T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI İLİŞKİLİ EĞRİLERİN AKIŞ DENKLEMLERİ

Sefer ÖKMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2024
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI İLİŞKİLİ EĞRİLERİN AKIŞ DENKLEMLERİ

Sefer ÖKMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ahmet SAZAK

Şubat-2024
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Sefer ÖKMEN tarafından hazırlanan “Bazı İlişkili Eğrilerin Akış Denklemleri” adlı tez çalışması …/…/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Talat KÖRPINAR Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Ahmet SAZAK Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..
Üye Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu …/…/2024 Tarih ve …/… nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Selçuk SAĞIR
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION THESIS

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Adı Soyadı: Sefer ÖKMEN

Tarih:12/02/2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI İLİŞKİLİ EĞRİLERİN AKIŞ DENKLEMLERİ

Sefer ÖKMEN

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ahmet SAZAK

Bu çalışmamız dört ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmamızıntanıtımı verilmektedir. Çalışmamızın içerdiği matematiksel ve fiziksel konulara giriş yapılıp literatürdeki ilgili çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, asli-yön eğrileri, adjoint eğriler, akış denklemleri ve vektör alanının enerjisi konuları ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, adjoint eğrilerinin akış denklemleri verilip; vorteks filaman, Belavin-Polyakov ve Landau-Lifshitz akış denklemleri alt başlık olarak ele alındı. Bu akış denklemlerini temsil eden vektör alanlarının enerji denklemleri elde edildi.

Dördüncü bölümde, asli yön eğrilerinin akış denklemleri verilip; vorteks filaman, Belavin-Polyakov ve Landau-Lifshitz akış denklemleri alt başlık olarak ele alındı. Bu akış denklemleri temsil eden vektör alanlarının enerji denklemleri elde edildi.

2024, 32 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Asli Yön Eğrisi, Heisenberg Spin Zinciri, İlişkili Eğri, Vorteks Filaman Akışı.

ABSTRACT

MS THESIS

FLOW EQUATIONS OF SOMEASSOCIATEDCURVES

Sefer ÖKMEN

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Assistant Professor Ahmet SAZAK

This study consists of four main parts.

In the first section, an introduction to our work is given. The mathematical and physical issues included in our study are introduced and relevant studies in the literature are mentioned.

In the second chapter, definitions and theorems regarding principal direction curves, adjoint curves, flow equations and energy of the vector field are given.

In the third section, the flow equations of the adjoint curves are given; vortex filament, Belavin-Polyakov and Landau-Lifshitz flow equations were discussed as subheadings. The energy equations of the vector fields representing these flow equations were obtained.

In the fourth chapter, the flow equations of the principal direction curves are given; Vortex filament, Belavin-Polyakov and Landau-Lifshitz flow equations were discussed as subheadings. The energy equations of the vector fields representing these flow equations were obtained.

2024, 32 Pages

Keywords: Associative Curve, Heisenberg Spin Chain, Principal Direction Curve, Vortex Filament Flow.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, çalışmamın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayıran saygı değer hocam Dr. Öğr. Üyesi Ahmet SAZAK'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu süreç boyunca her daim yanımda olan değerli eşim Şenay ÖKMEN'e teşekkür ederim.

Sefer ÖKMEN
MUŞ-2024

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}^3$	:3-boyutlu Öklid Uzayı
$\bar{\gamma}$	:Adjoint Eğri
τ	:Burulma
$\tilde{\gamma}$	:Asli Yön Eğri
κ	:Eğrilik
$\{\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}\}$	:Frenet Çatı
$\{\overline{\mathrm{T}}, \overline{\mathrm{N}}, \overline{\mathrm{B}}\}$	:Adjoint Eğrinin Frenet Çatısı
$\{\widetilde{\mathrm{T}}, \widetilde{\mathrm{N}}, \widetilde{\mathrm{B}}\}$	: Asli Yön Eğrisinin Frenet Çatısı
x_s	: *x* in *s* parametresine bağlı türevi
x_t	: *x* in *t* parametresine bağlı türevi

1. GİRİŞ

Temsili olarak seçilen eğriler veya vektör alanları yardımıyla bazı fiziksel problemlere soliton çözümler getiren denklem sistemleri son yıllarda geometri alanındaki çalışmalara genişlik kazandırmıştır. Doğrusal olmayan denklem sistemlerinin örneklerinden olan bazı akış denklemleri de bunların örneklerindendir (Lamb, 1980; Batchelor, 1967; Balakrishnan, 2005). Ayrıca ilişkili eğriler, eğrilerin ve yüzeylerin karakterizasyonlarının, davranışlarının ve uzay-zamandaki hareketlerinin incelenmesinde anlamlı ifadeler sağlar. Bu tezin amacı ilişkili eğriler ile temsil edilen bazı akış denklemleri yardımıyla yeni geometrik karakterizasyonlar elde etmektir.

İlişkili eğriler, eğrilerin ve yüzeylerin karakterizasyonunun, davranışlarının ve uzay-zamandaki hareketlerinin incelenmesinde anlamlı ifadeler sağlar. Temel olarak, bir eğri ile geometrik olarak ilişkili ikinci bir eğrinin ana eğri yardımıyla tanımlanmasını sağlar. İlişkili eğrilerin önemli örneklerinden biri, integral eğrilerdir. İntegral eğriler, geometrik problemlerde karşılaştığımız bazı diferansiyel denklemlerin çözümü için sağladıkları olanaklar açısından önemlidir. Çalışmamızda ele alacağımız asli yön eğrileri ve adjoint eğriler, bir eğrinin sırasıyla normal ve binormal vektör alanlarının integrali ile belirlenen eğrilerdir (Choi ve Kim, 2012; Kühnel 2006).

Doğrusal olmayan denklem sistemlerinin fizik ve mühendislik problemlerine getirdiği çözümler bu alandaki akademik çalışmaların daha da önemli hale gelmesini sağlamıştır. Bir parçacığın hareketini ifade edebilmek için bir eğrinin hareketinin geometrisini incelemek en yaygın yollarından biridir. Birçok fiziksel soruna çözüm üreten akış denklemleri, eğri hareketlerinin geometrik olarak incelenmesi sonucunda elde edilir (Hasimoto, 1972; Lamb, 1980; Barros ve ark., 2007; Santiago ve ark., 2017; Batchelor, 1967). Bu nedenle fizikte akış denklemlerinin önemi yadsınamaz. Bu çalışmada ele alınacak olan, Landau-Lifshitz denklemi (Heisenberg ferromanyetik spin zinciri), Belavin-Polyakov Denklemi (Heisenberg antiferromanyetik akış) ve vorteks filaman denklemi akış denklemlerinin önemli örneklerindendir (Hasimoto, 1972; Balakrishnan, 2005; Körpinar ve ark., 2021; Langer ve Perline, 1990).

Vorteks filaman akışı, üç boyutlu hidrodinamikte girdap şeklinde bir tüpün içindeki akış olarak düşünülebilir. Daha iyi hayal etmek için kasırgaya benzer küçülen daireler yaparak ilerleyen bir akış düşünülebilir. Bu tür akışlar, akışkan dinamiği, meteoroloji, mühendislik ve diğer birçok alanda önemli rol oynar. Vorteks filaman denklemi 3 boyutlu uzayda Serret-Frenet çatısı yardımıyla şu şekilde ifade edilir:

$$\gamma_t = \frac{d\gamma}{dt} = \kappa B$$

Burada κ eğrilik fonksiyonu, B γ eğrisinin binormal vektörü ve t akış hareketini temsil eden zaman parametresidir (Lamb, 1980; Batchelor, 1967).

Ferromanyetik maddeler, atomların manyetik momentlerinin aynı yönde hizalanması sonucu oluşan bir manyetik düzeni karakterize eder. Bu maddeler, belirli bir sıcaklık altında (Curie sıcaklığı olarak adlandırılır), manyetik bir alan uygulanmadığı sürece kendiliğinden mıknatıs oluştururlar. Klasik bir Heisenberg ferromanyetik zincirinde spin vektör dinamiğinin geometrik ifadesi olan Landau-Lifshitz denklemi, Serret-Frenet çatısı yardımıyla şu şekilde ifade edilir:

$$X_t = XxX_{ss}$$

Burada, X ferromanyetik akışı temsil eden vektör alanı, s yay parametresi ve t zaman parametresidir (Balakrishnan, 2005).

Belavin-Polyakov denklemi, klasik izotropik antiferromanyetik spin zincirini geometrik olarak ifade eder. Antiferromanyetik maddelerde, atomların manyetik momentleri komşu atomların manyetik momentleriyle tam ters yönde hizalanır. Bu durumda, toplam manyetik moment sıfıra eşittir ve malzeme dışarıdan manyetik bir alan uygulanmadıkça manyetik davranış sergilemez. Bu denklem, Serret-Frenet çatısı yardımıyla şu şekilde ifade edilir:

$$T_t = TxT_s$$

Burada, s yay parametresi, t zaman parametresi ve T birim teğet vektör alanıdır (Balakrishnan, 2005).

Bu çalışmada ilk olarak asli-yön eğrileri, adjoint eğriler, akış denklemleri ve vektör alanının enerjisi konuları ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Daha sonra adjoint eğrilerin Frenet elemanlarının genel akış denklemleri elde edilerek; bu denklem üzerinden vorteks filaman, Belavin-Polyakov ve Landau-Lifshitz özel durumlarıincelenmiştir. Bunun sonucunda her bir özel durumu temsil eden vektör alanlarının enerji denklemleri elde edilmiştir. Benzer şekilde asli yön eğrilerininvorteks filaman, Belavin-Polyakov ve Landau-Lifshitz akış denklemleri elde edilerek bu akış denklemlerini temsil eden vektör alanlarının enerji denklemleri elde edilmiştir.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

Tanım 2.1 Uzayda,reel sayılar cismi $\mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \dots \mathrm{y}_\mathrm{n}) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{2.1}$$

eşitliği ile ifade edilen,

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \langle x, y\rangle$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir **Öklid iç çarpımı** olarak tanımlanır. $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{2.2}$$

ile tanımlanan,

$$\|,\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \quad \to \quad \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

fonksiyonuna, $\mathbb{R}^n$de norm fonksiyonu denir. Bu nedenle $\mathbb{R}^n$ uzayı normlu vektör uzayı olarak adlandırılır. $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{2.3}$$

olarak ifade edilen, d fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ de bir metriktir. Bu metrikle birlikte tanımlı $\mathbb{R}^n$ uzayına bir metrik uzay denir. Bu uzay **Öklid uzayı** olarak adlandırılır ve bazen $\mathbb{E}^n$ ile ifade edilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2 $\mathbb{R}$ nin açık biraralığı I olarak verilsin,

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

şeklinde diferensiyellenebilir bir γ dönüşümü, $\mathbb{R}^n$ uzayında **eğri** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.3 $\gamma : I \to \mathbb{E}^n$ bir eğri olarak kabul edelim. $\forall u \in I$ için γ nın $\gamma(u)$deki

$$\frac{d\gamma}{du}|_u = (\frac{d\gamma_1}{du}(u), \dots, \frac{d\gamma_n}{du}(u)) \tag{2.4}$$

vektörü, γ eğrisinin $\gamma(u)$ deki **hız vektörü** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.4 $\gamma: I \to E^n$ fonksiyonunu bir eğri olarak kabul edelim. $\forall t \in I$ için γ nın $\gamma(t)$ deki hız vektörü sıfıra eşit değil ise, γ eğrisi **regüler bir eğri** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.5 Bir, $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ s \to \gamma(s)$eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için,

$$\|\gamma'(s)\| = 1,$$

olduğunda γ eğrisi **birim hızlı eğri** olarak adlandırılır. Burada eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** olarak adlandırılır (Izumiya ve Takeuchi**,** 2004; Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.6 $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için,

$$T(s) = \gamma'(s) \tag{2.5}$$

eşitliğiyle tanımlı $T(s)$ vektörü, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasında **(birim) teğet vektörü** olarak ifade edilir. $\boldsymbol{T}$ vektör alanı da, γ nın **teğetvektör alanı** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.7 Birim hızlı $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ verilsin.

$$\boldsymbol{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\boldsymbol{T}'(s) \tag{2.6}$$

eşitliğiyle belirli $\boldsymbol{N}(s)$ vektörü, γ eğrisinin $\gamma(s)$ daki **asli normali** olarak adlandırılır. $\boldsymbol{N}$ vektör alanı, γ nın **asli-normal vektör alanı** olarak ifade edilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.8 Birim hızlı $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ verilsin.

$$\boldsymbol{B}(s) = \boldsymbol{T}(s) \times \boldsymbol{N}(s) \tag{2.7}$$

ile tanımlı $\boldsymbol{B}(s)$ vektörü, γ nın $\gamma(s)$ daki **binormal vektörü**olarak ifade edilir. $\boldsymbol{B}$ vektör alanı da, γ eğrisinin **binormal vektör alanı** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.9 $\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)$vektörlerine, $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$eğrisinin $\gamma(s)$ daki **Serret-Frenet vektörleri** olarak adlandırılır. $\{\boldsymbol{T}(s), \boldsymbol{N}(s), \boldsymbol{B}(s)\}$ kümesine de, γ nın $\gamma(s)$ daki **Frenet çatısı** olarak ifade edilir ve $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$ vektör alanları, γ üzerinde **Frenet vektör alanları** olarak adlandırılır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.10 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ verilsin. $\kappa: I \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\kappa(s) = \|\boldsymbol{T}'(s)\| \tag{2.8}$$

fonksiyonuna γ nın **eğrilik fonksiyonu** olarak ifade edilir. $\kappa(s)$ değerine de, eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki **eğriliği** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.11 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$ ve $\tau: I \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\tau(s) = \langle \boldsymbol{B}'(s), \boldsymbol{N}(s) \rangle \tag{2.9}$$

fonksiyonuna, γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki torsionu olarak ifade edilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.1 $\mathbb{R}^3$deki birim hızlı $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$eğrisini dikkate alalım. Frenet vektör alanları $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$ ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırayla $\boldsymbol{\kappa}$ ve $\boldsymbol{\tau}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}' &= \kappa \boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{N}' &= -\kappa \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}, \\ \boldsymbol{B}' &= -\tau \boldsymbol{N}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

olarak bulunur (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.2 Birim hızlı olmayan,$\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $u \to \gamma(u)$ eğrisini dikkate alalım. Frenet vektör alanları $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$ ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırayla $\boldsymbol{\kappa}$ ve $\boldsymbol{\tau}$ olmak üzere,

$$\boldsymbol{T} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, \quad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{B} = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|}, \tag{2.11}$$

$$\kappa = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}, \quad \tau = \frac{\langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}$$

dır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.12 γ, regüler bir eğri ve s yay uzunluğu parametresi olsun. Bu durumda, γnin

asli yön eğrisi $\tilde{\gamma}(s) = \int N(s)ds$ olarak tanımlanır (Choi ve Kim, 2012).

Teorem 2.3 γ, birim hızlı regüler bir eğri, s yay uzunluğu parametresi, $\{T, N, B\}$ γ nın Serret-Frenet çatısı, $\tilde{\gamma}, \gamma$ nın asli yön eğrisi olmak üzere $\tilde{\gamma}$ nın Serret-Frenet çatısı $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ nın Frenet elemanlarının ve eğriliklerinin ana eğri γ nın Frenet elemanları ve eğrilikleri cinsinden ifadeleri

$$\tilde{T} = N, \quad \tilde{N} = \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \quad \tilde{B} = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \tag{2.12}$$

$$\tilde{\kappa} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}, \qquad \tilde{\tau} = \frac{\kappa \tau_s - \tau \kappa_s}{\kappa^2 + \tau^2}$$

dır (Choi ve Kim, 2012).

İspat. $\tilde{\gamma}$ nın Serret-Frenet çatısı $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$ ve bu eğrinin eğrilik ve burulması da sırasıyla $\tilde{\kappa}$ ve $\tilde{\tau}$ dur. Tanım 2.12 deki eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\tilde{T} = \tilde{\gamma}_s = \frac{d}{ds} \int N(s)ds = N(s)$$

elde edilir. Buradan $\tilde{N}$ normal vektör alanı,

$$\tilde{N} = \frac{\tilde{\gamma}_{ss}}{\|\tilde{\gamma}_{ss}\|} = \frac{N_s}{\|N_s\|} = \frac{-\kappa T + \tau B}{\|-\kappa T + \tau B\|} = \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\tilde{B}$ binormal vektör alanı,

$$\tilde{B} = \tilde{T} \times \tilde{N} = N \times \left(\frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\right) = \frac{-\kappa N \times T + \tau N \times B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

olarak bulunur. Buradan eğrilik,

$$\tilde{\kappa} = < \tilde{T}_s, \tilde{N} > = < -\kappa T + \tau B, \frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} > = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

elde edilir. Benzer şekilde burulma,

$$\tilde{\tau} = < \tilde{N}_s, \tilde{B} >$$

$$= < \frac{(-\kappa_s T - \kappa T_s + \tau_s B + \tau B_s)\left(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\right) - \frac{(\kappa \kappa_s + \tau \tau_s).(-\kappa T + \tau B)}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}}{\kappa^2 + \tau^2}, \frac{\kappa B + \tau T}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} > = \frac{\kappa \tau_s - \tau \kappa_s}{\kappa^2 + \tau^2}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.13 γ, regüler bir eğri ve s yay uzunluğu parametresi olsun. Bu durumda, γ nın **adjoint eğrisi** $\bar{\gamma}(s) = \int B(s)ds$ olarak verilir (Kühnel, 2006)**.**

Teorem 2.4 γ, $\mathbb{R}^3$ de s yay uzunluğu parametresi ile tanımlı regüler bir eğri olsun. $\{T, N, B\}$ γ nın Serret-Frenet çatısı, $\bar{\gamma}$, γ nın adjoint eğrisi ve $\bar{\gamma}$ nın Serret-Frenet çatısı $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ olsun. Bu durumda $\bar{\gamma}$ nın Frenet elemanlarının ve eğriliklerinin, ana eğri γ cinsinden ifadeleri

$$\bar{T} = B, \quad \bar{N} = -N, \quad \bar{B} = T \tag{2.13}$$

$$\bar{\tau} = \kappa, \quad \bar{\kappa} = \tau$$

şeklindedir (Nurkan ve ark., 2019)

İspat. $\bar{\gamma}$, nın Serret-Frenet çatısı $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ ve bu eğrinin eğrilik ve burulması da sırasıyla $\bar{\kappa}$ ve $\bar{\tau}$ olmak üzere Tanım 2.13 deki eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\bar{T} = \bar{\gamma}_s = \frac{d}{ds}\int B(s)ds = B$$

elde edilir. Buradan $\bar{N}$ normal vektör alanı,

$$\bar{N} = \frac{\bar{T}_s}{\|\bar{T}_s\|} = \frac{B_s}{\| B_s\|} = \frac{-\tau N}{\|-\tau N\|} = \frac{-\tau N}{\tau} = -N$$

elde edilir. O halde $\bar{B}$ binormal vektör alanı,

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} = B \times (-N)$$

$$= -B \times N = -(-T) = T$$

olarak elde edilir. Bu hesaplar yardımıyla eğrilik,

$$\bar{\kappa} =< \bar{T}_s, \bar{N} >=< B_s, -N >$$

$$=< -\tau N, -N >= \tau$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde burulmada,

$$\bar{\tau} =< \bar{N}_s, \bar{B} >= < -N_s, T >$$

$$=< -(- \kappa T \ + \ \tau B), T >$$

$$= \kappa < T, T > -\tau < B, T > = \kappa$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.14 (Landau-Lifshitz Denklemi) Klasik bir Heisenberg ferromanyetik zincirinde spin vektör dinamiği, Landau-Lifshitz denklemi olarak adlandırılan

$$X_t = XxX_{ss} \qquad (2.14)$$

denklemi ile tanımlanır. Burada X ferromanyetik akışı temsil eden vektör alanı, s yay parametresi ve t zaman parametresidir (Balakrishnan, 2005).

Tanım 2.15 (Belavin–Polyakov Denklemi) Klasik bir Heisenberg antiferromanyetik zincirinde spin vektör dinamiği, Belavin-Polyakov denklemi olarak adlandırılan

$$T_t = TxT_s \qquad (2.15)$$

denklemi ile tanımlanır. Burada s yay parametresi ve t zaman parametresidir (Balakrishnan, 2005).

Tanım 2.16 γ, $\mathbb{R}^3$ de regüler bir eğri, s yay uzunluğu parametresi, t zaman parametresi ve X, γ eğrisinin Frenet elemanları ile belirli bir vektör alanı olsun. Bu durumda X vektör alanının enerji denklemi,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2} \iint (< \gamma_s, \gamma_s > + < \gamma_t, \gamma_t > + < X_S, X_S, > + < X_t, X_t, >) A \, dsdt \qquad (2.16)$$

dır. Burada A akış esnasında yüzeyin cismin enerjisine etkisini fomülize eden alan formudur ve

$$A = \sqrt{< \gamma_s, \gamma_s >< \gamma_t, \gamma_t > - < \gamma_s, \gamma_t >^2} \, dsdt$$

ile ifade edilir (Altin, 2015).

3. ADJOİNT EĞRİLERİN AKIŞ DENKLEMLERİ

Uzayda bir parçacığın akış hareketini bir γ eğrisinin $\bar{\gamma}$ adjoint eğrisi yardımıyla temsil edecek olursak, *t* zaman parametresi olmak üzere,

$$\bar{\gamma}_t = \frac{d\bar{\gamma}}{dt} = f\bar{T} + g\bar{N} + h\bar{B} \tag{3.1}$$

dır. Dolayısıyla, $\bar{T}$, $\bar{N}$, $\bar{B}$ Frenet elemanlarının genel akış denklemleri sırasıyla $\bar{T}_t$, $\bar{N}_t$, $\bar{B}_t$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \bar{T}_t &= (f\bar{\kappa} - h\bar{\tau} + g_s)\bar{N} + (g\bar{\tau} + h_s)\bar{B} \\ \bar{N}_t &= -(f\bar{\kappa} - h\bar{\tau} + g_s)\bar{T} + < \bar{N}_t, \bar{B} > \bar{B} \\ \bar{B}_t &= -(g\bar{\tau} + h_s)\bar{T} - < \bar{N}_t, \bar{B} > \bar{N} \end{aligned} \tag{3.2}$$

dır. Burada $\bar{\Phi} = < \bar{N}_t, \bar{B} >$dır (Körpinar, 2020).

3.1. Adjoint Eğrilerin Vorteks Filaman Denklemleri

Teorem 3.1 γ, $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı regüler eğri ve $\bar{\gamma}, \gamma$ nın adjoint eğrisi olsun. Eğer $\bar{\gamma}$ vorteks filaman akışını temsil ediyorsa $\bar{\gamma}$ nın Frenet elemanlarının akış denklemleri, ana eğri cinsinden,

$$\begin{aligned} \bar{T}_t &= \tau_s T + \tau\kappa N \\ \bar{N}_t &= -\tau\kappa T + \tau\kappa B \\ \bar{B}_t &= -\kappa\tau N - \tau_s B \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

olarak ifade edilir.

İspat. Vorteks filaman denkleminden

$$\bar{\gamma}_t = \bar{\kappa}\bar{B}$$

olup (3.1) denkleminden,

$$f = 0,\ g = 0,\ h = \bar{\kappa}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.2) denkleminden,

$$\bar{T}_t = (\, f\bar{\kappa} - h\bar{\tau} + g_s)\bar{N} + (g\bar{\tau} + h_s)\bar{B}$$

$$= (\, 0\bar{\kappa} - \bar{\kappa}\bar{\tau})\bar{N} + (0\bar{\tau} + h_s)\bar{B}$$

$$= -\bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{N} + \bar{\kappa}_s\bar{B} = \tau_s T + \tau\kappa N$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\bar{N}_t = -(\, f\bar{\kappa} - h\bar{\tau} + g_s)\bar{T} + < \bar{N}_t\,, \bar{B} > \bar{B}$$

$$= -(\, 0\bar{\kappa} - h\bar{\tau})\bar{T} + \bar{\Phi}\bar{B}$$

$$= \bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{T} + \bar{\Phi}\bar{B}$$

$$= \bar{\Phi}T + \tau\kappa B$$

elde edilir. Burada,

$$\bar{\Phi} = < \bar{N}_t\,, \bar{B} >$$

$$= < -N_t\,, T >$$

$$= < -(\kappa\tau T + \bar{\Phi}B)\,, T >$$

$$= -\kappa\tau$$

dır. Dolayısıyla,

$$\bar{N}_t = -\kappa\tau T + \tau\kappa B$$

elde edilir. Son olarak,

$$\bar{B}_t = -(g\bar{\tau} + h_s)\bar{T} - < \bar{N}_t\,, \bar{B} > \bar{N}$$

$$= -(0\bar{\tau} + \bar{\kappa}_s)\bar{T} - \bar{\Phi}\bar{N}$$

$$= -\bar{\kappa}_s\bar{T} - (-\kappa\tau)(-N)$$

$$= -\kappa\tau N - \tau_s B$$

elde edilir.

Teorem 3.2 γ, $\mathbb{R}^3$de birim hızlı regüler eğri ve $\bar{\gamma}, \gamma$ nın adjoint eğrisi olsun. $\bar{\gamma}$ eğrisi ile belirli bir X vektör alanı vorteks filaman akışını temsil ediyorsa, X vektör alanının enerji denklemi,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint(1 + \tau^2 + \tau_s{}^2 + (\kappa\tau)^2 + \tau_t{}^2 + (\tau\tau_s)^2 + \tau^2(-\kappa\tau)^2)\tau ds dt$$

ileverilir. Burada akışı temsil eden vektör alanı $X = \bar{\kappa}\bar{B}$ olarak seçilmiştir.

İspat. (2.16) denklemi ve vorteks filaman denkleminden,

$$A = \sqrt{<\gamma_s, \gamma_s><\gamma_t, \gamma_t> - <\gamma_s, \gamma_t>^2}$$

$$= \sqrt{<T, T><\bar{\kappa}\bar{B}, \bar{\kappa}\bar{B}> - <T, \bar{\kappa}\bar{B}>^2}$$

$$= \bar{\kappa}$$

dır. Dolayısıyla $X = \bar{\kappa}\bar{B}$ vektör alanının enerjisi,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint(<T, T> + <\bar{\kappa}\bar{B}, \bar{\kappa}\bar{B}> + <(\bar{\kappa}\bar{B})_s, (\bar{\kappa}\bar{B})_s>$$

$$+ <(\bar{\kappa}\bar{B})_t, (\bar{\kappa}\bar{B})_t)\bar{\kappa} ds dt$$

dır. Dolayısıyla,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint(1 + \bar{\kappa}^2 + <\bar{\kappa}_s\bar{B} + \bar{\kappa}\bar{B}_s, \bar{\kappa}_s\bar{B} + \bar{\kappa}\bar{B}_s> + <\bar{\kappa}_t\bar{B} + \bar{\kappa}\bar{B}_t, \bar{\kappa}_t\bar{B} + \bar{\kappa}\bar{B}_t>)\bar{\kappa} ds dt$$

dır. (2.13) denklemi ve (3.1.1) denkleminden,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint(1 + \tau^2 + <\tau_s T + \tau(\kappa N), \tau_s T + \tau(\kappa N)> + <\tau_t T$$

$$+ \tau(-\tau_s B - \kappa\tau N), \tau_t T + \tau(-\tau_s B - \kappa\tau N)>)\tau ds dt$$

elde edilir. Dolayısıyla, X vektör alanının enerji denklemi,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint(1 + \tau^2 + \tau_s{}^2 + (\kappa\tau)^2 + \tau_t{}^2 + (\tau\tau_s)^2 + \tau^2(-\kappa\tau)^2)\tau ds dt$$

olarak hesaplanır.

3.2. Adjoint Eğrilerin Belavin-Polyakov Denklemleri

Teorem 3.3 γ, $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı regüler eğri ve $\bar{\gamma}, \gamma$ nın adjoint eğrisi olsun. Eğer $\bar{\gamma}$ Heisenberg antiferromanyetik akışı temsil ediyorsa $\bar{\gamma}$ nın Frenet elemanlarının akış denklemleri, ana eğri cinsinden,

$$\begin{aligned} \bar{T}_t &= \tau T \\ \bar{N}_t &= 0 \\ \bar{B}_t &= -\tau B \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

dır.

İspat. Belavin-Polyakovdenkleminden,

$$\bar{T}_t = \bar{\kappa}\bar{B} = \tau\, T$$

dir. (3.2) denkleminden,

$$f\bar{\kappa} - h\bar{\tau} + g_s = 0,$$

ve

$$g\bar{\tau} + h_s = \bar{\kappa}$$

bulunur. Buradan,

$$\bar{N}_t = -(\,f\bar{\kappa} - h\bar{\tau} + g_s)\bar{T} + < \bar{N}_t , \bar{B} > \bar{B}$$

$$= -0.\bar{T} \;+\; \bar{\Phi}\bar{B}$$

elde edilir. Burada,

$$\bar{\Phi} = < \bar{N}_t ,\; \bar{B} > = < -N_t , T > = < -\Phi B , T > = 0$$

dır. Dolayısıyla $\bar{N}_t = 0$ elde edilir. Benzer şekilde,

$$\bar{B}_t = -(g\bar{\tau} + h_s)\bar{T} - < \bar{N}_t , \bar{B} > \bar{N} = -\bar{\kappa}\bar{T} - \bar{\Phi}\bar{N}$$

$$= -\tau B - 0.(-N) = -\tau B$$

elde edilir.

Teorem 3.4 γ, $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı regüler eğri ve $\bar{\gamma}$, γ nın adjoint eğrisi olsun. $\bar{\gamma}$ eğrisi ile belirli bir *X* vektör alanı Heisenberg antiferromanyetik akışı temsil ediyorsa *X* vektör alanının enerji denklemi,

$$\Sigma(X)=\frac{1}{2}\iint(1+f^2+g^2+h^2+4({\tau_s}^2+(\tau\kappa)^2)+4({\tau_t}^2+\tau^4))(g^2+h^2)^{1/2}dsdt$$

dır. Burada akışı temsil eden vektör alanı $X=2\bar{\kappa}\bar{B}$ olarak seçilmiştir.

İspat. (2.16) denkleminden,

$$A=\sqrt{<\gamma_s,\gamma_s><\gamma_t,\gamma_t>-<\gamma_s,\gamma_t>^2}$$

$$=\sqrt{<T,T><f\,T+gN+hB,f\,T+gN+hB>-<T,f\,T+gN+hB>^2}$$

$$=\sqrt{f^2+g^2+h^2-f^2}$$

$$=\sqrt{g^2+h^2}$$

dır. Dolayısıyla *X* vektör alanının enerjisi,

$$\Sigma(X)=\frac{1}{2}\iint(<\gamma_s,\gamma_s>+<\gamma_t,\gamma_t>+<X_s,X_s>+<X_t,X_t,>)\sqrt{g^2+h^2}dsdt$$

dır. $X=2\bar{\kappa}\bar{B}$ olduğundan,

$$\Sigma(X)=\frac{1}{2}\iint(<T,T>+<f\,\bar{T}+g\bar{N}+h\bar{B},f\,\bar{T}+g\bar{N}+h\bar{B}>$$

$$+<(2\bar{\kappa}\bar{B})_s,(2\bar{\kappa}\bar{B})_s>+<(2\bar{\kappa}\bar{B})_t,(2\bar{\kappa}\bar{B})_t>)\sqrt{g^2+h^2}dsdt$$

dır. Buradan,

$$\Sigma(X)=\frac{1}{2}\iint(<T,T>+<f\,\bar{T}+g\bar{N}+h\bar{B},f\,\bar{T}+g\bar{N}+h\bar{B}>$$

$$+<2\bar{\kappa}_s\bar{B}+2\bar{\kappa}\bar{B}_s,2\bar{\kappa}_s\bar{B}+2\bar{\kappa}\bar{B}_s>+<2\bar{\kappa}_t\bar{B}+2\bar{\kappa}\bar{B}_t,$$

$$2\bar{\kappa}_t\bar{B}+2\bar{\kappa}\bar{B}_t>)\sqrt{g^2+h^2}dsdt$$

elde edilir. Teorem 3.3 ve (2.13) denkleminden,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint (1 + f^2 + g^2 + h^2 + 4 < \tau_s T + \tau\kappa N \, , \tau_s T + \tau\kappa N >$$

$$+4 < \tau_t T + \tau(-\tau B) \, , \tau_t T + \tau(-\tau B) >)\sqrt{g^2 + h^2}dsdt$$

elde edilir. Dolayısıyla X vektör alanının enerjisi,

$$\Sigma(X) = \tfrac{1}{2}\iint (1 + f^2 + g^2 + h^2 + 4\left({\tau_s}^2 + (\tau\kappa)^2\right) + 4({\tau_t}^2 T + \tau^4))\sqrt{g^2 + h^2}dsdt$$

olarak hesaplanır.

3.3. Adjoint Eğrilerin Landau-Lifshitz Denklemleri

Teorem 3.5 γ, $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı regüler eğri ve $\bar{\gamma}, \gamma$ nın adjoint eğrisi olsun. Eğer $\bar{\gamma}$ Heisenberg ferromanyetik akışı temsil ediyorsa $\bar{\gamma}$ nın Frenet elemanlarının akış denklemleri, ana eğri cinsinden,

$$\begin{aligned} \bar{T}_t &= \tau_s T + \kappa\tau N \\ \bar{N}_t &= -\kappa\tau T + \kappa\tau B \\ \bar{B}_t &= -\kappa\tau N - \tau_s B \end{aligned} \qquad (3.3.1)$$

dır.

İspat. Landau-Lifshitz denkleminden,

$$\begin{aligned} \bar{T}_t &= -\bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{N} + \bar{\kappa}_s\bar{B} \\ &= \tau_s T - \tau\kappa(-N) \\ &= \tau_s T + \kappa\tau N \end{aligned}$$

dır. (3.2) denkleminden,

$$f\bar{\kappa} - h\bar{\tau} + g_s = -\bar{\kappa}\bar{\tau},$$

ve

$$g\bar{\tau} + h_s = \bar{\kappa}_s$$

bulunur. Buradan,

$$\bar{N}_t = -(f\bar{\kappa} - h\bar{\tau} + g_s)\bar{T} + < \bar{N}_t, \bar{B} > \bar{B}$$

$$= -(-\bar{\kappa}\bar{\tau})\bar{T} + \bar{\Phi}\bar{B}$$

$$= -(-\tau\kappa)B + \bar{\Phi}T$$

$$= \bar{\Phi}T + \kappa\tau B$$

elde edilir. Burada,

$$\bar{\Phi} = < \bar{N}_t, \bar{B} > = -\kappa\tau$$

dır. Dolayısıyla $\bar{N}_t = -\kappa\tau T + \kappa\tau B$ elde edilir. Benzer şekilde,

$$\bar{B}_t = -(g\bar{\tau} + h_s)\bar{T} - < \bar{N}_t, \bar{B} > \bar{N}$$

$$= -\bar{\kappa}_s\bar{T} - \bar{\Phi}\bar{N}$$

$$= -\kappa\tau N - \tau_s B$$

elde edilir.

Teorem 3.6 γ, $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı regüler eğri ve $\bar{\gamma}, \gamma$ nın adjoint eğrisi olsun. $\bar{\gamma}$ eğrisi ile belirli bir X vektör alanı Heisenberg ferromanyetik akışı temsil ediyorsa X vektör alanının enerji denklemi,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint (1 + f^2 + g^2 + h^2 + (\tau_{ss} - \kappa^2\tau)^2 + (\tau_s\kappa + \tau\kappa_s + \kappa\tau_s)^2 + (\kappa\tau^2)^2$$

$$+(\tau_{ts} + \kappa^2\tau^2)^2 + (\tau_t\kappa + \tau\kappa_t - \kappa\tau\tau_s)^2 + (\kappa^2\tau^2 + \tau_s{}^2)^2)\sqrt{g^2 + h^2}dsdt$$

dır. Burada akışı temsil eden vektör alanı $X = -\bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{N} + \bar{\kappa}_s\bar{B}$ olarak seçilmiştir.

İspat. (2.16) denkleminden,

$$A = \sqrt{g^2 + h^2}$$

dır. Dolayısıyla X vektör alanının enerjisi,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint (< \gamma_s, \gamma_s > + < \gamma_t, \gamma_t > + < X_s, X_s, > + < X_t, X_t >)\sqrt{g^2 + h^2}dsdt$$

dır. Heisenberg ferromanyatik akışı temsilen $X = -\bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{N} + \bar{\kappa}_s\bar{B}$ seçildiğinden,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint (< T,T > + < f\,\bar{T} + g\bar{N} + h\bar{B}, f\,\bar{T} + g\bar{N} + h\bar{B} >$$

$$+ < (-\bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{N} + \bar{\kappa}_s\bar{B})_s, (-\bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{N} + \bar{\kappa}_s\bar{B})_s > + < (-\bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{N} + \bar{\kappa}_s\bar{B})_t,$$

$$(-\bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{N} + \bar{\kappa}_s\bar{B})_t >)\sqrt{g^2 + h^2}dsdt$$

ve dolayısıyla

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint (< T,T > + < f\,\bar{T} + g\bar{N} + h\bar{B}, f\,\bar{T} + g\bar{N} + h\bar{B} >$$

$$+ < (-\bar{\kappa}_s\bar{\tau} - \bar{\kappa}\bar{\tau}_s)\bar{N} - \bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{N}_s + \bar{\kappa}_{ss}\,\bar{B} + \bar{\kappa}_s\bar{B}_s, (-\bar{\kappa}_s\bar{\tau} - \bar{\kappa}\bar{\tau}_s)\bar{N}$$

$$-\bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{N}_s + \bar{\kappa}_{ss}\,\bar{B} + \bar{\kappa}_s\bar{B}_s > + < (-\bar{\kappa}_t\bar{\tau} - \bar{\kappa}\bar{\tau}_t)\bar{N} - \bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{N}_t + \bar{\kappa}_{ts}\,\bar{B}$$

$$+\bar{\kappa}_s\bar{B}_t, (-\bar{\kappa}_t\bar{\tau} - \bar{\kappa}\bar{\tau}_t)\bar{N} - \bar{\kappa}\bar{\tau}\bar{N}_t + \bar{\kappa}_{ts}\,\bar{B} + \bar{\kappa}_s\bar{B}_t >)\sqrt{g^2 + h^2}dsdt$$

elde edilir. (2.13) ve (3.3.1) denklemlerinden,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint (1 + f^2 + g^2 + h^2 + < (-\tau_s\kappa - \tau\kappa_s)(-N) + \tau\kappa N_s + \tau_{ss}T$$

$$+\tau_s T_s, (-\tau_s\kappa - \tau\kappa_s)(-N) + \tau\kappa N_s + \tau_{ss}\,T + \tau_s T_s >$$

$$+ < (-\tau_t\kappa - \tau\kappa_t)(-N) - \tau\kappa(\kappa\tau B + \bar{\Phi}T) + \tau_{ts}T$$
$$+\tau_s(-\tau_s B + \bar{\Phi}N), (\tau_t\kappa + \tau\kappa_t)N - \tau\kappa(\kappa\tau B + \bar{\Phi}T) + \tau_{ts}T$$

$$+\tau_s(-\tau_s B + \bar{\Phi}N) >)\sqrt{g^2 + h^2}dsdt$$

elde edilir. Burada $\bar{\Phi} = -\kappa\tau$ olup, X vektör alanının enerjisi,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint (1 + f^2 + g^2 + h^2 + \left(\tau_{ss} - \kappa^2\tau\right)^2 + (\tau_s\kappa + \tau\kappa_s + \kappa\tau_s)^2 + \left(\kappa\tau^2\right)^2$$
$$+(\tau_{ts} + \kappa^2\tau^2)^2 + (\tau_t\kappa + \tau\kappa_t - \kappa\tau\tau_s)^2 + (\kappa^2\tau^2 + {\tau_s}^2)^2)\sqrt{g^2 + h^2}dsdt$$

olarak hesaplanır.

4. ASLİ YÖN EĞRİLERİNİN AKIŞ DENKLEMLERİ

Uzayda bir parçacığın akış hareketini bir γ eğrisinin $\tilde{\gamma}$ asli-yön eğrisi yardımıyla temsil edecek olursak, *t* zaman parametresi olmak üzere,

$$\tilde{\gamma}_t = \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = f\tilde{T} + g\tilde{N} + h\tilde{B} \tag{4.1}$$

dır. Dolayısıyla, $\tilde{T}$, $\tilde{N}$, $\tilde{B}$Frenet elemanlarının genel akış denklemleri sırasıyla $\tilde{T}_t$, $\tilde{N}_t$, $\tilde{B}_t$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tilde{T}_t &= (f\tilde{\kappa} - h\tilde{\tau} + g_s)\tilde{N} + (g\tilde{\tau} + h_s)\tilde{B} \\ \tilde{N}_t &= -(f\tilde{\kappa} - h\tilde{\tau} + g_s)\tilde{T} + < \tilde{N}_t, \tilde{B} > \tilde{B} \\ \tilde{B}_t &= -(g\tilde{\tau} + h_s)\tilde{T} - < \tilde{N}_t, \tilde{B} > \tilde{N} \end{aligned} \tag{4.2}$$

dır. Burada $\tilde{\Phi} = < \tilde{N}_t, \tilde{B} >$ dır (Körpinar, 2020).

4.1. Asli Yön Eğrilerinin Vorteks Filaman Denklemleri

Teorem 4.1 γ, $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı regüler eğri ve $\tilde{\gamma}, \gamma$ nın asli-yön eğrisi olsun. Eğer $\tilde{\gamma}$ vorteks filaman akışını temsil ediyorsa $\tilde{\gamma}$ nın Frenet elemanlarının akış denklemleri, ana eğri cinsinden,

$$\tilde{T}_t = \frac{\kappa^2\tau_s + \tau^2\tau_s}{\kappa^2+\tau^2} T + \frac{\tau^2\kappa_s + \kappa^2\kappa_s}{\kappa^2+\tau^2} B$$

$$\tilde{N}_t = \frac{\tau(-\kappa_t\tau + \kappa\tau_t - \kappa_s\tau^2 - \kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} T + \frac{(\kappa\tau_s - \tau\kappa_s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} N + \frac{\kappa(-\kappa_t\tau + \kappa\tau_t - \kappa_s\tau^2 - \kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} B$$

$$\tilde{B}_t = \frac{\kappa(-\kappa_t\tau + \kappa\tau_t - \kappa_s\tau^2 - \kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} T - \frac{\kappa\kappa_s + \tau\tau_s}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} N - \frac{\tau(-\kappa_t\tau + \kappa\tau_t - \kappa_s\tau^2 - \kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} B$$

dır.

İspat. Vorteks filaman denkleminden

$$\tilde{\gamma}_t = \tilde{\kappa}\tilde{B} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}\left(\frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) = \tau T + \kappa B$$

dır. Dolayısıyla (4.1) denkleminden,

$$f = 0, \quad g = 0, \quad h = \tilde{\kappa}$$

elde edilir. Buradan,

$$\tilde{T}_t = (f\tilde{\kappa} - h\tilde{\tau} + g_s)\tilde{N} + (g\tilde{\tau} + h_s)\tilde{B}$$

$$= (0.\tilde{\kappa} - \tilde{\kappa}\tilde{\tau})\tilde{N} + (0.\tilde{\tau} + \tilde{\kappa}_s)\tilde{B}$$

$$= -\tilde{\kappa}\tilde{\tau}\tilde{N} + \tilde{\kappa}_s\tilde{B}$$

$$= -\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}(\tfrac{\kappa\tau_s - \tau\kappa_s}{\kappa^2+\tau^2})(\tfrac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}) + (\sqrt{\kappa^2 + \tau^2})_s(\tfrac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})$$

$$= \frac{\kappa^2\tau_s + \tau^2\tau_s}{\kappa^2+\tau^2}T + \frac{\tau^2\kappa_s + \kappa^2\kappa_s}{\kappa^2+\tau^2}B$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\tilde{N}_t = -(f\tilde{\kappa} - h\tilde{\tau} + g_s)\tilde{T} + < \tilde{N}_t, \tilde{B} > \tilde{B}$$

$$= -(0.\tilde{\kappa} - \tilde{\kappa}\tilde{\tau})\tilde{T} + \tilde{\Phi}\tilde{B}$$

$$= \tilde{\kappa}\tilde{\tau}\tilde{T} + \tilde{\Phi}\tilde{B}$$

$$= \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}(\tfrac{\kappa\tau_s - \tau\kappa_s}{\kappa^2+\tau^2})N + \tilde{\Phi}\left(\tfrac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)$$

$$= \frac{\tilde{\Phi}\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T + \frac{(\kappa\tau_s - \tau\kappa_s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}N + \frac{\tilde{\Phi}\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B$$

elde edilir. Burada,

$$\tilde{\Phi} = < \tilde{N}_t, \tilde{B} > = < (\tfrac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})_t, \tfrac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} >$$

$$= < (\tfrac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})_t T + \left(\tfrac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)T_t + (\tfrac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})_t B + (\tfrac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})B_t, \tfrac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} >$$

$$= < (\tfrac{\tau(-\kappa_t\tau + \kappa\tau_t)}{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)^3}} - \tfrac{\kappa_s\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}})T + \left(\tfrac{-\kappa\kappa_s}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} - \tfrac{\Phi\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)N$$

$$+ \left(\tfrac{-\kappa^2\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \tfrac{\kappa(-\kappa_t\tau + \kappa\tau_t)}{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)^3}}\right)B, \tfrac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T + \tfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B >$$

$$= \frac{-\kappa_t\tau + \kappa\tau_t - \kappa_s\tau^2 - \kappa^3\tau}{\kappa^2+\tau^2}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\widetilde{N}_t = \frac{\tau(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}T + \frac{(\kappa\tau_s-\tau\kappa_s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}N + \frac{\kappa(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}B$$

elde edilir. Son olarak,

$$\tilde{B}_t = -(g\tilde{\tau} + h_s)\tilde{T} - < \widetilde{N}_t, \tilde{B} > \widetilde{N}$$

$$= -(0.\tilde{\tau} + \kappa_s)\tilde{T} - \widetilde{\Phi}\widetilde{N}$$

$$= -\kappa_s\tilde{T} - \widetilde{\Phi}\widetilde{N}$$

$$= -\left(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right)_s N - \widetilde{\Phi}\left(\frac{-\kappa T+\tau B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)$$

$$= \frac{\widetilde{\Phi}\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T - \left(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right)_s N - \frac{\widetilde{\Phi}\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B$$

elde edilir. Burada,

$$\widetilde{\Phi} = < \widetilde{N}_t, \tilde{B} > = \frac{-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau}{\kappa^2+\tau^2}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\tilde{B}_t = \frac{\kappa(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}T - \frac{\kappa\kappa_s+\tau\tau_s}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}N - \frac{\tau(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}B$$

elde edilir.

Teorem 4.2 γ, $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı regüler eğri ve $\tilde{\gamma}, \gamma$ nın asli-yön eğrisi olsun. $\tilde{\gamma}$ eğrisi ile belirli bir X vektör alanı vorteks filaman akışını temsil ediyorsa, bu vektör alanının enerji denklemi,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint\Big(1 + (\kappa^2+\tau^2)\Big(1 + \left(\frac{-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau}{\kappa^2+\tau^2}\right)^2\Big) + {\kappa_s}^2 + {\tau_s}^2$$

$$+ \frac{\kappa^2+\tau^2}{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}(\tau_s\kappa - \kappa_s\tau)^2 + {\kappa_t}^2 + {\tau_t}^2 + (\kappa\kappa_s + \tau\tau_s)^2\Big)\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,dsdt$$

dır. Burada akışı temsil eden vektör alanı $X = \tilde{\kappa}\tilde{B}$ olarak seçilmiştir.

İspat. (2.16) denklemi ve vorteks filaman denkleminden,

$$A = \sqrt{< \gamma_s, \gamma_s > < \gamma_t, \gamma_t > - < \gamma_s, \gamma_t >^2}$$

$$= \sqrt{< T,T >< \tilde{\kappa}\tilde{B},\tilde{\kappa}\tilde{B} > -< T,\tilde{\kappa}\tilde{B} >^2}$$

$$= \tilde{\kappa}$$

dır. Buradan,

$$\Sigma(X) = \iint (1 + \tilde{\kappa}^2 + < \tilde{\kappa}_S\tilde{B} + \tilde{\kappa}\tilde{B}_S, \tilde{\kappa}_S\tilde{B} + \tilde{\kappa}\tilde{B}_S > + < \tilde{\kappa}_t\tilde{B} + \tilde{\kappa}\tilde{B}_t, \tilde{\kappa}_t\tilde{B} + \tilde{\kappa}\tilde{B}_t >)\tilde{\kappa}dsdt$$

dır. Teorem 2.3 ve Teorem 4.1 den,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint (1 + \sqrt{(\kappa^2+\tau^2)}^2 + < \sqrt{{\kappa_s}^2 + {\tau_s}^2}\,\frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,\frac{\tau_s T_s + \kappa_s B_s}{\sqrt{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}},$$

$$\sqrt{{\kappa_s}^2 + {\tau_s}^2}\,\frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,\frac{\tau_s T_s + \kappa_s B_s}{\sqrt{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}} > + < \sqrt{{\kappa_t}^2 + {\tau_t}^2}\,\frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

$$+ \tilde{\Phi}\kappa T - (\kappa\kappa_s + \tau\tau_s)N - \tilde{\Phi}\tau B, \sqrt{{\kappa_t}^2 + {\tau_t}^2}\,\frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

$$+ \tilde{\Phi}\kappa T - (\kappa\kappa_s + \tau\tau_s)N - \tilde{\Phi}\tau B >)\sqrt{\kappa^2+\tau^2}dsdt$$

dır. Dolayısıyla,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint (1 + (\kappa^2+\tau^2)(1 + \tilde{\Phi}^2) + {\kappa_s}^2 + {\tau_s}^2 + \frac{\kappa^2+\tau^2}{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}(\tau_s\kappa - \kappa_s\tau)^2 + {\kappa_t}^2$$

$$+ {\tau_t}^2 + (\kappa\kappa_s + \tau\tau_s)^2)\sqrt{\kappa^2+\tau^2}dsdt$$

elde edilir. Burada,

$$\tilde{\Phi} = < \tilde{N}_t, \tilde{B} > = \frac{-\kappa_t\tau + \kappa\tau_t - \kappa_s\tau^2 - \kappa^3\tau}{\kappa^2+\tau^2}$$

dır. O halde X vektör alanının enerjisi,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint (1 + (\kappa^2+\tau^2)(1 + \left(\frac{-\kappa_t\tau + \kappa\tau_t - \kappa_s\tau^2 - \kappa^3\tau}{\kappa^2+\tau^2}\right)^2) + {\kappa_s}^2 + {\tau_s}^2$$

$$+ \frac{\kappa^2+\tau^2}{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}(\tau_s\kappa - \kappa_s\tau)^2 + {\kappa_t}^2 + {\tau_t}^2 + (\kappa\kappa_s + \tau\tau_s)^2)\sqrt{\kappa^2+\tau^2}dsdt$$

olarak hesaplanır.

4.2. Asli Yön Eğrilerin Belavin-Polyakov Denklemleri

Teorem 4.3 γ, $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı regüler eğri ve $\tilde{\gamma},\gamma$ nın asli-yön eğrisi olsun. Eğer $\tilde{\gamma}$ Heisenberg antiferromanyetik akışı temsil ediyorsa $\tilde{\gamma}$ nın Frenet elemanlarının akış denklemleri, ana eğri cinsinden,

$$\tilde{T}_t = \tau T + \kappa B$$

$$\tilde{N}_t = \frac{\tau(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} T + \frac{\kappa(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} B$$

$$\tilde{B}_t = \frac{\kappa(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} T - \sqrt{\kappa^2+\tau^2} N - \frac{\tau(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} B$$

dır.

İspat. Belavin-Polyakov denkleminden,

$$\tilde{T}_t = \tilde{\kappa}\tilde{B} = \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,.\left(\frac{\tau T+\kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) = \tau T + \kappa B$$

dir. $\tilde{T}_t$, $\tilde{N}_t$, $\tilde{B}_t$ şartlarının sağlanması için (4.2) deki eşitliklerde $f\tilde{\kappa} - h\tilde{\tau} + g_s = 0$ *ve* $g\tilde{\tau} + h_s = \tilde{\kappa}$ seçilmelidir. Buradan,

$$\tilde{N}_t = -(f\tilde{\kappa} - h\tilde{\tau} + g_s)\tilde{T} + < \tilde{N}_t, \tilde{B} > \tilde{B}$$

$$= -0.\tilde{T} + \tilde{\Phi}\tilde{B}$$

$$= \tilde{\Phi}\left(\frac{\tau T+\kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)$$

$$= \frac{\tilde{\Phi}\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} T + \frac{\tilde{\Phi}\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} B$$

elde edilir. Burada,

$$\tilde{\Phi} = < \tilde{N}_t, \tilde{B} > = < \left(\frac{-\kappa T+\tau B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)_t, \frac{\tau T+\kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} >$$

$$= < \left(\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)_t T + \left(\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) T_t + \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)_t B + \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right) B_t, \frac{\tau T+\kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} >$$

$$= < \left(\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)_t T + \left(\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)(\kappa B) + \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)_t B$$

$$+\left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)\left(-\kappa T-\Phi N\right),\frac{\tau T+\kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}>$$

$$=<\left(\frac{\tau(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t)}{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)^3}}-\frac{\kappa\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)T+\left(-\frac{\Phi\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)N+\left(\frac{-\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}+\frac{\kappa(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t)}{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)^3}}\right)B,$$

$$\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T+\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B>$$

$$=\left(\frac{\tau^2(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t)}{(\kappa^2+\tau^2)^2}-\frac{\kappa\tau^2}{\kappa^2+\tau^2}\right)+\left(\frac{-\kappa^3}{\kappa^2+\tau^2}+\frac{\kappa^2(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t)}{(\kappa^2+\tau^2)^2}\right)$$

$$=\frac{-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3}{\kappa^2+\tau^2}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\widetilde{N}_t=\frac{\tau(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}T+\frac{\kappa(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}B$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\tilde{B}_t=-(g\tilde{\tau}+h_s)\tilde{T}-<\widetilde{N}_t,\tilde{B}>\widetilde{N}$$

$$\tilde{B}_t=-\tilde{\kappa}\tilde{T}-\widetilde{\Phi}\widetilde{N}$$

$$=-\left(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right)N-\widetilde{\Phi}\left(\frac{-\kappa T+\tau B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)$$

elde edilir. Burada,

$$\widetilde{\Phi}=<\widetilde{N}_t,\tilde{B}>=\frac{-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3}{\kappa^2+\tau^2}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\tilde{B}_t=\frac{\kappa(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}T-\sqrt{\kappa^2+\tau^2}N-\frac{\tau(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}B$$

elde edilir.

Teorem 4.4 γ, $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı regüler eğri ve $\tilde{\gamma},\gamma$ nın asli-yön eğrisi olsun. $\tilde{\gamma}$ eğrisi ile belirli bir X vektör alanı Heisenberg ferromanyetik akışı temsil ediyorsa, bu vektör alanının enerji denklemi

$$\Sigma(X)=\frac{1}{2}\iint(1+f^2+g^2+h^2+4({\kappa_s}^2+{\tau_s}^2+\frac{\kappa^2+\tau^2}{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}(\tau_s\kappa-\kappa_s\tau)^2+{\kappa_t}^2$$

$$+{\tau_t}^2+\frac{(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3)^2}{\kappa^2+\tau^2}+(\kappa^2+\tau^2)^2))\sqrt{\kappa^2+\tau^2}dsdt$$

dır. Burada akışı temsil eden vektör alanı $X=2\tilde{\kappa}\tilde{B}$ olarak seçilmiştir.

İspat. (2.16) denklemi ve Belavin-Polyakov denkleminden,

$$A=\sqrt{<\gamma_s,\gamma_s><\gamma_t,\gamma_t>-<\gamma_s,\gamma_t>^2}$$

$$=\sqrt{<T,T><f\,T+gN+hB,f\,T+gN+hB>-<T,f\,T+gN+hB>^2}$$

$$=\sqrt{f^2+g^2+h^2-f^2}$$

$$=\sqrt{g^2+h^2}$$

dır. Buradan,

$$\Sigma(X)=\frac{1}{2}\iint(<\gamma_s,\gamma_s>+<\gamma_t,\gamma_t>+<X_s,X_s,>+<X_t,X_t>)\sqrt{g^2+h^2}ds$$

dır. Burada $X=2\tilde{\kappa}\tilde{B}$ olarak seçilirse,

$$\Sigma(X)=\frac{1}{2}\iint(<T,T>+<f\,\tilde{T}+g\tilde{N}+h\tilde{B},f\,\tilde{T}+g\tilde{N}+h\tilde{B}>$$

$$+<(2\tilde{\kappa}\tilde{B})_s,(2\tilde{\kappa}\tilde{B})_s>+<(2\tilde{\kappa}\tilde{B})_t,(2\tilde{\kappa}\tilde{B})_t>)\sqrt{g^2+h^2}dsdt$$

dır. Dolayısıyla,

$$\Sigma(X)=\frac{1}{2}\iint(<T,T>+<f\,\tilde{T}+g\tilde{N}+h\tilde{B},f\,\tilde{T}+g\tilde{N}+h\tilde{B}>+<2\tilde{\kappa}_s\tilde{B}$$

$$+2\tilde{\kappa}\tilde{B}_s,2\tilde{\kappa}_s\tilde{B}+2\tilde{\kappa}\tilde{B}_s>+<2\tilde{\kappa}_t\tilde{B}+2\tilde{\kappa}\tilde{B}_t,2\tilde{\kappa}_t\tilde{B}$$

$$+2\tilde{\kappa}\tilde{B}_t>)\sqrt{g^2+h^2}dsdt$$

elde edilir. Teorem 2.3 ve Teorem 4.3 den,

$$\Sigma(X)=\frac{1}{2}\iint(1+f^2+g^2+h^2+4<\sqrt{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}\frac{\tau T+\kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

$$+\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\frac{\tau_s T_s+\kappa_s B_s}{\sqrt{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}}, \sqrt{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}\frac{\tau T+\kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

$$+\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\frac{\tau_s T_s+\kappa_s B_s}{\sqrt{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}} > +4 < \sqrt{{\kappa_t}^2+{\tau_t}^2}\frac{\tau T+\kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

$$+\widetilde{\Phi}\kappa T-(\kappa^2+\tau^2)N-\widetilde{\Phi}\tau B, \sqrt{{\kappa_t}^2+{\tau_t}^2}\frac{\tau T+\kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

$$+\widetilde{\Phi}\kappa T-(\kappa^2+\tau^2)N-\widetilde{\Phi}\tau B)\sqrt{g^2+h^2}dsdt$$

elde edilir. Buradan,

$$\Sigma(X)=\frac{1}{2}\iint(1+f^2+g^2+h^2+4({\kappa_s}^2+{\tau_s}^2+\frac{\kappa^2+\tau^2}{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}(\tau_s\kappa-\kappa_s\tau)^2$$

$$+{\kappa_t}^2+{\tau_t}^2+\widetilde{\Phi}^2(\kappa^2+\tau^2)+\ (\kappa^2+\tau^2)^2)\sqrt{\kappa^2+\tau^2}dsdt$$

elde edilir. Burada,

$$\widetilde{\Phi}=<\widetilde{N}_t,\widetilde{B}>=\frac{-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3}{\kappa^2+\tau^2}$$

dır. Dolayısıyla X vektör alanının enerjisi,

$$\Sigma(X)=\frac{1}{2}\iint(1+f^2+g^2+h^2+4({\kappa_s}^2+{\tau_s}^2+\frac{\kappa^2+\tau^2}{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}(\tau_s\kappa-\kappa_s\tau)^2+{\kappa_t}^2$$

$$+{\tau_t}^2+\left(\frac{-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa\tau^2-\kappa^3}{\kappa^2+\tau^2}\right)^2(\kappa^2+\tau^2)+(\kappa^2+\tau^2)^2))\sqrt{\kappa^2+\tau^2}dsdt$$

şeklinde hesaplanır.

4.3. Asli Yön Eğrilerin Landau-Lifshitz Denklemleri

Teorem 4.5 γ, $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı regüler eğri ve $\tilde{\gamma},\gamma$ nın asli-yön eğrisi olsun. Eğer $\tilde{\gamma}$ Heisenberg ferromanyetik akışını temsil ediyorsa $\tilde{\gamma}$ nın Frenet elemanlarının akış denklemleri, ana eğri cinsinden,

$$\widetilde{T}_t=\frac{\kappa^2\tau_s+\tau^2\tau_s}{\kappa^2+\tau^2}T+\frac{\tau^2\kappa_s+\kappa^2\kappa_s}{\kappa^2+\tau^2}B$$

$$\widetilde{N}_t=\frac{\tau(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}T+\frac{(\kappa\tau_s-\tau\kappa_s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}N+\frac{\kappa(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}B$$

$$\tilde{B}_t = \frac{\kappa(-\kappa_t\tau + \kappa\tau_t - \kappa_s\tau^2 - \kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}T - \frac{(\kappa\kappa_s+\tau\tau_s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}N - \frac{\tau(-\kappa_t\tau + \kappa\tau_t - \kappa_s\tau^2 - \kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}B$$

dır.

İspat. Landau-Lifshitz denkleminden,

$$\tilde{T}_t = (f\tilde{\kappa} - h\tilde{\tau} + g_s)\tilde{N} + (g\tilde{\tau} + h_s)\tilde{B}$$

$$= -\tilde{\kappa}\tilde{\tau}\tilde{N} + \tilde{\kappa}_s\tilde{B}$$

$$= -\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,\frac{(\kappa\tau_s - \tau\kappa_s)}{\kappa^2+\tau^2}\frac{(-\kappa T + \tau B)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} + (\sqrt{\kappa^2+\tau^2})_s\frac{(\tau T + \kappa B)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

$$= \frac{\kappa^2\tau_s + \tau^2\tau_s}{\kappa^2+\tau^2}T + \frac{\tau^2\kappa_s + \kappa^2\kappa_s}{\kappa^2+\tau^2}B$$

dır. (4.2) denklemi yardımıyla,

$$f\tilde{\kappa} - h\tilde{\tau} + g_s = -\tilde{\kappa}\tilde{\tau},$$

ve

$$g\tilde{\tau} + h_s = \tilde{\kappa}_s$$

dır. Dolayısıyla,

$$\tilde{N}_t = -(f\tilde{\kappa} - h\tilde{\tau} + g_s)\tilde{T} + < \tilde{N}_t, \tilde{B} > \tilde{B}$$

$$= \tilde{\kappa}\tilde{\tau}\tilde{T} + \tilde{\Phi}\tilde{B}$$

$$= \sqrt{\kappa^2+\tau^2}\left(\frac{\kappa\tau_s - \tau\kappa_s}{\kappa^2+\tau^2}\right)N + \tilde{\Phi}\left(\frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)$$

$$= \frac{\tilde{\Phi}\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T + \frac{(\kappa\tau_s - \tau\kappa_s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}N + \frac{\tilde{\Phi}\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B$$

elde edilir. Burada,

$$\tilde{\Phi} = < \tilde{N}_t, \tilde{B} > = < \left(\frac{-\kappa T + \tau B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)_t, \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} >$$

$$= < \left(\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)_t T + \left(\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)T_t + \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)_t B + \left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)B_t, \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} >$$

$$=<\left(\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)_t T+\left(\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)\left(-\kappa\tau N+\kappa_s B\right)+\left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)_t B$$

$$+\left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)\left(-\kappa_s T-\Phi N\right),\frac{\tau T+\kappa B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}>$$

$$=<\left(\frac{\tau(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t)}{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)^3}}-\frac{\kappa_s\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)T+\left(\frac{\kappa^2\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}-\frac{\Phi\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)N$$

$$+\left(\frac{-\kappa\kappa_s}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}+\frac{\kappa(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t)}{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)^3}}\right)B,\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T+\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B>$$

$$=\left(\frac{\tau^2(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t)}{(\kappa^2+\tau^2)^2}-\frac{\kappa_s\tau^2}{\kappa^2+\tau^2}\right)+\left(\frac{-\kappa^3\tau}{\kappa^2+\tau^2}+\frac{\kappa^2(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t)}{(\kappa^2+\tau^2)^2}\right)$$

$$=\frac{-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau}{\kappa^2+\tau^2}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\widetilde{N}_t=\frac{\tau(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}T+\frac{(\kappa\tau_s-\tau\kappa_s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}N+\frac{\kappa(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}B$$

elde edilir. Son olarak,

$$\widetilde{B}_t=-(g\tilde{\tau}+h_s)\widetilde{T}-<\widetilde{N}_t,\widetilde{B}>\widetilde{N}$$

$$=-\tilde{\kappa}_s\widetilde{T}-\widetilde{\Phi}\widetilde{N}$$

$$=-\left(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right)_s N-\widetilde{\Phi}\left(\frac{-\kappa T+\tau B}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)$$

$$=\left(\frac{\widetilde{\Phi}\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)T-\left(\frac{\kappa\kappa_s+\tau\tau_s}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)N-\left(\frac{\widetilde{\Phi}\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)B$$

elde edilir. Burada,

$$\widetilde{\Phi}=<\widetilde{N}_t,\widetilde{B}>=\frac{-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau}{\kappa^2+\tau^2}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\widetilde{B}_t=\frac{\kappa(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}T-\frac{(\kappa\kappa_s+\tau\tau_s)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}N-\frac{\tau(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}B$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.6 γ, $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı regüler eğri ve $\tilde{\gamma}, \gamma$ nın asli-yön eğrisi olsun. $\tilde{\gamma}$ eğrisi ile belirli bir X vektör alanı Heisenberg ferromanyetik akışı temsil ediyorsa, bu vektör alanının enerji denklemi,

$$\Sigma(X) = \frac{1}{2}\iint\Big(1 + f^2 + g^2 + h^2 + \left(\frac{\sqrt{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}(\kappa^2\tau_s-\tau\kappa\kappa_s)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} + \frac{\kappa\kappa_s\tau_{ss}-\kappa\kappa_{ss}\tau_s}{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}\right)^2$$

$$+\frac{(\kappa\tau_s-\tau\kappa_s)^2(\kappa\kappa_s-\tau\tau_s)^2}{(\kappa^2+\tau^2)({\kappa_s}^2+{\tau_s}^2)} + \left(\frac{\sqrt{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\frac{(\kappa\tau\tau_s-\tau^2\kappa_s)}{\kappa^2+\tau^2} + \frac{\tau\kappa_s\tau_{ss}-\tau\tau_s\kappa_{ss}}{{\kappa_s}^2+{\tau_s}^2}\right)^2$$

$$+\left(\frac{\sqrt{{\kappa_t}^2+{\tau_t}^2}(\kappa^2\tau_s-\tau\kappa\kappa_s)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} + \frac{\kappa\kappa_t\tau_{st}-\kappa\kappa_{st}\tau_t}{{\kappa_t}^2+{\tau_t}^2} + \frac{(\tau^2\kappa_s-\kappa\tau\tau_s)(-\kappa_t\,\tau + \kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^2}\right)^2$$

$$+\frac{(\kappa\tau_s-\tau\kappa_s)^2(\kappa\tau_s-\tau\kappa_s)^2}{(\kappa^2+\tau^2)^2}$$

$$+\left(\frac{\sqrt{{\kappa_t}^2+{\tau_t}^2}(\kappa\tau\tau_s-\tau^2\kappa_s)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} + \frac{\tau\kappa_t\tau_{st}-\tau\tau_t\kappa_{st}}{{\kappa_t}^2+{\tau_t}^2} + \frac{(\kappa^2\tau_s-\tau\kappa\kappa_s)(-\kappa_t\,\tau + \kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau)}{(\kappa^2+\tau^2)^2}\right)^2$$

$$\Big)\sqrt{g^2+h^2}\,dsdt$$

dır. Burada akışı temsil eden vektör alanı $X = -\tilde{\kappa}\tilde{\tau}\tilde{N}$ olarak seçilmiştir.

İspat. (2.16) denklemi ve Landau-Lifshitz denkleminden,

$$A = \sqrt{g^2+h^2}$$

dır. O halde,

$$\Sigma(x) = \frac{1}{2}\iint(<\gamma_s,\gamma_s> + <\gamma_t,\gamma_t> + <X_s,X_s> + <X_t,X_t>)\sqrt{g^2+h^2}\,dsdt$$

ve dolayısıyla,

$$\Sigma(x) = \frac{1}{2}\iint(<T,T> + <f\,\tilde{T} + g\tilde{N} + h\tilde{B}, f\,\tilde{T} + g\tilde{N} + h\tilde{B}> + <\left(-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}\tilde{N}\right)_s,$$

$$\left(-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}\tilde{N}\right)_s> + <\left(-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}\tilde{N}\right)_t, \left(-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}\tilde{N}\right)_t>)\sqrt{g^2+h^2}\,dsdt$$

dır. Buradan,

$$\Sigma(x)=\frac{1}{2}\iint\Big(<T,T>+<f\widetilde{T}+g\widetilde{N}+h\widetilde{B},f\widetilde{T}+g\widetilde{N}+h\widetilde{B}>$$

$$+<-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}_S\widetilde{N}-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}\widetilde{N}_S,-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}_S\widetilde{N}-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}\widetilde{N}_S>+<(-\tilde{\kappa}_t\tilde{\tau}-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}_t)\widetilde{N}$$

$$-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}\widetilde{N}_t,(-\tilde{\kappa}_t\tilde{\tau}-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}_t)\widetilde{N}-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}\widetilde{N}_t>\Big)\sqrt{g^2+h^2}\,dsdt$$

elde edilir. Dolayısıyla X vektör alanının enerjisi,

$$\Sigma(X)=\frac{1}{2}\iint\Big(1+f^2+g^2+h^2+\left(\frac{\sqrt{\kappa_s{}^2+\tau_s{}^2}\left(\kappa^2\tau_s-\tau\kappa\kappa_s\right)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}+\frac{\kappa\kappa_s\tau_{ss}-\kappa\kappa_{ss}\tau_s}{\kappa_s{}^2+\tau_s{}^2}\right)^2$$

$$+\frac{(\kappa\tau_s-\tau\kappa_s)^2(\kappa\kappa_s-\tau\tau_s)^2}{(\kappa^2+\tau^2)(\kappa_s{}^2+\tau_s{}^2)}+\left(\frac{\sqrt{\kappa_s{}^2+\tau_s{}^2}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\frac{\left(\kappa\tau\tau_s-\tau^2\kappa_s\right)}{\kappa^2+\tau^2}+\frac{\tau\kappa_s\tau_{ss}-\tau\tau_s\kappa_{ss}}{\kappa_s{}^2+\tau_s{}^2}\right)^2$$

$$+\left(\frac{\sqrt{\kappa_t{}^2+\tau_t{}^2}\left(\kappa^2\tau_s-\tau\kappa\kappa_s\right)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}+\frac{\kappa\kappa_t\tau_{st}-\kappa\kappa_{st}\tau_t}{\kappa_t{}^2+\tau_t{}^2}+\frac{\left(\tau^2\kappa_s-\kappa\tau\tau_s\right)\left(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau\right)}{(\kappa^2+\tau^2)^2}\right)^2$$

$$+\frac{(\kappa\tau_s-\tau\kappa_s)^2(\kappa\tau_s-\tau\kappa_s)^2}{(\kappa^2+\tau^2)^2}$$

$$+\left(\frac{\sqrt{\kappa_t{}^2+\tau_t{}^2}\left(\kappa\tau\tau_s-\tau^2\kappa_s\right)}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}+\frac{\tau\kappa_t\tau_{st}-\tau\tau_t\kappa_{st}}{\kappa_t{}^2+\tau_t{}^2}+\frac{\left(\kappa^2\tau_s-\tau\kappa\kappa_s\right)\left(-\kappa_t\tau+\kappa\tau_t-\kappa_s\tau^2-\kappa^3\tau\right)}{(\kappa^2+\tau^2)^2}\right)^2$$

$$\Big)\sqrt{g^2+h^2}\,dsdt$$

olarak hesaplanır.

KAYNAKLAR

Altin, A., 2015, The Energy of a Domain on the Surface, *Ukrainian Mathematical Journal*, 67(4), 641-647.

Balakrishnan, R., 2005, Space curves, anholonomy and nonlinearity, *Pramana J. Phys.* 64, 607.

Barros, M., Cabrerizo, J.L., Fernández, M., Romero, A., 2007, Magnetic Vortex Filament Flows, *J. Math. Phys.* 48 (8).

Batchelor, G.K., 1967, An Introduction to Fluid Dynamics, *Cambridge University Press*, New York

Choi, J.H., Kim, Y.H., 2012, Associated curves of a Frenet curve and their applications, *Applied Mathematics and Computation*, 218 (18), 9116-9124.

Hasimoto, H., 1972, A soliton on a vortex filament, *J. Fluid Mech.* 51, 477.

Izumiya, S., Takeuchi, N., 2004, New special curves and developable surfaces. *Turk J Math* 28:153–163.

Körpinar, T., 2020, Optical directional binormal magnetic ows with geometric phase: Heisenberg ferromagnetic model, *International Journal for Light and Electron Optics*, 219, 1-15.

Körpinar, T., Demirkol, R.C., Körpınar, Z., 2021, Approximate solutions for the inextensible Heisenberg antiferromagnetic flow and solitonic magnetic flux surfaces in the normal direction in Minkowski space, *Int. J. Light Electron Opt.* 238, 166-403.

Kühnel, W., 2006, Differential geometry of curves-surfacesmanifolds, 2nd edn. *AMS*, Providence.

Lamb, G.L., 1980, Elements of Soliton Theory, *Wiley Interscience*, New York

Langer, J., Perline, R., 1990, The Hasimoto transformation and integrable flows on curves, *Appl. Math. Lett.* 3 (2), 61–64.

Nurkan, S., Güven, İ.A., Karacan, M.K., 2019, Characterizations of Adjoint Curves in Euclidean 3-Space. *Proc.* 89(1), 155-161

Sabuncuoğlu, A., 2004, Diferensiyel Geometri, Ankara.

Santiago, J.A., Chacon-Acosta, G., Gonzalez-Gaxiola, O., Torres-Vargas, G., 2017, Geometry of classical particles on curved surfaces, *Rev. Mexicana de Fis.* 63, 26–31.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Sefer ÖKMEN

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	Gazi Lisesi, Merkez, Elazığ	2005
Üniversite	:	Matematik Bölümü, Merkez, Elazığ Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İ. Ö.	2012 2019

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2015-2016	Elazığ Necip Güngör Kısaparmak Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2016-2017	Elazığ Yahya Kemal Beyatlı Anadolu Lisesi ve Elazığ Doğukent Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2019-2020	Elazığ Boğaziçi Havacılık Lisesi ve Teknoloji Koleji	Matematik Öğretmeni
2020-….	Tabanlı Ortaokulu, Merkez/Muş	İlköğretim Matematik Öğretmeni