, t_{r+1})$  için  $\sum_{j=r-k}^r N_{j,k}(t) = 1$

**Süreklilik:** İç knott $_i$ 'nin çokluğu  $p_i$  ise,  $N_{i,k}(t)$ ,  $t = t_i$  de  $C^{k-p_i}$ 'dir.  $N_{i,k}(t)$ ,  $C^\infty$  başka yerde.

**Teorem 3.47.** Knot vektörü  $t_0, t_1, \dots, t_m$  üzerinde tanımlanmış olan  $d$ . dereceden bir B-spline eğrisi  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t)$  aşağıdaki özellikleri karşılar.

**Bölgesel Kontrol:** Her bölüm  $d + 1$  kontrol noktaları ile belirlenir.  $t \in [t_r, t_{r+1})$  ( $d \leq r \leq m - d - 1$ ) ise o zaman

$$B(t) = \sum_{i=r-d}^r b_i N_{i,d}(t).$$

Böylece  $B(t)$ 'yi değerlendirmek için,  $N_{r-d,d}(t), \dots, N_{r,d}(t)$  değerini değerlendirmek yeterlidir.

**Konveks Hull:**  $t \in [t_r, t_{r+1})$  ( $d \leq r \leq m - d - 1$ ) ise, o zaman

$$B(t) \in CH\{b_{r-d}, \dots, b_r\}.$$

**Süreklilik:** Eğer  $p_i$ ,  $t = u_i$  kırılma noktalarının çokluğu ise, o zaman  $B(t)$   $t = u_i$ 'de  $C^{d-p_i}$  (veya daha büyük) ve başka yerlerde  $C^\infty$ 'dur.

**Afin Dönüşümleri Altındaki Değişmezlik:**  $T$  bir afin dönüşüm olsun. O zaman

$$T\left(\sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t)\right) = \sum_{i=0}^n T(b_i) N_{i,d}(t).$$

### 3.3.1 B-spline çeşitleri

#### 3.3.1.1 Açık B-splinelar

Genel olarak, B-spline eğrileri ilk ve son kontrol noktası  $b_0$  ve  $b_n$ 'i enterpolasyona uğratmaz  $d$ . dereceden eğriler için, son nokta interpolasyonu ve bir son nokta tanjant durumu, uç knotları  $t_0 = t_1 = \dots = t_d$  ve  $t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ 'i karşıladığı açık B-splineları ile elde edilir.

Temel fonksiyonların (3.42) tanımının küçük bir modifikasyonu knotların çokluğuna uyum sağlamak için gereklidir:  $N_{m-d-1}$ ,  $t = m - d$ 'de 1 değerini (ve diğer yerlerde 0) olmalıdır.  $t_d \in [t_d, t_{d+1})$  olduğu için,  $r = d$  olan bölgesel kontrol özelliği  $B(t_d) = \sum_{j=0}^d b_j N_{j,d}(t_d)$  verir.  $0 \leq j \leq d$  için

$$N_{j,d}(t_d) = \frac{t_d - t_j}{t_{j+d} - t_j} N_{j,d-1}(t_d) + \frac{t_{j+1+d} - t_d}{t_{j+1+d} - t_{j+1}} N_{j+1,d-1}(t_d)$$

$t_0 = t_1 = \dots = t_d$  olduğu için,  $t_j = t_d$ , ve dolayısıyla ( $j = 0$  durumu için  $0/0 = 0$  kuralının uygulanması)

$$N_{j,d}(t_d) = (0)N_{j,d-1}(t_d) + \frac{t_{j+1+d} - t_d}{t_{j+1+d} - t_{j+1}} N_{j+1,d-1}(t_d).$$

Bu nedenle

$$N_{j,d}(t_d) = \left( \frac{t_{j+1+d} - t_d}{t_{j+1+d} - t_{j+1}} \right) \left( \frac{t_d - t_{j+1}}{t_{j+d} - t_{j+1}} N_{j+1,d-2}(t_d) + \frac{t_{j+2+d} - t_d}{t_{j+2+d} - t_{j+2}} N_{j+2,d-2}(t_d) \right).$$

Tekrarlanan benzer sadeleştirmeler ve temel fonksiyonların yerine geçenler, daha küçük dizi sonuçları ile

$$N_{j,d}(t_d) = \left( \frac{t_{j+1+d} - t_d}{t_{j+1+d} - t_{j+1}} \right) \left( \frac{t_{j+2+d} - t_d}{t_{j+2+d} - t_{j+2}} \right) \dots \left( \frac{t_{d+j+d} - t_d}{t_{d+j+d} - t_{j+d}} \right) N_{j+d,0}(t_d) \quad (21)$$

$j > 0$  için  $N_{j+d,0}(t_d) = 0$  olduğu için (21)'den  $j > 0$  için  $N_{j,d}(t_d) = 0$  olur.  $j = 0$  olduğunda, özdeşlik (21) ve  $N_{d,0}(t_d) = 1$

$$N_{0,d}(t_d) = \left( \frac{t_{1+d} - t_d}{t_{1+d} - t_1} \right) \left( \frac{t_{2+d} - t_d}{t_{2+d} - t_2} \right) \dots \left( \frac{t_{d+d} - t_d}{t_{d+d} - t_d} \right) N_{d,0}(t_d) = 1$$

değerini verir.

Dolayısıyla  $B(t_d) = \sum_{j=0}^d b_j N_{j,d}(t_d) = b_0$ .

Benzer şekilde  $B(t_{m-d}) = b_n$ .

Örnek 3.58'da açık B-splineların

$$B'(t_d) = \frac{d}{t_{d+1} - t_1} (b_1 - b_0) \text{ ve } B'(t_{m-d}) = \frac{d}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) \quad (22)$$

de karşıladığı gösterilmiştir.

Böylece  $b_0, b_1$  başlangıç tanjant yönünü tanımlar ve  $b_{n-1}, b_n$  açık bir B-spline eğrisinin son teğet yönünü tanımlar. Son nokta interpolasyonu ve son nokta tanjant özellikleri, açık B-spline'larının Bezier eğrilerine benzer şekilde davrandığını gösterir.

**Örnek 3.48.**  $t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 1, t_4 = 2, t_5 = 3, t_6 = 4, t_7 = 4, t_8 = 4$  olsun.

$k = 0$  temel fonksiyonları

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [t_i, t_{i+1}) \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

dir.

$k = 1$  temel fonksiyonları

$$N_{0,1}(t) = \frac{(t-0)}{(0-0)} N_{0,0} + \frac{(0-t)}{(0-0)} N_{1,0} = 0 \quad (0/0 = 0 \text{ durumu kullanılarak})$$

$$N_{1,1}(t) = \frac{(t-0)}{(0-0)} N_{1,0} + \frac{(1-t)}{(1-0)} N_{2,0} = (1-t)N_{2,0}(t) \quad (\text{durum } 0/0 = 0).$$

$$N_{2,1}(t) = \frac{(t-0)}{(1-0)} N_{2,0} + \frac{(2-t)}{(2-1)} N_{3,0} = tN_{2,0}(t) + (2-t)N_{3,0}(t),$$

$$N_{3,1}(t) = \frac{(t-1)}{(2-1)} N_{3,0} + \frac{(3-t)}{(3-2)} N_{4,0} = (t-1)N_{3,0}(t) + (3-t)N_{4,0}(t),$$

$$N_{4,1}(t) = \frac{(t-2)}{(3-2)} N_{4,0} + \frac{(4-t)}{(4-2)} N_{5,0} = (t-2)N_{4,0}(t) + (4-t)N_{5,0}(t)$$

$$N_{5,1}(t) = \frac{(t-3)}{(4-3)} N_{5,0} + \frac{(4-t)}{(4-4)} N_{6,0} = (t-3)N_{5,0}(t) \quad (\text{durum } 0/0 = 0),$$

$$N_{6,1}(t) = \frac{(t-4)}{(4-4)} N_{6,0} + \frac{(4-t)}{(4-4)} N_{7,0} = 0 \quad (\text{durum } 0/0 = 0) \text{ dır.}$$

$k = 2$  temel fonksiyonları

$$N_{0,2}(t) = (1-t)^2 N_{2,0}(t),$$

$$N_{1,2}(t) = \frac{1}{4}(4-3t)tN_{2,0}(t) + \frac{1}{2}(2-t)^2 N_{3,0}(t),$$

$$N_{2,2}(t) = \frac{1}{2}t^2 N_{2,0}(t) + \left(-t^2 + 3t - \frac{3}{2}\right) N_{3,0}(t) + \left(\frac{9}{2} - 3t + \frac{1}{2}t^2\right) N_{4,0}(t),$$

$$N_{3,2}(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2 N_{3,0}(t) + \left(-\frac{11}{2} + 5t - t^2\right) N_{4,0}(t) + \left(8 - 4t + \frac{1}{2}t^2\right) N_{5,0}(t),$$

$$N_{4,2}(t) = \frac{1}{2}(t-2)^2 N_{4,0}(t) + \left(-16 + 10t - \frac{3}{2}t^2\right) N_{5,0}(t),$$

$$N_{5,2}(t) = (t-3)^2 N_{5,0}(t) \text{ 'dir.}$$

Verilen knot vektöründe tanımlanan  $d = 2$ . dereceden bir açık B-spline, 4 bölümden oluşur.

$$B_1(t) = (1-t)^2 b_0 + \frac{1}{2}t(4-3t)b_1 + \frac{1}{2}t^2 b_2, \quad t \in [0,1],$$

$$B_2(t) = \frac{1}{2}(2-t)^2 b_1 + \frac{1}{2}(-2t^2 + 6t - 3)b_2 + \frac{1}{2}(t-1)^2 b_3, \quad t \in [1,2],$$

$$B_3(t) = \frac{1}{2}(3-t)^2 b_2 + \frac{1}{2}(-2t^2 + 10t - 11)b_3 + \frac{1}{2}(t-2)^2 b_4, \quad t \in [2,3],$$

$$B_4(t) = \frac{1}{2}(4-t)^2b_3 + \frac{1}{2}(-3t^2 + 20t - 32)b_4 + (t-3)^2b_5, \quad t \in [3,4].$$

$B(0) = b_0$  ve  $B(4) = b_5$  olduğunu ve dolayısıyla B-spline'in ilk ve son kontrol noktalarını interpolasyona aldığını unutmayın.

### 3.3.1.2 Uniform (Düzgün) B-splinelar

Bir B-spline, knotları eşit aralıklı olduğunda ve düzgün olmayan bir şekilde tek düze olduğu söylenir. Knot vektörü  $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_m = m$  olsun. Bu knot vektöründe 2. dereceden uniform B-spline için temel fonksiyonlar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$N_{0,1}(t) = \frac{(t-0)}{(1-0)}N_{0,0} + \frac{(2-t)}{(2-1)}N_{1,0} = tN_{0,0} + (2-t)N_{1,0},$$

$$N_{1,1}(t) = \frac{(t-1)}{(2-1)}N_{1,0} + \frac{(3-t)}{(3-2)}N_{2,0} = (t-1)N_{1,0} + (3-t)N_{2,0},$$

$$N_{2,1}(t) = \frac{(t-2)}{(3-2)}N_{2,0} + \frac{(4-t)}{(4-3)}N_{3,0} = (t-2)N_{2,0} + (4-t)N_{3,0}.$$

$$\begin{aligned} N_{0,2}(t) &= \frac{(t-0)}{(2-0)}N_{0,1}(t) + \frac{(3-t)}{(3-1)}N_{1,1}(t) = \frac{1}{2}tN_{0,1}(t) + \frac{1}{2}(3-t)N_{1,1}(t) \\ &= \frac{1}{2}t(tN_{0,0} + (2-t)N_{1,0}) + \frac{1}{2}(3-t)((t-1)N_{1,0} + (3-t)N_{2,0}) \\ &= \frac{1}{2}t^2N_{0,0} + \left(\frac{1}{2}t(2-t) + \frac{1}{2}(3-t)(t-1)\right)N_{1,0} + \frac{1}{2}(3-t)^2N_{2,0} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & t \in [0,1] \\ -\frac{1}{2}(3-6t+2t^2), & t \in [1,2] \\ \frac{1}{2}(3-t)^2, & t \in [2,3] \end{cases} \end{aligned}$$

*i.* temel fonksiyonu

$$\begin{aligned}
N_{i,2}(t) &= \frac{t-i}{(i+2)-i} N_{i,1}(t) + \frac{i+3-t}{(i+3)-(i+1)} N_{i+1,1}(t) \\
&= \frac{t-i}{2} N_{i,1}(t) + \frac{i+3-t}{2} N_{i+1,1}(t) \\
&= \frac{t-i}{2} \left( \frac{t-i}{(i+1)-i} N_{i,0}(t) + \frac{(i+2)-t}{(i+2)-(i+1)} N_{i+1,0}(t) \right) \\
&\quad + \frac{i+3-t}{2} \left( \frac{t-(i+1)}{(i+2)-(i+1)} N_{i+1,0}(t) + \frac{i+3-t}{(i+3)-(i+2)} N_{i+2,0}(t) \right) \\
&= \frac{1}{2} (t-i)^2 N_{i,0}(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} ((t-i)(i+2-t) + (i+3-t)(t-i-1)) N_{i+1,0}(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} (i+3-t)^2 N_{i+2,0}(t).
\end{aligned}$$

Böylece,  $[i+2, i+3]$  ile tanımlanan  $i$ . bölüm  $B_i(t)$ ,

$$B_i(t) = \sum_{j=i}^{i+2} b_j N_{j,2}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (i+3-t)^2 b_i + \frac{1}{2} ((t-i-1)(i+3-t) + (i+4-t)(t-i-2)) b_{i+1} \\
&\quad + \frac{1}{2} (t-i-2)^2 b_{i+2}
\end{aligned}$$

ile verilir.

Son olarak  $t \mapsto t+i+2$  parametrizasyonu

$$\begin{aligned}
B_i(t) &= \frac{1}{2} (1-t)^2 b_i + \frac{1}{2} (1+2t-2t^2) b_{i+1} + \frac{1}{2} t^2 b_{i+2} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i \\ b_{i+1} \\ b_{i+2} \end{pmatrix} \quad (23)
\end{aligned}$$

tarafından  $[0,1]$  aralığında bölümü tanımlanır.

Her bir bölüm üzerindeki noktalar,  $\frac{1}{2}(1-t)^2$ ,  $\frac{1}{2}(1+2t-2t^2)$ ,  $\frac{1}{2}t^2$  temel fonksiyonları her  $t$  için sadece bir kez değerlendirmek zorunda olduğundan verimli bir şekilde hesaplanır.

$d = 3$ . dereceden uniform B-splinelar için benzer bir yöntem

$$B_i(t) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3-3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i \\ b_{i+1} \\ b_{i+2} \\ b_{i+3} \end{pmatrix} \text{ verir.}$$

**Örnek 3.49.** Knot vektörü  $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, t_5 = 5, t_6 = 6, t_7 = 7$  üzerinde tanımlanan  $d$ . dereceden uniform B-spline  $B(t)$ 'yi kontrol noktaları  $b_0(3,2), b_1(7,-1), b_2(5,2), b_3(4,5), b_4(2,3)$  düşünün. Eğri  $[t_d, t_{m-d}] = [2,5]$  aralığında tanımlanmıştır. Alt aralıklarda  $[2,3], [3,4]$  ve  $[4,5]$  de tanımlanmış üç eğri bölümü vardır. Örneğin,  $i = 1$  bölümü üzerinde bulunan  $B(3.6)$  noktasını belirlemek için,  $t = 3.6$   $t \mapsto t - i - 2$  kullanarak  $[0,1]$  aralığına çevirilir.

Gerekli parametre  $t = 3.6 - 1 - 2 = 0.6$  ve (23)

$$\begin{aligned} B_1(0.6) &= \frac{1}{2}(1 - 0.6)^2(7, -1) + \frac{1}{2}(1 + 2(0.6) - 2(0.6)^2)(5,2) + \frac{1}{2}(0.6)^2(4,5) \\ &= (4.98, 2.3) \end{aligned}$$

değerini vermektedir.

### 3.3.1.3 Periyodik B-spline ve kapalı periyodik B-spline

Bazı uygulamalarda, başlangıç noktasının bitiş noktasına eşit olduğu kapalı eğrileri temsil etmek arzu edilir. Kapalı bir Bezier eğrisi, kapalı bir kontrol poligonu oluşturan kontrol noktaları seçilerek elde edilebilir. Ancak, genel olarak, B-splinelar ilk ve son kontrol noktalarını interpolasyona uğratmazlar ve bu nedenle kapalı bir kontrol poligonu kapalı bir eğri vermez. Eğrinin kapatılması knotlar ve kontrol noktalarındaki koşulların uygulanmasıyla elde edilir. Örneğin, bu amaç için açık bir B-spline kullanılabilir. Bir alternatif kapalı periyodik bir B-spline kullanılmaktadır.

$n + 1$  kontrol noktaları ile ve  $d$ . dereceden bir periyodik B-spline knot  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  rastgele seçerek ve  $i = 1, \dots, d + 1$  için

$$t_{n+i} = t_{n+i-1} + (t_i - t_{i-1})$$

ayarlayarak elde edilir. Bu formun bir knot vektörü periyodik knot vektörü olarak adlandırılır. Özellikle, bir uniform B-spline, periyodik bir B-spline'in özel durumudur.

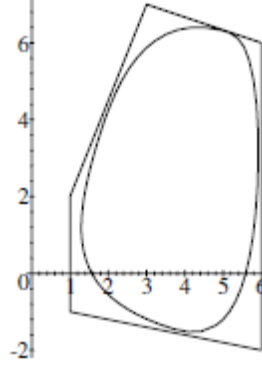
Kontrol noktaları  $b_0, \dots, b_n, b_{n+1} = b_0, b_{n+2} = b_1, \dots, b_{n+d} = b_{d-1}$  ve  $d$ . dereceden kapalı periyodik bir B-spline, knot  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1}$  rastgele seçerek ve  $n + 2d + 2$  knot ile periyodik bir knot vektörü oluşturarak elde edilir.

**Örnek 3.50.**  $d = 3$  ve  $n = 4$  olsun. İlk beş kontrol noktaları  $b_0(1,2), b_1(3,7), b_2(6,6), b_3(6,-2), b_4(1,-1)$  olsun ve kalan kontrol noktaları  $b_5(1,2), b_6(3,7), b_7(6,6)$  olsun. İlk  $n + 2 = 6$  knotlar,  $t_0 = 0.0, t_1 = 0.5, t_2 = 2.0, t_3 = 3.0, t_4 = 3.1, t_5 = 3.4$  olduğunu varsayalım. Periyodik knot vektörü

$$\begin{aligned}
 t_6 &= 3.4 + (0.5 - 0.0) = 3.9, & t_7 &= 3.9 + (2.0 - 0.5) = 5.4, \\
 t_8 &= 5.4 + (3.0 - 2.0) = 6.4, & t_9 &= 6.4 + (3.1 - 3.0) = 6.5, \\
 t_{10} &= 6.5 + (3.4 - 3.1) = 6.8, & t_{11} &= 6.8 + (5.4 - 3.9) = 8.3
 \end{aligned}$$

alınarak elde edilir.

B-spline ve kontrol poligonu, şekil 10'da gösterilmiştir.



Şekil 10. 3. dereceden kapalı periyodik B-spline

### 3.3.1.4 Açık uniform B-splinelar

İç knotların uniform olduğu açık B-splinelar, açık uniform B-spline olarak adlandırılır. Örnek 3.48 açık bir uniform B-spline'dır.

**Örnek 3.51.**  $t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 1, t_4 = 2, t_5 = 3, t_6 = 4, t_7 = 3$  olsun. Bu knot vektöründe tanımlanan 2. dereceden açık uniform B-splineları için temel fonksiyonlar

$$N_{0,2} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ (t-1)^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases},$$

$$N_{1,2} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2t - \frac{3}{2}t^2, & 0 \leq t < 1 \\ \frac{3}{2} - t + \frac{1}{2}(t-1)^2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t \end{cases},$$

$$N_{2,2} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t < 1 \\ -\frac{1}{2} + t - (t-1)^2, & 1 \leq t < 2, \\ \frac{5}{2} - t + \frac{1}{2}(t-2)^2, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t \end{cases}$$

$$N_{3,2} = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \frac{1}{2}(t-1)^2, & 1 \leq t < 2 \\ -\frac{3}{2} + t - \frac{3}{2}(t-2)^2, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t \end{cases},$$

$$N_{4,2} = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & 2 \leq t < 3 \text{ dir.} \\ 0, & 3 \leq t \end{cases}$$

### 3.3.2 De Boor algoritması

Bir B-spline eğrisi üzerindeki noktaların değerlendirilmesi de Boor algoritması olarak bilinen bir yöntem kullanılarak gerçekleştirilebilir. Bezier eğrileri için de casteljau algoritması, Bernstein temel fonksiyonlarının öz yineleme özelliğinin bir sonucu olduğu gibi, de Boor algoritması, B-spline temel fonksiyonlarını

$$N_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \quad (24)$$

öz yineleme özelliğinden gelir.

Varsayalım ki  $t \in [t_r, t_{r+1})$  olsun. Sonra (24)

$$B(t) = \sum_{i=r-k}^r b_i N_{i,k}(t)$$

$$= \sum_{i=r-k}^r b_i \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \sum_{i=r-k}^r b_i \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

anlamına gelir.

$i - 1$  ile  $i$  ikinci toplamda değiştirilmesi

$$B(t) = \sum_{i=r-k}^r b_i \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \sum_{i=r-k+1}^{r+1} b_{i-1} \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_i} N_{i,k-1}(t)$$

verir ve  $N_{r+1,k-1}(t) = N_{r-k,k-1}(t) = 0$  olduğundan  $[t_r, t_{r+1})$  üzerinde

$$B(t) = \sum_{i=r-k+1}^r \left( b_i \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} + b_{i-1} \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_i} \right) N_{i,k-1}(t)$$

olur.  $i = r - k + 1, \dots, r$  için

$$b_i^1(t) = b_{i-1} \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_i} + b_i \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}$$

olsun.  $b_i^1$ 'in  $t$  parametre değerine bağlı olduğunu unutmayın. Benzer bir şekilde  $N_{i,k-1}(t)$ ,  $k - 2$ . dereceden temel fonksiyonlar açısından ifade edilebilir.  $d$ . dereceden bir eğri için sonuç bir yineleme prosedürü  $j = 1, \dots, d$ ,  $i = r - d + j, \dots, r$  için

$$\left. \begin{aligned} b_i^j(t) &= \left( 1 - \alpha_i^j(t) \right) b_{i-1}^{j-1}(t) + \alpha_i^j(t) b_i^{j-1}(t), \\ \alpha_i^j(t) &= \frac{t-t_i}{t_{i+d-j+1}-t_i} \end{aligned} \right\} \quad (25)'dir.$$

Burada  $b_j^0(t) = b_j$ ,  $b_{-1} = 0$  ve  $b_{m-d+1} = 0$  (burada 0 bir düzlem eğrisi için  $(0,0)$  ve bir uzaysal eğri için  $(0,0,0)$ ).

$j$ . adımını,  $d - j$ . dereceden temel fonksiyonların şartı  $B(t)$  ( $b_i^j$ ,  $t$ 'nin bir fonksiyonu olduğunu unutmayın)

$$B(t) = \sum_{i=r-d+j}^r b_i^j N_{i,d-j}(t)$$

cinsinden verilir. Böylece  $j = d$  olduğunda algoritma eğri üzerindeki  $B(t) = \sum_{i=r}^r b_i^d N_{i,0}(t) = b_r^d$  noktalarını verir.

Özetlemek gerekirse, belirli bir parametre değeri  $t$  için de Boor algoritması (25)  $b_r^d = B(t)$  gibi bir üçgen dizi noktası verir.

$$\begin{array}{ccccccc} b_{r-d}^0 & & b_{r-d+1}^0 & & \dots & & \dots & & b_r^0 \\ b_{r-d+1}^1 & & \dots & & \dots & & b_r^1 & & \\ \vdots & & \dots & & & & & & \\ b_{r-1}^{d-1} & & b_r^{d-1} & & & & & & \end{array}$$

$$b_r^d = B(t).$$

**Örnek 3.52.** de Boor algoritması, örnek 3.49'in uniform B-spline değerini  $t = 3.6$ 'da değerlendirmek için uygulanabilir. Sonra  $d = 2$  ve  $3.6 \in [3,4) = [t_3, t_4)$  olduğundan bu  $r = 3$  izler. İlk satırın sırası  $b_1^0(7, -1)$ ,  $b_2^0(5,2)$ ,  $b_3^0(4,5)$ 'tir.  $j = 1 \dots 2$ ,  $i = (1 + j) \dots 3$  ile algoritma

$$\alpha_2^1 = \frac{t-t_2}{t_4-t_2} = \frac{3.6-2}{4-2} = 0.8, \quad \alpha_3^1 = \frac{t-t_3}{t_5-t_3} = \frac{3.6-3}{5-3} = 0.3,$$

$$\alpha_3^2 = \frac{t-t_3}{t_4-t_3} = \frac{3.6-3}{4-3} = 0.6,$$

$$b_2^1 = (1 - 0.8)(7, -1) + 0.8(5, 2) = (5.4, 1.4),$$

$$b_3^1 = (1 - 0.3)(5, 2) + 0.3(4, 5) = (4.7, 2.9),$$

$$b_3^2 = (1 - 0.6)(5.4, 1.4) + 0.6(4.7, 2.9) = (4.98, 2.3) \text{ verir.}$$

Bu nedenle örnek 3.49'in sonucunu doğrulayan  $B(3.6) = (4.98, 2.3)$ .

### 3.3.3 B-spline eğrilerinin türevleri

Bir sonraki amaç,  $d$ . dereceden bir B-spline eğrisinin  $(d - 1)$ . dereceden bir B-spline'ı olarak türevinin saptanmasıdır. İlk adım,  $d$ . dereceden temel fonksiyonların türevlerini  $d - 1$ . dereceden temel fonksiyonlarına göre belirlemektir.

**Lemma 3.53.**  $d$ . dereceden B-spline temel fonksiyonları  $N_{i,d}(t)$  türevi, aşağıdaki gibi  $d - 1$ . dereceden temel fonksiyonları açısından elde edilebilir:

$$N'_{i,d}(t) = \frac{d}{t_{i+d}-t_i} N_{i,d-1}(t) - \frac{d}{t_{i+d+1}-t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t) \quad (26)$$

**Lemma 3.54.** İç knott $_i$  çokluk  $p_i$ 'ye sahip ise, o zaman  $N_{i,k}(t)$ ,  $t = t_i$ 'de  $C^{k-p_i}$  ve başka yerlerde  $C^\infty$ 'dur.

**Teorem 3.55.**  $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t)$ 'nin türevi

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(1)} N_{i,d-1}(t) \quad (27)$$

dir. burada

$$b_i^{(1)} = d \frac{b_{i+1} - b_i}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} \quad (28)$$

ve  $N_{i,d-1}^{(1)}(t)$  knot vektörü  $t_1, \dots, t_{m-1}$  üzerinde tanımlanan  $d - 1$ . dereceden temel fonksiyonlardır.

**Sonuç 3.56.**  $B(t)$ 'nin  $r$ . türevi

$$B^{(r)}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} N_{i,d-r}(t) \quad (29)$$

ile verilir. Burada  $b_i^0 = b_i$ ,

$$b_i^{(r)} = (d - r + 1) \frac{b_{i+1}^{(r-1)} - b_i^{(r-1)}}{t_{i+d+1} - t_{i+r}} \quad (30)$$

ve  $N_{i,d-r}^{(r)}(t)$  knot vektörü  $t_r, \dots, t_{m-r}$ 'de tanımlanan temel fonksiyonlardır.

**Örnek 3.57.** Kontrol noktaları  $b_0(2,1)$ ,  $b_1(4,8)$ ,  $b_2(5,-1)$ ,  $b_3(3,-2)$  ve  $b_4(2,-4)$  ile knot vektörü  $t_0 = 1.2$ ,  $t_1 = 1.4$ ,  $t_2 = 1.5$ ,  $t_3 = 2.0$ ,  $t_4 = 2.4$ ,  $t_5 = 3.1$ ,  $t_6 = 5.0$ ,  $t_7 = 7.3$ 'te tanımlanan 3. dereceden B-spline  $B(t)$  değerini düşünün. Daha sonra  $B(t)$  türevinin kontrol noktaları

$$b_0^{(1)} = 3 \frac{b_1 - b_0}{t_4 - t_1} = 3 \frac{(4,8) - (2,1)}{1.0} = (6.0, 21.0),$$

$$b_1^{(1)} = 3 \frac{b_2 - b_1}{t_5 - t_2} = 3 \frac{(5,-1) - (4,8)}{1.6} = (1.875, -16.875),$$

$$b_2^{(1)} = 3 \frac{b_3 - b_2}{t_6 - t_3} = 3 \frac{(3,-2) - (5,-1)}{3.0} = (-2.0, -1.0), \text{ ve}$$

$$b_3^{(1)} = 3 \frac{b_4 - b_3}{t_7 - t_4} = 3 \frac{(2,-4) - (3,-2)}{4.0} = (-0.75, -1.5).$$

Türev  $d = 2$  derecesine sahiptir ve knot vektörü  $t_0 = 1.4$ ,  $t_1 = 1.5$ ,  $t_2 = 2.0$ ,  $t_3 = 2.4$ ,  $t_4 = 3.1$ ,  $t_5 = 5.0$ ,  $t_6 = 6.4$ 'te tanımlanmıştır.

**Örnek 3.58.**  $d$ . dereceden bir açık B-spline'nin uç noktalarındaki türevler (Marsh, D.,1999)'den elde edilir.  $t_0 = t_1 = \dots = t_d$  ve  $t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  değerini

$$B'(t_d) = \sum_{i=1}^n d \frac{b_i - b_{i-1}}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t_d) = d \frac{b_1 - b_0}{t_{d+1} - t_1} N_{1,d-1}(t_d) = d \frac{b_1 - b_0}{t_{d+1} - t_1} \quad (31)$$

$$B'(t_{m-d}) = \sum_{i=1}^n d \frac{b_i - b_{i-1}}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t_{m-d}) = d \frac{b_n - b_{n-1}}{t_{d+n} - t_n} N_{n,d-1}(t_{m-d}) = d \frac{b_n - b_{n-1}}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} \quad (32)$$

olarak ayarlayın ve böylece Denklem (22) doğrulayın.

### 3.3.4 Uniform olmayan rasyonel B-spline (NURBS)

Rasyonel B-spline eğrileri (integral) B-splinelardan, rasyonel Bezier eğrilerinin (integral) Bezier eğrilerinden elde edildiği şekilde benzer bir şekilde elde edilir. Bunlar genellikle uniform olmayan rasyonel B-splineları temsil eden NURBS olarak adlandırılır.

**Tanım 3.59.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ağırlıkları  $w_0, \dots, w_n$  ve knot vektör  $t_0, t_1, \dots, t_m$  olan  $d$ . dereceden (dizi  $d + 1$ ) eğri NURBS,

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i N_{i,d}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,d}(t)} \quad (33)$$

ile verilen  $[a, b] = [t_d, t_{m-d}]$  aralığında tanımlanan eğridir. Burada  $N_{i,d}(t)$  belirtilen knot vektöründe tanımlanan B-spline temel fonksiyonları ve  $w_i = 0$  ise  $w_i b_i$ 'nin  $b_i$  ile değiştirileceği anlayışıyla. Eğri aynı zamanda

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i R_{i,d}(t)$$

biçimimde de yazılabilir. Burada

$$R_{i,d}(t) = \frac{w_i N_{i,d}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j N_{j,d}(t)}$$

rasyonel B-spline temel işlevleridir.

$b_i = (x_i, y_i, z_i)$  olsun. Homojen kontrol noktalarını  $\hat{b}_i$

$$\hat{b}_i = \begin{cases} (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i), & \text{eğer } w_i \neq 0 \text{ ise} \\ (x_i, y_i, z_i, 0), & \text{eğer } w_i = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Homojen koordinatlarda NURBS eğrisi

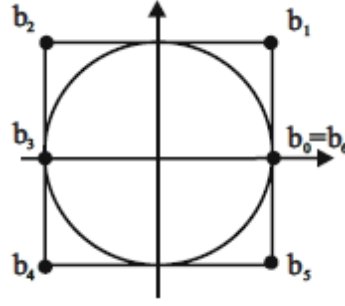
$$B(t) = \sum_{i=0}^n \hat{b}_i N_{i,d}(t)$$

formuna sahiptir.

Knot vektörü ve kontrol noktalarının uygun seçimleri açık veya periyodik rasyonel B-spline kavramlarına yol açar. Açık bir knot vektörü son nokta interpolasyonu olan bir NURBS eğrisi verir. Periyodik bir knot vektörü, tekrarlanan kontrol noktaları (Bölüm 3.3.1.3'de açıklandığı gibi) ve ilk  $d$  ağırlıklarının oranlarının son  $d$  ağırlıklarının oranına eşit olduğu bir ağırlık grubu seçerek kapalı bir periyodik NURBS elde edilir.

### Örnek 3.60. (NURBS Çemberi)

Devrimin yüzeylerinin yapımında bir çemberin NURBS temsili kullanılmıştır. (Marsh, D., 1999) Orijinde merkezde birim daire (bkz. şekil 11)  $[0,1]$  aralığında tanımlanan açık kuadratik bir NURBS ile temsil edilebilir. Knot vektörü  $0,0,0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1,1,1$  kontrol noktalarını  $b_0(1,0), b_1(1,1), b_2(-1,1), b_3(-1,0), b_4(-1,-1), b_5(1,-1), b_6(1,0)$  ve karşılık gelen ağırlıkları  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$  alın. Keyfi çemberler ve elipsler, kontrol noktalarına dönüşümler uygulanarak elde edilebilir. Bir NURBS çemberi elde etmenin bir çok yolu olduğunu unutmayınız.



Şekil 11. Bir birim çemberin NURBS gösterimi

**Teorem 3.61.** (33) tarafından verilen bir NURBS eğrisi  $B(t)$  aşağıdaki özellikleri verir.

**Bölgesel Kontrol:** Eğer  $t \in [t_r, t_{r+1})$  ( $d \leq r \leq m - d - 1$ ) ise o zaman

$$B(t) = \frac{\sum_{i=r-d}^r w_i b_i N_{i,d}(t)}{\sum_{i=r-d}^r w_i N_{i,d}(t)} = \sum_{i=r-d}^r b_i R_{i,d}(t)$$

dir.

**Konveks Hull Özelliği:** Eğer  $w_i$  ağırlıkları pozitif ise ve  $t \in [t_r, t_{r+1})$  ( $d \leq r \leq m - d - 1$ ) ise o zaman  $B(t) \in CH\{b_{r-d}, \dots, b_r\}$ .

**Süreklilik:** Eğer  $p_i, t = u_i$ 'de  $C^{d-p_i}$  (veya daha büyüktür) ve başka yerlerde  $C^\infty$ 'dur.

**Afin Dönüşümler Altındaki Değişmezlik:**  $T$  bir afin dönüşüm olsun. O zaman

$$T \left( \frac{\sum_{i=r-d}^r w_i b_i N_{i,d}(t)}{\sum_{i=r-d}^r w_i N_{i,d}(t)} \right) = \frac{\sum_{i=r-d}^r w_i T(b_i) N_{i,d}(t)}{\sum_{i=r-d}^r w_i N_{i,d}(t)}$$

dir.

**Projektif Dönüşümler Altındaki Değişmezlik:**  $T$  bir projektif dönüşüm olsun.

O zaman

$$T \left( \sum_{i=0}^n \hat{b}_i N_{i,d}(t) \right) = \sum_{i=0}^n T(\hat{b}_i) N_{i,d}(t)$$

burada  $\hat{b}_i$ , homojen kontrol noktalarıdır.

Ağırlık değiştirmenin etkisiyle ilgili olarak Teorem 3.39'in benzer sonucu, aşağıdaki teoremdir.

**Teorem 3.62.** Bir ağırlığın  $w_k$ 'den  $w_k^* = w_k + \delta w_k$ 'ye değişmesinin etkisi, eğri üzerindeki  $b = B(t)$  noktasının  $\overrightarrow{bb_k}$  doğrusu yönünde hareket etmesidir.(burada  $b_k, k$ .kontrol noktasıdır.)

### 3.3.5 NURBS eğrisinin türevi

Bir NURBS'nin türevini belirlemek için tekrarlayıcı bir formül, rasyonel bir fonksiyonun türevini belirleyen denklem (16)'dan elde edilir. Bir NURBS

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i N_{i,d}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,d}(t)},$$

için (7.15) de  $f(t) = \sum_{i=0}^n w_i b_i N_{i,d}(t)$  ve  $g(t) = \sum_{i=0}^n w_i N_{i,d}(t)$  olsun.  $f(t)$  ve  $g(t)$ 'nin türevleri, B-spline türevlerini hesaplamak için algoritma uygulanarak elde edilir (bölüm 3.3.3) buradaki  $w_i b_i f(t)$ 'nin kontrol noktaları olarak kabul edilir ve  $w_i g(t)$ 'nin kontrol noktaları olarak kabul edilir.

**Örnek 3.63.** Ağırlıkları  $w_0 = 1.0, w_1 = 1.5, w_2 = 2.0, w_3 = 1.5, w_4 = 1.0$  ve kontrol noktaları  $b_0(2,1), b_1(4,8), b_2(5,-1), b_3(3,-2), b_4(2,-4)$  ile knot vektörü  $t_0 = 1.2, t_1 = 1.4, t_2 = 1.5, t_3 = 2.0, t_4 = 2.4, t_5 = 3.1, t_6 = 5.0, t_7 = 6.4, t_8 = 7.3$  üzerinde tanımlanan 3. dereceden NURBS düşünün. Daha sonra  $f(t) = \sum_{i=0}^n w_i b_i N_{i,d}(t)$ ,  $w_0 b_0 = (2,1)$ ,  $w_1 b_1(6,12)$ ,  $w_2 b_2(10,-2)$ ,  $w_3 b_3(4.5,-3)$  ve  $w_4 b_4(2,-4)$  kontrol noktalarına sahiptir. Böylece  $f'(t)$

$$b_0^{(1)} = 3 \frac{w_1 b_1 - w_0 b_0}{t_4 - t_1} = \frac{3((6,12) - (2,1))}{2.4 - 1.4} = (12.0, 33.0),$$

$$b_1^{(1)} = 3 \frac{w_2 b_2 - w_1 b_1}{t_5 - t_2} = \frac{3((10,-2) - (6,12))}{3.1 - 1.5} = (7.5, -26.25),$$

$$b_2^{(1)} = 3 \frac{w_3 b_3 - w_2 b_2}{t_6 - t_3} = \frac{3((4.5,-3) - (10,-2))}{5.0 - 2.0} = (-5.5, -1.0),$$

$$b_3^{(1)} = 3 \frac{w_4 b_4 - w_3 b_3}{t_7 - t_4} = \frac{3((2,-4) - (4.5,-3))}{6.4 - 2.4} = (-1.875, -0.75)$$

kontrol noktaları ile tanımlanmıştır.

$g(t) = \sum_{i=0}^n w_i N_{i,d}(t)$  fonksiyonu,

$$w_0^{(1)} = 3 \frac{w_1 - w_0}{t_4 - t_1} = \frac{3(1.5 - 1.0)}{2.4 - 1.4} = 1.5,$$

$$w_1^{(1)} = 3 \frac{w_2 - w_1}{t_5 - t_2} = \frac{3(2.0 - 1.5)}{3.1 - 1.5} = 0.9375,$$

$$w_2^{(1)} = 3 \frac{w_3 - w_2}{t_6 - t_3} = \frac{3(1.5 - 2.0)}{5.0 - 2.0} = -0.5,$$

$$w_3^{(1)} = 3 \frac{w_4 - w_3}{t_7 - t_4} = \frac{3(1.0 - 1.5)}{6.4 - 2.4} = -0.375$$

kontrol noktalarına sahip bir türe ve sahiptir. Daha sonra  $B'(t)$ , Denklem (16)'e geçerek ve  $f(t), g(t), f'(t), g'(t)$ 'nin değerleri belirlenerek hesaplanır. Örneğin  $B'(2.7)$ , aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$f(t) = (2,1)N_{0,3}(2.7) + (6,12)N_{1,3}(2.7) + (10,-2)N_{2,3}(2.7) + (4.5,-3)N_{3,3}(2.7) + (2,-4)N_{4,3}(2.7),$$

$$g(2.7) = 1.0N_{0,3}(2.7) + 1.5N_{1,3}(2.7) + 2.0N_{2,3}(2.7) + 1.5N_{3,3}(2.7) + 1.0N_{4,3}(2.7),$$

$$f'(2.7) = (12.0,33.0)N_{0,2}^{(1)}(2.7) + (7.5,-26.25)N_{1,2}^{(1)}(2.7) + (-5.5,-1.0)N_{2,2}^{(1)}(2.7) + (-1.875,-0.75)N_{3,2}^{(1)}(2.7),$$

$$g'(2.7) = 1.5N_{0,2}^{(1)}(2.7) + 0.9375N_{1,2}^{(1)}(2.7) - 0.5N_{2,2}^{(1)}(2.7) - 0.375N_{3,2}^{(1)}(2.7).$$

Temel fonksiyonlar ve Alıştırma 3.56'de belirlendi ve değerlendirildi.(Alıştırma rasyonel olmayan bir B-spline içindi).  $t = 2.7$ de,  $N_{0,3} = 0.0$ ,  $N_{1,3} = 0.05195$ ,  $N_{2,3} = 0.72529$ ,  $N_{3,3} = 0.21905$ ,  $N_{4,3} = 0.00371$  ve  $N_{0,2}^{(1)} = 0.0$ ,  $N_{1,2}^{(1)} = 0.20779$ ,  $N_{2,2}^{(1)} = 0.74276$ ,  $N_{3,2}^{(1)} = 0.04945$ . Bundan dolayı

$$\begin{aligned} f(2.7) &= (2,1)0.0 + (6,12)0.05195 + (10,-2)0.72529 + (4.5,-3)0.21905 \\ &\quad + (2,-4)0.00371 \\ &= (8.5577, -1.4992), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(2.7) &= (1.0)0.0 + (1.5)0.05195 + (2.0)0.72529 + (1.5)0.21905 + (1.0)0.00371 \\ &= 1.8608, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2.7) &= (12.0,33.0)0.0 + (7.5,-26.25)0.20779 + (-5.5,-1.0)0.74276 \\ &\quad + (-1.875,-0.75)0.04945 \\ &= (-2.6195, -6.2343), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(2.7) &= (1.5)0.0 + (0.9375)0.20779 - (0.5)0.74276 - (0.375)0.04945 \\ &= -0.19512. \end{aligned}$$

Böylece  $B(2.7) = (8.5577, -1.4992)/1.8608 = (4.59894, -0.80568)$  ve

$$\begin{aligned} B'(2.7) &= \frac{f'(2.7) - g'(2.7)B(2.7)}{g(2.7)} \\ &= \frac{(-2.6195, -6.2343) - (-0.19512)(4.59894, -0.80568)}{1.8608} \\ &= (-0.92549, -3.4348). \end{aligned}$$

### 3.3.6 Rasyonel De Boor algoritması

Rasyonel de Boor algoritması, de casteljau algoritmasından gelen rasyonel de casteljau algoritmasının türetilmesine benzer şekilde de Boor algoritmasından elde edilir.  $b_i^0 = b_i$  ve  $w_i^0 = w_i$  değerini ayarlayın ve  $t \in [t_r, t_{r+1})$  olduğunu varsayalım.

Rasyonel de Boor algoritması,  $j = 1, \dots, d$  ve  $i = r - d + 1, \dots, r$  için

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i^j &= \frac{t-t_i}{t_{i+d-j+1}-t_i}, \\ w_i^j &= (1 - \alpha_i^j)w_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j w_i^{j-1}, \\ w_i^j b_i^j &= (1 - \alpha_i^j)w_{i-1}^{j-1} b_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j w_i^{j-1} b_i^{j-1}, \quad j > 0 \text{ için} \end{aligned} \right\} \quad (34)'den$$

Algoritma  $B(t) = b_r^d$  verir.

Nokta değerlendirmesine ek olarak, de Boor veya rasyonel de Boor algoritması, B-spline veya NURBS eğrisini alt bölümlere ayırmak için kullanılabilir. Alt bölüm, sadece bir eğri ayırma aracı değil, aynı zamanda eğri tasarımı için ek özgürlükler sağlamak amacıyla ekstra kontrol noktaları ( ve ağırlıklar) yaratmanın bir yoludur. De casteljau algoritmasını kullanan Bezier eğrileri için kesişim algoritmaları, de Boor algoritması kullanılarak B-spline ve NURBS eğrilerine genişletilebilir.

**Örnek 3.64.** Ağırlıkları  $w_0 = 1.0, w_1 = 1.5, w_2 = 2.0, w_3 = 1.5, w_4 = 1.0$  ve kontrol noktaları  $b_0(2,1), b_1(4,8), b_2(5,-1), b_3(3,-2), b_4(2,-4)$  olan ve knot vektörü  $t_0 = 1.2, t_1 = 1.4, t_2 = 1.5, t_3 = 2.0, t_4 = 2.4, t_5 = 3.1, t_6 = 5.0, t_7 = 6.4, t_8 = 7.3$  üzerinde tanımlanan 3. dereceden NURBS eğrisi düşünün.  $B(2.7)$  noktasını belirleyiniz.  $2.7 \in [2.4, 3.1) = [t_4, t_5)$ , olduğundan  $r = 4$ . O zaman

$$\alpha_2^1 = \frac{t - t_2}{t_5 - t_2} = \frac{2.7 - 1.5}{3.1 - 1.5} = 0.75, \quad \alpha_3^1 = \frac{t - t_3}{t_6 - t_3} = \frac{2.7 - 2.0}{5.0 - 2.0} = 0.23333,$$

$$\alpha_4^1 = \frac{t - t_4}{t_7 - t_4} = \frac{2.7 - 2.4}{6.4 - 2.4} = 0.075.$$

O zaman

$$w_2^1 = (1 - \alpha_2^1)w_1^0 + \alpha_2^1 w_2^0 = (1 - 0.75)1.5 + (0.75)2.0 = 1.875,$$

$$w_3^1 = (1 - \alpha_3^1)w_2^0 + \alpha_3^1 w_3^0 = (1 - 0.23333)2.0 + (0.23333)1.5 = 1.8833,$$

$$w_4^1 = (1 - \alpha_4^1)w_3^0 + \alpha_4^1 w_4^0 = (1 - 0.075)1.5 + (0.075)1.0 = 1.4625.$$

Yeni kontrol nokta sırası

$$b_2^1 = \frac{(1 - \alpha_2^1)w_1^0 b_1^0 + \alpha_2^1 w_2^0 b_2^0}{w_2^1} = \frac{(1 - 0.75)1.5(4,8) + (0.75)2.0(5, -1)}{1.875}$$

$$= (4.8, 0.8),$$

$$b_3^1 = \frac{(1 - \alpha_3^1)w_2^0 b_2^0 + \alpha_3^1 w_3^0 b_3^0}{w_3^1} = \frac{(1 - 0.23333)2.0(5, -1) + (0.23333)1.5(3, -2)}{1.8833}$$

$$= (4.6284, -1.1858),$$

$$b_4^1 = \frac{(1 - \alpha_4^1)w_3^0 b_3^0 + \alpha_4^1 w_4^0 b_4^0}{w_4^1} = \frac{(1 - 0.075)1.5(3, -2) + (0.075)1.0(2, -4)}{1.4625}$$

$$= (2.9487, -2.1026).$$

$$\alpha_3^2 = \frac{t - t_3}{t_5 - t_3} = \frac{2.7 - 2.0}{3.1 - 2.0} = 0.63636, \quad \alpha_4^2 = \frac{t - t_4}{t_6 - t_4} = \frac{2.7 - 2.4}{5.0 - 2.4} = 0.11538.$$

O zaman

$$w_3^2 = (1 - \alpha_3^2)w_2^1 + \alpha_3^2 w_3^1 = (1 - 0.63636)1.875 + (0.63636)1.8833 = 1.8803,$$

$$w_4^2 = (1 - \alpha_4^2)w_3^1 + \alpha_4^2 w_4^1 = (1 - 0.11538)1.8833 + (0.11538)1.4625 = 1.8347.$$

Yeni kontrol nokta sırası

$$b_3^2 = \frac{(1 - \alpha_3^2)w_2^1 b_2^1 + \alpha_3^2 w_3^1 b_3^1}{w_3^2}$$

$$= \frac{(1 - 0.63636)1.875(4.8, 0.8) + (0.63636)1.8833(4.6284, -1.1858)}{1.8803}$$

$$= (4.6906, -0.46571),$$

$$b_4^2 = \frac{(1 - \alpha_4^2)w_3^1 b_3^1 + \alpha_4^2 w_4^1 b_4^1}{w_4^2}$$

$$= \frac{(1 - 0.11538)1.8833(4.6284, -1.1858) + (0.11538)1.4625(2.9487, -2.1026)}{1.8347}$$

$$= (4.474, -1.2701),$$

$$\alpha_4^3 = \frac{t - t_4}{t_5 - t_4} = \frac{2.7 - 2.4}{3.1 - 2.4} = 0.42857.$$

O zaman

$$w_4^3 = (1 - \alpha_4^3)w_3^2 + \alpha_4^3 w_4^2 = (1 - 0.42857)1.8803 + (0.42857)1.8347 = 1.8608.$$

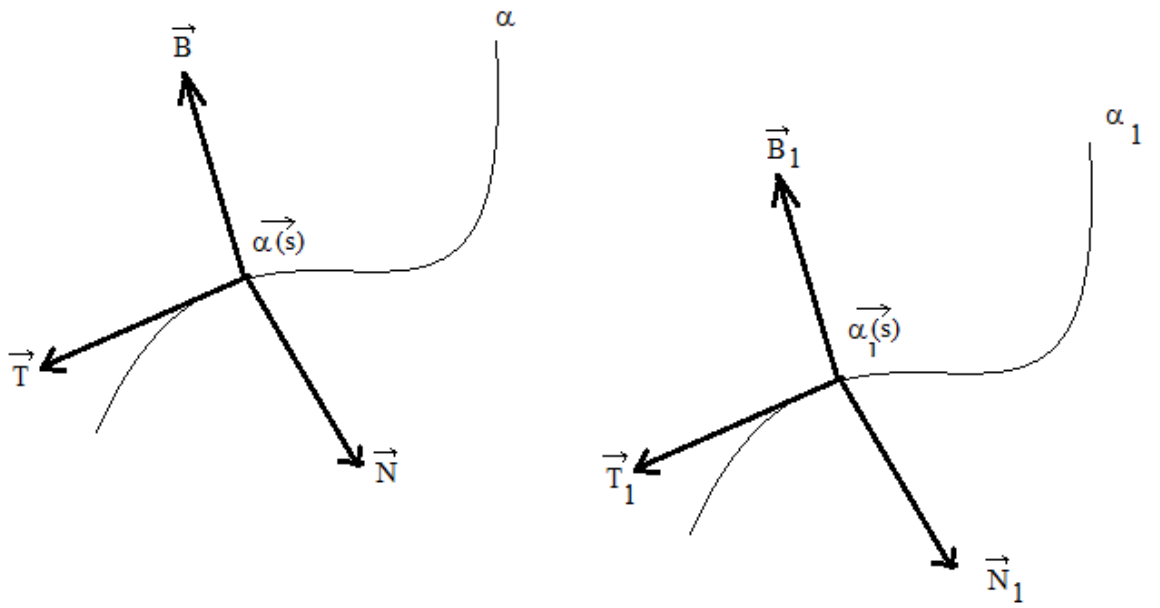
Son kontrol noktası

$$\begin{aligned}
b_4^3 &= \frac{(1 - \alpha_4^3)w_3^2 b_3^2 + \alpha_4^3 w_4^2 b_4^2}{w_4^3} \\
&= \frac{(1 - 0.42857)1.8803(4.6906, -0.46571) + (0.42857)1.8347(4.474, -1.2701)}{1.8608} \\
&= (4.599, -0.80562).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla  $B(2.7) = (4.599, -0.80562)$ .

### 3.4 Bertrand Eğri Çiftleri

$\vec{\alpha}$  ve  $\vec{\alpha}_1$  gibi iki eğri ele alalım. Bunların asal normalleri bu eğriler boyunca ortaksa bu tür eğrilere BERTRAND EĞRİ ÇİFTİ denir. (Şekil 12)



Şekil 12. Bertrand eğri çiftleri

(Şekil 12) den de görüleceği gibi

$$\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha} + \lambda \vec{N}$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\vec{N}$   $\vec{\alpha}$  nın birim asal normal vektörü ve  $\lambda$  skaleri ise  $\vec{\alpha}_1$  eğrisinin bir  $\vec{\alpha}_1(s)$  noktasının  $\vec{\alpha}$  nın buna karşılık gelen bir  $\vec{\alpha}(s)$  noktasına olan uzaklığıdır.  $\lambda$  skalerini o şekilde belirlemek istiyoruz ki  $\vec{\alpha}$  ve  $\vec{\alpha}_1$  eğrilerinin asal normali her noktada ortak olsun.

**Teorem 3.65.**  $(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1)$  Bertrand eğri çifti verilsin.  $\vec{\alpha}$  ve  $\vec{\alpha}_1$  eğrileri  $\forall s \in I$  için  $\vec{\alpha}(s)$  ve  $\vec{\alpha}_1(s)$  noktalarında

$$d(\vec{\alpha}(s), \vec{\alpha}_1(s)) = \text{sabit}$$

özeliğine sahiptir.

**Teorem 3.66.** Verilen bir  $\vec{\alpha}$  eğrisi için  $\vec{\alpha}$  ve  $\vec{\alpha}_1$  Bertrand eğrileri olacak şekilde bir  $\vec{\alpha}_1$  eğrisinin mevcut olması için gerek ve yeter şart,  $\vec{\alpha}$  eğrisinin  $k$  eğriliği ile  $\tau$  burulmasının sabit katsayılı bir

$$c_1 k(t) + c_2 \tau(t) = 1 \quad (35)$$

lineer bağıntısını sağlamasıdır.

**Teorem 3.67.**  $\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1$  Bertrand eğri çiftlerinin burulmalarının çarpımı sabittir ve her ikisinde aynı işaretlidir.

### 3.4.1. Bertrand eğri çiftlerinin belirlenmesi

Tanım aralığında en az 3. sınıftan bir  $\vec{\alpha}$  eğrisinin binormalleri ile tanımlanan

$$\vec{\alpha}_1(s) = \int \vec{B}(s) ds \quad (36)$$

$\vec{\alpha}_1$  eğrisinin Frenet vektörleri  $\{\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1\}$ , yay uzunluğu  $s_1$ , eğrilik ve burulması  $k_1, \tau_1$  olsun. Bu taktirde  $s_1$  yay uzunluğu  $s$  yay uzunluğuna eşittir.

Gerçekten, (36) eşitliğinin her iki yanının  $s$  ye göre türevini alırsak

$$\frac{d\vec{\alpha}_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \vec{B}$$

$$\vec{T}_1 \cdot \frac{ds_1}{ds} = \vec{B}$$

olur.  $\vec{\alpha}$  eğrisinin pozitif çiziliş yönünü

$$\vec{T}_1 = \vec{B} \quad (37)$$

olarak seçersek

$$\frac{ds_1}{ds} = 1 \text{ veya } s_1 = s \quad (\text{int sab}=0) \quad (38)$$

bulunur. Üstelik

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$$

denklemlerle tanımlanan  $\vec{\alpha}$  eğrisinin eğriliği sabitse

$$\vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha} \cos \theta - \vec{\alpha}_1 \sin \theta, \quad (\theta=\text{sabit}) \quad (39)$$

vektörel bağıntısıyla tanımlanan  $\vec{\alpha}_2$  eğrisi bir Bertrand eğrisidir.

Gerçekten  $\vec{\alpha}_2$  eğrisinin yay uzunluğu  $s_2$ , Frenet vektörleri  $\{\vec{T}_2, \vec{N}_2, \vec{B}_2\}$ , eğrilik ve burulması  $k_2$  ve  $\tau_2$  olsun. Buna göre (39) eşitliğinin her iki yanının  $s$  ye göre türevi, (38) bağıntısı dolayısıyla

$$\vec{T}_2 \cdot \frac{ds_2}{ds} = \vec{T} \cos \theta - \vec{T}_1 \sin \theta$$

şeklindedir.

$\vec{T}_2$ 'yi (37) dolayısıyla

$$\vec{T}_2 = \vec{T} \cos \theta - \vec{B} \sin \theta \quad (40)$$

olacak biçimde seçersek

$$\frac{ds_2}{ds} = 1 \text{ veya } s_2 = s_1 \text{ (int sabiti=0)} \quad (41)$$

dır. O halde (40) denkleminin  $s$  ye göre türevini alırsak

$$k_2 \vec{N}_2 = (k \cos \theta + \tau \sin \theta) \vec{N}$$

bulunur. Eğer

$$\vec{N}_2 = \vec{N}_1 = \vec{N} \quad (42)$$

olarak alırsak

$$k_2 = k \cos \theta + \tau \sin \theta \quad (43)$$

bulunur.

Öte yandan (40) ve (42) eşitlikleri

$$\vec{T}_2 \wedge \vec{N}_2 = \vec{B} \cos \theta + \vec{T} \sin \theta \quad (44)$$

yı vereceğinden bunun  $s$  ye göre türevi (42) eşitlikleri nedeniyle

$$\tau_2 = \tau \cos \theta - k \sin \theta \quad (45)$$

şeklindedir.

(43) ve (45) eşitlikleri arasında  $\tau$  yok edilirse  $k_2$  ve  $\tau_2$  arasında lineer ve sabit katsayılı

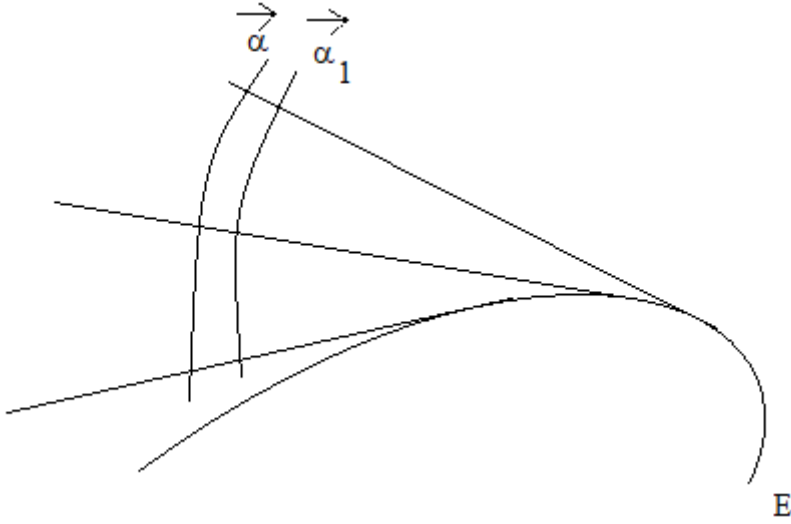
$$k_2 \cos \theta - \tau_2 \sin \theta = k \quad (46)$$

bağıntısı bulunur ki bu da  $\vec{\alpha}_2$  eğrisinin bir Bertrand eğrisi olduğunu gösterir.

### 3.4.2. Bertrand eğri çiftine ilişkin örnekler

**Örnek:3.68.** Eğer  $\vec{\alpha}$  bir düzlemsel eğri ise, bu taktirde  $\vec{\alpha}$  ve  $\vec{\alpha}_1$  Bertrand eğrileri olacak şekilde daima bir  $\vec{\alpha}_1$  eğrisi bulabiliriz.

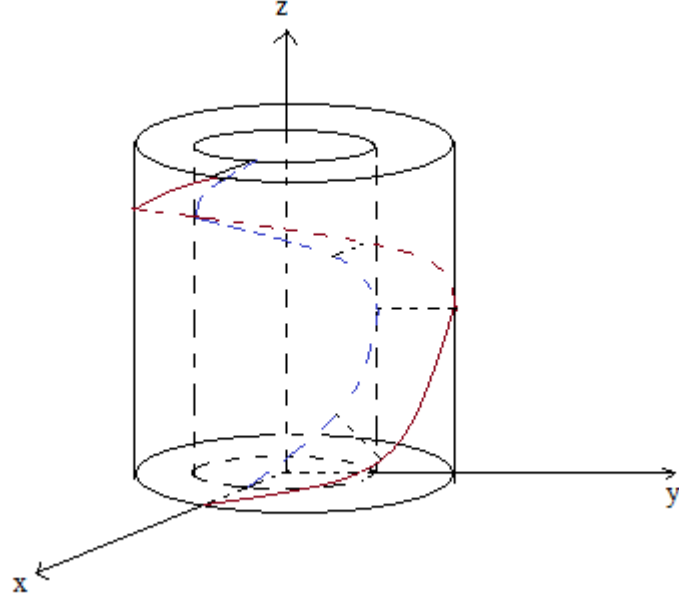
Gerçekten, eğer  $E$ ,  $\vec{\alpha}$  eğrisinin evolütü ise bu durumda  $E$  nin tüm  $\vec{\alpha}_1$  involütleri verilen  $\vec{\alpha}$  eğrisinin sahip olduğu aynı asal normale sahiptir.



**Şekil 13.** Bir  $\alpha$  eğrisi ve onun evolütü  $E$

Çünkü evolütün tanımına göre, bu eğriler (şekil 13) den de görüldüğü gibi  $E$  nin teğetlerini dik açı altında keserler. Bundan dolayı  $\vec{\alpha}$  eğrisi ile  $\vec{\alpha}_1$  eğrilerinden herhangi birisi bir Bertrand eğri çifti oluştururlar. Üstelik bu involütlerin herhangi ikisinin karşılıklı noktaları arasındaki ortak asal normal boyunca ölçülen uzaklık sabittir. Böylece ortak asal normallere sahip iki düzlemsel eğri, düzlemsel paralel eğriler olarak adlandırılır.

**Örnek: 3.69.** Bir  $\vec{\alpha}$  dairesel helisinin asal normalleri ana eksenini  $z$  olan bir  $z$  silindirisinin dönme eksenini dik açılarla keserler.  $z$  ile ortak eksenli herhangi bir  $z$  silindiri ile bu normallerin arakesit noktaları bir  $\vec{\alpha}_1$  dairesel helisini belirler. (Şekil 14)



Şekil 14.  $\alpha$  ve  $\alpha_1$  helisleri

Açıkçası  $\vec{\alpha}$  ve  $\vec{\alpha}_1$  eğrileri Bertrand eğrileridir ve  $\vec{\alpha}$  ile birlikte Bertrand eğri çifti oluşturacak şekilde bu tipte sonsuz çoklukta  $\vec{\alpha}_1$  helisleri vardır.

### 3.5 $t=0$ İçin Başlangıç Noktasında Bezier ve Rasyonel Bezier Eğrisinin Eğrilikleri ve Frenet Formülü

**Teorem 3.70.** Rastgele hızda eğri  $\alpha: I \rightarrow R^3$  olarak verilsin ve  $\alpha$ 'nın hızı  $v = \|\alpha'\|$  olarak gösterilsin.  $\{T, N, B\}$ ,  $\alpha$  eğrisinin Frenet vektör alanları olsun ve  $\{\kappa, \tau\}$   $\alpha$ 'nın eğriliği ve burulması olsun. O zaman

$$T' = v\kappa N$$

$$N' = v(-\kappa T + \tau B) \quad (47)$$

$$B' = -v\tau N \text{ dir.}$$

**Teorem 3.71.**  $\alpha: I \rightarrow R^3$ 'ün rastgele hızda regüler (düzenli) eğri olsun. O zaman

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \quad \kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \quad (48)$$

$$N = B \times T \quad \tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \text{ dir.}$$

**Teorem 3.72.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir Bezier eğrisi  $B(t)$  olsun. Daha sonra Bezier eğrisi  $B(t)$ 'nin  $t = 0$  noktasındaki Frenet vektör alanları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T|_{t=0} &= \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \\ B|_{t=0} &= \frac{(b_1 - b_0) \wedge (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \wedge (b_2 - b_1)\|} \\ N|_{t=0} &= \frac{b_2 - b_1}{\|b_2 - b_1\|} \csc \psi + \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \cot \psi \end{aligned} \quad (49)$$

burada  $\psi$ ,  $b_1 - b_0$  ve  $b_2 - b_1$  vektörleri arasındaki açıdır.

**Teorem 3.73.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir Bezier eğrisi  $B(t)$  olsun. Daha sonra Bezier eğrisi  $B(t)$ 'nin  $t = 0$  noktasındaki eğriliği ve burulması

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \psi \quad (50)$$

$$\tau = \frac{n-2}{n} \frac{\langle (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1), (b_3 - b_2) \rangle}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|^2} \quad (51)$$

Burada  $\psi$ ,  $b_1 - b_0$  ve  $b_2 - b_1$  arasındaki açıdır.

**Teorem 3.74.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir Bezier eğrisi  $B(t)$  olsun. Daha sonra  $t = 0$ 'da Serret-Frenet çatısının türev formülleri aşağıdadır.

$$T'|_{t=0} = (n-1) \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|} \sin \psi N \quad (52)$$

$$N'|_{t=0} = -(n-1) \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|} \sin \psi T + (n-2) \frac{\|b_1 - b_0\| \langle (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1), (b_3 - b_2) \rangle}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|^2} B \quad (53)$$

$$B'|_{t=0} = -(n-2) \frac{\|b_1 - b_0\| \langle (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1), (b_3 - b_2) \rangle}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|^2} N \quad (54)$$

**Teorem 3.75.** Kontrol noktaları  $p_0, p_1, \dots, p_n$  ve ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi  $RB(t)$  olsun. Daha sonra rasyonel Bezier eğrisi  $RB(t)$ 'nin  $t = 0$  noktasındaki Frenet vektör alanları aşağıdaki gibidir.

$$T|_{t=0} = \frac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|} \quad (55)$$

$$B|_{t=0} = \frac{(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0)}{\|(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0)\|} \quad (56)$$

$$N|_{t=0} = \frac{p_2 - p_0}{\|p_2 - p_0\|} \csc \psi + \frac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|} \cot \psi \quad (57)$$

Burada  $\psi$ ,  $p_1 - p_0$  ve  $p_2 - p_0$  vektörleri arasındaki açıdır.

**Teorem 3.76.** Kontrol noktaları  $p_0, p_1, \dots, p_n$  ve ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi  $RB(t)$  olsun. Daha sonra rasyonel Bezier eğrisi  $RB(t)$ 'nin  $t = 0$  noktasındaki eğriliği  $\{\kappa, \tau\}$  aşağıdaki gibidir.

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \quad (58)$$

$$\tau = \frac{n-2}{n} \frac{w_0 w_3}{w_1 w_2} \frac{\|p_3 - p_0\| \cos \Phi}{\|p_1 - p_0\| \|p_2 - p_0\| \sin \psi} \quad (59)$$

Burada  $\psi$ ,  $p_1 - p_0$  ve  $p_2 - p_0$  vektörleri arasındaki açıdır ve  $\Phi(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0)$  ve  $p_3 - p_0$  vektörleri arasındaki açıdır.

**Teorem 3.77.** Kontrol noktaları  $p_0, p_1, \dots, p_n$  ve ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi  $RB(t)$  olsun. Daha sonra  $t = 0$ 'da Serret-Frenet çatısının türev formülleri aşağıdadır.

$$T'|_{t=0} = (n-1) \frac{w_2}{w_1} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|} \sin \psi N \quad (60)$$

$$N'|_{t=0} = -(n-1) \frac{w_2}{w_1} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|} \sin \psi T + (n-2) \frac{w_3}{w_2} \frac{\|p_3 - p_0\| \cos \Phi}{\|p_2 - p_0\| \sin \psi} B \quad (61)$$

$$B'|_{t=0} = -(n-2) \frac{w_3}{w_2} \frac{\|p_1 - p_0\| \langle (p_1 - p_0) \times (p_2 - p_1), (p_3 - p_2) \rangle}{\|(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_1)\|^2} N \quad (62)$$

Burada  $\Phi$ ,  $(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0)$  ve  $p_3 - p_0$  vektörleri arasındaki açıdır ve  $\psi$ ,  $p_2 - p_0$  ve  $p_1 - p_0$  vektörleri arasındaki açıdır (Samancı, 2018)

### 3.6 $t_0 \in [0, 1]$ İçin Keyfi Bir Noktada Frenet Formülü ve Bezier Eğrisinin Eğrilikleri

Bezier eğrileri için De Casteljau algoritması, herhangi bir  $t_0 \in [0, 1]$  parametresindeki bezier eğrileri  $B(t)$ 'nin,  $B(t_0)$  değerini hesaplamak için kullanılır ve ayrıca Bezier eğrisini  $B_{sağ}$  ve  $B_{sol}$  adlı iki eğri parçasına bölmek için kullanılır.

**Teorem 3.78.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve herhangi bir parametre  $t_0 \in [0, 1]$  olan  $n$ . dereceden bir Bezier eğrisi  $B(t)$  olsun. O zaman

$$B(t_0) = b_0^n \quad (63)$$

burada  $i = 0, 1, \dots, n$  için  $b_i^0 = b_i$  ve  $i = 0, 1, \dots, n-j$  için ve  $j = 0, 1, \dots, n$  için (Marsh, 1999)

$$b_i^j = (1 - t_0) b_i^{j-1} + t_0 b_{i+1}^{j-1} \quad (64)$$

Bu algoritma sonucunda, bölünmüş Bezier eğrilerinin  $B_{sol}$  ve  $B_{sağ}$  kontrol noktaları sırasıyla  $\{b_0^0, b_0^1, \dots, b_0^n\}$  ve  $\{b_0^n, b_1^{n-1}, \dots, b_{n-1}^1, b_n^0\}$ 'dir.

**Teorem 3.79.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir Bezier eğrisi  $B(t)$  olsun. O zaman Bezier eğrisi  $B(t)$ 'nin  $t = t_0$  için  $B(t_0)$  noktasındaki Frenet vektör alanları  $\{T, N, B\}$  aşağıdaki gibidir.

$$T|_{t=t_0} = \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \quad (65)$$

$$B|_{t=t_0} = \frac{(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})}{\|(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})\|} \quad (66)$$

$$N|_{t=t_0} = \frac{b_2^{n-2} - b_1^{n-1}}{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|} \csc \bar{\psi} + \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \cot \bar{\psi} \quad (67)$$

burada  $b_i^j$ , (9) ile formüle edilmiş alt bölme algoritması ile elde edilen Bezier bölmesi  $B_{sağ}$ 'ın kontrol noktalarıdır ve  $\bar{\psi}$ ,  $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$  ve  $b_1^{n-1} - b_0^n$  vektörleri arasındaki açıdır.

**Teorem 3.80.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir Bezier eğrisi  $B(t)$  olsun. O zaman, verilen  $B(t)$  bezier eğrisinin  $t = t_0$  için  $B(t_0)$  noktasındaki eğriliği ve burulması aşağıdaki gibidir.

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \quad (68)$$

$$\tau = \frac{n-2}{n} \frac{\langle (b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1}), (b_3^{n-3} - b_2^{n-2}) \rangle}{\|(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})\|^2} \quad (69)$$

Burada  $b_i^j$ , (9) ile formüle edilmiş alt bölme algoritması ile elde edilen Bezier bölümü  $B_{sağ}$ 'ın kontrol noktalarıdır,  $\bar{\psi}$ ,  $b_1^{n-1} - b_0^n$  ve  $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$  vektörleri arasındaki açıdır.

**Teorem 3.81.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir Bezier eğrisi  $B(t)$  olsun. Daha sonra  $t = t_0$  için  $B(t_0)$  noktasındaki Serret-Frenet çatısının türev formülleri aşağıdadır.

$$T'|_{t=t_0} = (n-1) \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \sin \psi N \quad (70)$$

$$N'|_{t=t_0} = -(n-1) \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \sin \psi T + (n-2) \frac{\|b_1^{n-1} - b_0^n\| \langle (b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1}), (b_3^{n-3} - b_2^{n-2}) \rangle}{\|(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})\|^2} B \quad (71)$$

$$B'|_{t=t_0} = -(n-2) \frac{\|b_1^{n-1} - b_0^n\| \langle (b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1}), (b_3^{n-3} - b_2^{n-2}) \rangle}{\|(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})\|^2} N \quad (72)$$

Burada  $b_i^j$ , (9) ile formüle edilmiş alt bölme algoritması ile elde edilen Bezier bölümü  $B'_{sağ}$ 'ın kontrol noktalarıdır,  $\bar{\psi}$ ,  $b_1^{n-1} - b_0^n$  ve  $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$  vektörleri arasındaki açıdır.

Bezier eğrileri için De Casteljaou algoritması, herhangi bir  $t_0 \in [0,1]$  parametresindeki rasyonel Bezier eğrisi  $RB(t)$ 'nin,  $RB(t_0)$  değerini hesaplamak için kullanılır ve ayrıca rasyonel Bezier eğrisini  $RB_{sağ}$  ve  $RB_{sol}$  adlı iki eğri parçasına bölmek için kullanılır.

$t_0 \in [0,1]$  herhangi bir parametre için kontrol noktaları  $p_0, p_1, \dots, p_n$  ve ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi  $RB(t)$  olsun. Daha sonra  $j = 0, 1, \dots, n$  ve  $i = 0, 1, \dots, n - j$  için

$$p_i^j = (1 - t_0) \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} p_i^{j-1} + t_0 \frac{w_{i+1}^{j-1}}{w_i^j} p_{i+1}^{j-1} \quad (73)$$

$$w_i^j = (1 - t_0) w_i^{j-1} + t_0 w_{i+1}^{j-1} \quad (74)$$

Burada  $i = 0, 1, \dots, n$  için  $p_i^0 = b_i$  ve  $w_i^0 = w_i$  ve

$$RB(t_0) = p_0^n \quad (75)$$

Bu algoritma sonucunda, bölünmüş rasyonel Bezier eğrilerinin  $RB_{sol}$  ve  $RB_{sağ}$  kontrol noktaları sırasıyla  $\{p_0^0, p_0^1, \dots, p_0^n\}$  ve  $\{p_0^n, p_1^{n-1}, \dots, p_{n-1}^1, p_n^0\}$ 'dir. Ayrıca bu eğrilerin ağırlıkları sırasıyla  $\{w_0^0, w_0^1, \dots, w_0^n\}$  ve  $\{w_0^n, w_1^{n-1}, \dots, w_{n-1}^1, w_n^0\}$ 'dir.

**Teorem 3.82.** Kontrol noktaları  $p_0, p_1, \dots, p_n$  ve ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi  $RB(t)$  olsun. O zaman rasyonel Bezier eğrisi  $RB(t)$ 'nin  $t = t_0$  için  $RB(t_0)$  noktasındaki Frenet vektör alanları  $\{T, N, B\}$  aşağıdaki gibidir.

$$T|_{t=t_0} = \frac{p_1^{n-1} - p_0^n}{p_1^{n-1} - p_0^n} \quad (76)$$

$$B|_{t=t_0} = \frac{(p_2^{n-2} - p_0^n) \times (p_1^{n-1} - p_0^n)}{(p_2^{n-2} - p_0^n) \times (p_1^{n-1} - p_0^n)} \quad (77)$$

$$N|_{t=t_0} = \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_2^{n-2} - p_0^n} \csc \bar{\psi} + \frac{p_1^{n-1} - p_0^n}{p_1^{n-1} - p_0^n} \cot \bar{\psi} \quad (78)$$

burada  $p_i^j$ , (15) ile formüle edilmiş alt bölme algoritması ile elde edilen rasyonel Bezier bölümü  $RB_{sağ}$ 'ın kontrol noktalarıdır ve  $\bar{\psi}$ ,  $b_2^{n-2} - b_0^n$  ve  $b_1^{n-1} - b_0^n$  vektörleri arasındaki açıdır.

**Teorem 3.83.** Kontrol noktaları  $p_0, p_1, \dots, p_n$  ve ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi  $RB(t)$  olsun. O zaman, verilen rasyonel Bezier eğrisi  $RB(t)$ 'nin  $t = t_0$  için  $RB(t_0)$  noktasındaki eğriliği ve burulması aşağıdadır.

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{w_0^n w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - p_0^{n-2}} \sin \bar{\psi} \quad (79)$$

$$\tau = \frac{n-2}{2} \frac{w_0^n w_3^{n-3}}{w_1^{n-1} w_2^{n-2}} \frac{p_3^{n-3} - p_0^n \cos \bar{\Phi}}{p_1^{n-1} - p_0^n p_2^{n-2} - p_0^n \sin \bar{\psi}} \quad (80)$$

Burada  $p_i^j$ , (15) ile formüle edilmiş alt bölme algoritması ile elde edilen rasyonel Bezier bölümü  $RB_{sağ}$ 'ın kontrol noktaları ve  $w_i^j$  ise ağırlıklarıdır ve  $\bar{\psi}$ ,  $p_1^{n-1} - p_0^n$  ve  $p_2^{n-2} - p_0^n$  vektörleri arasındaki açıdır ve  $\bar{\Phi}$ ,  $p_3^{n-3} - p_0^n$  ve  $(p_1^{n-1} - p_0^n) \times (p_2^{n-2} - p_0^n)$  vektörleri arasındaki açıdır.

**Teorem 3.84.** Kontrol noktaları  $p_0, p_1, \dots, p_n$  ve ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ile verilen  $n$ . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi  $RB(t)$  olsun. Daha sonra  $t = t_0$  daki Serret-Frenet çatısının türev formülleri aşağıdadır.

$$T' = (n-1) \frac{w_2^{n-2}}{w_1^{n-1}} \frac{\|p_2^{n-2} - p_0^n\|}{\|p_1^{n-1} - p_0^n\|} \sin \bar{\psi} N \quad (81)$$

$$N' = -(n-1) \frac{w_2^{n-2}}{w_1^{n-1}} \frac{\|p_2^{n-2} - p_0^n\|}{\|p_1^{n-1} - p_0^n\|} \sin \bar{\psi} T + (n-2) \frac{w_3^{n-3}}{w_2^{n-2}} \frac{\|p_3^{n-3} - p_0^n\| \cos \bar{\Phi}}{\|p_2^{n-2} - p_0^n\| \sin \bar{\psi}} B \quad (82)$$

$$B' = -(n-2) \frac{w_3^{n-3}}{w_2^{n-2}} \frac{\|p_3^{n-3} - p_0^n\| \cos \bar{\Phi}}{\|p_2^{n-2} - p_0^n\| \sin \bar{\psi}} N \quad (83)$$

Burada  $p_i^j$ , (15) ile formüle edilmiş alt bölme algoritması ile elde edilen rasyonel Bezier bölümü  $RB_{sağ}$ 'ın kontrol noktaları ve  $\bar{\psi}$ ,  $p_1^{n-1} - p_0^n$  ve  $p_2^{n-2} - p_0^n$  vektörleri arasındaki açıdır ve  $\bar{\Phi}$ ,  $(p_1^{n-1} - p_0^n) \times (p_2^{n-2} - p_0^n)$  ve  $p_3^{n-3} - p_0^n$  vektörleri arasındaki açıdır. (Samancı, 2018)

### Örnekler 3.85.

1) Kübik Bezier eğrisi ile kontrol noktaları  $b_0 = (4, 2, 2)$ ,  $b_1 = (2, 1, 4)$ ,  $b_2 = (3, 4, 1)$ ,  $b_3 = (3, 5, 5)$  verilsin. Bu eğrinin parametrik denklemi

$$B(t) = \begin{pmatrix} -4t^3 + 9t^2 - 6t + 4, & -6t^3 + 12t^2 - 3t + 2, \\ 12t^3 - 15t^2 + 6t + 2 \end{pmatrix}$$

olarak ifade edilebilir.  $t = 0$  verelim. Sonra, Frenet çatısı aşağıdaki gibidir.

$$T|_{t=0} = \frac{(-2, -1, 2)}{\|(-2, -1, 2)\|} = \left( -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$B|_{t=0} = \frac{(-3, -4, -5)}{\|(-3, -4, -5)\|} = \left( -\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{4}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{5\sqrt{2}} \right)$$

$$N|_{t=0} = \left( -\frac{13}{15\sqrt{2}}, \frac{8\sqrt{2}}{15}, \frac{-1}{3\sqrt{2}} \right)$$

ve eğrilikleri

$$\kappa = \frac{10\sqrt{2}}{81}$$

$$\tau = \frac{-4}{25}$$

dir. Frenet çatısının türev denklemleri

$$T'|_{t=0} = \frac{10\sqrt{2}}{9}N$$

$$N'|_{t=0} = -\frac{10\sqrt{2}}{9}T - \frac{36}{25}B$$

$$B'|_{t=0} = \frac{36}{25}N$$

2) Kontrol noktaları  $b_0 = (4,2,2), b_1 = (2,1,4), b_2 = (3,4,1), b_3 = (3,5,5)$  ile aynı kübikBezier eğrisi  $B(t)$  verilsin. Bu eğrinin parametrik denklemi

$$B(t) = (-4t^3 + 9t^2 - 6t + 4, -6t^3 + 12t^2 - 3t + 2, 12t^3 - 15t^2 + 6t + 2)$$

olarak ifade edilebilir.  $t = t_0 = \frac{1}{2}$  verelim. Daha sonra alt bölme algoritması uygulayarak kontrol noktaları  $b_0^3 = (2.75, 2.75, 2.75), b_1^2 = (2.75, 3.5, 2.75), b_2^1 = (3, 4.5, 3)$  elde edilir.

$t_0 = \frac{1}{2}$ 'deki Frenet çatıları aşağıdaki gibidir;

$$T|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{(0, 0.25, 0)}{0.25} = (0, 1, 0)$$

$$B|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{(0.0625, 0, -0.0625)}{0.0625\sqrt{2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$N|_{t=\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

ve eğrilikleri

$$\kappa = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\tau = \frac{-8}{3}$$

dir. Frenet çatılarının türev denklemleri

$$T'|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}N$$

$$N'|_{t=\frac{1}{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}T - \frac{2}{3}B$$

$$B'|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}N$$

dir.

3) Kontrol noktaları  $p_0 = (4,2,2), p_1 = (2,1,4), p_2 = (3,4,1), p_3 = (3,5,5)$  ve ağırlıkları  $w_0 = 0.5, w_1 = 0.25, w_2 = 0.75, w_3 = 1$  ile verilen rasyonel kübik Bezier eğrisi  $RB(t)$  olsun. Bu eğrinin parametrik denklemi

$$RB(t) = \left( \frac{-17t^3 + 39t^2 - 18t + 8}{-4t^3 + 9t^2 - 3t + 2}, \frac{-15t^3 + 42t^2 - 9t + 4}{-4t^3 + 9t^2 - 3t + 2}, \frac{19t^3 - 3t^2 + 4}{-4t^3 + 9t^2 - 3t + 2} \right)$$

olarak ifade edilebilir.  $t = 0$  verelim. O zaman, Frenet çatısı aşağıdaki gibidir.

$$T|_{t=0} = \frac{(-2, -1, 2)}{\|(-2, -1, 2)\|} = \left( -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$B|_{t=0} = \frac{(3, 4, 5)}{\|(3, 4, 5)\|} = \left( \frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$N|_{t=0} = \left( \frac{13}{15\sqrt{2}}, \frac{-8\sqrt{2}}{15}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right)$$

ve eğrilikleri

$$\kappa = \frac{20\sqrt{2}}{27}$$

$$\tau = \frac{32}{75}$$

dir.

Frenet çatısının türev denklemleri

$$T'|_{t=0} = \frac{20\sqrt{2}}{3}N$$

$$N'|_{t=0} = -\frac{20\sqrt{2}}{3}T + \frac{96}{25}B$$

$$B'|_{t=0} = \frac{-96}{25}N$$

dir.

4) Kontrol noktaları  $p_0 = (4,2,2), p_1 = (2,1,4), p_2 = (3,4,1), p_3 = (3,5,5)$  ve ağırlıkları  $w_0 = 0.5, w_1 = 0.25, w_2 = 0.75, w_3 = 1$  ile verilen aynı rasyonel kübik Bezier eğrisi  $RB(t)$  verilsin. Bu eğrinin parametrik denklemi

$$RB(t) = \left( \frac{-17t^3 + 39t^2 - 18t + 8}{-4t^3 + 9t^2 - 3t + 2}, \frac{-15t^3 + 42t^2 - 9t + 4}{-4t^3 + 9t^2 - 3t + 2}, \frac{19t^3 - 3t^2 + 4}{-4t^3 + 9t^2 - 3t + 2} \right)$$

olarak ifade edilebilir.  $t = \frac{1}{2}$  verelim. O zaman, alt bölme algoritması uygulanarak kontrol noktaları  $p_0^3 = \left(\frac{53}{18}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right), p_1^2 = \left(\frac{32}{11}, \frac{45}{11}, \frac{30}{11}\right), p_2^1 = \left(3, \frac{32}{7}, \frac{23}{7}\right), p_3^0 = (3,5,5)$  ve ağırlıkları  $w_0^3 = \frac{9}{16}, w_1^2 = \frac{11}{16}, w_2^1 = \frac{7}{8}, w_3^0 = 1$  elde edilir. Yani Frenet çatısı aşağıdaki gibidir.

$$T|_{t=\frac{1}{2}} = (-0.03764, 0.634513, 0.244126)$$

$$B|_{t=\frac{1}{2}} = (0.99362, 0.01599, 0.11165)$$

$$N|_{t=\frac{1}{2}} = (-0.06694, -0.24677, 0.63107)$$

ve eğrilikleri

$$\kappa = 1.652478$$

$$\tau = 0.1779908$$

dir. Frenet çatısının türev denklemleri

$$T'|_{t=\frac{1}{2}} = 3.1387001N$$

$$N'|_{t=\frac{1}{2}} = -3.1387001T + 0.338073B$$

$$B'|_{t=\frac{1}{2}} = -0.338073N$$

dir.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

### 4.1 Açık B-Spline Eğrilerinde Frenet Çatısı

**Teorem 4.1.**  $\mathfrak{B}$ , kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  olan ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olacak biçimde  $d$ . dereceden bir açık B-spline eğrisi olsun. B u takdirde

$$\mathfrak{B}(t_d) = b_0 \text{ ve } \mathfrak{B}(t_{m-d}) = b_n \text{ dir.} \quad (84)$$

**İspat:** (Marsh, 1999)

**Teorem 4.2.**  $\mathfrak{B}$ , kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  olan ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olacak biçimde  $d$ . dereceden bir açık B-spline eğrisi olsun. B u takdirde

$$\mathfrak{B}'(t_d) = \frac{d}{t_{d+1}-t_1} (b_1 - b_0) \quad (85)$$

$$\mathfrak{B}'(t_{m-d}) = \frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) \quad (86)$$

dir. (Marsh, 1999)

**Sonuç 4.3.**  $\mathfrak{B}$ , kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  olan ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olacak biçimde  $d$ . dereceden bir açık B-spline eğrisi verilsin. Eğer  $t_0 = t_1 = \dots = t_d = 0$  ve  $t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m = 1$  bu takdirde

$$\mathfrak{B}'(0) = \frac{d}{t_{d+1}} (b_1 - b_0) \quad (87)$$

$$\mathfrak{B}'(1) = \frac{d}{1-t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) \quad (88)$$

dir.

**Teorem 4.4.**  $\mathfrak{B}$ , kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  olan ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olacak biçimde  $d$ . dereceden bir açık B-spline eğrisi olsun. B u takdirde

$$\mathfrak{B}''(t_d) = \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} (b_2 - b_1) - \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+1}-t_1)} (b_1 - b_0) \quad (89)$$

ve

$$\mathfrak{B}''(t_{m-d}) = \frac{d(d-1)}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-1}-t_{m-d-1})} (b_n - b_{n-1}) - \frac{d(d-1)}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} (b_{n-1} - b_{n-2}) \quad (90)$$

dir.

**İspat:** (Marsh, 1999)'den açık bir B-spline eğrisinin  $r$ . türevi  $\mathfrak{B}^{(r)}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} N_{i,d-r}^{(r)}(t)$  burada  $b_i^{(0)} = b_i$  ve  $b_i^{(r)} = \frac{d-r+1}{t_{i+d+1}-t_{i+r}} (b_{i+1}^{(r-1)} - b_i^{(r-1)})$  dir. Buna göre  $b_1^{(1)} = \frac{d}{t_{d+2}-t_2} (b_2 - b_1)$  ve  $b_0^{(1)} = \frac{d}{t_{d+1}-t_1} (b_1 - b_0) = \mathfrak{B}'(t_d)$  yazılabilir. Ayrıca (Marsh, 1999)'den,  $\mathfrak{B}''(t_d) = b_0^{(2)} = \frac{d-1}{t_{d+1}-t_2} (b_1^{(1)} - b_0^{(1)}) = \frac{d-1}{t_{d+1}-t_2} \left[ \frac{d}{t_{d+2}-t_2} (b_2 - b_1) - \frac{d}{t_{d+1}-t_1} (b_1 - b_0) \right]$  elde edilebilir. Benzer şekilde bir Spline eğrisinin ikinci türevi alındığında kontrol noktaları Teorem 3.55 ve Sonuç 3.56 dan ve ayrıca  $n=m-d-1$  olduğundan

$$b_i^{(2)} = \frac{d-1}{t_{i+d+1}-t_{i+2}} (b_{i+1}^{(1)} - b_i^{(1)}) \quad (91)$$

biçiminde idi  $i = n - 2$  alınırsa

$$\begin{aligned} b_{n-2}^{(2)} &= \frac{d-1}{t_{n+d-1}-t_n} (b_{n-1}^{(1)} - b_{n-2}^{(1)}) \\ &= \frac{d-1}{t_{n+d-1}-t_n} \left[ \frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) - \frac{d}{t_{n-1+d}-t_{n-1}} (b_{n-1} - b_{n-2}) \right] \\ &= \frac{d(d-1)(b_n - b_{n-1})}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-1}-t_{m-d-1})} - \frac{d(d-1)(b_{n-1} - b_{n-2})}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \end{aligned} \quad (92)$$

elde edilir. Bu ise  $\mathfrak{B}''(t_{m-d})$  ifadesine eşittir.

**Teorem 4.5.**  $\mathfrak{B}$ , kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  olan ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olacak biçimde  $d$ . dereceden bir açık B-spline eğrisi olsun. B u taktirde

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}'''(t_d) &= \frac{d(d-1)(d-2)(b_3 - b_2)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)} \\ &\quad - \frac{d(d-1)(d-2)[t_{d+1} + t_{d+2} - t_2 - t_3](b_2 - b_1)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_2)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+1}-t_2)} \\ &+ \frac{d(d-1)(d-2)(b_1 - b_0)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+1}-t_1)} \end{aligned} \quad (93)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}'''(t_{m-d}) &= \frac{d(d-1)(d-2)(b_n - b_{n-1})}{(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-1}-t_{m-d-1})} \\ &\quad - \frac{d(d-1)(d-2)[t_{m-3} + t_{m-2} - t_{m-d-2} - t_{m-d-1}](b_{n-1} - b_{n-2})}{(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-3}-t_{m-d-2})} \end{aligned}$$

$$+ \frac{d(d-1)(d-2)(b_{n-2}-b_{n-3})}{(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-3}-t_{m-d-2})(t_{m-3}-t_{m-d-3})} \quad (94)$$

dir.

**İspat:**  $\mathfrak{B}'''(t_d)$  yi bulmak için  $b_i^{(r)}$ 'de  $r = 3$  seçelim

$$b_i^{(3)} = \frac{(d-2)}{t_{i+d+1}-t_{i+3}} (b_{i+1}^{(2)} - b_i^{(2)})$$

bulunur.  $b_{i+1}^{(2)}$  ve  $b_i^{(2)}$  yi yerine  $b_i^{(2)} = \frac{(d-1)}{t_{i+d+1}-t_{i+2}} (b_{i+1}^{(1)} - b_i^{(1)})$  ve  $b_{i+1}^{(2)} = \frac{(d-1)}{t_{i+d+2}-t_{i+3}} (b_{i+2}^{(1)} - b_{i+1}^{(1)})$  ifadeleri yazılmalıdır.  $b_i^{(1)}, b_{i+1}^{(1)}, b_{i+2}^{(1)}$  yerine de

$$b_i^{(1)} = \frac{d}{t_{d+i+1}-t_{i+1}} (b_{i+1} - b_i)$$

$$b_{i+1}^{(1)} = \frac{d}{t_{i+d+2}-t_{i+2}} (b_{i+2} - b_{i+1})$$

$$b_{i+2}^{(1)} = \frac{d}{t_{i+d+3}-t_{i+3}} (b_{i+3} - b_{i+2})$$

ifadeleri yazılırsa

$$b_i^{(2)} = \frac{d-1}{t_{i+d+1}-t_{i+2}} \left[ \frac{d}{t_{i+d+2}-t_{i+2}} (b_{i+2} - b_{i+1}) - \frac{d}{t_{i+d+1}-t_{i+1}} (b_{i+1} - b_i) \right]$$

$$b_{i+1}^{(2)} = \frac{d-1}{t_{i+d+2}-t_{i+3}} \left[ \frac{d}{t_{i+d+3}-t_{i+3}} (b_{i+3} - b_{i+2}) - \frac{d}{t_{i+d+2}-t_{i+2}} (b_{i+2} - b_{i+1}) \right]$$

elde edilir. Şimdi bu ifadelerde  $b_i^{(3)}$  de yerine yazılırsa

$$b_i^{(3)} = \frac{d-2}{t_{i+d+1}-t_{i+3}} \left\{ \frac{d-1}{t_{i+d+2}-t_{i+3}} \left[ \frac{d}{t_{i+d+3}-t_{i+3}} (b_{i+3} - b_{i+2}) - \frac{d}{t_{i+d+2}-t_{i+2}} (b_{i+2} - b_{i+1}) \right] - \frac{d-1}{t_{i+d+1}-t_{i+2}} \left[ \frac{d}{t_{i+d+2}-t_{i+2}} (b_{i+2} - b_{i+1}) - \frac{d}{t_{i+d+1}-t_{i+1}} (b_{i+1} - b_i) \right] \right\}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde

$$b_i^{(3)} = \frac{d(d-1)(d-2)(b_{i+3} - b_{i+2})}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+2} - t_{i+3})(t_{i+d+3} - t_{i+3})} - \frac{d(d-1)(d-2)(b_{i+2} - b_{i+1})}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+2} - t_{i+3})(t_{i+d+2} - t_{i+2})} - \frac{d(d-1)(d-2)(b_{i+1} - b_i)}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+1} - t_{i+2})(t_{i+d+2} - t_{i+2})} + \frac{d(d-1)(d-2)(b_{i+1} - b_i)}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+1} - t_{i+2})(t_{i+d+1} - t_{i+1})}$$

bulunur. Bu ifadeyi daha da sadeleştirirsek;

$$b_i^{(3)} = \frac{d(d-1)(d-2)(b_{i+3} - b_{i+2})}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+2} - t_{i+3})(t_{i+d+3} - t_{i+3})} - \frac{d(d-1)(d-2)[t_{i+d+1} + t_{i+d+2} - t_{i+2} - t_{i+3}](b_{i+2} - b_{i+1})}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+2} - t_{i+2})(t_{i+d+2} - t_{i+3})(t_{i+d+1} - t_{i+2})} + \frac{d(d-1)(d-2)(b_{i+1} - b_i)}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+1} - t_{i+2})(t_{i+d+1} - t_{i+1})}$$

bulunur. Buna göre

$\mathfrak{B}'''(t_d) = b_0^{(3)}$  ve  $\mathfrak{B}'''(t_{m-d}) = b_{n-3}^{(3)}$  olur. Yani;

$$\mathfrak{B}'''(t_d) = \frac{d(d-1)(d-2)(b_3 - b_2)}{(t_{d+1} - t_3)(t_{d+2} - t_3)(t_{d+3} - t_3)} - \frac{d(d-1)(d-2)[t_{d+1} + t_{d+2} - t_2 - t_3](b_2 - b_1)}{(t_{d+1} - t_3)(t_{d+2} - t_2)(t_{d+2} - t_3)(t_{d+1} - t_2)} + \frac{d(d-1)(d-2)(b_1 - b_0)}{(t_{d+1} - t_3)(t_{d+1} - t_2)(t_{d+1} - t_1)}$$

ve

$$\mathfrak{B}'''(t_{m-d}) = \frac{d(d-1)(d-2)(b_n - b_{n-1})}{(t_{n+d-2} - t_n)(t_{n+d-1} - t_n)(t_{n+d} - t_n)} - \frac{d(d-1)(d-2)[t_{n+d-2} + t_{n+d-1} - t_{n-1} - t_n](b_{n-1} - b_{n-2})}{(t_{n+d-2} - t_n)(t_{n+d-1} - t_{n-1})(t_{n+d-1} - t_n)(t_{n+d-2} - t_{n-1})} + \frac{d(d-1)(d-2)(b_{n-2} - b_{n-3})}{(t_{n+d-2} - t_n)(t_{n+d-2} - t_{n-1})(t_{n+d-2} - t_{n-2})}$$

olur. Ya da  $n = m - d - 1$  olduğundan

$$\mathfrak{B}'''(t_{m-d}) = \frac{d(d-1)(d-2)(b_n - b_{n-1})}{(t_{m-3} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-1} - t_{m-d-1})} - \frac{d(d-1)(d-2)[t_{m-3} + t_{m-2} - t_{m-d-2} - t_{m-d-1}](b_{n-1} - b_{n-2})}{(t_{m-3} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-3} - t_{m-d-2})} + \frac{d(d-1)(d-2)(b_{n-2} - b_{n-3})}{(t_{m-3} - t_{m-d-1})(t_{m-3} - t_{m-d-2})(t_{m-3} - t_{m-d-3})}$$

bulunur.

**Teorem 4.6.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $n$ ci dereceden bir açık B-spline eğrisinin Frenet vektör alanları;  $t_d$  noktalarında;

$t = t_d$ 'de

$$T|_{t=t_d} = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|}; \quad B|_{t=t_d} = \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|}; \quad (95)$$

$$N|_{t=t_d} = \frac{(b_2 - b_1) \csc \Phi}{\|b_2 - b_1\|} - \frac{(b_1 - b_0) \cot \Phi}{\|b_1 - b_0\|} \quad (96)$$

$$\kappa|_{t=t_d} = \frac{(t_{d+1} - t_1)^2 (d-1)}{d(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \quad (97)$$

( $\Phi$ :  $b_1 - b_0$  ile  $b_2 - b_1$  arasındaki açıdır).

$$\tau|_{t=t_d} = \frac{(d-2)(t_{d+1} - t_1)(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)}{d(t_{d+1} - t_3)(t_{d+2} - t_3)(t_{d+3} - t_3)} \frac{\|b_3 - b_2\| \cos \varphi}{\|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_1\| \sin \Phi} \quad (98)$$

Burada  $\varphi$ ;  $[(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)]$  vektörü ile  $b_3 - b_2$  vektörleri arasındaki açıdır.

**İspat:**

$$\begin{aligned} T|_{t=t_d} &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \Big|_{t=t_d} = \frac{\frac{d}{t_{d+1} - t_1} (b_1 - b_0)}{\left\| \frac{d}{t_{d+1} - t_1} (b_1 - b_0) \right\|} = \frac{\frac{d}{t_{d+1} - t_1} (b_1 - b_0)}{\frac{d}{t_{d+1} - t_1} \|b_1 - b_0\|} = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|}, \\ B|_{t=t_d} &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \Big|_{t=t_d} \\ &= \frac{\frac{d}{t_{d+1} - t_1} (b_1 - b_0) \times \left[ \frac{d(d-1)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} (b_2 - b_1) - \frac{d(d-1)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+1} - t_1)} (b_1 - b_0) \right]}{\left\| \frac{d}{t_{d+1} - t_1} (b_1 - b_0) \times \left[ \frac{d(d-1)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} (b_2 - b_1) - \frac{d(d-1)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+1} - t_1)} (b_1 - b_0) \right] \right\|} \\ &= \frac{\frac{d^2(d-1)}{(t_{d+1} - t_1)^2 (t_{d+1} - t_2)^2 (t_{d+2} - t_2)} [(b_1 - b_0) \times [(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)]]}{\left\| \frac{d^2(d-1)}{(t_{d+1} - t_1)^2 (t_{d+1} - t_2)^2 (t_{d+2} - t_2)} [(b_1 - b_0) \times [(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)]] \right\|} \\ &= \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N|_{t=t_d} &= B|_{t=t_d} \times T|_{t=t_d} = \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} \times \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \\
&= \frac{1}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\| \cdot \|b_1 - b_0\|} [(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)] \\
&\quad \times (b_1 - b_0) \\
&= \frac{1}{\|b_1 - b_0\| \cdot \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} [\langle (b_1 - b_0), (b_1 - b_0) \rangle (b_2 - b_1) \\
&\quad - \langle (b_2 - b_1), (b_1 - b_0) \rangle (b_1 - b_0)] \\
&= \frac{1}{\|b_1 - b_0\| \cdot \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} [\|b_1 - b_0\|^2 (b_2 - b_1) \\
&\quad - \langle (b_1 - b_0), (b_2 - b_1) \rangle (b_1 - b_0)] \\
&= \frac{(b_2 - b_1) \|b_1 - b_0\|}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} - \frac{\langle (b_1 - b_0), (b_2 - b_1) \rangle (b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\| \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} \\
&= \frac{(b_2 - b_1) \|b_1 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_1\| \sin \Phi} - \frac{\|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_1\| \cos \Phi (b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\| \|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_1\| \sin \Phi} \\
&= \frac{(b_2 - b_1)}{\|b_2 - b_1\|} \csc \Phi - \frac{(b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi \\
\kappa|_{t=t_d} &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{d^2(d-1)}{(t_{d+1}-t_1)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|}{\frac{d^3}{(t_{d+1}-t_1)^3} \|b_1 - b_0\|^3} \\
&= \frac{(t_{d+1} - t_1)^2 (d-1)}{d(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \\
\tau|_{t=t_d} &= \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \\
&= \frac{\left( \frac{d}{(t_{d+1}-t_1)} (b_1 - b_0), \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} (b_2 - b_1), \frac{d(d-1)(d-2)(b_3-b_2)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)} \right)}{\frac{d^4(d-1)^2}{(t_{d+1}-t_1)^2(t_{d+1}-t_2)^2(t_{d+2}-t_2)^2} \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|^2} \\
&= \frac{\frac{d^3(d-1)^2(d-2)(b_1-b_0, b_2-b_1, b_3-b_2)}{(t_{d+1}-t_1)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)}}{\frac{d^4(d-1)^2}{(t_{d+1}-t_1)^2(t_{d+1}-t_2)^2(t_{d+2}-t_2)^2} \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|^2} \\
&= \frac{(d-2)(t_{d+1} - t_1)(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)}{d(t_{d+1} - t_3)(t_{d+2} - t_3)(t_{d+3} - t_3)} \cdot \frac{(b_1 - b_0, b_2 - b_1, b_3 - b_2)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|^2} \\
&= \frac{(d-2)(t_{d+1} - t_1)(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)}{d(t_{d+1} - t_3)(t_{d+2} - t_3)(t_{d+3} - t_3)} \cdot \frac{\|b_3 - b_2\| \cos \varphi}{\|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_1\| \sin \Phi}
\end{aligned}$$

Burada  $\varphi$ ;  $[(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)]$  vektörü ile  $b_3 - b_2$  vektörleri arasındaki açıdır.

**Teorem 4.7.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $n$ ci dereceden bir açık B-spline eğrisinin Frenet vektör alanları;  $t = t_{m-d}$  noktalarında;

$$T|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \quad (99)$$

$$B|_{t=t_{m-d}} = \frac{-(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|} \quad (100)$$

$$N|_{t=t_{m-d}} = -\frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|} \csc \vartheta + \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \vartheta \quad (101)$$

dir.  $\vartheta$ ,  $(b_{n-1} - b_{n-2})$  ile  $(b_n - b_{n-1})$  vektörleri arasındaki açıdır.

$$\kappa|_{t=t_{m-d}} = \frac{d-1}{d} \frac{(t_{m-1} - t_{m-d-1})^2}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\| \sin \vartheta}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \quad (102)$$

$$\tau|_{t=t_{m-d}} = -\frac{(d-2)}{d} \frac{\|b_{n-2} - b_{n-3}\| \csc \varphi}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\| (t_{m-3} - t_{m-d-1})(t_{m-3} - t_{m-d-2})(t_{m-3} - t_{m-d-3})} \quad (103)$$

Burada  $\varphi$ ,  $(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})$  vektörü ile  $(b_{n-2} - b_{n-3})$  vektörleri arasındaki açıdır.

**İspat:**

$$i) T|_{t=t_{m-d}} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{\frac{d}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1})}{\left\| \frac{d}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) \right\|} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|}$$

$$\begin{aligned} ii) B|_{t=t_{m-d}} &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \\ &= \frac{\left[ \frac{d}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) \right] \times \left[ \frac{d(d-1)(b_n - b_{n-1})}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-1} - t_{m-d-1})} - \frac{d(d-1)(b_{n-1} - b_{n-2})}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})} \right]}{\left\| \left[ \frac{d}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) \right] \times \left[ \frac{d(d-1)(b_n - b_{n-1})}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-1} - t_{m-d-1})} - \frac{d(d-1)(b_{n-1} - b_{n-2})}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})} \right] \right\|} \\ &= \frac{\frac{-d^2(d-1)(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})}}{\left\| \frac{-d^2(d-1)(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})} \right\|} = \frac{-(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|} \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} iii) N|_{t=t_{m-d}} &= B|_{t=t_{m-d}} \times T|_{t=t_{m-d}} \\ &= \frac{-(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|} \times \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \\ &= \frac{\|b_n - b_{n-1}\|^2 (b_{n-1} - b_{n-2}) + \langle b_n - b_{n-1}, b_{n-1} - b_{n-2} \rangle (b_n - b_{n-1})}{\|b_n - b_{n-1}\|^2 \|b_{n-1} - b_{n-2}\| \sin \vartheta} \\ &= -\frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|} \csc \vartheta + \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i) \kappa|_{t=t_{m-d}} &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{d^2(d-1)\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})} \\
&= \frac{d-1}{d} \frac{(t_{m-1} - t_{m-d-1})^2}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\| \sin \vartheta}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \\
v) \tau|_{t=t_{m-d}} &= \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \\
&= \frac{\left( \frac{d}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})} (b_n - b_{n-1}), \left( \frac{d(d-1)}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-1} - t_{m-d-1})} (b_n - b_{n-1}) \right), \left[ \frac{d(d-1)(d-2)(b_n - b_{n-1})}{(t_{d+1} - t_3)(t_{d+2} - t_3)(t_{d+3} - t_3)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{d(d-1)(d-2)(t_{m-3} + t_{m-2} - t_{m-d-2} - t_{m-d-1})(b_{n-1} - b_{n-2})}{(t_{m-3} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-3} - t_{m-d-2})} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{d(d-1)(d-2)(b_{n-2} - b_{n-3})}{(t_{m-3} - t_{m-d-1})(t_{m-3} - t_{m-d-2})(t_{m-3} - t_{m-d-3})} \right] \right)}{\frac{(d^4(d-1)^2)}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})} \|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|^2} \\
&= \frac{d^3(d-1)^2(d-2)(b_n - b_{n-1}, b_{n-1} - b_{n-2}, b_{n-2} - b_{n-3})}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})(t_{m-3} - t_{m-d-1})(t_{m-3} - t_{m-d-2})(t_{m-3} - t_{m-d-3})} \\
&= \frac{1}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})} \|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|^2 \\
&= \frac{(d-2)}{d} \frac{1}{(t_{m-3} - t_{m-d-1})(t_{m-3} - t_{m-d-2})(t_{m-3} - t_{m-d-3})} \frac{(b_n - b_{n-1}, b_{n-1} - b_{n-2}, b_{n-2} - b_{n-3})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|^2} \\
&= \frac{(d-2)}{d} \frac{\|b_{n-2} - b_{n-3}\| \csc \varphi}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|(t_{m-3} - t_{m-d-1})(t_{m-3} - t_{m-d-2})(t_{m-3} - t_{m-d-3})}
\end{aligned}$$

Burada  $\varphi$ ,  $(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})$  vektörü ile  $(b_{n-2} - b_{n-3})$  vektörleri arasındaki açıdır.

## 4.2 Bertrand Açık B-Spline Çiftleri

**Teorem 4.8.**  $\alpha$  ve  $\beta$  kontrol noktaları sırasıyla  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve  $c_0, c_1, \dots, c_n$  olan knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $d$ .nci dereceden açık B-spline eğrileri olsunlar.  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrileri  $t = t_d$  noktasında Bertrand çifti oluşturur ancak ve ancak,  $\exists \theta \in [0, 2\pi]$  ve  $k \in \mathbb{R}$  öyleki

$$c_1 = c_0 + (b_1 - b_0) \cos \theta - (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1) \sin \theta \quad (104)$$

$$c_2 = c_1 + (b_2 - b_1) + k(b_1 - b_0) \quad (105)$$

sağlanır.

**İspat:**  $\alpha$  ve  $\beta$  birer Bertrand çifti ise asli birim normal vektörleri  $N_\alpha = N_\beta$  olmalıdır.

Buna göre

$$[(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)] \times (b_1 - b_0) = [(c_1 - c_0) \times (c_2 - c_1)] \times (c_1 - c_0)$$

sağlanmalıdır. Eğer 4 vektör  $u, v, w, t$  alındığında  $u \times v = w \times t$  ise  $\{u, v, w, t\}$  vektörleri aynı düzlemlidir. O halde  $(b_1 - b_0), (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1), (c_1 - c_0), (c_1 - c_0) \times (c_2 - c_1)$  vektörleri aynı düzlemlidir. Bu vektörlerde

$$(b_1 - b_0) \perp (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)$$

$$(c_1 - c_0) \perp (c_1 - c_0) \times (c_2 - c_1)$$

olduğundan, bu ortogonal vektörler düzlemde bir  $\theta$  kadar dönme dönüşümü ile biri, diğerine dönüştürülebilir demektir. O halde  $\{(b_1 - b_0), (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\}$  ve  $\{(c_1 - c_0), (c_1 - c_0) \times (c_2 - c_1)\}$  vektör sistemleri  $O(2)$ -denk olmalıdır. Yani

$$\{(b_1 - b_0), (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\} \stackrel{O(2)}{\approx} \{(c_1 - c_0), (c_1 - c_0) \times (c_2 - c_1)\}$$

dir.

O halde  $\exists \theta \in [0, 2\pi]$  öyleki,

$$c_1 - c_0 = (b_1 - b_0) \cos \theta - (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1) \sin \theta \quad (106)$$

$$(c_1 - c_0) \times (c_2 - c_1) = (b_1 - b_0) \sin \theta + (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1) \cos \theta \quad (107)$$

sağlanır. Buradan (106)'dan

$$c_1 = c_0 + (b_1 - b_0) \cos \theta - (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1) \sin \theta$$

eşitliği görülür. Bu eşitlik ikincide yerine yazılırsa

$$(c_1 - c_0) \times (c_2 - c_1) = [(b_1 - b_0) \cos \theta - (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1) \sin \theta] \times (c_2 - c_1)$$

$$((b_1 - b_0) \times (c_2 - c_1)) \cos \theta - [(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)] \times (c_2 - c_1) \sin \theta$$

(107) den

$$= (b_1 - b_0) \sin \theta + (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1) \cos \theta$$

yazılır. O halde

$$((b_1 - b_0) \times (c_2 - c_1)) \cos \theta$$

$$- [\langle (b_1 - b_0), (c_2 - c_1) \rangle (b_2 - b_1) - \langle (b_2 - b_1), (c_2 - c_1) \rangle (b_1 - b_0)] \sin \theta = (b_1 - b_0) \sin \theta + (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1) \cos \theta$$

bulunur. Buradan,

$$(b_1 - b_0) \times (c_2 - c_1) = (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1) \quad (108)$$

ve

$$\langle (c_2 - c_1), (b_2 - b_1) \rangle = 1$$

bulunur. (108) eşitliğinden

$$(c_2 - c_1) - (b_2 - b_1) \quad // \quad (b_1 - b_0)$$

elde edilir. Buna göre  $\exists k \in R$  öyleki

$$(c_2 - c_1) - (b_2 - b_1) = k(b_1 - b_0)$$

olur. Buradan

$$c_2 = c_1 + (b_2 - b_1) + k(b_1 - b_0)$$

elde edilir.

**Teorem 4.9.**  $\alpha$  ve  $\beta$  kontrol noktaları sırasıyla  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve  $c_0, c_1, \dots, c_n$  olan knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $d$ .nci dereceden açık B-spline eğrileri olsunlar.  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrileri  $t = t_{m-d}$  noktasında Bertrand çifti oluşturur ancak ve ancak;  $\exists \theta \in [0, 2\pi]$  ve  $k \in \mathbb{R}$  öyleki

$$c_n = c_{n-1} + (b_n - b_{n-1}) \cos \theta - (b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2}) \sin \theta \quad (109)$$

$$c_{n-1} = c_{n-2} + (b_{n-1} - b_{n-2}) + k(b_n - b_{n-1}) \quad (110)$$

sağlanır.

**İspat:**  $\alpha$  ve  $\beta$  birer Bertrand çifti ise  $t = t_{m-d}$  de  $N_\alpha = N_\beta$  olmalıdır. Yani

$$\begin{aligned} & [(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})] \times (b_n - b_{n-1}) \\ & = [(c_n - c_{n-1}) \times (c_{n-1} - c_{n-2})] \times (c_n - c_{n-1}) \end{aligned}$$

sağlanır. O halde  $\{(c_n - c_{n-1}), (b_n - b_{n-1}), [(c_n - c_{n-1}) \times (c_{n-1} - c_{n-2})], [(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})]\}$  vektörleri aynı düzlemlidir. Bu vektörlerden

$$(c_n - c_{n-1}) \perp (c_n - c_{n-1}) \times (c_{n-1} - c_{n-2})$$

$$(b_n - b_{n-1}) \perp (b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})$$

olduğundan, bu ortogonal vektörler düzlemde bir  $\theta$  kadar dönme dönüşümü ile biri, diğerine dönüştürülebilir demektir. O halde  $\{(b_n - b_{n-1}), (b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\}$  ve  $\{(c_n - c_{n-1}), (c_n - c_{n-1}) \times (c_{n-1} - c_{n-2})\}$  vektör sistemleri  $O(2)$ -denkolmalıdır. Yani

$$\begin{aligned} & \{(b_n - b_{n-1}), (b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\} \stackrel{O(2)}{\approx} \{(c_n - c_{n-1}), (c_n - c_{n-1}) \\ & \quad \times (c_{n-1} - c_{n-2})\} \end{aligned}$$

dir.

O halde  $\exists \theta \in [0, 2\pi]$  ve  $k \in \mathbb{R}$  öyleki

$$c_n - c_{n-1} = (b_n - b_{n-1}) \cos \theta - (b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2}) \sin \theta \quad (111)$$

$$(c_n - c_{n-1}) \times (c_{n-1} - c_{n-2}) = (b_n - b_{n-1}) \sin \theta + (b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2}) \cos \theta$$

$$(112)$$

sağlanır. Buradan (111)'den

$$c_n = c_{n-1} + (b_n - b_{n-1}) \cos \theta - (b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2}) \sin \theta$$

eşitliği görülür. Bu eşitlik ikincide yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (c_n - c_{n-1}) \times (c_{n-1} - c_{n-2}) \\ & = [(b_n - b_{n-1}) \cos \theta - (b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2}) \sin \theta] \\ & \quad \times (c_{n-1} - c_{n-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ((b_n - b_{n-1}) \times (c_{n-1} - c_{n-2})) \cos \theta - [(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})] \\ & \quad \times (c_{n-1} - c_{n-2}) \sin \theta \end{aligned}$$

(112) den

$$= (b_n - b_{n-1}) \sin \theta + (b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2}) \cos \theta$$

yazılır. O halde

$$\begin{aligned} & ((b_n - b_{n-1}) \times (c_{n-1} - c_{n-2})) \cos \theta \\ & - [ \langle (b_n - b_{n-1}), (c_{n-1} - c_{n-2}) \rangle (b_{n-1} - b_{n-2}) \\ & \quad - \langle (b_{n-1} - b_{n-2}), (c_{n-1} - c_{n-2}) \rangle (b_n - b_{n-1}) ] \sin \theta \\ & = (b_n - b_{n-1}) \sin \theta + (b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2}) \cos \theta \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$(b_n - b_{n-1}) \times (c_{n-1} - c_{n-2}) = (b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2}) \quad (113)$$

ve

$$\langle (c_{n-1} - c_{n-2}), (b_{n-1} - b_{n-2}) \rangle = 1$$

bulunur. (113) eşitliğinden

$$(c_{n-1} - c_{n-2}) - (b_{n-1} - b_{n-2}) // (b_n - b_{n-1})$$

elde edilir. Buna göre  $\exists k \in R$  öyleki

$$(c_{n-1} - c_{n-2}) - (b_{n-1} - b_{n-2}) = k(b_n - b_{n-1})$$

olur. Buradan

$$c_{n-1} = c_{n-2} + (b_{n-1} - b_{n-2}) + k(b_n - b_{n-1})$$

elde edilir.

Açık B-spline eğrilerinde  $t_0 = t_d$  ve  $t_0 = t_{m-d}$  noktalarının dışında herhangi bir  $t_0 \in [t_r, t_{r+1})$  ( $d \leq r \leq m - d - 1$ ) noktasında eğrinin  $\{T, N, B\}$  çatısı, eğrilikleri ve bertrand çifti oluşturma koşulları ifade edilebilmesi için Bezier eğrilerinde olduğu gibi de Casteljau algoritmasına paralel olarak de Boor algoritması uygulanarak eğriye subdivision uygulanır. Böylece B-spline eğrisi iki segmente ayrılır verilen  $t_0$  noktası ve algoritma sonucu bulunan  $b_r^d, b_r^{d-1}, b_r^{d-2}, b_r^{d-3}$  kontrol noktaları; elde edilen iki segmentten sağ tarafta kalan yeni B-spline eğrisinin ilk 4 kontrol noktasına ifade edecektir. Yani bu kontrol noktalarını yeni B-spline eğrisinin  $b_0, b_1, b_2, b_3$  noktalarını ifade eder. Buradaki  $t_0$  noktası da yeni B-spline eğrisinin  $t_d$  noktasını ifade edecektir.

**Teorem 4.10.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olana. dereceden bir açık B-spline eğrisinin  $t^* \in [t_r, t_{r+1})$  noktasındaki  $\{T, N, B\}$  çatısı ve eğrilikleri

$$T|_{t=t^*} = \frac{b_r^{d-1} - b_r^d}{\|b_r^{d-1} - b_r^d\|}; \quad B|_{t=t^*} = \frac{(b_r^{d-1} - b_r^d) \times (b_r^{d-2} - b_r^{d-1})}{\|(b_r^{d-1} - b_r^d) \times (b_r^{d-2} - b_r^{d-1})\|}; \quad (114)$$

$$N|_{t=t^*} = \frac{(b_r^{d-2} - b_r^{d-1}) \csc \Phi}{\|b_r^{d-2} - b_r^{d-1}\|} - \frac{(b_r^{d-1} - b_r^d)}{\|b_r^{d-1} - b_r^d\|} \cot \Phi \quad (115)$$

$$\kappa|_{t=t^*} = \frac{(t_{d+1} - t_1)^2 (d-1)}{d(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} \frac{\|b_r^{d-2} - b_r^{d-1}\|}{\|b_r^{d-1} - b_r^d\|^2} \sin \Phi \quad (116)$$

$$\tau|_{t=t^*} = \frac{(d-2)(t_{d+1} - t_1)(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)}{d(t_{d+1} - t_3)(t_{d+2} - t_3)(t_{d+3} - t_3)} \frac{\|b_r^{d-3} - b_r^{d-2}\| \csc \varphi}{\|b_r^{d-1} - b_r^d\| \|b_r^{d-2} - b_r^{d-1}\| \sin \Phi} \quad (117)$$

dır.

Burada  $b_i^j$  noktaları de Boor algoritması ile elde edilen kontrol noktalarını;  $\Phi: b_r^{d-1} - b_r^d$  ile  $b_r^{d-2} - b_r^{d-1}$  vektörleri arasındaki açı,  $\varphi$  açısı da  $[(b_r^{d-1} - b_r^d) \times (b_r^{d-2} - b_r^{d-1})]$  vektörü ile  $b_r^{d-3} - b_r^{d-2}$  vektörleri arasındaki açıyı ifade eder..

**İspat:** Açık B-spline eğrilerinde  $t = t_d$  ve  $t = t_{m-d}$  noktalarının dışında herhangi bir  $t^* \in [t_r, t_{r+1})$  ( $d \leq r \leq m - d - 1$ ) noktasında eğrinin  $\{T, N, B\}$  çatısı ve eğrilikleri ifade edilebilmesi için Bezier eğrilerinde olduğu gibi de Casteljau algoritmasına paralel olarak Spline eğrilerinde de Boor algoritması uygulanarak eğriye subdivision uygulanır. Böylece B-spline eğrisi iki segmente ayrılır verilen  $t^*$  noktası ve algoritma sonucu bulunan  $b_r^d, b_r^{d-1}, b_r^{d-2}, b_r^{d-3}$  kontrol noktaları; elde edilen iki segmentten sağ tarafta kalan yeni B-spline eğrisinin ilk 4 kontrol noktasını ifade edecektir. Yani bu kontrol noktaları, yeni B-spline eğrisinin  $b_0, b_1, b_2, b_3$  noktalarını ifade eder. Buradaki  $t^*$  noktası da yeni B-spline eğrisinin  $t_d$  noktasını ifade edecektir. Buna göre ispat Teorem 4.6'ya benzer şekilde yapılabilir.

**Teorem 4.11.**  $\alpha$  ve  $\beta$  kontrol noktaları sırasıyla  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve  $c_0, c_1, \dots, c_n$  olan knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $d$ .nci dereceden açık B-spline eğrileri olsunlar.  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrileri  $t^* \in [t_r, t_{r+1})$  noktasında Bertrand çifti oluşturur ancak ve ancak,  $\exists \theta \in [0, 2\pi]$  ve  $k \in \mathbb{R}$  öyleki

$$c_r^{d-1} = c_r^d + (b_r^{d-1} - b_r^d) \cos \theta - (b_r^{d-1} - b_r^d) \times (b_r^{d-2} - b_r^{d-1}) \sin \theta \quad (118)$$

$$c_r^{d-2} = c_r^{d-1} + (b_r^{d-2} - b_r^{d-1}) + k(b_r^{d-1} - b_r^d) \quad (119)$$

sağlanır.

Buradaki  $b_i^j$  ve  $c_i^j$  ler de Boor algoritması ile elde edilen yeni kontrol noktalarıdır.

**İspat:** Bu teorem de yukarıdaki açıklama doğrultusunda Teorem 4.8'e benzer şekilde yapılabilir.

### 4.3 Açık Nurbs Eğrilerinde Frenet Çatısı ve Eğrilikleri

**Teorem 4.12.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olana, dereceden bir açık NURBS eğrisi verilsin bu takdirde

$$B'(t_d) = \frac{d}{t_{d+1}-t_1} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \quad (120)$$

ve

$$B'(t_{m-d}) = \frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \quad (121)$$

dir.

**İspat:** Bir NURBS eğrisini  $B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i N_{i,d}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,d}(t)}$  olarak yazdığımızda buna  $\frac{f}{g}$  dersek;

$B'(t) = \frac{f'}{g} - B \frac{g'}{g}$  şeklinde yazılabilir. Bu durumda,  $f$  ifadesi kontrol noktaları  $(w_i b_i)$  olan  $g$  ifadesi de kontrol noktaları  $(w_i)$  olan birer B-spline eğrisi olarak düşünülebilir. O halde bu  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının  $t = t_d$  ve  $t = t_{m-d}$  noktalarındaki türevleri teorem 4.1 ve teorem 4.2 kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$\begin{aligned} B'(t_d) &= \left( \frac{f'}{g} - B \frac{g'}{g} \right) \Big|_{t=t_d} \\ &= \frac{\frac{d}{t_{d+1}-t_1} (w_1 b_1 - w_0 b_0)}{w_0} - \left( b_0 \frac{\frac{d}{t_{d+1}-t_1} (w_1 - w_0)}{w_0} \right) \\ &= \frac{d}{t_{d+1} - t_1} \left[ \frac{w_1 b_1}{w_0} - b_0 - \frac{b_0 w_1}{w_0} + b_0 \right] = \frac{d}{t_{d+1} - t_1} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} B'(t_{m-d}) &= \left( \frac{f'}{g} - B \frac{g'}{g} \right) \Big|_{t=t_{m-d}} \\ &= \frac{\frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} (w_n b_n - w_{n-1} b_{n-1})}{w_n} - \left( b_n \frac{\frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} (w_n - w_{n-1})}{w_n} \right) \\ &= \frac{d}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} \left[ \frac{w_n b_n - w_{n-1} b_{n-1}}{w_n} - \frac{b_n (w_n - w_{n-1})}{w_n} \right] \\ &= \frac{d}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} \left[ b_n - \frac{w_{n-1} b_{n-1}}{w_n} - b_n + \frac{b_n w_{n-1}}{w_n} \right] \\ &= \frac{d}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} \left[ \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \right] \end{aligned}$$

dir.

**Teorem 4.13.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olana. dereceden bir açık NURBS eğrisi verilsin bu takdirde

$$\mathfrak{B}''(t_d) = \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) - \frac{d}{(t_{d+1}-t_1)} \frac{w_1}{w_0} \left[ \frac{(d-1)(t_{d+1}+t_{d+2}-t_1-t_2)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} + \frac{2d}{(t_{d+1}-t_1)} \left( \frac{w_1}{w_0} - 1 \right) \right] (b_1 - b_0) \quad (122)$$

ve

$$\mathfrak{B}''(t_{m-d}) = \left\{ \frac{w_{n-1}}{w_n} \frac{d(d-1)}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})} \left[ \frac{1}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} - \frac{1}{t_{m-1}-t_{m-d-2}} \right] - \frac{2d^2 w_{n-1} (w_n - w_{n-1})}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})^2 w_n} \right\} (b_n - b_{n-1}) - \frac{w_{n-2}}{w_n} \frac{d(d-1)}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-1}-t_{m-d-2})} (b_n - b_{n-2}) \quad (123)$$

dir.

**İspat:**  $B = \frac{f}{g}$  dersek,  $B' = \frac{f'}{g} - B \frac{g'}{g}$  idi.

$$B'' = \left[ \frac{f'}{g} - B \frac{g'}{g} \right]'$$

$$B'' = \frac{f''}{g} - 2B' \frac{g'}{g} - B \frac{g''}{g}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}''(t_d) &= \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) \\ &- \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \left[ \frac{1}{t_{d+2}-t_2} + \frac{1}{t_{d+1}-t_1} \right] \\ &- 2 \frac{d^2}{(t_{d+1}-t_1)^2} \left( \frac{w_1^2}{w_0^2} - \frac{w_1}{w_0} \right) (b_1 - b_0) \\ &= \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) \\ &- \frac{d}{(t_{d+1}-t_1)} \frac{w_1}{w_0} \left[ \frac{(d-1)(t_{d+1}+t_{d+2}-t_1-t_2)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} + \frac{2d}{(t_{d+1}-t_1)} \left( \frac{w_1}{w_0} - 1 \right) \right] (b_1 - b_0) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\mathfrak{B}''(t_{m-d}) = \frac{d(d-1)(w_n b_n - w_{n-1} b_{n-1})}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-1}-t_{m-d-1})w_n} - \frac{d(d-1)(w_{n-1} b_{n-1} - w_{n-2} b_{n-2})}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})w_n}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2d^2}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})^2} \frac{w_{n-1}}{w_n^2} (b_n - b_{n-1})(w_n - w_{n-1}) \\
& \quad - \frac{b_n}{w_n} \frac{d(d-1)(w_n - w_{n-1})}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-1} - t_{m-d-1})} \\
& \quad + \frac{b_n}{w_n} \frac{d(d-1)(w_{n-1} - w_{n-2})}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-1} - t_{m-d-1})} \\
& = \left\{ \frac{w_{n-1}}{w_n} \frac{d(d-1)}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})} \left[ \frac{1}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} - \frac{1}{t_{m-1} - t_{m-d-2}} \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{2d^2 w_{n-1} (w_n - w_{n-1})}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})^2 w_n} \right\} (b_n - b_{n-1}) \\
& \quad - \frac{w_{n-2}}{w_n} \frac{d(d-1)}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-1} - t_{m-d-2})} (b_n - b_{n-2})
\end{aligned}$$

dir.

**Teorem 4.14.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olana. dereceden bir açık NURBS eğrisi verilsin bu takdirde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}'''(t_d) &= \frac{d(d-1)(d-2)w_3}{zlm} \frac{w_3}{w_0} (b_3 - b_0) \\
& \quad - \frac{d(d-1)w_2}{w_0} \left[ \frac{d-2}{zlm} + \frac{d-2}{zkly} + \frac{3d(w_1 - w_0)}{zykw_0} \right] (b_2 - b_0) \\
& \quad + \frac{w_1 d}{w_0} \left[ \frac{\frac{(d-1)(d-2)(y+l)}{zkly} + \frac{(d-1)(d-2)}{xyz} + \frac{3d(w_1 - w_0)}{x^2 w_0} \left( \frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d(w_1 - w_0)}{xw_0} \right)}{\frac{3d(d-1)}{w_0 xy} \left[ \frac{w_1 - w_2}{k} + \frac{w_1 - w_0}{x} \right]} \right] (b_1 - b_0) \quad (124)
\end{aligned}$$

dir. burada

$$t_{d+1} - t_1 = x, t_{d+1} - t_3 = z, t_{d+2} - t_2 = k, t_{d+2} - t_3 = l, t_{d+3} - t_3 = m \text{ ve } t_{d+1} - t_2 = y$$

dir.

ve

$$\mathfrak{B}'''(t_{m-d})$$

$$\begin{aligned}
& = \left\{ \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-1}}{uvw_n} \left( \frac{1}{e} + \frac{h+v}{qh} \right) - \right. \\
& \quad \left. \frac{3d^2 w_{n-1}}{ew_n} \left[ \frac{(d-1)(w_n - w_{n-1}) \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{p} \right)}{vw_n} + \frac{d-1}{vw_n} \left( \frac{w_n - w_{n-1}}{e} - \frac{w_{n-1} - w_{n-2}}{q} \right) - \frac{2d(w_n - w_{n-1})^2}{e^2} \right] \right\} (b_n \\
& \quad - b_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d(d-1)w_{n-2}}{w_n} \left\{ \frac{3d^2(w_n - w_{n-1})}{evqw_n} - \frac{(d-2)}{uhr} - \frac{(d-2)(h+v)}{uqvh} \right\} (b_n - b_{n-2}) \\
& + \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-3}}{uhrw_n} (b_n - b_{n-3}) \tag{125}
\end{aligned}$$

dir.

Burada

$$\begin{aligned}
t_{m-3} - t_{m-d-1} &= u, & t_{m-2} - t_{m-d-1} &= v, \\
t_{m-1} - t_{m-d-1} &= et_{m-1} - t_{m-d-2} &= p,
\end{aligned}$$

$$t_{m-2} - t_{m-d-2} = q, \quad t_{m-3} - t_{m-d-2} = h, \quad t_{m-3} - t_{m-d-3} = r \quad \text{dir.}$$

**İspat:**  $B = \frac{f}{g} \Rightarrow B' = \frac{f'}{g} - B \frac{g'}{g}$  ve  $B'' = \frac{f''}{g} - 2B' \frac{g'}{g} - B \frac{g''}{g}$  idi. O halde

$$\begin{aligned}
B''' &= \left[ \frac{f'''g - f''g'}{g^2} \right] - 2 \left[ B'' \frac{g'}{g} + B' \left( \frac{g''g - g'g'}{g^2} \right) \right] - \left[ B' \frac{g''}{g} + B \left( \frac{g'''g - g''g'}{g^2} \right) \right] \\
&= \frac{f'''g}{g^2} - \frac{f''g'}{g^2} - 2B'' \frac{g'}{g} - 2B' \frac{g''g}{g^2} + 2B' \frac{g'^2}{g^2} - B' \frac{g''}{g} - B \frac{g'''}{g} + B \frac{g''g'}{g^2} \\
&= \frac{f'''}{g} - \frac{g'}{g} \left( \frac{f''}{g} - 2B' \frac{g'}{g} - B \frac{g''}{g} + 2B' \right) - \frac{g''}{g} [3B'] - B \frac{g'''}{g} \\
&= \left\{ \frac{f'''}{g} - 3 \frac{g'}{g} B'' - 3 \frac{g''}{g} B' - B \frac{g'''}{g} \right\}
\end{aligned}$$

dir. O halde;

$$\begin{aligned}
B'''(t_d) &= \frac{1}{w_0} \left\{ - \frac{\left[ \frac{d(d-1)(d-2)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)} (w_3b_3 - w_2b_2) \right]}{d(d-1)(d-2)[t_{d+1} + t_{d+2} - t_2 - t_3](w_2b_2 - w_1b_1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{d(d-1)(d-2)(w_1b_1 - w_0b_0)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+1}-t_1)} \right\} \\
&- \frac{3}{w_0} \left\{ \frac{d}{(t_{d+1}-t_1)} (w_1 \right. \\
&\quad \left. - w_0) \left[ \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{d}{(t_{d+1}-t_1)} \frac{w_1}{w_0} \left[ \frac{(d-1)(t_{d+1} + t_{d+2} - t_1 - t_2)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} + \frac{2d}{t_{d+1}-t_1} \left( \frac{w_1}{w_0} - 1 \right) \right] (b_1 - b_0) \right] \right\} \\
&- \frac{3}{w_0} \left\{ \frac{d}{(t_{d+1}-t_1)} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \left[ \frac{d(d-1)(w_2 - w_1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} - \frac{d(d-1)(w_1 - w_0)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+1}-t_1)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$-\frac{b_0}{w_0} \left\{ \frac{d(d-1)(d-2)(w_3-w_2)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)} + \frac{d(d-1)(d-2)(w_1-w_0)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+1}-t_1)} \right\}$$

$$-\frac{d(d-1)(d-2)(t_{d+1}+t_{d+2}-t_2-t_3)(w_2-w_1)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_2)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+1}-t_2)}$$

$t_{d+1}-t_1 = x, t_{d+1}-t_3 = z, t_{d+2}-t_2 = k, t_{d+2}-t_3 = l, t_{d+3}-t_3 = m$  ve  $t_{d+1}-t_2 = y$

dersek

$$B'''(t_d) = \frac{d(d-1)(d-2)}{w_0} \left[ \frac{w_3 b_3 - w_2 b_2}{zlm} - \frac{(y+l)(w_2 b_2 - w_1 b_1)}{zkly} + \frac{w_1 b_1 - w_0 b_0}{zyx} \right]$$

$$-\frac{3d}{xw_0} (w_1 - w_0) \left[ \frac{d(d-1)w_2}{yk} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) \right.$$

$$\left. - \frac{dw_1}{xw_0} (b_1 - b_0) \left[ \frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d}{x} \left( \frac{w_1 - w_0}{w_0} \right) \right] \right]$$

$$-\frac{3dw_1}{xw_0^2} (b_1 - b_0) \left[ \frac{d(d-1)(w_2 - w_1)}{yk} - \frac{d(d-1)(w_1 - w_0)}{yx} \right]$$

$$-\frac{b_0}{w_0} (d(d-1)(d-2) \left[ \frac{w_3 - w_2}{zlm} + \frac{w_1 - w_0}{zyx} - \frac{(w_2 - w_1)(y+l)}{zkly} \right]$$

$$= \frac{d(d-1)(d-2)w_3}{zlm} \frac{w_3}{w_0} (b_3 - b_0) - \frac{d(d-1)(d-2)w_2}{zlm} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0)$$

$$- \frac{d(d-1)(d-2)(y+l)w_2}{zkly} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) + \frac{d(d-1)(d-2)(y+l)w_1}{zkly} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0)$$

$$+ \frac{d(d-1)(d-2)w_1}{xyz} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) - \frac{3d^2(d-1)w_2(w_1 - w_0)}{zykw_0^2} (b_2 - b_0)$$

$$+ \frac{3d^2w_1(w_1 - w_0)}{x^2w_0^2} \left[ \frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d(w_1 - w_0)}{xw_0} \right] (b_1 - b_0)$$

$$+ \left[ -\frac{3d^2(d-1)w_1(w_2 - w_1)}{xw_0^2yk} + \frac{3d^2(d-1)w_1(w_1 - w_0)}{x^2yw_0^2} \right] (b_1 - b_0)$$

$$= \frac{d(d-1)(d-2)w_3}{zlm} \frac{w_3}{w_0} (b_3 - b_0)$$

$$- \frac{d(d-1)w_2}{w_0} \left[ \frac{d-2}{zlm} + \frac{d-2}{zkly} + \frac{3d(w_1 - w_0)}{zykw_0} \right] (b_2 - b_0)$$

$$+ \frac{w_1 d}{w_0} \left[ \frac{(d-1)(d-2)(y+l)}{zkly} + \frac{(d-1)(d-2)}{xyz} + \frac{3d(w_1-w_0)}{x^2 w_0} \left( \frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d(w_1-w_0)}{xw_0} \right) + \frac{3d(d-1)}{w_0 xy} \left[ \frac{w_1-w_2}{k} + \frac{w_1-w_0}{x} \right] \right] (b_1 - b_0)$$

bulunur. Benzer şekilde önce

$$t_{m-3} - t_{m-d-1} = u, \quad t_{m-2} - t_{m-d-1} = v, \quad t_{m-1} - t_{m-d-1} = e$$

$$t_{m-1} - t_{m-d-2} = p, \quad t_{m-2} - t_{m-d-2} = q, \quad t_{m-3} - t_{m-d-2} = h$$

$t_{m-3} - t_{m-d-3} = r$  diyelim Bu durumda

$B''' = \frac{f'''}{g} - 3 \frac{g'}{g} B''' - 3 \frac{g''}{g} B' - B \frac{g'''}{g}$  idi. O halde

$$B'''(t_{m-d}) = \frac{d(d-1)(d-2)}{w_n} \left[ \frac{w_n b_n - w_{n-1} b_{n-1}}{uve} + \frac{w_{n-2} b_{n-2} - w_{n-3} b_{n-3}}{uhr} - \frac{(h+v)(w_{n-1} b_{n-1} - w_{n-2} b_{n-2})}{uqvh} \right]$$

$$- \frac{3d(w_n - w_{n-1})}{ew_n} \left\{ \left[ \frac{w_{n-1} d(d-1)}{w_n v} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{p} \right) - \frac{2d^2 w_{n-1} (w_n - w_{n-1})}{e^2} \right] (b_n - b_{n-1}) - \frac{w_{n-2} d(d-1)}{w_n vq} (b_n - b_{n-2}) \right\}$$

$$- \frac{3d^2(d-1)}{ve w_n} \left\{ \frac{(w_n - w_{n-1})}{e} - \frac{(w_{n-1} - w_{n-2})}{q} \right\} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1})$$

$$- \frac{d(d-1)(d-2)b_n}{uw_n} \left[ \frac{w_n - w_{n-1}}{ve} - \frac{(h+v)(w_{n-1} - w_{n-2})}{qvh} + \frac{(w_{n-2} - w_{n-3})}{hr} \right]$$

olur. Buradan,

$$B'''(t_{m-d}) = - \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-1}}{uvew_n} b_{n-1} + \frac{w_{n-2}d(d-1)(d-2)}{uhrw_n} b_{n-2}$$

$$- \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-3}}{uhrw_n} b_{n-3} - \frac{d(d-1)(d-2)(u+v)w_{n-1}}{uqvhw_n} b_{n-1}$$

$$+ \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-2}(h+v)}{uqvhw_n} b_{n-2} - \frac{3d^2(d-1)(w_n - w_{n-1})w_{n-1}}{ve w_n^2} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{p} \right) b_n$$

$$+ \frac{6d^3(w_n - w_{n-1})^2 w_{n-1}}{e^3 w_n} b_n + \frac{3d^2(d-1)w_{n-1}(w_n - w_{n-1})}{ve w_n^2} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{p} \right) b_{n-1}$$

$$- \frac{6d^3(w_n - w_{n-1})^2 w_{n-1}}{e^3 w_n} b_{n-1} + \frac{3d^2(d-1)w_{n-2}(w_n - w_{n-1})}{evq w_n^2} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{p} \right) (b_n - b_{n-2})$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3d^2(d-1)w_{n-1}}{vew_n^2} \left( \frac{w_n - w_{n-1}}{e} - \frac{w_{n-1} - w_{n-2}}{q} \right) (b_n - b_{n-1}) \\
& \quad + \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-1}}{uvew_n} b_n \\
& + \frac{d(d-1)(d-2)(h+v)w_{n-1}}{uqvhw_n} b_n - \frac{d(d-1)(d-2)(h+v)w_{n-2}}{uqvhw_n} b_n \\
& \quad - \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-2}}{uhrw_n} b_n + \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-3}}{uhrw_n} b_n
\end{aligned}$$

olur. Buradan da;

$$\begin{aligned}
B'''(t_{m-d}) &= \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-1}}{uvew_n} (b_n - b_{n-1}) \\
& \quad + \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-3}}{uhrw_n} (b_n - b_{n-3}) \\
& - \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-2}}{uhrw_n} (b_n - b_{n-2}) + \frac{d(d-1)(d-2)(h+v)w_{n-1}}{uqvhw_n} (b_n - b_{n-1}) \\
& \quad - \frac{d(d-1)(d-2)(h+v)w_{n-2}}{uqvhw_n} (b_n - b_{n-2}) \\
& \quad - \frac{3d^2(d-1)w_{n-1}(w_n - w_{n-1})}{vew_n^2} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{p} \right) (b_n - b_{n-1}) \\
& + \frac{6d^3(w_n - w_{n-1})^2 w_{n-1}}{e^3 w_n} (b_n - b_{n-1}) + \frac{3d^2(d-1)w_{n-2}(w_n - w_{n-1})}{evqw_n^2} (b_n - b_{n-2}) \\
& \quad - \frac{3d^2(d-1)w_{n-1}}{vew_n^2} \left( \frac{w_n - w_{n-1}}{e} - \frac{w_{n-1} - w_{n-2}}{q} \right) (b_n - b_{n-1})
\end{aligned}$$

yazılır. Son olarak

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{B}'''(t_{m-d}) \\
& = \left\{ \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-1}}{uvw_n} \left( \frac{1}{e} + \frac{h+v}{qh} \right) - \right. \\
& \quad \left. \frac{3d^2 w_{n-1}}{ew_n} \left[ \frac{(d-1)(w_n - w_{n-1}) \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{p} \right)}{vw_n} + \frac{d-1}{vw_n} \left( \frac{w_n - w_{n-1}}{e} - \frac{w_{n-1} - w_{n-2}}{q} \right) - \frac{2d(w_n - w_{n-1})^2}{e^2} \right] \right\} (b_n \\
& - b_{n-1}) \\
& \quad + \frac{d(d-1)w_{n-2}}{w_n} \left\{ \frac{3d^2(w_n - w_{n-1})}{evqw_n} - \frac{(d-2)}{uhr} - \frac{(d-2)(h+v)}{uqvh} \right\} (b_n - b_{n-2}) \\
& \quad + \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-3}}{uhrw_n} (b_n - b_{n-3})
\end{aligned}$$

olur.

**Teorem 4.15.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $n$ ci dereceden bir açık  $\alpha$  NURBS eğrisinin Frenet vektör alanları ve eğrilikleri  $t = t_d$  noktasında aşağıdaki şekildedir:

$$T|_{t=t_d} = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \quad (126)$$

$$B|_{t=t_d} = \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} \quad (127)$$

$$N|_{t=t_d} = \frac{(b_2 - b_0)}{\|b_2 - b_0\|} \csc \Phi - \frac{(b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi \quad (128)$$

$$\kappa|_{t=t_d} = \frac{d-1}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \quad (129)$$

$$\tau|_{t=t_d} = \frac{d-2}{d} \frac{w_0 w_3}{w_1 w_2} \frac{xyk}{zlm} \frac{\|b_3 - b_0\| \cos \varphi}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} \quad (130)$$

dir. Burada  $\Phi$ ,  $(b_1 - b_0)$  ve  $(b_2 - b_0)$  vektörleri arasındaki açıyı ve  $\varphi$  de  $(b_3 - b_0)$  ile  $(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)$  vektörleri arasındaki açıyı ifade eder. Ayrıca  $t_{d+1} - t_1 = x$ ,  $t_{d+1} - t_3 = z$ ,  $t_{d+2} - t_2 = k$ ,  $t_{d+2} - t_3 = l$ ,  $t_{d+3} - t_3 = m$  ve  $t_{d+1} - t_2 = y$ dir.

**İspat:**

$$1) T|_{t=t_d} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{\frac{d}{x} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0)}{\left\| \frac{d}{x} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \right\|} = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|}$$

$$2) B|_{t=t_d} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} = \frac{\frac{d}{x} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \times \frac{d(d-1)w_2}{ykw_0} (b_2 - b_0)}{\left\| \frac{d}{x} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \times \frac{d(d-1)w_2}{ykw_0} (b_2 - b_0) \right\|}$$

$$= \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|}$$

$$3) N|_{t=t_d} = (B \times T)|_{t=t_d} = \left[ \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} \times \frac{(b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\|} \right]$$

$$= \frac{1}{\|b_1 - b_0\| \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} [(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)] \times (b_1 - b_0)$$

$$= \frac{1}{\|b_1 - b_0\| \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} [\langle (b_1 - b_0), (b_1 - b_0) \rangle (b_2 - b_0)$$

$$- \langle (b_1 - b_0), (b_2 - b_0) \rangle (b_1 - b_0)]$$

$$= \frac{1}{\|b_1 - b_0\| \|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_0\| \sin \Phi} [\|b_1 - b_0\|^2 (b_2 - b_0)$$

$$- \|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_0\| \cos \Phi (b_1 - b_0)]$$

$$= \frac{b_2 - b_0}{\|b_2 - b_0\| \sin \Phi} - \frac{(b_1 - b_0) \cos \Phi}{\|b_1 - b_0\| \sin \Phi} = \frac{(b_2 - b_0)}{\|b_2 - b_0\|} \csc \Phi - \frac{(b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi$$

$$4) \kappa|_{t=t_d} = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\frac{d^2(d-1)w_1w_2}{xykw_0^2} \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|}{\frac{d^3w_1^3}{x^3w_0^3} \|b_1 - b_0\|^3}$$

$$= \frac{d-1}{d} \frac{x^2 w_0 w_2}{yk w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi$$

olur.

$$5) \tau|_{t=t_d} = \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

$$= \frac{\left( \begin{array}{l} \frac{d w_1}{x w_0} (b_1 - b_0), \frac{d(d-1) w_2}{yk w_0} (b_2 - b_0) - \frac{d w_1}{x w_0} \left[ \frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d(w_1-w_0)}{xw_0} \right] (b_1 - b_0) \\ \frac{d(d-1)(d-2)w_3}{zlmw_0} (b_3 - b_0) - \frac{d(d-1)w_2}{w_0} \left( \frac{d-2}{zlm} + \frac{d-2}{zkly} + \frac{3d(w_1-w_0)}{zykw_0} \right) (b_2 - b_0) \\ + \frac{w_1 d}{w_0} \left\{ \frac{(d-1)(d-2)(y+l)}{zkly} + \frac{(d-1)(d-2)}{xyz} + \frac{3d(w_1-w_0)}{x^2 w_0} \left( \frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d(w_1-w_0)}{xw_0} \right) \right\} (b_1 - b_0) \end{array} \right)}{\frac{d^4(d-1)^2 w_1^2 w_2^2}{x^2 y^2 k^2 w_0^4} \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|^2}$$

$$= \frac{\frac{d^3 w_1 (d-1)^2 w_2 (d-2) w_3}{x w_0 yk w_0 zlmw_0} (b_1 - b_0, b_2 - b_0, b_3 - b_0)}{\frac{d^4(d-1)^2 w_1^2 w_2^2}{x^2 y^2 k^2 w_0^4} \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|^2}$$

$$= \frac{d-2}{d} \frac{w_0 w_3}{w_1 w_2 zlm} \frac{xyk}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} \|b_3 - b_0\| \cos \varphi$$

elde edilir.

**Teorem 4.16.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $n$ ci dereceden bir açık  $\alpha$  NURBS eğrisinin Frenet vektör alanları ve eğrilikleri  $t = t_{m-d}$  noktasında aşağıdaki şekildedir:

$$T|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \quad (131)$$

$$B|_{t=t_{m-d}} = -\frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} \quad (132)$$

$$N|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-2}}{\|b_n - b_{n-2}\|} \csc \Phi - \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \Phi \quad (133)$$

Burada  $\Phi, b_n - b_{n-1}$  ile  $b_n - b_{n-2}$  vektörleri arasındaki açıdır.

$$\kappa|_{t=t_{m-d}} = \frac{e^2(d-1) w_n w_{n-2}}{dvp w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\| \sin \Phi}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \quad (134)$$

$$\tau|_{t=t_{m-d}} = \frac{(d-2)w_n w_{n-3}}{dw_{n-1} w_{n-2}} \frac{evp}{uhr} \frac{\|b_n - b_{n-3}\| \cos \varphi}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} \quad (135)$$

Burada  $\varphi, (b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})$  ile  $(b_n - b_{n-3})$  vektörleri arasındaki açıdır..

Ayrıca

$$\begin{aligned}
t_{m-3} - t_{m-d-1} &= u, & t_{m-2} - t_{m-d-1} &= v, \\
t_{m-1} - t_{m-d-1} &= et_{m-1} - t_{m-d-2} = p, \\
t_{m-2} - t_{m-d-2} &= q, & t_{m-3} - t_{m-d-2} &= h, & t_{m-3} - t_{m-d-3} &= r \quad \text{dir.}
\end{aligned}$$

**İspat:**

$$\begin{aligned}
1) \quad T|_{t=t_{m-d}} &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{\frac{d}{e} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1})}{\left\| \frac{d}{e} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \right\|} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \\
2) \quad B|_{t=t_{m-d}} &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} = \frac{-\frac{d}{e} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \times \frac{d(d-1)w_{n-2}}{vpw_n} (b_n - b_{n-2})}{\left\| -\frac{d}{e} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \times \frac{d(d-1)w_{n-2}}{vpw_n} (b_n - b_{n-2}) \right\|} \\
&= -\frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} \\
3) \quad N|_{t=t_{m-d}} &= (B \times T)|_{t=t_{m-d}} = -\frac{[(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})]}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} \times \frac{(b_n - b_{n-1})}{\|b_n - b_{n-1}\|} \\
&= -\frac{\langle b_n - b_{n-1}, b_n - b_{n-1} \rangle (b_n - b_{n-2}) - \langle b_n - b_{n-1}, b_n - b_{n-2} \rangle (b_n - b_{n-1})}{\|b_n - b_{n-1}\| \|b_n - b_{n-1}\| \|b_n - b_{n-2}\| \sin \Phi} \\
&= \left( \frac{b_n - b_{n-2}}{\|b_n - b_{n-2}\| \sin \Phi} \right) - \left( \frac{b_n - b_{n-1} \cos \Phi}{\|b_n - b_{n-1}\| \sin \Phi} \right) \\
&= \frac{b_n - b_{n-2}}{\|b_n - b_{n-2}\|} \csc \Phi - \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \Phi
\end{aligned}$$

Burada  $\Phi$ ,  $b_n - b_{n-1}$  ile  $b_n - b_{n-2}$  vektörleri arasındaki açıdır.

$$\begin{aligned}
4) \quad \kappa|_{t=t_{m-d}} &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\left\| \frac{d}{e} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \times \frac{w_{n-2} d(d-1)}{w_n vp} (b_n - b_{n-2}) \right\|}{\frac{d^3 w_{n-1}^3}{e^3 w_n^3} \|b_n - b_{n-1}\|^3} \\
&= \frac{e^2 (d-1) w_n w_{n-2} \|b_n - b_{n-2}\| \sin \Phi}{dvp w_{n-1}^2 \|b_n - b_{n-1}\|^2} \\
5) \quad \tau|_{t=t_{m-d}} &= \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \\
&= \frac{\left\langle \left( \frac{d}{e} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \times \frac{w_{n-2} d(d-1)}{w_n vp} (b_n - b_{n-2}) \right), \left( \frac{d(d-1)(d-2) w_{n-3}}{uhr w_n} (b_n - b_{n-3}) \right) \right\rangle}{\frac{d^4 (d-1)^2 w_{n-1}^2 w_{n-2}^2}{e^2 v^2 p^2 w_n^4} \|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|^2} \\
&= \frac{\frac{d^3 (d-1)^2 (d-2) w_{n-1} w_{n-2} w_{n-3}}{evpuhr w_n^3} (b_n - b_{n-1}, b_n - b_{n-2}, b_n - b_{n-3})}{\frac{d^4 (d-1)^2 w_{n-1}^2 w_{n-2}^2}{e^2 v^2 p^2 w_n^4} \|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(d-2)w_n w_{n-3} \text{ evp} \quad \|b_n - b_{n-3}\| \cos \varphi}{dw_{n-1} w_{n-2} \quad \text{ uhr} \quad \|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|}$$

Burada  $\varphi$ ,  $(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})$  ile  $(b_n - b_{n-3})$  vektörleri arasındaki açıdır.

**Teorem 4.17.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olund. dereceden bir açık NURBS eğrisi verilsin bu taktirde NURBS eğrisinin  $t^* \in [t_r, t_{r+1})$  noktasındaki birinci türevi

$$B'(t^*) = \frac{d}{t_{d+1}-t_1} \frac{w_r^{d-1}}{w_r^d} (b_r^{d-1} - b_r^d) \quad (136)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}''(t^*) &= \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{w_r^{d-2}}{w_r^d} (b_r^{d-2} - b_r^d) \\ &- \frac{d}{(t_{d+1}-t_1)} \frac{w_r^{d-1}}{w_r^d} \left[ \frac{(d-1)(t_{d+1}+t_{d+2}-t_1-t_2)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} + \frac{2d}{(t_{d+1}-t_1)} \left( \frac{w_r^{d-1}}{w_r^d} - 1 \right) \right] (b_r^{d-1} - b_r^d) \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}'''(t^*) &= \frac{d(d-1)(d-2)}{zlm} \frac{w_r^{d-3}}{w_r^d} (b_r^{d-3} - b_r^d) \\ &- \frac{d(d-1)w_r^{d-2}}{w_r^d} \left[ \frac{d-2}{zlm} + \frac{d-2}{zkly} + \frac{3d(w_r^{d-1} - w_r^d)}{zykw_r^d} \right] (b_r^{d-2} - b_r^d) \\ &+ \frac{w_r^{d-1}d}{w_r^d} \left[ \frac{\frac{(d-1)(d-2)(y+l)}{zkly} + \frac{(d-1)(d-2)}{xyz} + \frac{3d(w_r^{d-1}-w_r^d)}{x^2w_r^d} \left( \frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d(w_r^{d-1}-w_r^d)}{xw_r^d} \right)}{\frac{3d(d-1)}{w_r^d xy} \left[ \frac{w_r^{d-1}-w_r^{d-2}}{k} + \frac{w_r^{d-1}-w_r^d}{x} \right]} \right] (b_r^{d-1} - b_r^d) \end{aligned} \quad (138)$$

dir. Burada  $b_i^j$  ve  $w_i^j$  ler sırasıyla **rasyonel de Boor** algoritmasıyla elde edilen kontrol noktaları ve o noktaların ağırlıklarıdır. Ayrıca,  $t_{d+1} - t_1 = x, t_{d+1} - t_3 = z, t_{d+2} - t_2 = k, t_{d+2} - t_3 = l, t_{d+3} - t_3 = m$  ve  $t_{d+1} - t_2 = y$  dir.

**İspat:** Açık NURBS eğrilerinde  $t = t_d$  ve  $t = t_{m-d}$  noktalarının dışında herhangi bir  $t^* \in [t_r, t_{r+1})$  ( $d \leq r \leq m-d-1$ ) noktasında eğrinin türev denklemlerinin elde edilmesi,  $\{T, N, B\}$  çatısı ve eğrilikleri ifade edilebilmesi için açık Spline eğrilerinde olduğu gibi de Boor algoritmasına paralel olarak  $t^*$  noktasında **rasyonel de Boor algoritması** ile eğriye subdivision uygulanır. Böylece NURBS eğrisi iki segmente ayrılır verilen  $t^*$  noktası ve algoritma sonucu bulunan  $b_r^d, b_r^{d-1}, b_r^{d-2}, b_r^{d-3}$  kontrol noktaları ile  $w_r^d, w_r^{d-1}, w_r^{d-2}, w_r^{d-3}$  ağırlıkları; elde edilen iki segmentten sağ tarafta kalan yeni NURBS eğrisinin ilk 4 kontrol noktasını ve ağırlıklarını ifade edecektir. Yani

bu kontrol noktaları ve ağırlıklar, yeni NURBS eğrisinin  $b_0, b_1, b_2, b_3$  noktalarını ve  $w_0, w_1, w_2, w_3$  ağırlıklarını ifade eder. Buradaki  $t^*$  noktası da yeni NURBS eğrisinin  $t_d$  noktasını ifade edecektir. Buna göre ispat Teorem 4.10'a benzer şekilde yapılabilir.

**Teorem 4.18.** Kontrol noktaları  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ile ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $d$ .nci dereceden bir açık  $\alpha$  NURBS eğrisinin  $t^* \in [t_r, t_{r+1})$  noktasındaki Frenet vektör alanları ve eğrilikleri aşağıdaki şekildedir:

$$T|_{t=t^*} = \frac{b_r^{d-1} - b_r^d}{\|b_r^{d-1} - b_r^d\|} \quad (139)$$

$$B|_{t=t^*} = \frac{(b_r^{d-1} - b_r^d) \times (b_r^{d-2} - b_r^d)}{\|(b_r^{d-1} - b_r^d) \times (b_r^{d-2} - b_r^d)\|} \quad (140)$$

$$N|_{t=t^*} = \frac{(b_r^{d-2} - b_r^d)}{\|b_r^{d-2} - b_r^d\|} \csc \Phi - \frac{(b_r^{d-1} - b_r^d)}{\|b_r^{d-1} - b_r^d\|} \cot \Phi \quad (141)$$

$$\kappa|_{t=t^*} = \frac{d-1}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_r^d w_r^{d-2}}{w_r^{d-1}{}^2} \frac{\|b_r^{d-2} - b_r^d\|}{\|b_r^{d-1} - b_r^d\|^2} \sin \Phi \quad (142)$$

$$\tau|_{t=t^*} = \frac{d-2}{d} \frac{w_r^d w_r^{d-3}}{w_r^{d-1} w_r^{d-2}} \frac{xyk}{zlm} \frac{\|b_r^{d-3} - b_r^d\| \cos \varphi}{\|(b_r^{d-1} - b_r^d) \times (b_r^{d-2} - b_r^d)\|} \quad (143)$$

dir. Burada  $\Phi$ ,  $(b_r^{d-1} - b_r^d)$  ve  $(b_r^{d-2} - b_r^d)$  vektörleri arasındaki açıyı ve  $\varphi$  de  $(b_r^{d-3} - b_r^d)$  ile  $(b_r^{d-1} - b_r^d) \times (b_r^{d-2} - b_r^d)$  vektörleri arasındaki açıyı ifade eder. Ayrıca  $t_{d+1} - t_1 = x, t_{d+1} - t_3 = z, t_{d+2} - t_2 = k, t_{d+2} - t_3 = l, t_{d+3} - t_3 = m$  ve  $t_{d+1} - t_2 = y$  dir.

**İspat:** Teorem 4.17 ve Teorem 4.15 den kolayca görülebilir.

#### 4.4 Açık Bertrand Nurbs Eğri Çiftleri

**Teorem 4.19.**  $\alpha$  ve  $\beta$  kontrol noktaları ve ağırlıkları sırasıyla  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve  $c_0, c_1, \dots, c_n$  olan knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $d$ .nci dereceden açık B-spline eğrileri olsunlar.  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrileri  $t = t_d$  noktasında Bertrand çifti oluşturur ancak ve ancak,  $\exists \theta \in [0, 2\pi]$  ve  $k \in \mathbb{R}$  öyleki

$$c_1 = c_0 + (b_1 - b_0) \cos \theta - (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0) \sin \theta \quad (144)$$

$$c_2 = c_0 + (b_2 - b_0) + k(b_1 - b_0) \quad (145)$$

sağlanır.

**İspat:**  $\alpha$  ve  $\beta$  birer Bertrand çifti ise asli birim normal vektörleri  $N_\alpha = N_\beta$  olmalıdır.

Buna göre

$$[(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)] \times (b_1 - b_0) = [(c_1 - c_0) \times (c_2 - c_0)] \times (c_1 - c_0)$$

sağlanmalıdır. Eğer 4 vektör  $u, v, w, t$  alındığında  $u \times v = w \times t$  ise  $\{u, v, w, t\}$  vektörleri aynı düzlemlidir. O halde  $(b_1 - b_0), (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0), (c_1 - c_0), (c_1 - c_0) \times (c_2 - c_0)$  vektörleri aynı düzlemlidir. Bu vektörlerde

$$(b_1 - b_0) \perp (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)$$

$$(c_1 - c_0) \perp (c_1 - c_0) \times (c_2 - c_0)$$

olduğundan, bu ortogonal vektörler düzlemde bir  $\theta$  kadar dönme dönüşümü ile biri, diğerine dönüştürülebilir demektir. O halde  $\{(b_1 - b_0), (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\}$  ve  $\{(c_1 - c_0), (c_1 - c_0) \times (c_2 - c_0)\}$  vektör sistemleri  $O(2)$ -denk olmalıdır. Yani

$$\{(b_1 - b_0), (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\} \stackrel{O(2)}{\approx} \{(c_1 - c_0), (c_1 - c_0) \times (c_2 - c_0)\}$$

dir.

O halde  $\exists \theta \in [0, 2\pi]$  öyleki,

$$c_1 - c_0 = (b_1 - b_0) \cos \theta - (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0) \sin \theta \quad (146)$$

$$(c_1 - c_0) \times (c_2 - c_0) = (b_1 - b_0) \sin \theta + (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0) \cos \theta \quad (147)$$

sağlanır. Buradan (146)'den

$$c_1 = c_0 + (b_1 - b_0) \cos \theta - (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0) \sin \theta$$

eşitliği görülür. Bu eşitlik ikincide yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (c_1 - c_0) \times (c_2 - c_0) &= [(b_1 - b_0) \cos \theta - (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0) \sin \theta] \times (c_2 - c_0) \\ &= ((b_1 - b_0) \times (c_2 - c_0)) \cos \theta - [(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)] \times (c_2 - c_0) \sin \theta \end{aligned}$$

Olur . Ayrıca (147) den bu ifade aynı zamanda

$$= (b_1 - b_0) \sin \theta + (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0) \cos \theta$$

yazılır. O halde

$$\begin{aligned} &((b_1 - b_0) \times (c_2 - c_0)) \cos \theta \\ &\quad - [\langle (b_1 - b_0), (c_2 - c_0) \rangle (b_2 - b_0) - \langle (b_2 - b_0), (c_2 - c_0) \rangle (b_1 - b_0)] \sin \theta = (b_1 - b_0) \sin \theta + (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0) \cos \theta \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$(b_1 - b_0) \times (c_2 - c_0) = (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0) \quad (148)$$

ve

$$\langle (c_2 - c_0), (b_2 - b_0) \rangle = 1$$

bulunur. (148) eşitliğinden

$$(c_2 - c_0) - (b_2 - b_0) \quad // \quad (b_1 - b_0)$$

elde edilir. Buna göre  $\exists k \in R$  öyleki

$$(c_2 - c_0) - (b_2 - b_0) = k(b_1 - b_0)$$

olur. Buradan

$$c_2 = c_0 + (b_2 - b_0) + k(b_1 - b_0)$$

elde edilir.

**Teorem 4.20.**  $\alpha$  ve  $\beta$  kontrol noktaları ve ağırlıkları sırasıyla  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve  $c_0, c_1, \dots, c_n$  ile ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ve  $z_0, z_1, \dots, z_n$  olan knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $d$ .nci dereceden açık NURBS eğrileri olsunlar  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrileri  $t = t_{m-d}$  noktasında Bertrand çifti oluşturur ancak ve ancak,  $\exists \theta \in [0, 2\pi]$  ve  $k \in \mathbb{R}$  öyleki

$$c_n = c_{n-1} + (b_n - b_{n-1}) \cos \theta - (b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2}) \sin \theta \quad (149)$$

$$c_n = c_{n-2} + (b_n - b_{n-2}) + k(b_n - b_{n-1}) \quad (150)$$

sağlanır.

**İspat:**  $\alpha$  ve  $\beta$ ,  $t = t_{m-d}$  noktasında birer Bertrand çifti ise asli birim normal vektörleri  $N_\alpha = N_\beta$  olmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} & [(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})] \times (b_n - b_{n-1}) \\ &= [(c_n - c_{n-1}) \times (c_n - c_{n-2})] \times (c_n - c_{n-1}) \end{aligned}$$

sağlanmalıdır. Eğer 4 vektör  $u, v, w, t$  alındığında  $u \times v = w \times t$  ise  $\{u, v, w, t\}$  vektörleri aynı düzlemli olmalıdır. O halde  $(b_1 - b_0), (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0), (c_1 - c_0), (c_1 - c_0) \times (c_2 - c_0)$  vektörleri aynı düzlemlidir. Bu vektörlerde

$$(b_n - b_{n-1}) \perp (b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})$$

$$(c_n - c_{n-1}) \perp (c_n - c_{n-1}) \times (c_n - c_{n-2})$$

olduğundan, bu ortogonal vektörler düzlemde bir  $\theta$  kadar dönme dönüşümü ile biri, diğerine dönüştürülebilir demektir. O halde  $\{(b_n - b_{n-1}), (b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\}$  ve  $\{(c_n - c_{n-1}), (c_n - c_{n-1}) \times (c_n - c_{n-2})\}$  vektör sistemleri  $O(2)$ -denk olmalıdır. Yani

$$\begin{aligned} & \{(b_n - b_{n-1}), (b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\} \stackrel{O(2)}{\approx} \{(c_n - c_{n-1}), (c_n - c_{n-1}) \\ & \quad \times (c_n - c_{n-2})\} \end{aligned}$$

dir.

O halde  $\exists \theta \in [0, 2\pi]$  öyleki,

$$(c_n - c_{n-1}) = (b_n - b_{n-1}) \cos \theta - (b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2}) \sin \theta \quad (151)$$

$$(c_n - c_{n-1}) \times (c_n - c_{n-2}) = (b_n - b_{n-1}) \sin \theta + (b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2}) \cos \theta \quad (152)$$

sağlanır. Buradan (151)'den

$$c_n = c_{n-1} + (b_n - b_{n-1}) \cos \theta - (b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2}) \sin \theta$$

eşitliği görülür. Bu eşitlik ikincide yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (c_n - c_{n-1}) \times (c_n - c_{n-2}) \\ &= [(b_n - b_{n-1}) \cos \theta - (b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2}) \sin \theta] \\ & \quad \times (c_n - c_{n-2}) \\ &= ((b_n - b_{n-1}) \times (c_n - c_{n-2})) \cos \theta - [(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})] \\ & \quad \times (c_n - c_{n-2}) \sin \theta \end{aligned}$$

Olur . Ayrıca (152) den bu ifade aynı zamanda

$$= (b_n - b_{n-1}) \sin \theta + (b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2}) \cos \theta$$

yazılır. O halde bulunur. Buradan,

$$(b_n - b_{n-1}) \times (c_n - c_{n-2}) = (b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2}) \quad (153)$$

ve

$$\langle (c_n - c_{n-2}), (b_n - b_{n-2}) \rangle = 1 ; \quad \langle (c_n - c_{n-2}), (b_n - b_{n-1}) \rangle = 0 \quad (154)$$

bulunur. (153) eşitliğinden

$$(c_n - c_{n-2}) - (b_n - b_{n-2}) \quad // (b_n - b_{n-1})$$

elde edilir. Buna göre  $\exists k \in \mathbb{R}$  öyleki

$$(c_n - c_{n-2}) - (b_n - b_{n-2}) = k(b_n - b_{n-1})$$

olur. Buradan

$$c_n = c_{n-2} + (b_n - b_{n-2}) + k(b_n - b_{n-1})$$

elde edilir.

**Teorem 4.21.**  $\alpha$  ve  $\beta$  kontrol noktaları ve ağırlıkları sırasıyla  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve  $c_0, c_1, \dots, c_n$  ile ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ve  $z_0, z_1, \dots, z_n$  olan knot vektörleri  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $d$ .nci dereceden açık NURBS eğrileri olsunlar.  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrileri  $t^* \in [t_r, t_{r+1})$  noktasında ( $d \leq r \leq m - d - 1$ ) Bertrand çifti oluşturur ancak ve ancak,  $\exists \theta \in [0, 2\pi]$  ve  $k \in \mathbb{R}$  öyleki

$$c_r^{d-1} = c_r^d + (b_r^{d-1} - b_r^d) \cos \theta - (b_r^{d-1} - b_r^d) \times (b_r^{d-2} - b_r^d) \sin \theta \quad (144)$$

$$c_r^{d-2} = c_r^d + (b_r^{d-2} - b_r^d) + k(b_r^{d-1} - b_r^d) \quad (145)$$

sağlanır. Burada  $b_i^j$  ve  $c_i^j$  leri sırasıyla  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrilerinin kontrol noktalarına  $t^* \in [t_r, t_{r+1})$

noktasında uygulanan **rasyonel de Boor** algoritmasıyla elde edilen kontrol noktalarıdır.

**İspat:**  $t^*$  noktasında **rasyonel de Boor algoritması** ile eğriye subdivision uygulanır. Böylece NURBS eğrisi iki segmente ayrılır verilen  $t^*$  noktası ve algoritma sonucu bulunan  $b_r^d, b_r^{d-1}, b_r^{d-2}, b_r^{d-3}$  kontrol noktaları ile  $w_r^d, w_r^{d-1}, w_r^{d-2}, w_r^{d-3}$  ağırlıkları; elde edilen iki segmentten sağ tarafta kalan yeni NURBS eğrisinin ilk 4 kontrol noktasını ve ağırlıklarını ifade edecektir. Yani bu kontrol noktaları ve ağırlıklar, yeni NURBS eğrisinin  $b_0, b_1, b_2, b_3$  noktalarını ve  $w_0, w_1, w_2, w_3$  ağırlıklarını ifade eder. Buradaki  $t^*$  noktası da yeni NURBS eğrisinin  $t_d$  noktasını ifade edecektir. Buna göre ispat Teorem 4.19'a benzer şekilde yapılabilir.

**Teorem 4.22.**  $\alpha$  ve  $\beta$  kontrol noktaları sırasıyla  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve  $c_0, c_1, \dots, c_n$  ile ağırlıkları eşit ve  $w_0, w_1, \dots, w_n$  olan ve knot vektörleri de  $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $d$ .nci dereceden açık iki NURBS eğrileri olsunlar. Eğer  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrilerinin kontrol noktaları arasında  $c_i = b_i + p$ ;  $p \in R^3$  bağıntısı varsa (yani paralel eğriler ise)  $\alpha$  ve  $\beta$  Bertrand çifti oluştururlar.

**İspat:**  $t = t_d$  olsun. Teorem 4.19 da  $\theta = 0$  ve  $k = 1$  alınırsa;

$$\begin{aligned} & [(c_1 - c_0) \times (c_2 - c_0)] \times (c_1 - c_0) \\ &= [((b_1 + p) - (b_0 + p)) \times ((b_2 + p) - (b_0 + p))] \\ & \quad \times ((b_1 + p) - (b_0 + p)) \\ &= [(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)] \times (b_1 - b_0) \end{aligned}$$

sağlandığından  $t = t_d$  de  $N_\alpha = N_\beta$  olur dolayısıyla da  $\alpha$  ve  $\beta$  Bertrand çifti oluştururlar. Benzer şekilde  $t = t_{m-d}$  olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} & [(c_n - c_{n-1}) \times (c_n - c_{n-2})] \times (c_n - c_{n-1}) \\ &= [((b_n + p) - (b_{n-1} + p)) \times ((b_n + p) - (b_{n-2} + p))] \\ & \quad \times ((b_n + p) - (b_{n-1} + p)) \\ &= [(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})] \times (b_n - b_{n-1}) \end{aligned}$$

sağlandığından  $t = t_{m-d}$  de  $N_\alpha = N_\beta$  olur dolayısıyla da  $\alpha$  ve  $\beta$  Bertrand çifti oluştururlar. Şimdi

$t^* \in [t_r, t_{r+1})$  noktasında ( $d \leq r \leq m - d - 1$ ) bu eğrilere rasyonel de Boor algoritması uygulayalım.

$$\alpha_i^j = \frac{t - t_i}{t_{i+d-j+1} - t_i}$$

$$w_i^j = (1 - \alpha_i^j)w_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j w_i^{j-1}$$

olmak üzere her  $j$  ve her  $i$  için  $c_i^j = b_i^j + p$  olduğunu gösterelim.

İndüksiyon ile yapalım:  $j=1$  olsun her  $i$  için

$$\begin{aligned} c_i^1 &= (1 - \alpha_i^1) \frac{w_{i-1}^0}{w_i^1} c_{i-1}^0 + \alpha_i^1 \frac{w_i^0}{w_i^1} c_i^0 = (1 - \alpha_i^1) \frac{w_{i-1}}{w_i^1} c_{i-1} + \alpha_i^1 \frac{w_i}{w_i^1} c_i \\ &= (1 - \alpha_i^1) \frac{w_{i-1}}{w_i^1} (b_{i-1} + p) + \alpha_i^1 \frac{w_i}{w_i^1} (b_i + p) \\ &= (1 - \alpha_i^1) \frac{w_{i-1}}{w_i^1} b_{i-1} + \alpha_i^1 \frac{w_i}{w_i^1} b_i + \left( (1 - \alpha_i^1) \frac{w_{i-1}}{w_i^1} + \alpha_i^1 \frac{w_i}{w_i^1} \right) p = b_i^1 + p \end{aligned}$$

olur.  $j-1$  için doğru olduğunu varsayalım. Yani, her  $i$  için  $c_i^{j-1} = b_i^{j-1} + p$  olsun.  $j$  için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} c_i^j &= (1 - \alpha_i^j) \frac{w_{i-1}^{j-1}}{w_i^j} c_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} c_i^{j-1} \\ &= (1 - \alpha_i^j) \frac{w_{i-1}^{j-1}}{w_i^j} (b_{i-1}^{j-1} + p) + \alpha_i^j \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} (b_i^{j-1} + p) \\ &= \left[ \underbrace{(1 - \alpha_i^j) \frac{w_{i-1}^{j-1}}{w_i^j} b_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} b_i^{j-1}}_{b_i^j} \right] + \left[ \underbrace{(1 - \alpha_i^j) \frac{w_{i-1}^{j-1}}{w_i^j} + \alpha_i^j \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j}}_1 \right] (p) \\ &= b_i^j + p \end{aligned}$$

olacağından her  $i, j$  için  $c_i^j = b_i^j + p$  olur. O halde  $c_r^d = b_r^d + p$ ;  $c_r^{d-1} = b_r^{d-1} + p$ ;  $c_r^{d-2} = b_r^{d-2} + p$  olur ki,

$$\left[ (b_r^{d-1} - b_r^d) \times (b_r^{d-2} - b_r^d) \right] \times (b_r^{d-1} - b_r^d) = [(c_r^{d-1} - c_r^d) \times (c_r^{d-2} - c_r^d)] \times (c_r^{d-1} - c_r^d)$$

Olur. Bu da  $N_\alpha = N_\beta$  anlamına gelir. Dolayısıyla da  $\alpha$  ve  $\beta$  Bertrand çifti oluştururlar.

**Teorem 4.23.**  $\alpha$  ve  $\beta$  kontrol noktaları sırasıyla  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ve  $c_0, c_1, \dots, c_n$  ile ağırlıkları  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ve  $z_0, z_1, \dots, z_n$  olan ve knot vektörleri de  $t_0 = t_1 = \dots = t_d$ ;  $t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}$ ;  $t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$  olan  $d$ .nci dereceden açık iki NURBS eğrileri olsunlar. Eğer  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrilerinin kontrol noktaları arasında  $c_i = b_i + p$ ;  $p \in \mathbb{R}^3$  bağıntısı ve ağırlıkları arasında da her  $i, j$  için

$$\frac{w_{i-1}^{j-1}}{w_i^j} = \frac{z_{i-1}^{j-1}}{z_i^j} \text{ ve } \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} = \frac{z_i^{j-1}}{z_i^j} \text{ ya da } \frac{w_{i-1}^{j-1}}{z_{i-1}^{j-1}} = \frac{w_i^j}{z_i^j} = \frac{w_i^{j-1}}{z_i^{j-1}} \text{ bağıntısı varsa}$$

(yani benzer ve paralel eğriler ise)  $\alpha$  ve  $\beta$  Bertrand çifti oluştururlar.

**İspat:** ağırlıklar arasındaki oransal eşitlikler yerine yazıldığında Teorem 4.22 ye benzer şekilde ispatı yapılır.

#### 4.5 Sayısal Örnekler

**Örnek 1)** Kontrol noktaları  $b_0(4,2,2), b_1(2,1,4), b_2(3,4,1), b_3(3,5,5)$  ile ağırlıkları  $w_0 = 0.5, w_1 = 0.25, w_2 = 0.75, w_3 = 1$  ve knot vektörleri  $t_0 = t_1 = t_2 = 0, t_3 = 2, t_4 = t_5 = t_6 = 3$  olan 2. dereceden açık NURBS eğrisini göz önüne alalım  
 $i = 0, 1, \dots, n$ ved  $\geq 1$  için

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$N_{i,d}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1} - t}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t)$$

Unutmayalım ki eğer knot vektörü yeterli sayıda tekrarlanan knot değeri içeriyorsa, tekrarlamanın gerçekleştirilmesi sırasında (bazı  $i$  için)  $\frac{N_{i,d-1}(t)}{t_{i+d} - t_i} = 0/0$  formunun bir bölünmesi ile karşılaşılabilir. Bu meydana geldiğinde  $\frac{0}{0} = 0$  olduğu varsayılır.

$$N_{0,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t = 0 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad N_{1,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t = 0 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$N_{2,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [0, 2) \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad N_{3,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [2, 3) \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$N_{4,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t = 3 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad N_{5,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t = 3 \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$N_{0,1}(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} N_{0,0}(t) + \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} N_{1,0}(t) = \frac{t}{0} = 0$$

$$N_{1,1}(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} N_{1,0}(t) + \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2} N_{2,0}(t) = \frac{2 - t}{2} \begin{cases} 1, & t \in [0, 2) \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2 - t}{2}, & t \in [0, 2) \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N_{2,1}(t) &= \frac{t - t_2}{t_3 - t_2} N_{2,0}(t) + \frac{t_4 - t}{t_4 - t_3} N_{3,0}(t) = \frac{t}{2} N_{2,0}(t) + \frac{3 - t}{1} N_{3,0}(t) \\ &= \begin{cases} \frac{t}{2}, & t \in [0, 2) \\ 3 - t, & t \in [2, 3) \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{3,1}(t) &= \frac{t - t_3}{t_4 - t_3} N_{3,0}(t) + \frac{t_5 - t}{t_5 - t_4} N_{4,0}(t) = \frac{t - 2}{1} N_{3,0}(t) + \frac{3 - t}{0} N_{4,0}(t) \\ &= \begin{cases} t - 2, & t \in [2, 3) \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \end{aligned}$$

$$N_{4,1}(t) = \frac{t-t_4}{t_5-t_4} N_{4,0}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_5} N_{5,0}(t) = 0$$

$$\begin{aligned} N_{0,2}(t) &= \frac{t-t_0}{t_2-t_0} N_{0,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) = \frac{t-0}{0} N_{0,1}(t) + \frac{2-t}{2} N_{1,1}(t) \\ &= \begin{cases} \left[1 - \frac{t}{2}\right]^2, & t \in [0,2) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{1,2}(t) &= \frac{t-t_1}{t_3-t_1} N_{1,1}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_2} N_{2,1}(t) = \frac{t}{2} N_{1,1}(t) + \frac{3-t}{3} N_{2,1}(t) \\ &= \begin{cases} t - \frac{5t^2}{12}, & t \in [0,2) \\ 3 - 2t + \frac{t^2}{3}, & t \in [2,3) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{2,2}(t) &= \frac{t-t_2}{t_4-t_2} N_{2,1}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_3} N_{3,1}(t) = \frac{t}{3} N_{2,1}(t) + \frac{3-t}{1} N_{3,1}(t) \\ &= \begin{cases} \frac{t^2}{6}, & t \in [0,2) \\ -\frac{4t^2}{3} + 6t - 6, & t \in [2,3) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases} \end{aligned}$$

$$N_{3,2}(t) = \frac{t-t_3}{t_5-t_3} N_{3,1}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_4} N_{4,1}(t) = \frac{t-2}{1} N_{3,1}(t) = \begin{cases} (t-2)^2, & t \in [2,3) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

Buna göre NURBS eğrisi;

$t \in [0,2)$  için  $\mathfrak{B}(t)$ 'yi ifade edelim.

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(t) &= \frac{w_0 b_0 N_{0,2} + w_1 b_1 N_{1,2} + w_2 b_2 N_{2,2} + w_3 b_3 N_{3,2}}{w_0 N_{0,2} + w_1 N_{1,2} + w_2 N_{2,2} + w_3 N_{3,2}} \\ &= \frac{(2,1,1) \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 + (1/2, 1/4, 1) \left(t - \frac{5t^2}{12}\right) + (9/4, 3, 3/4) \frac{t^2}{6} + 0(3,5,5)}{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(t - \frac{5t^2}{12}\right) + \frac{3}{4} \frac{t^2}{6} + 0} \\ &= \left( \frac{\frac{2t^2}{3} - \frac{3t}{2} + 2}{\frac{7t^2}{48} - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}}, \frac{\frac{31t^2}{48} - \frac{3t}{4} + 1}{\frac{7t^2}{48} - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}}, \frac{-\frac{t^2}{24} + 1}{\frac{7t^2}{48} - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}} \right) \Rightarrow \mathfrak{B}(2) = \left( \frac{20}{7}, \frac{25}{7}, \frac{10}{7} \right) \end{aligned}$$

$t \in [2,3)$  için  $\mathfrak{B}(t)$ 'yi bulalım:

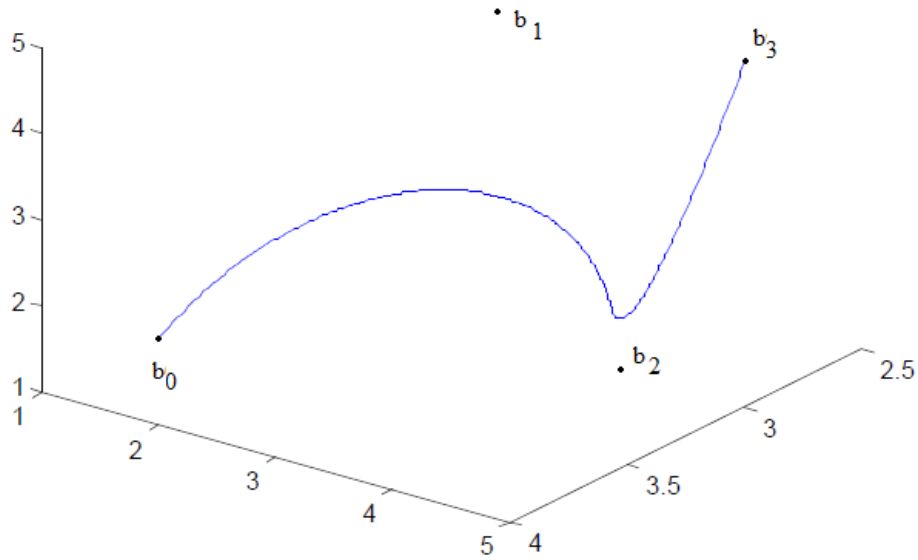
$$\mathfrak{B}(t) = \frac{w_0 b_0 N_{0,2} + w_1 b_1 N_{1,2} + w_2 b_2 N_{2,2} + w_3 b_3 N_{3,2}}{w_0 N_{0,2} + w_1 N_{1,2} + w_2 N_{2,2} + w_3 N_{3,2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2,1,1) \cdot 0 + (1/2, 1/4, 1) \left(3 - 2t + \frac{t^2}{3}\right) + (9/4, 3, 3/4) \left(-\frac{4}{3}t^2 + 6t - 6\right) + (3,5,5)(t-2)^2}{\frac{1}{4} \left(3 - 2t + \frac{t^2}{3}\right) + \frac{3}{4} \left(-\frac{4}{3}t^2 + 6t - 6\right) + 1(t-2)^2} \\
&= \left( \frac{\frac{t^2}{6} + \frac{t}{2}}{\frac{t^2}{12} + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{13t^2}{12} - \frac{5}{2}t + \frac{11}{4}}{\frac{t^2}{12} + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{13t^2}{3} - \frac{35t}{2} + \frac{37}{2}}{\frac{t^2}{12} + \frac{1}{4}} \right) \Rightarrow \mathfrak{B}(2) = \left( \frac{20}{7}, \frac{25}{7}, \frac{10}{7} \right)
\end{aligned}$$

o halde

$$\mathfrak{B}(t) = \begin{cases} \left( \frac{\frac{2t^2}{3} - \frac{3t}{2} + 2}{\frac{7t^2}{48} - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}}, \frac{\frac{31t^2}{48} - \frac{3t}{4} + 1}{\frac{7t^2}{48} - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}}, \frac{\frac{-t^2}{24} + 1}{\frac{7t^2}{48} - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}} \right), & t \in [0,2] \\ \left( \frac{\frac{t^2}{6} + \frac{t}{2}}{\frac{t^2}{12} + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{13t^2}{12} - \frac{5}{2}t + \frac{11}{4}}{\frac{t^2}{12} + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{13t^2}{3} - \frac{35t}{2} + \frac{37}{2}}{\frac{t^2}{12} + \frac{1}{4}} \right), & t \in [2,3] \end{cases}$$

olur. Grafiğini çizecek olursak;



Şekil 15. Örnek 1 de verilen NURBS eğrisi

Bu NURBS eğrisi için

$$T|_{t=0} = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} = \frac{(-2, -1, 2)}{\|(-2, -1, 2)\|} = \frac{(-2, -1, 2)}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{(-2, -1, 2)}{3} = \left( \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$B|_{t=0} = \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\left\| \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \right\|} = \frac{(-3, -4, -5)}{\sqrt{9 + 16 + 25}}$$

$$= \frac{(-3, -4, -5)}{\sqrt{50}} = \left( \frac{-3}{\sqrt{50}}, \frac{-4}{\sqrt{50}}, \frac{-5}{\sqrt{50}} \right)$$

$$N|_{t=0} = B \times T = \left( \frac{-3}{\sqrt{50}}, \frac{-4}{\sqrt{50}}, \frac{-5}{\sqrt{50}} \right) \times \left( \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \frac{\frac{-1}{3\sqrt{50}}(13, -16, 5)}{\left\| \frac{-1}{3\sqrt{50}}(-13, -16, 5) \right\|}$$

$$= \frac{(13, -16, 5)}{3\sqrt{50} \cdot \sqrt{450}} = \left( \frac{13}{450}, \frac{-16}{450}, \frac{5}{450} \right)$$

$$\kappa|_{t=0} = \frac{d - 1}{d} \frac{x^2 w_0 w_2}{y k w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|} \sin \Phi$$

$$\left. \begin{array}{l} x = t_{d+1} - t_1 \\ y = t_{d+1} - t_2 \\ k = t_{d+2} - t_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = t_3 - t_1 \\ y = t_3 - t_2 \\ k = t_4 - t_2 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} w_0 = 0.5 \\ w_1 = 0.25 \\ w_2 = 0.75 \end{array}$$

$$\|b_2 - b_0\| = \sqrt{6}$$

$$\|b_1 - b_0\| = 3$$

$$\cos \Phi = \frac{\langle b_2 - b_0, b_1 - b_0 \rangle}{\|b_2 - b_0\| \|b_1 - b_0\|} = \frac{2 - 2 - 2}{3\sqrt{6}} = \frac{-2}{3\sqrt{6}}$$

$$\sin \Phi = \frac{\sqrt{50}}{3\sqrt{6}}$$

$$\kappa|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{4}{6} \frac{3}{8} \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{\sqrt{50}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{50}}{72}$$

$$\tau|_{t=0} = \frac{d - 2}{d} \frac{w_0 w_3}{w_1 w_2} \frac{xyk}{zlm} \frac{\|b_3 - b_0\| \cos \varphi}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} = 0$$

Aynı eğrinin  $t = t_4 = 3$  noktasında eğriliklerini ve Frenet çatısını bulalım:

$$T|_{t=3} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} = \frac{(0, 1, 4)}{\|(0, 1, 4)\|} = \frac{(0, 1, 4)}{\sqrt{17}} = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}} \right)$$

$$B|_{t=3} = \frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} = \frac{-(0, 1, 4) \times (1, 4, 1)}{\|(0, 1, 4) \times (1, 4, 1)\|} = \frac{-(-15, 4, -1)}{\|(-15, 4, -1)\|}$$

$$= \frac{(15, -4, 1)}{\sqrt{242}} = \left( \frac{15}{11\sqrt{2}}, \frac{-4}{11\sqrt{2}}, \frac{1}{11\sqrt{2}} \right)$$

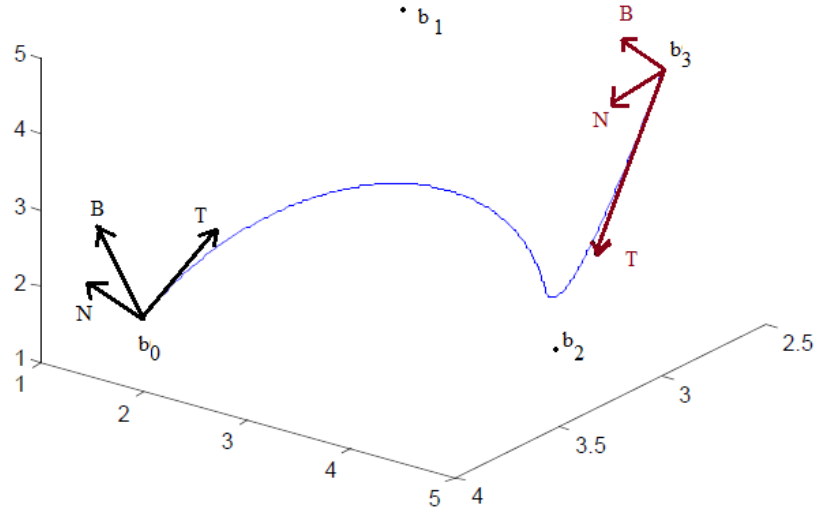
$$\begin{aligned}
N|_{t=3} &= B \times T = \frac{1}{11\sqrt{2}}(15, -4, 1) \times \frac{1}{\sqrt{17}}(0, 1, 4) \\
&= \frac{1}{11\sqrt{34}} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 15 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{11\sqrt{34}}(-17, -60, 15) \\
&= \left( \frac{-17}{11\sqrt{34}}, \frac{-60}{11\sqrt{34}}, \frac{15}{11\sqrt{34}} \right)
\end{aligned}$$

m=6 ve n=3

$$\left. \begin{aligned} e &= t_{m-1} - t_{m-d-1} \\ v &= t_{m-2} - t_{m-d-1} \\ p &= t_{m-1} - t_{m-d-2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &= t_5 - t_3 = 1 \\ &= t_4 - t_3 = 1 \\ &= t_5 - t_2 = 3 \end{aligned}$$

$$\kappa|_{t=3} = \frac{e^2}{vp} \frac{d-1}{d} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|} \sin \Phi = \frac{22\sqrt{2}}{459}$$

$$\tau|_{t=3} = \frac{d-2}{d} \frac{w_n w_{n-3}}{w_{n-1} w_{n-2}} \frac{evp}{uhr} \frac{\|b_n - b_{n-3}\| \cos \varphi}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} = 0$$



**Şekil 16.** Örnek 1 de verilen NURBS eğrisinin t=0 ve t=3 noktalarında Frenet vektör alanları

Şimdi  $t^* = 1 \in [t_2, t_3)$  noktasında yukarıda verilen açık NURBS eğrisine Rasyonel De Boor algoritması uygulayalım Buna göre  $t^* = 1$  noktasında, ağırlıklar:

$$\begin{aligned}
w_0^0 &= \frac{1}{2} & w_1^0 &= \frac{1}{4} & w_2^0 &= \frac{3}{4} & w_3^0 &= 1 \\
w_1^1 &= \frac{3}{8} & w_2^1 &= \frac{5}{12} & & & & \\
& & w_2^2 &= \frac{19}{48} & & & & 
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre kontrol noktaları

$$\begin{aligned}
b_0^0 &= (4,2,2) & b_1^0 &= (2,1,4) & b_2^0 &= (3,4,1) & b_3^0 &= (3,5,5) \\
b_1^1 &= \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{13}\right) & b_2^1 &= \left(\frac{13}{5}, \frac{14}{5}, \frac{11}{5}\right) \\
b_2^2 &= \left(\frac{56}{19}, \frac{43}{19}, \frac{46}{19}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $b_2^2$  noktası açık NURBS eğrisinin subdivision uygulanarak elde edilen  $\mathfrak{B}_{sağ}$  parçasının başlangıç noktası olacaktır. Buna göre  $b_2^2$  noktasında eğrinin  $\{T, N, B\}$  Frenet vektör alanları ve eğriliklerini bulalım. Teorem 4. 18'den

$$\begin{aligned}
T|_{t=t^*=1} &= \frac{b_2^1 - b_2^2}{\|b_2^1 - b_2^2\|} = \frac{\left(\frac{-33}{95}, \frac{51}{95}, \frac{-21}{95}\right)}{\left\|\left(\frac{-33}{95}, \frac{51}{95}, \frac{-21}{95}\right)\right\|} = \frac{\left(\frac{-33}{95}, \frac{51}{95}, \frac{-21}{95}\right)}{\frac{\sqrt{4131}}{95}} \\
&= \left(\frac{-33}{\sqrt{4131}}, \frac{51}{\sqrt{4131}}, \frac{-21}{\sqrt{4131}}\right) = \left(\frac{-33}{9\sqrt{51}}, \frac{51}{9\sqrt{51}}, \frac{-21}{9\sqrt{51}}\right) \\
&= \left(\frac{-11}{3\sqrt{51}}, \frac{17}{3\sqrt{51}}, \frac{-7}{3\sqrt{51}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B|_{t=t^*=1} &= \frac{(b_2^1 - b_2^2) \times (b_2^0 - b_2^2)}{\|(b_2^1 - b_2^2) \times (b_2^0 - b_2^2)\|} = \frac{\left(\frac{-33}{95}, \frac{51}{95}, \frac{-21}{95}\right) \times \left(\frac{1}{19}, \frac{33}{19}, \frac{-27}{19}\right)}{\left\|\left(\frac{-33}{95}, \frac{51}{95}, \frac{-21}{95}\right) \times \left(\frac{1}{19}, \frac{33}{19}, \frac{-27}{19}\right)\right\|} \\
&= \frac{\frac{1}{1085}(-33, 51, -21) \times (1, 33, -27)}{\left\|\frac{1}{1085}(-33, 51, -21) \times (1, 33, -27)\right\|} = \frac{(-684, -912, -1140)}{\|(-684, -912, -1140)\|} \\
&= \frac{(-684, -912, -1140)}{1140\sqrt{2}} = \left(\frac{-57}{95\sqrt{2}}, \frac{-76}{95\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N|_{t=t^*=1} &= B \times T = \left(\frac{-57}{95\sqrt{2}}, \frac{-76}{95\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{-11}{3\sqrt{51}}, \frac{17}{3\sqrt{51}}, \frac{-7}{3\sqrt{51}}\right) \\
&= \frac{1}{285\sqrt{102}} [(-57, -76, -1) \times (-11, 17, -7)] \\
&= \frac{1}{285\sqrt{102}} (549, -388, -1805) = \left(\frac{183}{95\sqrt{102}}, \frac{-388}{285\sqrt{102}}, \frac{-1805}{285\sqrt{102}}\right)
\end{aligned}$$

$$x = t_3 - t_1 = 2, \quad y = t_3 - t_2 = 2, \quad k = t_4 - t_2 = 3,$$

$$\kappa|_{t=t^*=1} = \frac{d-1}{d} \frac{x^2 w_2^2 w_2^0 \|b_2^0 - b_2^2\|}{y k (w_2^1)^2 \|b_2^1 - b_2^2\|^2} \sin \Phi = \frac{37179\sqrt{2}}{225625} \approx 0.234$$

$$z = 0, \quad l = 0, \quad m = 1$$

$$\tau|_{t=t^*} = \frac{d - 2w_2^2w_2^{-1}xyk}{d} \frac{\|b_2^{-1} - b_2^2\| \cos \varphi}{w_2^1w_2^0 \text{ zlm} \|(b_2^1 - b_2^2) \times (b_2^0 - b_2^2)\|} = 0$$

### Örnek 2) Bertrand Açık NURBS Çifti Örneği

$\alpha$  eğrisi knot vektörleri  $t_0 = t_1 = t_2 = 0, t_3 = 2, t_4 = t_5 = t_6 = 3$  olan ağırlıkları  $w_0 = \frac{1}{2}, w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{3}{4}, w_3 = 1$  kontrol noktaları ise  $b_0 = (4,2,2), b_1 = (2,1,4), b_2 = (3,4,1), b_3 = (3,5,5)$  olarak verilen açık NURBS eğrisi olsun.  $\beta$  eğrisi de yine aynı  $t_0 = t_1 = t_2 = 0, t_3 = 2, t_4 = t_5 = t_6 = 3$  olan ağırlıkları  $z_0 = \frac{1}{4}, z_1 = \frac{1}{8}, z_2 = \frac{3}{8}, z_4 = \frac{1}{2}$  ve kontrol noktaları  $c_0 = (5,6,4), c_1 = (3,5,6), c_2 = (4,8,3), c_3 = (4,9,7)$  olarak verilen açık NURBS eğrisi olsunlar bu durumda  $\beta$  eğrisinin denklemini ifade edelim

$i = 0,1, \dots, n$ ved  $\geq 1$  için

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{i,d}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1} - t}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t)$$

Unutmayalım ki eğer knot vektörü yeterli sayıda tekrarlanan knot değeri içeriyorsa, tekrarlamanın gerçekleştirilmesi sırasında (bazı  $i$  için)  $\frac{N_{i,d-1}(t)}{t_{i+d}-t_i} = 0/0$  formunun bir bölünmesi ile karşılaşılabilir. Bu meydana geldiğinde  $\frac{0}{0} = 0$  olduğu varsayılır.

$$N_{0,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t = 0 \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad N_{1,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t = 0 \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{2,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [0,2) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad N_{3,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [2,3) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{4,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t = 3 \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad N_{5,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t = 3 \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{0,1}(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} N_{0,0}(t) + \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} N_{1,0}(t) = \frac{t}{0} = 0$$

$$N_{1,1}(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} N_{1,0}(t) + \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2} N_{2,0}(t) = \frac{2 - t}{2} \begin{cases} 1, & t \in [0,2) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2-t}{2}, & t \in [0,2) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N_{2,1}(t) &= \frac{t - t_2}{t_3 - t_2} N_{2,0}(t) + \frac{t_4 - t}{t_4 - t_3} N_{3,0}(t) = \frac{t}{2} N_{2,0}(t) + \frac{3-t}{1} N_{3,0}(t) \\ &= \begin{cases} \frac{t}{2}, & t \in [0,2) \\ 3-t, & t \in [2,3) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases} \end{aligned}$$

$$N_{3,1}(t) = \frac{t-t_3}{t_4-t_3}N_{3,0}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_4}N_{4,0}(t) = \frac{t-2}{1}N_{3,0}(t) + \frac{3-t}{0}N_{4,0}(t)$$

$$= \begin{cases} t-2, t \in [2,3) \\ 0, \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{4,1}(t) = \frac{t-t_4}{t_5-t_4}N_{4,0}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_5}N_{5,0}(t) = 0$$

$$N_{0,2}(t) = \frac{t-t_0}{t_2-t_0}N_{0,1}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_1}N_{1,1}(t) = \frac{t-0}{0}N_{0,1}(t) + \frac{2-t}{2}N_{1,1}(t)$$

$$= \begin{cases} \left[1 - \frac{t}{2}\right]^2, t \in [0,2) \\ 0, \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{1,2}(t) = \frac{t-t_1}{t_3-t_1}N_{1,1}(t) + \frac{t_4-t}{t_4-t_2}N_{2,1}(t) = \frac{t}{2}N_{1,1}(t) + \frac{3-t}{3}N_{2,1}(t)$$

$$= \begin{cases} t - \frac{5t^2}{12}, t \in [0,2) \\ 3 - 2t + \frac{t^2}{3}, t \in [2,3) \\ 0, \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{2,2}(t) = \frac{t-t_2}{t_4-t_2}N_{2,1}(t) + \frac{t_5-t}{t_5-t_3}N_{3,1}(t) = \frac{t}{3}N_{2,1}(t) + \frac{3-t}{1}N_{3,1}(t)$$

$$= \begin{cases} \frac{t^2}{6}, t \in [0,2) \\ -\frac{4t^2}{3} + 6t - 6, t \in [2,3) \\ 0, \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{3,2}(t) = \frac{t-t_3}{t_5-t_3}N_{3,1}(t) + \frac{t_6-t}{t_6-t_4}N_{4,1}(t) = \frac{t-2}{1}N_{3,1}(t) = \begin{cases} (t-2)^2, t \in [2,3) \\ 0, \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

Buna göre NURBS eğrileri;

$t \in [0,2)$  için  $\alpha(t)$ 'yi ifade edelim.

$$\alpha(t) = \frac{w_0 b_0 N_{0,2} + w_1 b_1 N_{1,2} + w_2 b_2 N_{2,2} + w_3 b_3 N_{3,2}}{w_0 N_{0,2} + w_1 N_{1,2} + w_2 N_{2,2} + w_3 N_{3,2}}$$

$$= \frac{(2,1,1) \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 + (1/2, 1/4, 1) \left(t - \frac{5t^2}{12}\right) + (9/4, 3, 3/4) \frac{t^2}{6} + 0(3,5,5)}{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(t - \frac{5t^2}{12}\right) + \frac{3t^2}{4 \cdot 6} + 0}$$

$$= \left( \frac{\frac{2t^2}{3} - \frac{3t}{2} + 2}{\frac{7t^2}{48} - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}}, \frac{\frac{31t^2}{48} - \frac{3t}{4} + 1}{\frac{7t^2}{48} - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}}, \frac{\frac{-t^2}{24} + 1}{\frac{7t^2}{48} - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}} \right) \Rightarrow \alpha(2) = \left( \frac{20}{7}, \frac{25}{7}, \frac{10}{7} \right)$$

$t \in [2,3)$  için  $\alpha(t)$ 'yi bulalım:

$$\alpha(t) = \frac{w_0 b_0 N_{0,2} + w_1 b_1 N_{1,2} + w_2 b_2 N_{2,2} + w_3 b_3 N_{3,2}}{w_0 N_{0,2} + w_1 N_{1,2} + w_2 N_{2,2} + w_3 N_{3,2}}$$

$$= \frac{(2,1,1) \cdot 0 + (1/2, 1/4, 1) \left(3 - 2t + \frac{t^2}{3}\right) + (9/4, 3, 3/4) \left(-\frac{4}{3}t^2 + 6t - 6\right) + (3,5,5)(t-2)^2}{\frac{1}{4} \left(3 - 2t + \frac{t^2}{3}\right) + \frac{3}{4} \left(-\frac{4}{3}t^2 + 6t - 6\right) + 1(t-2)^2}$$

$$= \left( \frac{\frac{t^2}{6} + \frac{t}{2}}{\frac{t^2}{12} + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{13t^2}{12} - \frac{5}{2}t + \frac{11}{4}}{\frac{t^2}{12} + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{13t^2}{3} - \frac{35t}{2} + \frac{37}{2}}{\frac{t^2}{12} + \frac{1}{4}} \right) \Rightarrow \alpha(2) = \left( \frac{20}{7}, \frac{25}{7}, \frac{10}{7} \right)$$

o halde

$$\alpha(t) = \begin{cases} \left( \frac{\frac{2t^2}{3} - \frac{3t}{2} + 2}{\frac{7t^2}{48} - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}}, \frac{\frac{31t^2}{48} - \frac{3t}{4} + 1}{\frac{7t^2}{48} - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}}, \frac{\frac{-t^2}{24} + 1}{\frac{7t^2}{48} - \frac{t}{4} + \frac{1}{2}} \right), t \in [0,2] \\ \left( \frac{\frac{t^2}{6} + \frac{t}{2}}{\frac{t^2}{12} + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{13t^2}{12} - \frac{5}{2}t + \frac{11}{4}}{\frac{t^2}{12} + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{13t^2}{3} - \frac{35t}{2} + \frac{37}{2}}{\frac{t^2}{12} + \frac{1}{4}} \right), t \in [2,3] \end{cases}$$

olur.

$t \in [0,2)$  için  $\beta(t)$ 'yi ifade edelim.

$$\beta(t) = \frac{z_0 c_0 N_{0,2} + z_1 c_1 N_{1,2} + z_2 c_2 N_{2,2} + z_3 c_3 N_{3,2}}{z_0 N_{0,2} + z_1 N_{1,2} + z_2 N_{2,2} + z_3 N_{3,2}}$$

$$= \frac{(5/4, 3/2, 1) \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 + (3/8, 5/8, 3/4) \left(t - \frac{5t^2}{12}\right) + (3/2, 3, 9/8) \frac{t^2}{6} + 0}{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(t - \frac{5t^2}{12}\right) + \frac{3}{8} \frac{t^2}{6} + 0}$$

$$= \left( \frac{\frac{13t^2}{32} - \frac{7t}{8} + \frac{5}{4}}{\frac{7t^2}{96} - \frac{t}{8} + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{59t^2}{96} - \frac{7t}{8} + \frac{3}{2}}{\frac{7t^2}{96} - \frac{t}{8} + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{t^2}{8} - \frac{t}{4} + 1}{\frac{7t^2}{96} - \frac{t}{8} + \frac{1}{4}} \right) \Rightarrow \beta(2) = \left( \frac{27}{7}, \frac{53}{7}, \frac{24}{7} \right)$$

$t \in [2,3)$  için  $\beta(t)$ 'yi bulalım:

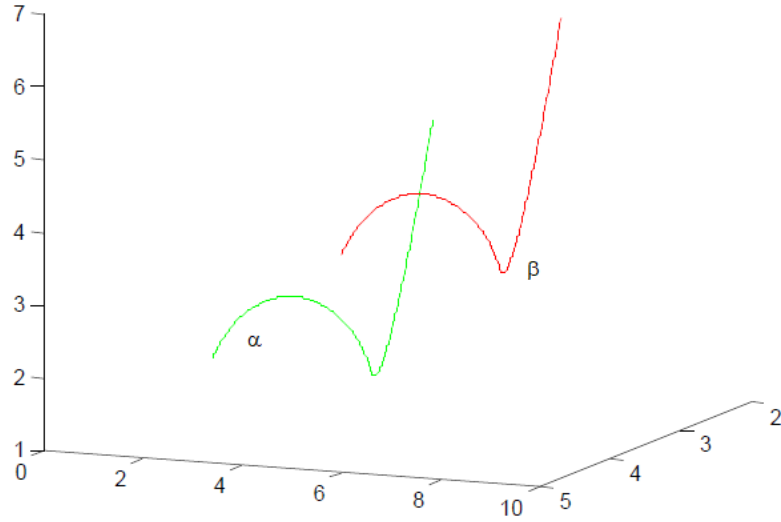
$$\beta(t) = \frac{z_0 c_0 N_{0,2} + z_1 c_1 N_{1,2} + z_2 c_2 N_{2,2} + z_3 c_3 N_{3,2}}{z_0 N_{0,2} + z_1 N_{1,2} + z_2 N_{2,2} + z_3 N_{3,2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{0 + \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right) \left(3 - 2t + \frac{t^2}{3}\right) + \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{8}\right) \left(-\frac{4}{3}t^2 + 6t - 6\right) + \left(2, \frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right) (t-2)^2}{\frac{1}{8} \left(3 - 2t + \frac{t^2}{3}\right) + \frac{3}{8} \left(-\frac{4}{3}t^2 + 6t - 6\right) + \frac{1}{2} (t-2)^2} \\
&= \left( \frac{\frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} + \frac{1}{8}}{\frac{t^2}{24} + \frac{1}{8}}, \frac{\frac{17t^2}{24} - \frac{5}{4}t + \frac{15}{8}}{\frac{t^2}{24} + \frac{1}{8}}, \frac{\frac{9t^2}{4} - \frac{35t}{4} + \frac{19}{2}}{\frac{t^2}{24} + \frac{1}{8}} \right) \Rightarrow \beta(2) = \left( \frac{27}{7}, \frac{53}{7}, \frac{24}{7} \right)
\end{aligned}$$

o halde

$$\beta(t) = \begin{cases} \left( \frac{\frac{13t^2}{32} - \frac{7t}{8} + \frac{5}{4}}{\frac{7t^2}{96} - \frac{t}{8} + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{59t^2}{96} - \frac{7t}{8} + \frac{3}{2}}{\frac{7t^2}{96} - \frac{t}{8} + \frac{1}{4}}, \frac{\frac{t^2}{8} - \frac{t}{4} + 1}{\frac{7t^2}{96} - \frac{t}{8} + \frac{1}{4}} \right), & t \in [0,2] \\ \left( \frac{\frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} + \frac{1}{8}}{\frac{t^2}{24} + \frac{1}{8}}, \frac{\frac{17t^2}{24} - \frac{5}{4}t + \frac{15}{8}}{\frac{t^2}{24} + \frac{1}{8}}, \frac{\frac{9t^2}{4} - \frac{35t}{4} + \frac{19}{2}}{\frac{t^2}{24} + \frac{1}{8}} \right), & t \in [2,3] \end{cases}$$

olur.



Şekil 17. Bertrand çifti oluşturan  $\alpha$  ve  $\beta$  açık NURBS eğrileri

Teorem 4.23 gereğince bu iki eğri Bertrand çifti oluşturlar. Gerçekten de  $t = 0$  noktasında;

$$\begin{aligned}
N_\alpha|_{t=0} &= B \times T = \left( \frac{-3}{\sqrt{50}}, \frac{-4}{\sqrt{50}}, \frac{-5}{\sqrt{50}} \right) \times \left( \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \frac{-1}{3\sqrt{50}} (13, -16, 5) \\
&= \frac{(13, -16, 5)}{3\sqrt{50}} = \left( \frac{13}{3\sqrt{50}}, \frac{-16}{3\sqrt{50}}, \frac{5}{3\sqrt{50}} \right)
\end{aligned}$$

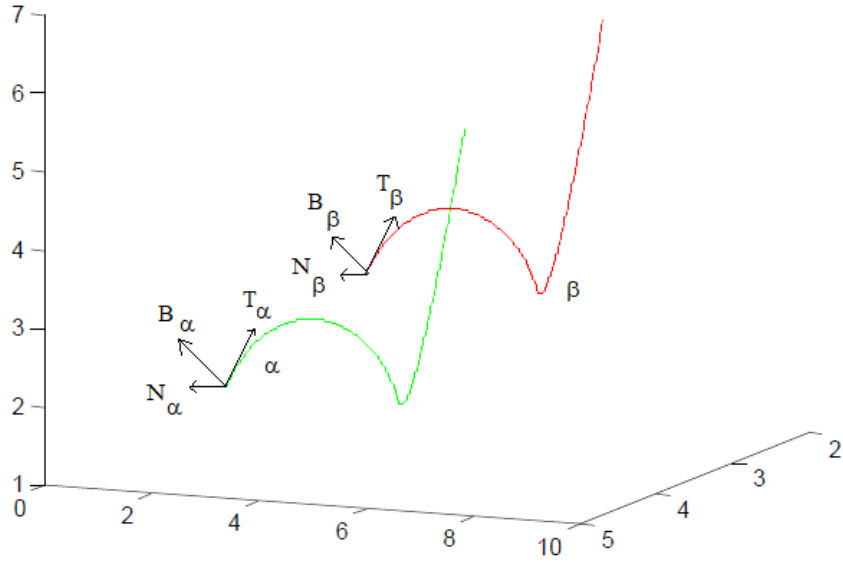
$$T_\beta|_{t=0} = \frac{c_1 - c_0}{\|c_1 - c_0\|} = \frac{(-2, -1, 2)}{\|(-2, -1, 2)\|} = \frac{(-2, -1, 2)}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{(-2, -1, 2)}{3} = \left( \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\begin{aligned}
B_\beta|_{t=0} &= \frac{(c_1 - c_0) \times (c_2 - c_0)}{\|(c_1 - c_0) \times (c_2 - c_0)\|} = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(-3, -4, -5)}{\sqrt{9 + 16 + 25}} \\
&= \frac{(-3, -4, -5)}{\sqrt{50}} = \left( \frac{-3}{\sqrt{50}}, \frac{-4}{\sqrt{50}}, \frac{-5}{\sqrt{50}} \right) \\
N_\beta|_{t=0} &= B \times T = \left( \frac{-3}{\sqrt{50}}, \frac{-4}{\sqrt{50}}, \frac{-5}{\sqrt{50}} \right) \times \left( \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \frac{-1}{3\sqrt{50}} (13, -16, 5) \\
&= \frac{(13, -16, 5)}{3\sqrt{50}} = \left( \frac{13}{3\sqrt{50}}, \frac{-16}{3\sqrt{50}}, \frac{5}{3\sqrt{50}} \right)
\end{aligned}$$

Buna göre görülüyor ki,

$$N_\alpha|_{t=0} = N_\beta|_{t=0}$$

Olur. Bu ise Bertrand çifti olduğunu gösterir.



Şekil 18.  $t=0$  noktasında Bertrand çifti oluşturan iki NURBS eğrisinin Frenet vektör alanları

## SONUÇ

Bu çalışmamızda birinci bölümde açık B-spline eğrilerinin  $t = t_d$  ve  $t = t_{m-d}$  noktalarında ikinci, üçüncü türevleri ve Frenet vektör alanları ile eğrilikleri 4.4-4.7 Teoremleri ile verilmiştir.

İkinci bölümde 4.8-4.11 Teoremlerle açık B-spline eğri çiftlerinin Bertrand eğri çifti oluşturması durumunda ikinci spline eğrisinin kontrol noktalarının birinci spline eğrisinin kontrol noktaları cinsinden ifadeleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde açık NURBS eğrilerinin  $t = t_d$  ve  $t = t_{m-d}$  noktalarında birinci, ikinci ve üçüncü türevleri ile bu noktalarla herhangi bir noktada Frenet vektör alanları ve eğrilikleri 4.12-4.18 teoremleri ile ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde verilen iki eğrinin NURBS eğrisi olması durumunda bu iki eğrinin Bertrand eğri çifti oluşturabilme koşulları 4.19-4.23 teoremleri ile ifade edilmiştir.

Son bölümde ise yapılan bu çalışmalara birer örnek verilerek Frenet vektör, alanları eğrilikleri, Bertrand çifti oluşturma koşulları sayısal örnek üzerinde ifade edilmiştir.

**KAYNAKLAR**

- Aksoyak, F. K., Gok, I., Ilarslan, K., 2014. Generalized null Bertrand curves in Minkowski space-time. *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics*, 60(2), 489-502.
- Balgetir, H., Bektaş, M., Ergüt, M. 2004. Bertrand curves for nonnull curves in three dimensional Lorentzian space, *Hadronic Journal*, 27, 229-236.
- Balgetir, H., Bektaş, M., Inoguchi, J. I. 2004. Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and the ircharacterizations. *Notedi matematica*, 23(1), 7-13.
- Bertrand, J. 1850. La theories de courbes a double courbure, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 15, 332-350.
- Burke John F. 1960. Bertrand Curves Associated with a Pair of Curves, *Mathematics Magazine*, 34:1, 60-62
- Carmo, M. 1976, *Differential Geometry of Curves and Surfaces* book. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Choi, J.H., Kang, T.H. Kim, Y. H. 2012. Bertrand curves in 3-dimensional space forms, *Applied Mathematics and Computation*, 219(3), 1040- 1046.
- Do Carmo, M.P., 1976, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Gray, A. 1998, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press LLC.
- Hoschek, J. 1992. Circular splines. *Computer-Aided Design*, 24(11), 611-618.
- Izumiya, S., Takeuchi, N. 2002. Generic properties of helices and Bertrand curves, *Journal of Geometry*, 74, 97-109.
- İncesu, M., Gursoy, O. 2004, Bezier Yüzeylerinde Esas Formlar ve eğrilikler, XVII Ulusal Matematik Sempozyumu, Bolu, 146-157.
- İncesu M., (2008), Bezier eğrileri, Bezier Yüzeyleri ve Sayısal Algoritmalar, Yük. Lis. Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- İncesu, M., Kiren, Z., Arslan, F. 2008, The Weingarten Transform on Bezier Surfaces, VI. Ulusal Geometri Sempozyumu, Uludağ Üniversitesi, Bursa.
- Juhász, I. 1999. Weight-based shape modification of NURBS curves. *Computer Aided Geometric Design*, 16(5), 377-383.
- Kazaz, M., Uğurlu, H.H., Önder, M., ve Oral, S. 2010. Bertrand Partner D-curves in Euclidean 3-space. <https://www.researchgate.net/publication/45905431>.

- Kızıltuğ, S. 2017. Bertrand and Mannheim Partner-curves on Parallel Surfaces. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 35(2), 159-169.
- Liu, L., Wang, G. 2002. Explicit matrix representation for NURBS curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 19(6), 409-419.
- Lucas, P., Ortega-Yagües, J. A. 2012 Bertrand curves in the three-dimensional sphere, *Journal of Geometry and Physics*, 62, no. 9, 1903-1914.
- Marsh, D. 1999. *Applied geometry for computer graphics and CAD*, Springer-Verlag, London.
- Meek, D. S., ve Walton, D. J. 1993. Approximating quadratic NURBS curves by arc splines. *Computer-Aided Design*, 25(6), 371-376.
- Neamtu, M., Pottmann, H., and Schumaker, L.L. 1998. Designing NURBS cam profiles using trigonometric splines.
- Neill, B.O. 1983, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York.
- Öğrenmiş, O., Öztekin, H., Ergüt, M. 2009 Bertrand curves in Galilean space and their characterizations, *Kragujevac Journal of Mathematics*, 32, 139-147.
- Papaioannou, S.G., Kiritsis, D. 1985, An application of Bertrand curves and surface to CAD/CAM *Computer-Aided Design*, 17, 348-352.
- Piegl, L.A. ve Tiller, W. 1999. Computing off sets of NURBS curves and surfaces. *Computer-Aided Design*, 31(2), 147-156.
- Piegl, L. A. Ve Tiller, W. 2002. Biarc approximation of NURBS curves. *Computer-Aided Design*, 34(11), 807-814.
- Ravani, B., ve Ku, T.S. 1991. Bertrand off sets of ruled and developable surfaces. *Computer-Aided Design*, 23(2), 145-152.
- Samancı Kuşak, H. 2018 On Curvatures of The Timelike Rational Bezier Curves in Minkowski 3-Space, *Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7(2), 243-255.
- Samancı Kuşak, H. 2018 Introduction to Timelike Uniform B-Spline Curves in Minkowski 3-Space, *Journal of Mathematical sciences and Modelling*, 1(3), 206- 210.
- Selimovic, I. 2006. Improved algorithms for the projection of points on NURBS curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 23(5), 439-445.
- Smith, G., 1998, *Introductory Mathematics: Algebra and Analysis*. Springer-Verlag
- Spivak, M., 1967 *Calculus*. New York: W.A. Benjamin.

- ŞENYURT, S., ÖZGÜNER, Z. 2013. Bertrand Eğri Çiftinin Küresel Göstergelerinin Geodezik Eğrilikleri ve Tabii Liftleri, Ordu Univ. J. Sci. Tech.,3(2),58-81
- Tiller, W. 1992. Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces. *Computer-Aided Design*, 24(8), 445-453.
- Tunçer, Y., Ünal, S. 2012. New representations of Bertrand pairs in Euclidean 3-space, *Applied Mathematics and Computation*, 219,(4), 1833-1842.
- Ünal, D., Kişi, İ., Tosun, M., 2013. Spinor Bishop equations of the curves in Euclidean 3- space, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 757-765,
- Yerlikaya, F., Karaahmetoglu, S., ve Aydemir, I. 2016. On the Bertrand B-pair curves in 3-dimensional euclidean space. *Journal of Science and Arts*, 3(36), 215-224.
- Yılmaz, M.Y., Bektaş, M. 2008. General properties of Bertrand curves in Riemann-Otsuki space, *Nonlinear Analysis*, 69(10), 3225-3231.
- Yükselen, M.A, <http://web.itu.edu.tr/~yükselen/HM504/02Ek%20Bezier%20e%F0rileri.pdf>  
Erişim Tarihi: 06.02.2018

**ÖZGEÇMİŞ****KİŞİSEL BİLGİLER**

**Adı Soyadı** : Sara YILMAZ EVREN  
**Uyruğu** : T. C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Gaziantep - 09.06.1991  
**Telefon** : 05537424672  
**Faks** :  
**e-mail** : sara\_yilmaz\_90@hotmail.com

**EĞİTİM**

<b>Derece</b>	<b>Adı, İlçe, İl</b>	<b>Bitirme Yılı</b>
Lise	: Mimar Sinan Lisesi	<b>2009</b>
Üniversite	: Muşalparslan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	<b>2014</b>
Yüksek Lisans	: Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	<b>2020</b>