



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI KESİRLİ MERTEBEDEN GECİKMELİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI**

Abdulhamit ÖZDEMİR

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ekim-2024
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KESİRLİ MERTEBEDEN GECİKMELİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI

Abdulhamit ÖZDEMİR

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdal KORKMAZ

Jüri: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

Jüri: Prof. Dr. Kenan YILDIRIM

Jüri: Doç. Dr. Derya ARSLAN

Jüri: Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU

Ekim-2024
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

Abdulhamit ÖZDEMİR tarafından hazırlanan ”**Bazı Kesirli Mertebeden Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Kararlılığı**” adlı tez çalışması 04/10/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Cemil TUNÇ
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Danışman

Prof. Dr. Erdal KORKMAZ
Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Üye

Prof. Dr. Kenan YILDIRIM
Muş Alparslan Üniversitesi
Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Bölümü

.....

Üye

Doç. Dr. Derya ARSLAN
Muş Alparslan Üniversitesi
Bitlis Eren Üniversitesi, Matematik Bölümü

.....

Üye

Doç. Dr. Muaz SEYDAOĞLU
Muş Alparslan Üniversitesi
Eğitim Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu/...../..... Tarih ve/..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Selçuk SAĞIR

FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Abdulhamit ÖZDEMİR

Tarih:04/10/2024

ÖZET

DOKTORA TEZİ

BAZI KESİRLİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI

Abdulhamit ÖZDEMİR

**Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Erdal KORKMAZ

Bu çalışmada, gecikmeli diferansiyel denklemlerin özel bir türü olan gecikmeli nötral diferansiyel denklemlerin çözümlerinin asimptotik kararlılığı için yeterli şartlar araştırılmıştır. Zaman-değişken ve zamana göre sınırsız gecikmeler içeren bu denklemler kesirli mertebeye kullanılarak ele alınmıştır. Elde edilen sonuçları karşılaştırmak için problemler konveks optimizasyon problemleri olarak ifade edilmiş ve bu optimizasyon problemlerinin çözümleri, Matlab programının LMI Toolbox paketi kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca, gecikmeli singular sistemler, gecikmeli nötral diferansiyel denklem sistemi olarak modellenerek, bu sistemlerin kararlılığı için bazı koşullar sunulmuştur.

2024, 98 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Asimptotik kararlılık, Kararlılık, Kesirli mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemler, Konveks optimizasyon, Lineer matris eşitsizliği, Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

STABILITY OF SOLUTION OF SOME FRACTIONAL ORDER DELAYED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abdulhamit ÖZDEMİR

**Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics**

Advisor: Prof. Dr. Erdal KORKMAZ

In this study, sufficient conditions for the asymptotic stability of the solutions of delayed neutral differential equations, which are a special type of delayed differential equations, are investigated. These equations, which are time-varying and have unlimited delays with respect to time, are considered using fractional order. In order to compare the obtained results, the problems are expressed as convex optimization problems and the solutions of these optimization problems are obtained using the LMI Toolbox package of the Matlab program. In addition, delayed singular systems are modeled as delayed neutral differential equation systems and some conditions for the stability of these systems are presented.

2024, 98 Pages

Keywords: Asymptotic stability, Convex optimization, Fractional delay differential equations, Linear Matrix Inequality, Lyapunov-Krasovskii functional, Stability.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca her türlü görüş ve düşünceleriyle bana yol gösteren, yardım ve katkılarını esirgemeyen değerli ve saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Erdal KORKMAZ'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım süresinde sağladığı maddi ve manevi destekle beni hiç yalnız bırakmayan eşim Fatma EKİCİ ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Abdulhamit ÖZDEMİR

MUŞ-2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ ve KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	1
2. MATERİYAL ve YÖNTEM.....	8
2.1 Temel Kavramlar.....	8
3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA	21
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	91
4.1 Sonuçlar	91
4.2 Öneriler	91
KAYNAKLAR.....	93
ÖZGEÇMİŞ	97

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

- ${}^C D_{t_0}^\alpha$: Caputo anlamında Kesirli Türev
 $D_{t_0}^\alpha$: Riemann-Liouville anlamında Kesirli Türev
 Γ : Gamma Fonksiyonu

Kısaltmalar

- LME : Lineer Matris Eşitsizliği



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. (2.4) denkleminin $y(t)$ çözümü.....	11
Şekil 2.2. (2.7) denkleminin çözümü ve hayalet çözümü.....	14
Şekil 2.3. (2.11) denkleminin çözümü.....	15
Şekil 2.4. $t \leq 0$ iken $y(t) = 0.1$ verildiğinde $a = 1.4$ ve $a = 0.3$ için (2.12) denkleminin çözümü	16
Şekil 2.5. $t \leq 0$ iken $y(t) = 0.1$ verildiğinde $a = 1.7$ için (2.12) denkleminin Faz Düzlemi	16



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Örnek 3.4 için elde edilen sayısal değerler.	76
Çizelge 3.2. Örnek 3.5 için elde edilen sayısal değerler.	78



1. GİRİŞ ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Diferansiyel denklemler, gerçek dünya olaylarını matematiksel olarak modellemede en etkili yöntemlerden biridir. Gecikmeli diferansiyel denklemler, gecikmeli nötral diferansiyel denklemler, singular gecikmeli nötral diferansiyel denklemler ve gecikmeli nötral sinir ağları gibi ileri düzey konular, olayların daha gerçekçi bir şekilde modellenmesi gerekliliği nedeniyle, diferansiyel denklemler teorisi üzerine çalışan araştırmacılar için önemli bir odak noktası haline gelmiştir.

Gecikmeli diferansiyel denklemler 20. yüzyılın başlarında ortaya çıkmış ve fiziksel ve biyolojik sistemlerin modellenmesinde önemli bir ilerleme sağlamıştır. Bu modellerden biri sıvıların karışımı modelidir. İçinde A ton tuzlu su olan bir tank göz önüne alınsın. Dakikada α ton saf su dolduran bir musluk tanka bağlansın. Tankdaki tuzlu su sürekli karıştırılsın ve tankın altında dakikada α ton tuzlu suyu boşaltan bir musluk olsun. t anında tankın içinde olan tuzlu sudaki tuz miktarı $x(t)$ olsun. Eğer anlık olarak tankdaki tuzlu su homojen olarak karıştığı varsayılırsa, tanktan çıkan tuzlu sudaki tuz miktarı ton başına $x(t)/A$ olur. Böylece

$$x'(t) = -\alpha x(t)/A \quad (1.1)$$

ifadesi ortaya çıkar. Tuzlu su karışımının homojenliğinin anlık olarak sağlanması mümkün değildir. Böylece t anında tankı terk eden tuzlu suyun konsantrasyonu, daha önceki bir anda, örneğin $t - r$ anındaki ortalama konsantrasyona eşit olacaktır. r pozitif bir sayı olarak varsayılınsın. Bu durumda (1.1) ifadesi

$$x'(t) = -\alpha x(t - r)/A \quad (1.2)$$

şeklinde bir gecikmeli diferansiyel denkleme dönüşür (Driver, 1977). Biyolojik model olarak av-avcı modeli örnek verilebilir. Bir t anında $N(t)$ av popülasyon yoğunluğunu, $P(t)$ ise avcı popülasyon yoğunluğunu temsil etsin. a av popülasyonunun büyüme oranı, c avcı popülasyonunun büyüme oranı, b av-avcı karşılaşmasında av popülasyonunun büyüme oranı ve d av-avcı karşılaşmasında avcı popülasyonunun büyüme oranı olsun. Bu durumda av-avcı modeli

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= aN(t) - bN(t)P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= -cP(t) + dN(t)P(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

olarak yazılır (Volterra, 1926). Av popülasyonunun doğum oranı sınırlıdır, K av popülas-

yonun doygunluk seviyesi olsun. Avcı popülasyonunun doğum oranı, hem av hem de avcı popülasyonundaki değişimlere ancak r zaman gecikmesiyle yanıt verebilmektedir. Böylece sistem,

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= a[1 - N(t)/K]N(t) - bN(t)P(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} &= -cP(t) + dN(t-r)P(t-r)\end{aligned}\quad (1.4)$$

gecikmeli diferansiyel denklem formunda ifade edilebilir (Wangersky ve Cunningham, 1957).

Araştırmacılar çeşitli uygulamalarda sağlam sistemler tasarlamak için gerekli olan, doğal zaman gecikmelerine sahip kontrol sistemlerini modellemek için gecikmeli diferansiyel denklemlerden yararlanmaya başladı (Borri ve ark., 2017; Shakourifar ve Enright, 2011). Smith (1959) tarihinde dinamik sistemler üzerine yaptığı araştırmada, alanın standardı haline gelen pratik çıkarımlar ve metodolojilere öncülük etti (Wu ve ark., 2010; Zhang ve ark., 2012). Ekonomistler, yatırım dinamiklerini ve sermaye birikimini modellemek için gecikmeli diferansiyel denklemlerin değerini keşfederek, daha doğru ekonomik tahminler elde ettiler (Fabbri ve ark., 2008; Keller, 2010).

20. yüzyılın ortalarında, gecikmeli diferansiyel denklemler hem gecikme teriminin hem de türevlerine bağlı terimlerin dahil edilmesiyle önemli bir ilerleme kaydetti. Gecikmeli nötral diferansiyel denklemler olarak adlandırılan bu denklemler, mühendislik ve fizik alanlarında karmaşık sistemlerin daha kapsamlı bir şekilde modellenmesini sağladı (Driver, 1977; Hale, 1977; Norkin ve El'sgol'ts, 1973). Bu alandaki gelişmelere önemli katkılarda bulunan araştırmacılardan bazıları Hale ve Verduyn Lunel'dir. Özellikle, bu araştırmacılar belli şartlar altında gecikmeli nötral diferansiyel denklemlerin çözümlerinin zaman içinde sınırlı ve öngörülebilir olduğunu göstermiştir (Hale ve Lunel, 1993). Zhang (2005) yılında yaptığı çalışmasında, nötral diferansiyel denklemlerde kararlılık analizi için sabit nokta teorisini kullanarak yeni kararlılık kriteri sunmuştur. Raffoul (2004) yılında yaptığı nötral diferansiyel denklemler üzerine yaptığı çalışmasında, gecikme etkileri ve sabit nokta teorisi kullanılarak detaylı bir analiz sunmuştur. Ardjouni ve Djoudi (2011) yılında yayımladıkları çalışmalarında, değişken gecikmeli nötral diferansiyel denklemlerin asimptotik kararlılığını sabit nokta teorisini kullanarak analiz etmişlerdir. Bu çalışma, Zhang (2005) ve Raffoul (2004) yılında yapmış olduğu çalışmalardaki bulguları geliştirmiştir. Wu ve ark. (2008) yılında yayımladıkları çalışmada, nötral stokastik diferansiyel denklemler üzerine kararlılık analizi geliştirmiştir. Luo (2007)

yılında yayımlanan çalışmasında, nötral stokastik gecikmeli diferansiyel denklemlerin kararlılığını analiz etmek amacıyla sabit nokta teorisini kullanmıştır.

Lakshmikantham ve Leela tarafından (1969) yılında yayımlanan kitap, singular gecikmeli diferansiyel denklemler ve özellikle singular nötral gecikmeli diferansiyel denklemlerle ilgili teorik çalışmaları kapsamlı bir şekilde sunmaktadır. Lakshmikantham ve Leela'nın bu eserinde, singular gecikmeli sistemlerin kararlılığı üzerine kapsamlı analizler yapılmıştır. Bu analizler, matematiksel modelleme ihtiyaçlarını daha gerçekçi bir şekilde karşılamak amacıyla kullanılmaktadır. Ma ve ark. (2012) yılında yapmış oldukları çalışmada, singular nötral diferansiyel sistemlerin özdeğerlerini ve kararlılığını inceleyerek, bu tür sistemlerin kararlılığı için cebirsel kriterler sunmuşlardır. Liu ve ark. (2018) yılında yapmış oldukları çalışmada, nötral gecikmeli diferansiyel denklemlerle modellenmiş sistemlerin kararlılık analizi üzerine çalışmıştır. Domoshnitsky ve ark. (2021) yılında yapmış oldukları çalışmada, ikinci dereceden lineer nötral diferansiyel denklemlerin üstel kararlılığını inceleyerek, bu sistemlerin çözümlerinin davranışlarının anlaşılmasına katkıda bulunan yeni kararlılık analizi yöntemleri sunmuştur.

Bu gelişmelere paralel olarak, sinir ağları alanı da ilerleme kaydetti. 20. yüzyılın sonlarında, gecikmeli diferansiyel denklemlere sinir ağlarının entegrasyonu ile gecikmeli nötral sinir ağları ortaya çıkmıştır. Bu modeller, gecikmeleri ve nötral terimleri bir araya getirerek, geçmiş durumların ve türevlerinin önemli olduğu karmaşık sistemler için uygun hale geldi. Hopfield'in (1982) yılındaki çalışması, bu ilerlemelerin temelini atarken, Haykin'in (1998) eserinde toplanmış çalışmaları ise bu modellerin kontrol sistemleri ve telekomünikasyondaki uygulamalarını genişletti.

Literatürde, gecikmeli nötral sinir ağların kararlılığı ve bazı uygulamaları üzerine çeşitli araştırmalar yapılmıştır (Chen ve ark., 2016a; Zheng ve ark., 2016). Cheng ve ark. (2008) yılındaki çalışmasında, doğrusal olmayan varyasyonel eşitsizlikleri kullanarak nötral tipte gecikmeli projeksiyon sinir ağlarının kararlılığına odaklanmıştır. Zhang ve ark. (2010) yılındaki çalışmasında, nötral-tip gecikmeli düğümlere sahip karmaşık ağların gürbüz global üstel senkronizasyonunu incelemiş, Lyapunov fonksiyoneli ve Kronecker çarpımının özellikleri yardımıyla bu ağların kararlılığı için bazı koşullar sunmuştur. Lakshmanan ve ark. (2017) yılındaki çalışmasında, eylemsiz gecikmeli sinir ağlarının global asimptotik kararlılık koşullarını ortaya koymuşlardır.

Kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin geliştirilmesi, diferansiyel denklemler

alanındaki önemli ilerlemelerden biridir. Kesir mertebeden hesaplamaların kökenleri, L'Hôpital'ın Leibniz'e yazdığı 1695 tarihli bir mektuba kadar uzanır (Podlubny, 1999). Ancak, kesirli türevler ve integrallerin tanımları ve özellikleri 19. yüzyılda Liouville, Riemann ve Holmgren gibi matematikçiler tarafından ortaya konulmuştur (Xu, 2017). Bu günlere kadar kesir mertebeden kalkülüs birçok bilimsel çalışmaya konu olmuş ve biyoloji, fizik ve mühendislik gibi alanlarda uygulama alanı bulabildiğinden halen bile popülerliği devam etmektedir (Hale, 1977; Kilbas ve ark., 2006).

20. yüzyılda, kesir mertebeli diferansiyel denklemler bellek ve kalıtsal özelliklere sahip süreçleri modelleme yetenekleri sayesinde çeşitli alanlarda geniş uygulama bulmuştur. Bu süreçler, tam sayı mertebeli diferansiyel denklemlerle yeterince iyi modellenememektedir (Magin, 2004c). Örneğin, fizik alanında önemli bir yer tutan anormal difüzyon süreçlerinin modellenmesinde kesir mertebeli diferansiyel denklemler daha kullanışlıdır. Bu süreçler, karmaşık akışkanlar ve gözenekli ortamlar gibi alanlarda gözlemlenen, yerel olmayan ve geçmişe bağlı davranışlarla karakterize edilir. Metzler ve Klafater'ın (2000) yılında kesir mertebeden brownian hareketi üzerine yaptığı çalışmalar, bu fenomenler hakkında önemli bilgiler sunmuştur.

Kontrol teorisi ve sinyal işleme alanında kesir mertebeli diferansiyel denklemler, uzun menzilli zamansal korelasyonlar ve fraktal özellikler gösteren sistemleri tanımlamak için kullanılmıştır (Atangana ve ark., 2020; Dinh ve ark., 2023). Uygulamalar arasında, stres-gerilme ilişkilerinin kesir mertebeden dinamikler sergilediği viskoelastik malzemelerin modellenmesi ve sinyal işleme görevleri için kesir mertebeden filtrelerin geliştirilmesi bulunmaktadır (Schmidt ve Gaul, 2002). Heymans ve Podlubny (2006) yılındaki çalışmasında visco-elastiklik alanı üzerine bir seri örnek için başlangıç koşullarının Riemann-Liouville kesir mertebeli türevi ile ifade etmenin fiziksel anlamda mümkün olduğunu gösterdi.

Biyoloji alanında da kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin uygulamalarından faydalanılmıştır. Bu denklemler, popülasyon dinamiklerini daha doğru bir şekilde modellemek için kullanılmış, mekansal heterojenlik ve zamansal bellek etkilerini geleneksel modellere kıyasla daha iyi yakalamıştır. Epidemiyolojide, kesir mertebeli diferansiyel denklemler hastalıkların yayılmasını bellek etkileri ile açıklamak için uygulanmış ve enfeksiyon dinamiklerinin tahminlerinde doğruluk sağlanmıştır (Magin, 2004a,b,c).

Kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin davranışlarını incelemek

için kullanılan en etkili yöntemlerden biri Lyapunov'un ikinci metodudur (Altun ve Tunç, 2020; Duarte-Mermoud ve ark., 2015; Korkmaz ve Özdemir, 2019; Liu ve ark., 2016a, 2017, 2016b). Yang ve ark. (2017) yılında impalsa sahip lineer olmayan kesir mertebeli sistemlerin Lyapunov kararlılık analizi üzerine araştırma yapmıştır. Deng ve ark. (2007) yılındaki çalışmasında Laplace dönüşümlerini kullanarak çoklu zaman gecikmeli kesir mertebeli sistemlerin karakteristik denklemini elde etmiştir. Chen ve ark. (2016b) eşitsizlik tekniği yardımıyla bir sonlu zaman aralığı üzerinde kesir mertebeli sinir ağlarının kararlılığı için gecikmeye bağlı iki yeni yeterli koşulu elde etmiştir. Chen ve ark. (2014) yılındaki çalışmada Mittag-Leffler fonksiyonunu, Laplace dönüşümünü ve genelleştirilmiş Gronwall eşitsizliğini kullanarak $\alpha : 1 < \alpha < 2$ için lineer olmayan kesir mertebeli sistemlerin bir sınıfının kararlılığını ve lokal asimptotik kararlılığını veren iki yeni yeterli şartı sunmuştur. Li ve ark. (2015) yılındaki çalışmasında kesir mertebeli sistemlerin karakteristik denklemi ile tamsayı mertebeli sistemlerin karakteristik denklemleri arasındaki ilişkiyi kullanarak bazı yeterli kararlılık koşullarını bulmuştur. Qian ve ark. (2010) yılındaki çalışmasında Riemann-Liouville türevi ile verilen lineer sistemleri, pertürbe edilmiş sistemleri ve zaman-gecikmeli sistemleri kapsayan kesir mertebeli diferansiyel sistemler için kararlılık teoremlerini sunmuştur.

Günümüzde kesir mertebeli diferansiyel denklemler, geçikmeli diferansiyel denklemler ve sinir ağları çalışmaları gelişmeye devam etmektedir. Modellerin güvenilirliğini sağlamak için araştırmacıların kullandığı çeşitli yöntemler arasında kararlılık analizi kritik bir konu olmaya devam etmektedir. Devam eden bu çabalar, gelişmiş matematik araçlarının gerçek dünya problemlerine uygulanmasındaki önemi vurgulamaktadır.

Bu tez çalışmasının odağı, Caputo kesirli türevi ile verilen kesir mertebeli sistemlerin üzerine olmaktan ziyade buna görece olarak daha hakkında çalışma yapılmış olan Riemann-Liouville kesirli türevi ile verilen kesir mertebeli sistemlerin üzerinedir. Bu çalışma, Liu ve ark. (2017) yılındaki çalışmadan esinlenilerek yapılmıştır. Liu ve ark. (2017) yılındaki çalışmada gecikmeler sabit gecikme olmasına karşın, bu çalışmadaki gecikmeler zaman-değişken ve sınırlı değildir. Liu ve ark. (2017) çalışmada elde edilen sonuçları daha kapsamlı hale getirmiştir.

Bu tez çalışmasında; Lineer Matris Eşitsizliği (LME) yardımıyla Lyapunov-Kra-

sovskii yöntemi kullanılarak

$${}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau_1(t)) + C_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)), \quad (1.5)$$

$${}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + B_1f_1(t, x(t)) + B_2f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)), \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} {}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = & Ax(t) + B_1f_1(t, x(t)) + B_2f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\ & + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds, \end{aligned} \quad (1.7)$$

kesirli mertebeden nötral sistemlerin çözümlerinin kararlılığı incelenmiştir. Burada her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t) > 0$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $0 < \alpha < 1$ bir sayı ve ${}_{t_0}D_t^\alpha x(t)$ ifadesi $x(t)$ fonksiyonun α . mertebeden Riemman-Liouville kesirli türevini temsil eder. (1.5) denkleminde geçen $A, B, C \in R^{n \times n}$ matrisleri bilinen sabit matrislerdir. (1.6) denkleminde geçen $A, B_1, B_2, C \in R^{n \times n}$ matrisleri bilinen sabit matrisler, (1.7) denkleminde geçen $A, B_1, B_2, B_3, C \in R^{n \times n}$ matrisleri bilinen sabit matrisler, $j = 1, 2, 3$ için $f_j(t, x)$ vektör-değerli zaman-değişken lineer olmayan fonksiyonları her $t > t_0$ için $f_j(t, 0) = 0$ ve her $(t, x), (t, \hat{x}) \in R \times R^n$ için

$$\|f_j(t, x) - f_j(t, \hat{x})\| \leq a_j \|M_j(x - \hat{x})\|, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.8)$$

Lipschitz şartını sağlar. Burada M_j uygun boyutlu sabit matrisler ve a_j pozitif sayılardır. Sonuç olarak (1.8) eşitsizliği

$$\|f_j(t, x)\| \leq a_j \|M_j x\|, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.9)$$

olarak yazılır.

Ayrıca Lyapunov-Krasovskii yöntemi kullanılarak

$$E_{t_0}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) \quad (1.10)$$

kesirli mertebeden lineer singüler sistemi kesirli mertebeden lineer nötral sisteme çevrilererek (1.10) sisteminin çözümlerinin kararlılığı için yeterli şartlar sunulacaktır. Burada $0 < \alpha < 1$ bir sayı ve ${}_{t_0}D_t^\alpha x(t)$ ifadesi $x(t)$ fonksiyonun α . mertebeden Riemman-Liouville kesirli türevi, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ durum vektörü, $E, A, B \in R^{n \times n}$ bilinen matrisler, $\det(E) = r < n$, $\tau > 0$ sabit gecikmedir.

Bu çalışmanın kalanında; R^n , n -boyutlu Öklid uzayı temsil eder. $R^{n \times n}$, $n \times n$ -tipindeki tüm matrislerin kümesini temsil eder. Öklid uzayın bir x vektörü için $\|x\|$ Öklid normunu ifade eder. Bir A matrisi için $\|A\|$ spektral normu ifade eder. Bir simetrik A matrisi için $A < 0$ (veya $A > 0$) A matrisinin negatif tanımlı (veya pozitif tanımlı) olduğunu ifade eder.



2. MATERİYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1 Temel Kavramlar

x bir vektör olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

başlangıç değer problemi ele alınsın. Burada $t \in I = [0, \infty)$ ve $x \in R^n$ dir. D, R^n de açık bağlantılı bir küme olmak üzere $f(t, x), I \times D$ üzerinde (t, x) göre sürekli olsun. \mathcal{C}, D de kalan (2.1) başlangıç değer probleminin çözümlerinin bir sınıfı olsun.

Tanım 2.1 Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı var öyle ki (2.1) başlangıç değer probleminin herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t; t_0, \bar{x}_0)$ çözümü için $|\bar{x}_0 - x_0| < \delta$ iken $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (2.1) başlangıç değer probleminin bir $x(t)$ çözümüne kararlıdır denir (Lyapunov, 1992).

Tanım 2.2 Eğer çözüm kararlı ve $\delta > 0$ olmak üzere $|\bar{x}_0 - x_0| < \delta$ olduğunda $t \rightarrow \infty$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| \rightarrow 0$ oluyorsa (2.1) başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümüne asimptotik kararlıdır denir (Lyapunov, 1992).

Tanım 2.3 Eğer her bir $\varepsilon > 0$ ve (2.1) başlangıç değer probleminin herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t; t_0, \bar{x}_0)$ çözümü için $t_1 \geq t_0$ ve $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta$ iken $\forall t \geq t_1$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ varsa (2.1) başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümüne düzgün kararlıdır denir (Persidskiy, 1933).

Tanım 2.4 Eğer bu çözüm düzgün kararlı ve bir $\delta_0 > 0$ sayısı var ve her bir $\eta > 0$ için $t_1 \geq t_0$ ve $\|\bar{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta_0$ iken $\forall t \geq t_1 + T$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \eta$ olacak şekilde bir $T = T(\eta) > 0$ varsa (2.1) başlangıç değer probleminin $x(t)$ çözümüne düzgün asimptotik kararlıdır denir (Malkin, 1959).

Teorem 2.1 Ω, R^n de $x = 0$ noktasının açık komşuluğu ve $V : (-\infty, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$V(t, 0) = 0, \quad W_1(|x|) \leq V(t, x) \text{ ve } \dot{V}_{(2.1)}(t, x) \leq 0,$$

ise, o zaman (2.1) sisteminin sıfır çözümü kararlıdır (Burton, 1985).

Teorem 2.2 Ω, R^n de $x = 0$ noktasının açık komşuluğu ve $V : (-\infty, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$W_1(|x|) \leq V(t, x) \leq W_2(|x|) \text{ ve } \dot{V}_{(2.1)}(t, x) \leq 0,$$

ise, o zaman (2.1) sisteminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır (Burton, 1985).

Teorem 2.3 Ω, R^n de $x = 0$ noktasının açık komşuluğu ve $V : (-\infty, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Sınırlı $|x|$ için $f(t, x)$ sınırlı ve

$$V(t, 0) = 0, \quad W_1(|x|) \leq V(t, x) \text{ ve } \dot{V}_{(2.1)}(t, x) \leq -W_3(|x|),$$

ise, o zaman (2.1) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır (Burton, 1985).

Teorem 2.4 Ω, R^n de $x = 0$ noktasının açık komşuluğu ve $V : (-\infty, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$W_1(|x|) \leq V(t, x) \leq W_2(|x|) \text{ ve } \dot{V}_{(2.1)}(t, x) \leq -W_3(|x|),$$

ise, o zaman (2.1) sisteminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Burton, 1985).

Tanım 2.5 Ω, R^n de açık bir küme olmak üzere $V : \Omega \subseteq R^n \rightarrow R, 0 \in \Omega$ olsun. $V(0) = 0$ ve $\forall x \in \Omega, (x \neq 0)$ için,

- i. $V(x) > 0$ ise V fonksiyonuna pozitif tanımlıdır denir.
- ii. $V(x) < 0$ ise V fonksiyonuna negatif tanımlıdır denir.
- iii. $V(x) \geq 0$ ise V fonksiyonuna pozitif yarı tanımlıdır denir.
- iv. $V(x) \leq 0$ ise V fonksiyonuna negatif yarı tanımlıdır denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 2.6 Ω, R^n de sıfır vektörünü içeren bir bölge olsun ayrıca $V : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $t \geq 0$ için $V(t, 0) = 0, V(t, x)$ fonksiyonu pozitif tanımlı ve birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ise bu takdirde V ye bir Lyapunov fonksiyonu adı verilir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 2.7 (2.1) ile verilen başlangıç değer probleminde y' türevi y durum değişkeninin geçmiş verilerine bağlı olabilir. Bu tür modellerin en genel formu olarak $y'(t) = f(t, y_t)$, $t \geq t_0$ gecikmeli diferansiyel denklemi verilir. Burada $y_t = y(t + \theta), \theta \in [-\tau, 0]$ fonksi-

yonu $[-\tau, 0]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonların Banach uzayına ait bir fonksiyondur. $f : \Omega \rightarrow R^n$, $\Omega \subset R \times C$ den R^n ye tanımlı bir fonksiyondur. Böylece (2.1) başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y_t), \\ y_{t_0} = y(t_0 + \theta) = \Phi(\theta), \end{cases} \quad (2.2)$$

olarak yazılır. Bu denklem ayrıca Volterra fonksiyonel diferansiyel denklem olarak da adlandırılır. Burada $\Phi(\theta) \in C$ fonksiyonu başlangıç noktasını veya başlangıç verisini temsil eder (Bellen ve Zennaro, 2003).

Tanım 2.8 (2.2) ile verilen başlangıç değer problemi daha genel olarak

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t - \tau_1), y(t - \tau_2), \dots, y(t - \tau_n)), & t \geq t_0, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

yazılabilir. Burada τ_i sayıları gecikmelerdir. τ_i gecikmeleri sabit olursa, (2.3) başlangıç problemine sabit gecikmeli diferansiyel denklem denir. $\tau_i(t)$ gecikmeleri zamana bağlı değişken olursa, (2.3) başlangıç problemine değişken gecikmeli diferansiyel denklem denir. $\tau_i(t, y(t))$ gecikmeleri hem zamana hem de duruma bağlı değişken olursa, (2.3) başlangıç problemine durum-değişken gecikmeli diferansiyel denklem denir (Bellen ve Zennaro, 2003).

Bazı $t \geq t_0$ için $t - \tau < t_0$ olabileceğinden, (2.1) başlangıç değer problemi ile (2.3) başlangıç değer problemi arasındaki ilk fark ortaya çıkar. Bu fark basit bir y_0 başlangıç noktası yerine $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonunun tanımlanmasının gerekliliğidir. Bir diğer fark ise $y'(t)^+$ türevinin sağ tarafı, yani $f(t, y(t), y(t - \tau))$ fonksiyonu genellikle $\phi'(t)^-$ türevinin sol tarafına eşit değildir. Dolayısıyla y çözümü t_0 noktasında $\phi(t)$ fonksiyonuna düzgün bir şekilde bağlanmaz. Burada sadece C^0 -süreklilik garanti edilmiş olur. Dahası integral aralığı boyunca t_0 başlangıç noktası civarında sıçrama süreksizliğine sahip bir türev meydana gelir. Bunun bir sonucu olarak, $f(t, y, x)$, $\tau(t, y)$ ve $\phi(t)$ fonksiyonları C^∞ -sürekli olsalar dahi, $y(t)$ çözümü $[t, t_f]$ aralığında C^1 -sürekli olur.

Örnek 2.1

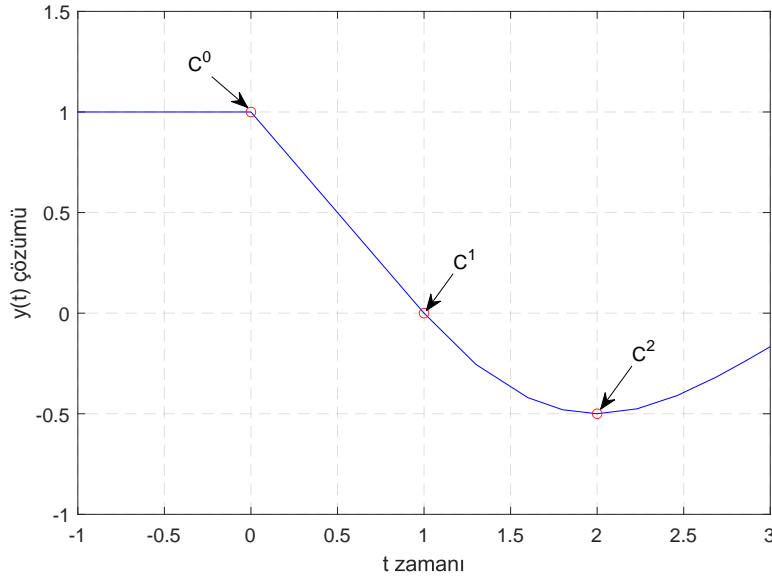
$$\begin{cases} y'(t) = -y(t - 1), & t \geq 0, \\ y(t) = 1, & t \leq 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

denklemini göz önüne alınsın. Dikkat edildiğinde $y'(0)^- = 0$ ve $y'(0)^+ = -y(-1) = -1$ olduğu görülür. Dolayısıyla $y'(t)$ türev fonksiyonun $t = 0$ noktasında bir sıçrama vardır.

İkinci türev de benzer şekilde incelendiğinde

$$y''(t) = -y'(t-1) = -y(t-2),$$

olup $y''(1)^- = 0$ ve $y''(1)^+ = -y(-1) = -1$ olarak elde edilir. Şu halde $t = 1$ noktasında $y''(t)$ ikinci türev bir sıçramaya sahiptir. Bu süreç devam ettirildiğinde gecikmenin katlarında $t = 3, 4, \dots$ sıçramalar mevcuttur.



Şekil 2.1. (2.4) denkleminin $y(t)$ çözümü

(2.3) probleminin bir başlangıç fonksiyonunun çözüm üzerine beklenmedik çeşitli etkileri vardır. Diferansiyel denklemlerin aksine $t \geq t_0$ için $y(t)$ çözümünün kümesi ve başlangıç verisi kümesi arasında birebir eşleme yoktur.

Örnek 2.2

$$y'(t) = y(t-1)(y(t)-1), \quad t \geq 0,$$

denkleminin $\phi(0) = 1$ olacak şekilde $[-1, 0]$ aralığında tanımlı herhangi bir $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonu için $[0, \infty)$ aralığında $y(t) = 1$ sabit bir çözümü vardır.

Şimdi verilecek olan iki örnek, durum gecikmeli denklemlerde regüler olmayan $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonu için (2.3) denkleminin çözümü tek olmamakta veya çözüm var olmamaktadır.

Örnek 2.3

$$\begin{cases} y'(t) = y(t - |y(t)| - 1) + \frac{1}{2}, & t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

denklemini göz önüne alınsın. Burada

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & t < -1, \\ 0, & -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

olarak verilsin. $[0, 2]$ aralığında

$$y(t) = \frac{3}{2}t,$$

ve

$$y(t) = \frac{1}{2}t,$$

fonksiyonları (2.5) denkleminin birer çözümleridir.

Örnek 2.4

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t - 2 - y^2(t)) + 5, & t \geq 0, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

denklemini göz önüne alınsın (Norkin ve El'sgol'ts, 1973). Burada

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{9}{2}, & t < -1, \\ -\frac{1}{2}, & -1 \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

olarak verilsin. $[0, \frac{125}{121}]$ aralığında çözüm

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t - 1), & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{11}{2}(t - 1), & 1 \leq t \leq \frac{125}{121}, \end{cases} \quad (2.9)$$

olarak elde edilir. Dikkat edildiğinde çözüm $t = \frac{125}{121}$ noktasının ötesine sürdürülemez. Aslında $t = \frac{125}{121}$ noktasında $t - 2 - y^2(t)$ ifadesi -1 sayısına eşittir. Böylece $y(t - 2 - y^2(t))$ böyle bir noktanın bir sağ komşuluğunda $\phi(t)$ fonksiyonunun iki değerinden biridir. Dolayısıyla (2.7) denkleminin çözümü

$$y(t) = c \left(t - \frac{125}{121} \right) + \frac{2}{11},$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$c = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t - 2 - y^2(t) < -1, \\ \frac{11}{2}, & t - 2 - y^2(t) \geq -1, \end{cases}$$

olarak tanımlıdır.

Bu durumda her bir c değeri $t - 2 - y^2(t)$ üzerindeki varsayımın dışına çıktığı bir $y(t)$ çözümü elde edilir ve böylece $t > \frac{125}{121}$ için çözüm yoktur. Bu durum nümerik analiz açısından incelendiğinde, çözümün yok olması oldukça hassas bir konu olur. Gerçektende sonuçlar şaşırtıcı olmakla beraber nümerik yöntemlerin uygulanması yanıltıcı davranışa yol açar.

Örneğin $t_N = \frac{125}{121}$ noktasının sağında bir komşuluk ele alındığında $y_N \approx \frac{2}{11}$ olur. Eğer nümerik yöntem olarak

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_{n+1} \left(-\frac{9}{2} + 5\right) & \text{eğer } t_n - 2 - y_n^2 < -1, \\ y_{n+1} &= y_n + h_{n+1} \left(\frac{1}{2} + 5\right) & \text{eğer } t_n - 2 - y_n^2 \geq -1, \end{aligned}$$

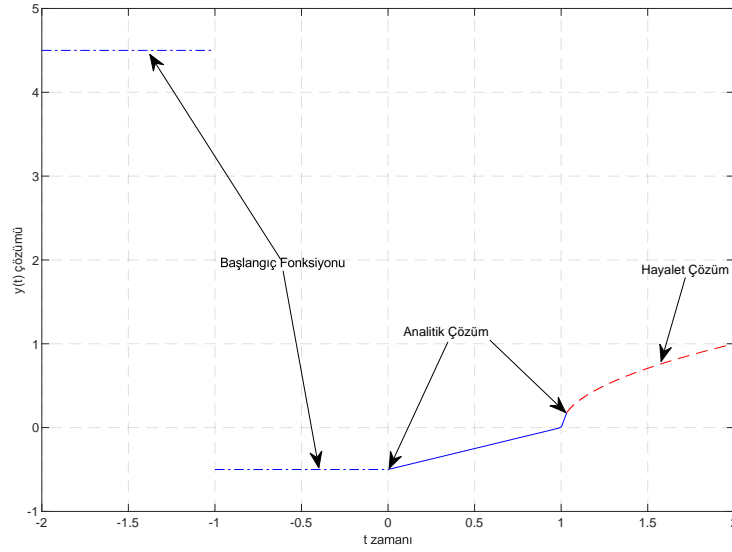
Euler'in ileri metodu seçildiğinde herhangi bir $n \geq N$ için integrasyonu durduran herhangi bir neden yoktur. Bu durumda $t \geq \frac{125}{121}$ için *hayalet çözüm* ortaya çıkar. Bu hayalet çözüm $\sqrt{t-1}$ fonksiyonuna yaklaşır. Bu fonksiyon (2.7) denkleminin çözümü değildir. Fakat bu çözüm $t - 2 - y^2(t) = -1$ denkleminin çözümüdür. Aslında nümerik çözüm $t_n - 2 - y_n^2$ gecikme argümanlarının -1 denge değeri çivarında salınımı yapacak şekilde y_n değerlerini elde etmeye zorlar.

Diğer taraftan nümerik yöntem olarak

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_{n+1} \left(-\frac{9}{2} + 5\right) & \text{eğer } t_{n+1} - 2 - y_{n+1}^2 < -1, \\ y_{n+1} &= y_n + h_{n+1} \left(\frac{1}{2} + 5\right) & \text{eğer } t_{n+1} - 2 - y_{n+1}^2 \geq -1, \end{aligned}$$

Euler'in geri metodu seçildiğinde h_{n+1} adım büyüklüğünün küçük değerleri için y_{n+1} çözümünün olmadığını görmek kolaydır. Bu durum teori ile çelişmediğini gösterir. Fakat genel prosedür durmadan önce kök bulma mekanizmasında çok sayıda reddedilen adımlara neden olabilir.

Tanım 2.9 (2.2) ile verilen başlangıç değer probleminde y' türevi hem y' türevinin geçmiş verilerine hem de y durum değişkeninin geçmiş verilerine bağlı olabilir. Bu tip denklemler



Şekil 2.2. (2.7) denkleminin çözümü ve hayalet çözümü

lere gecikmeli nötral diferansiyel denklem denir.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t - \tau), y'(t - \tau)), & t \geq t_0, \\ y(t) = \phi(t), & t \leq t_0, \end{cases} \quad (2.10)$$

olarak ifade edilir. Burada $\phi(t)$ fonksiyonu en az C^1 -sürekli fonksiyonlar sınıfına ait olması gerekir. Daha önce de bahsedildiği gibi $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonu t_0 noktasında $y(t)$ çözümüne düzgün bağlanmayabilir. Burada sadece süreklilik garanti edilmiştir. Yani çözüm, nötral olmayan durumun aksine sadece C^0 sınıfına ait olur. Böylece

$$\phi'(t_0)^- = f(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau), \phi'(t_0 - \tau)),$$

ekleme koşulu olmadığı sürece, (2.10) denkleminin çözümü "hemen hemen her yerde" genişletirilmiş anlamında kabul edilmelidir (Bellen ve Zennaro, 2003).

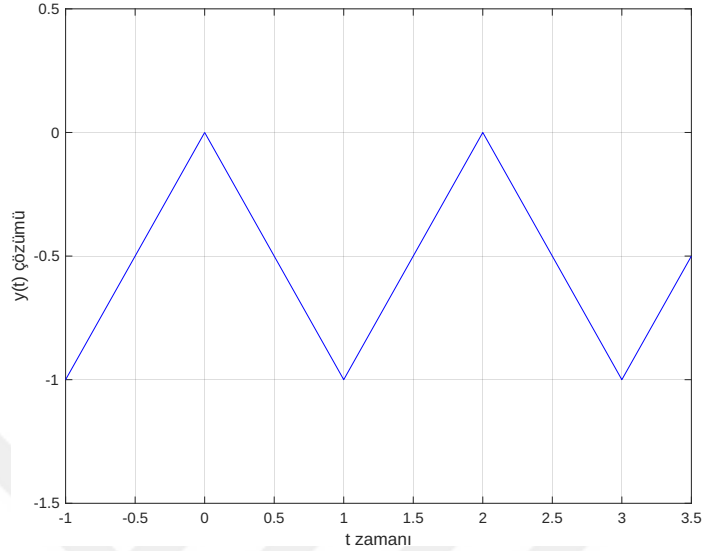
Örnek 2.5

$$\begin{cases} y'(t) = -y'(t - 1), & t \geq 0, \\ y(t) = t, & t \leq 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

denklemini göz önüne alalım.

$y'(0)^- = 1$ ve $y'(0)^+ = -y'(-1) = -1$ olduğundan, $y'(t)$ fonksiyonu $t = 0$ nok-

tasında sıçrama süreksizliğine sahiptir. Hatta her $t \geq 0$ için $y'(t) = -y'(t-1)$ olduğundan, $y'(t)$ fonksiyonu $t = 1$ noktasında ve bu noktanın katları olan $t = 2, 3, \dots$ noktalarında sürekli değildir.



Şekil 2.3. (2.11) denkleminin çözümü

(2.2) ve (2.10) denklemlerindeki gecikmeler $y(t)$ fonksiyonuna bağlı değildir. $t - \tau(t)$ gecikmesi düzgün kesin pozitif olduğu sürece, örneğin sabit τ gecikmesi gibi, çözümlerin varlık ve tekliği problemleri (2.1) adi diferansiyel denkleminin çözümlerinin varlığı ve tekliği problemlerine göre aşılması gereken önemli ek zorluklarla karşılaşılmaz. Buna karşın gecikmeli diferansiyel denklemler, sıradan diferansiyel denklemlere göre daha zengin bir dinamik yapıya sahiptir. Aslında otonom adi diferansiyel denklemlerin sınırlı çözümleri sistemin en az iki bileşeni var iken salınım yapar. Sistemin en az üç bileşeni var iken çözümler kaotik davranırlarken gecikmeli diferansiyel denklemler skaler halde olduklarında bile çözümler salınımlı veya kaotik olabilirler.

Örnek 2.6

$$y'(t) = ay(t)(1 - y(t-1)), \quad (2.12)$$

gecikmeli lojistik denklemi dikkate alınsın. Bu denklem popülasyonların dinamiğini modeller. Ayrıca $y'(t) = ay(t)(1 - y(t))$ Verhulst-Pearl modelini geliştirir (Kuang, 1993). Bu denklemdeki $1 - y(t)$ büyüme faktörü anında harekete geçmek yerine bir zaman gecikmesinden sonra gerçekleşir.

Verhulst-Pearl denkleminin çözümü monotondur. (2.12) denkleminin pozitif çözümü bir $a \in (0, 1/e)$ için monotondur, $a \in [1/e, \pi/2)$ için salınımlı ve $a > \pi/2$ için periyodik bir

Tanım 2.11 R nin $[a, b]$ aralığı verilsin. $f \in L^1([a, b], R)$ fonksiyonunun α . mertebeden kesirli integrali $t \in [a, b]$, $\alpha > 0$ için

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

ile tanımlanır (Podlubny, 1999).

Tanım 2.12 R nin $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı f fonksiyonunun α . mertebeden Caputo kesirli türevi $0 < n - 1 < \alpha \leq n$ olmak üzere $t \in [a, b]$ için

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds = {}_a I_t^{n-\alpha} f^{(n)}(t),$$

ile tanımlanır. Özel olarak $0 < \alpha \leq 1$ ise

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} \dot{f}(s) ds = {}_a I_t^{1-\alpha} \dot{f}(t)$$

olur (Podlubny, 1999).

Tanım 2.13 R nin $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı f fonksiyonunun α . mertebeden Riemman-Liouville kesirli türevi $0 < n - 1 < \alpha \leq n$ olmak üzere $t \in [a, b]$ için

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds,$$

ile tanımlanır. Özel olarak $0 < \alpha \leq 1$ ise

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds,$$

olur (Podlubny, 1999).

Lemma 2.1 Eğer $\alpha > \beta > 0$ ise, o zaman

$${}_{t_0} D_t^\beta ({}_{t_0} D_t^{-\alpha} x(t)) = {}_{t_0} D_t^{\beta-\alpha} x(t), \quad (2.13)$$

eşitliği “yeterince düzgün” $x(t)$ fonksiyonları için sağlanır. Özel olarak $x(t)$ fonksiyonu integrallenebilirse, o zaman bu eşitlik sağlanır (Liu ve ark., 2016b).

Lemma 2.2 $x(t) \in R^n$ fonksiyonu türevlenebilir ise, o zaman her $\alpha \in (0, 1)$ ve her $t \geq t_0$

için

$$\frac{1}{2} D_t^\alpha (x^T(t) P x(t)) \leq x^T(t) P_{t_0} D_t^\alpha x(t), \quad (2.14)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $P \in R^{n \times n}$ simetrik pozitif tanımlı kare matristir (Liu ve ark., 2017).

Lemma 2.3 Herhangi bir pozitif tanımlı $Q > 0$ matrisi, $\beta > 0$ skaleri ve $f(\cdot) : [0, \beta] \rightarrow R^n$ vektör fonksiyonu için

$$\left(\int_0^\beta f(s) ds \right)^T Q \left(\int_0^\beta f(s) ds \right) \leq \beta \left(\int_0^\beta f^T(s) Q f(s) ds \right), \quad (2.15)$$

eşitsizliği sağlanır (Gu, 2000).

Tanım 2.14

$$f(\dot{x}(t), x(t), u(t), t) = 0, \quad (2.16a)$$

$$g(x(t), u(t), y(t), t) = 0, \quad (2.16b)$$

olarak ifade edilen denklem sistemi cebirsel-diferansiyel denklem sistemi olarak adlandırılır. Burada $x(t)$ sistemin durum değişkenini, $u(t)$ kontrol girişini, $y(t)$ ölçüm çıkışını ifade eder. f ve g ise $\dot{x}(t), x(t), u(t), y(t)$ ve t değişkenleri için uygun boyutlu birer vektör fonksiyonlardır. Genellikle (2.16a) ve (2.16b) denklemleri sırasıyla (2.16) sisteminin durum ve çıktı denklemleridir (Dai, 1989).

Tanım 2.15 (2.16) sistemini özel bir hali

$$\begin{aligned} E(t) \dot{x}(t) &= H(x(t), u(t), t), \\ y(t) &= J(x(t), u(t), t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

olarak verilebilir. Burada H ve J fonksiyonları $x(t), u(t)$ ve t değişkenleri için uygun boyutlu birer vektör fonksiyonlarıdır ve $E(t)$ matrisi singüler matristir. Bu durumda (2.17) sistemi singular diferansiyel denklem sistemi olarak adlandırılır (Dai, 1989).

Tanım 2.16 Eğer (2.17) sisteminde H ve J fonksiyonları $x(t)$ ve $u(t)$ değişkenlerine göre

lineer fonksiyon ve $E(t)$ sabit bir matris ise sistem

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (2.18)$$

olarak yazılır. Burada $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$, $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ve $C \in \mathbb{R}^{n \times r}$ sabit matrislerdir. Bu durumda (2.18) sistemi lineer singular diferansiyel denklem sistemi olarak adlandırılır (Dai, 1989).

Tanım 2.17 Eğer $\det(sE - A)$ sıfırdan farklı ise (E, A) çiftine regülerdir denir. Eğer

$$\det(\lambda E - A) = \text{rank}(E),$$

ise (E, A) çiftine impaldan bağımsız olarak adlandırılır (Dai, 1989).

Lemma 2.4 Eğer (E, A) çifti regüler ve impaldan bağımsız ise o zaman, (1.10) sisteminin çözümü var ve $[0, \infty)$ üzerinde tektir (Xu ve ark., 2002).

Tanım 2.18 Verilen bir $\tau > 0$ skaleri için (E, A) çifti regüler ve impaldan bağımsız ise (1.10) sisteminin çözümü regüler ve impaldan bağımsız olarak adlandırılır (Dai, 1989).

Lemma 2.5 Eğer (E, A) çifti regüler ve impaldan bağımsız ise

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad MAN = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

olacak şekilde terslenebilen $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri vardır (Dai, 1989).

Lemma 2.6 Herhangi bir $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, için $2x^T y \leq \varepsilon x^T x + \frac{1}{\varepsilon} y^T y$ eşitsizliği mevcuttur (Ma ve Zhang, 2012).

Lemma 2.7 $U > 0$ ve $V \geq 0$ reel simetrik matrisleri ve μ pozitif sayısı verildiğinde

$$\mu U > V \Leftrightarrow \lambda_{\max}(VU^{-1}) < \mu \Leftrightarrow \lambda_{\max}\left(U^{-\frac{1}{2}}VU^{-\frac{1}{2}}\right) < \mu$$

eşitsizliği vardır (Ma ve Zhang, 2012).

Tanım 2.19 Bir Lineer Matris Eşitsizliğinin (LME) genel formu

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2.20)$$

olarak yazılır. Burada $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T \in R^m$ m değişkenli bir vektör, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in R^{n \times n}$ bilinen simetrik matrislerdir. ”>” eşitsizlik sembolü ise, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ matrisinin pozitif tanımlı olduğunu gösterir. Yani sıfırdan farklı her $\mathbf{u} \in R^n$ vektörü için $\mathbf{u}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{u} > 0$ dır (Ostertag, 2011).

Kısıtlamalara sahip optimizasyon problemlerinin LME olarak ifade edilen iki sınıfı vardır. Bunlarda ilki LME fizibilite problemidir. Bu problem, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0$ LME’yi sağlayan bir $\mathbf{x} \in R^m$ çözümünü var olup olmadığı üzerinedir. Diğer problem ise özdeğer problemidir. Özdeęer problemi LME’nin üzerinde kısıtlama olan değişkenlere bağlı matrisin özdeğerini minimum yapma problemidir. Örneğin

$$\begin{array}{ll} \text{Minimum} & \lambda \\ \text{Kısıtlar} & \lambda I - A(x) > 0 \end{array} \quad (2.21)$$

LME probleminde $A(x)$ matrisinin bir özdeğerini minimum yapma asıl hedeftir. Bu problem genellikle bir $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ lineer fonksiyonunu minimize etme uğrasına eşdeğer olan

$$\begin{array}{ll} \text{Minimum} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{Kısıtlar} & \mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0 \end{array} \quad (2.22)$$

LME formunda kullanılır. Burada $\mathbf{c} \in R^m$ bilinen bir vektördür (Ostertag, 2011).

3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

Teorem 3.1 $\|C\| < 1$ olsun. Her $t > t_0$ için $\tau'_i(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) olsun. Eğer

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12}^T & M_{22} & M_{23} \\ M_{13}^T & M_{23}^T & M_{33} \end{pmatrix} < 0, \quad (3.1)$$

LME sağlayacak şekilde simetrik pozitif tanımlı P, Q, R_1 , ve R_2 matrisleri varsa, o zaman (1.5) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned} M_{11} &= PA + A^T P + Q + A^T (R_1 + mR_2) A, \\ M_{12} &= PB + A^T (R_1 + mR_2) B, \\ M_{13} &= PC + A^T (R_1 + mR_2) C, \\ M_{22} &= B^T (R_1 + mR_2) B - (1 - d_1) Q, \\ M_{23} &= B^T (R_1 + mR_2) C, \\ M_{33} &= C^T (R_1 + mR_2) C - (1 - d_2) R_1, \end{aligned}$$

ile tanımlı ve m bir pozitif sayıdır (Korkmaz ve Özdemir, 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned} V(t) &= {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} (x^T(t) P x(t)) + \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) Q x(s) ds \\ &\quad + \int_{-\tau_2(t)}^0 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s))^T R_1 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s)) ds \\ &\quad + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T R_2 ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds d\theta \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Lemma 2.1 ve Lemma 2.2'den (1.5) sisteminin çözümleri boyunca $V(t)$ fonksiyonun türevi

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= {}_{t_0}D_t^\alpha (x^T(t) P x(t)) + x^T(t) Q x(t) - (1 - \tau'_1(t)) x^T(t - \tau_1(t)) Q x(t - \tau_1(t)) \\ &\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))^T R_1 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t)) \\ &\quad - (1 - \tau'_2(t)) ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T R_1 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))^T R_2 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t)) - \int_{t-m}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T R_2 ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds \\
\leq & 2x^T(t) P_{t_0} D_t^\alpha x(t) + x^T(t) Qx(t) - (1-d_1)x^T(t-\tau_1(t)) Qx(t-\tau_1(t)) \\
& + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))^T R_1 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t)) \\
& - (1-d_2)({}_{t_0}D_t^\alpha x(t-\tau_2(t)))^T R_1 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t-\tau_2(t))) \\
& + m({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))^T R_2 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))
\end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak yazılır. (1.5) denkleminde

$$\begin{aligned}
2x^T(t) P_{t_0} D_t^\alpha x(t) &= 2x^T(t) P [Ax(t) + Bx(t-\tau_1(t)) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t-\tau_2(t))] \\
&= x^T(t) (PA + A^T P) x(t) + 2x^T(t) PBx(t-\tau_1(t)) \\
&\quad + 2x^T(t) PC_{t_0} D_t^\alpha x(t-\tau_2(t))
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ve

$$\begin{aligned}
& ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))^T R_1 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t)) + m({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))^T R_2 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t)) \\
&= [Ax(t) + Bx(t-\tau_1(t)) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t-\tau_2(t))]^T (R_1 + mR_2) \\
&\quad \times [Ax(t) + Bx(t-\tau_1(t)) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t-\tau_2(t))] \\
&= x^T(t) A^T (R_1 + mR_2) Ax(t) + x^T(t) A^T (R_1 + mR_2) Bx(t-\tau_1(t)) \\
&\quad + x^T(t) A^T (R_1 + mR_2) C_{t_0} D_t^\alpha x(t-\tau_2(t)) \\
&\quad + x^T(t-\tau_1(t)) B^T (R_1 + mR_2) Ax(t) \\
&\quad + x^T(t-\tau_1(t)) B^T (R_1 + mR_2) Bx(t-\tau_1(t)) \\
&\quad + x^T(t-\tau_1(t)) B^T (R_1 + mR_2) C_{t_0} D_t^\alpha x(t-\tau_2(t)) \\
&\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t-\tau_2(t)))^T C^T (R_1 + mR_2) Ax(t) \\
&\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t-\tau_2(t)))^T C^T (R_1 + mR_2) Bx(t-\tau_1(t)) \\
&\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t-\tau_2(t)))^T C^T (R_1 + mR_2) C_{t_0} D_t^\alpha x(t-\tau_2(t))
\end{aligned} \tag{3.4}$$

olarak elde edilir. (3.2), (3.3) ve (3.4) ifadelerinden

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T M \xi$$

olduğu görülür. Burada

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12}^T & M_{22} & M_{23} \\ M_{13}^T & M_{23}^T & M_{33} \end{pmatrix},$$

$$M_{11} = PA + A^T P + Q + A^T (R_1 + mR_2)A,$$

$$M_{12} = PB + A^T (R_1 + mR_2)B,$$

$$M_{13} = PC + A^T (R_1 + mR_2)C,$$

$$M_{22} = B^T (R_1 + mR_2)B - (1 - d_1)Q,$$

$$M_{23} = B^T (R_1 + mR_2)C,$$

$$M_{33} = C^T (R_1 + mR_2)C - (1 - d_2)R_1,$$

$$\xi = \left(x^T(t), x^T(t - \tau_1(t)), ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T \right)^T.$$

(2.18) eşitsizliğinden $\dot{V}(t)$ negatif tanımlıdır. Böylece (1.5) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. \square

Teorem 3.2 $\|C\| < 1$ olsun. Her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) olsun. Eğer

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{12}^T & N_{22} & N_{23} \\ N_{13}^T & N_{23}^T & N_{33} \end{pmatrix} < 0, \quad (3.5)$$

LME sağlayacak şekilde simetrik pozitif tanımlı P, Q_1, Q_2 ve R matrisleri varsa, o zaman (1.5) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$N_{11} = PA + A^T P + Q_1 + Q_2 + mA^T RA,$$

$$N_{12} = PB + mA^T RB,$$

$$N_{13} = -A^T PC,$$

$$N_{22} = mB^T RB - (1 - d_1)Q_1,$$

$$N_{23} = -B^T PC,$$

$$N_{33} = -(1 - d_2)Q_2,$$

ile tanımlı ve m bir pozitif sayıdır (Korkmaz ve Özdemir, 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
V(t) = & {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} \left((x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \right) \\
& + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^{\alpha} (x(s) - Cx(s - \tau_2(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^{\alpha} (x(s) - Cx(s - \tau_2(s)))) ds d\theta \\
& + \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s) Q_2 x(s) ds
\end{aligned} \tag{3.6}$$

ile tanımlansın. Lemma 2.1 ve Lemma 2.2'den (1.5) sisteminin çözümleri boyunca $V(t)$ fonksiyonun türevi

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) = & {}_{t_0}D_t^{\alpha} \left((x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \right) \\
& + x^T(t) Q_1 x(t) - (1 - \tau_1'(t)) x^T(t - \tau_1(t)) Q_1 x(t - \tau_1(t)) \\
& + x^T(t) Q_2 x(t) - (1 - \tau_2'(t)) x^T(t - \tau_2(t)) Q_2 x(t - \tau_2(t)) \\
& + m ({}_{t_0}D_t^{\alpha} (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))))^T R ({}_{t_0}D_t^{\alpha} (x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))) \\
& - \int_{t-m}^t ({}_{t_0}D_s^{\alpha} (x(s) - Cx(s - \tau_2(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^{\alpha} (x(s) - Cx(s - \tau_2(s)))) ds \\
\leq & 2(x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P {}_{t_0}D_t^{\alpha} (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \\
& + x^T(t) Q_1 x(t) - (1 - d_1) x^T(t - \tau_1(t)) Q_1 x(t - \tau_1(t)) \\
& + x^T(t) Q_2 x(t) - (1 - d_2) x^T(t - \tau_2(t)) Q_2 x(t - \tau_2(t)) \\
& + m ({}_{t_0}D_t^{\alpha} (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))))^T R ({}_{t_0}D_t^{\alpha} (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))))
\end{aligned} \tag{3.7}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
& 2(x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P {}_{t_0}D_t^{\alpha} (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \\
& = 2(x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P (Ax(t) + Bx(t - \tau_1(t))) \\
& = x^T(t) (PA + A^T P) x(t) - 2x^T(t - \tau_2(t)) C^T P Ax(t) \\
& \quad + 2x^T(t) PBx(t - \tau_1(t)) - 2x^T(t - \tau_2(t)) C^T PBx(t - \tau_1(t))
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
& m ({}_{t_0}D_t^{\alpha} (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))))^T R ({}_{t_0}D_t^{\alpha} (x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))) \\
& = m [Ax(t) + Bx(t - \tau_1(t))]^T R [Ax(t) + Bx(t - \tau_1(t))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= mx^T(t)A^T RAx(t) + mx^T(t)A^T RBx(t - \tau_1(t)) + mx^T(t - \tau_1(t))B^T RAx(t) \\
&\quad + mx^T(t - \tau_1(t))B^T RBx(t - \tau_1(t))
\end{aligned} \tag{3.9}$$

olduğu görülür. (3.7), (3.8) ve (3.9) ifadelerinden

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T N \xi$$

eşitliliğinin sağlandığı görülür. Burada

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{12}^T & N_{22} & N_{23} \\ N_{13}^T & N_{23}^T & N_{33} \end{pmatrix},$$

$$N_{11} = PA + A^T P + Q_1 + Q_2 + mA^T RA,$$

$$N_{12} = PB + mA^T RB,$$

$$N_{13} = -A^T PC,$$

$$N_{22} = mB^T RB - (1 - d_1) Q_1,$$

$$N_{23} = -B^T PC,$$

$$N_{33} = -(1 - d_2) Q_2,$$

$$\xi = (x^T(t), x^T(t - \tau_1(t)), x^T(t - \tau_2(t)))^T.$$

(3.5) eşitsizliğinden $\dot{V}(t)$ negatif tanımlıdır. Böylece (1.5) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. \square

Örnek 3.1 (1.5) ile verilen kesirli mertebeli nötral sistemin için

$$\tau_1(t) = 0.7t, \quad \tau_2(t) = 6 + 0.4\sin(t),$$

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

alınsın. $d_1 = 0.75$, $d_2 = 0.5$ ve $m = 6.5$,

$$P = \begin{bmatrix} 272.6339 & 0 \\ 0 & 272.6339 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 607.2883 & 0 \\ 0 & 607.2883 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 30.0517 & 0 \\ 0 & 30.0517 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 2.0625 & 0 \\ 0 & 2.0625 \end{bmatrix}$$

olarak seçildiğinde

$$M = \begin{pmatrix} -499.5947 & -323.8912 & -48.5837 & -32.3891 & -32.3891 & 0 \\ -323.8912 & -926.0005 & 26.0748 & 18.5718 & 17.3832 & 1.1886 \\ -48.5837 & 26.0748 & -147.9109 & 2.6075 & 2.6075 & 0 \\ -32.3891 & 18.5718 & 2.6075 & -149.6492 & 1.7383 & 0.4346 \\ -32.3891 & 17.3832 & 2.6075 & 1.7383 & -13.2875 & 0 \\ 0 & 1.1886 & 0 & 0.4346 & 0 & -14.5913 \end{pmatrix} < 0$$

ifadesi elde edilir. Teorem 3.1 gereğince (1.5) sisteminin sıfır çözümü asimptotik karardır.

Örnek 3.2 (1.5) ile verilen kesirli mertebeli nötral sistemin için

$$\tau_1(t) = 0.6t, \quad \tau_2(t) = 4 + 0.2\sin(t),$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. $d_1 = 0.65$, $d_2 = 0.3$ ve $m = 5$,

$$P = \begin{bmatrix} 0.6183 & 0 \\ 0 & 0.6183 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0.5014 & 0 \\ 0 & 0.5014 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.8418 & 0 \\ 0 & 0.8418 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.0295 & 0 \\ 0 & 0.0295 \end{bmatrix}$$

değerleri için

$$N = \begin{pmatrix} -1.1523 & -0.1192 & -0.0596 & -0.0238 & 0.3092 & 0 \\ -0.1192 & -0.8916 & 0.0737 & 0.1174 & -0.0618 & 0.3710 \\ -0.0596 & 0.0737 & -0.1386 & 0.0147 & -0.0309 & 0 \\ -0.0238 & 0.1174 & 0.0147 & -0.1327 & -0.0124 & -0.0618 \\ 0.3092 & -0.0618 & -0.0309 & -0.0124 & -0.5893 & 0 \\ 0 & 0.3710 & 0 & -0.0618 & 0 & -0.5893 \end{pmatrix} < 0$$

elde edilir. Teorem 3.2 gereğince (1.5) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.3 $\|C\| < 1$ olsun. Her $t > t_0$ için $\tau'_i(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) olsun. Eğer

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13}^T & K_{23}^T & K_{33} & K_{34} \\ K_{14}^T & K_{24}^T & K_{34}^T & K_{44} \end{pmatrix} < 0, \quad (3.10)$$

LME sağlayacak şekilde simetrik pozitif tanımlı P, R ve S matrisleri varsa, o zaman (1.6) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$K_{11} = A^T P + PA + A^T (R + mS) A + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2,$$

$$K_{12} = PB_1 + A^T (R + mS) B_1,$$

$$K_{13} = PB_2 + A^T (R + mS) B_2,$$

$$K_{14} = PC + A^T (R + mS) C,$$

$$K_{22} = B_1^T (R + mS) B_1 - I,$$

$$K_{23} = B_1^T (R + mS) B_2,$$

$$K_{24} = B_1^T (R + mS) C,$$

$$K_{33} = B_2^T (R + mS) B_2 - (1 - d_1) I,$$

$$K_{34} = B_2^T (R + mS) C,$$

$$K_{44} = C^T (R + mS) C - (1 - d_2) R,$$

ile tanımlı ve m bir pozitif sayı ve I birim matristir (Korkmaz ve Özdemir, 2023).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$V(t) = {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} (x^T(t)Px(t)) + \int_{-\tau_2(t)}^0 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s)) ds \\ + a_2^2 \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) M_2^T M_2 x(s) ds + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T S ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds d\theta$$

olsun. P, R ve S matrisleri pozitif tanımlı simetrik matrisler olduğundan, $V(t)$ fonksiyonu pozitif tanımlıdır. Lemma 2.1 ve Lemma 2.2'den (1.6) sisteminin çözümleri boyunca $V(t)$ fonksiyonun türevi

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= {}_{t_0}D_t^\alpha (x^T(t)Px(t)) + a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) - a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) \\ &\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t)) - (1 - \tau_2'(t)) ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))) \\ &\quad + a_2^2 x^T(t) M_2^T M_2 x(t) - (1 - \tau_1'(t)) a_2^2 x^T(t - \tau_1(t)) M_2^T M_2 x(t - \tau_1(t)) \\ &\quad + m ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))^T S ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t)) - \int_{t-m}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T S ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds \\ &\leq 2x^T(t) P D_t^\alpha x(t) + a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) + a_2^2 x^T(t) M_2^T M_2 x(t) \\ &\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))^T (R + mS) ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t)) \\ &\quad - (1 - d_1) f_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) I f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\ &\quad - f_1^T(t, x(t)) I f_1(t, x(t)) - (1 - d_2) ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))) \\ &= 2x^T(t) P [Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))] \\ &\quad + [Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))]^T \\ &\quad \times (R + mS) [Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))] \\ &\quad + a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) + a_2^2 x^T(t) M_2^T M_2 x(t) - f_1^T(t, x(t)) I f_1(t, x(t)) \\ &\quad - (1 - d_1) f_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) I f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\ &\quad - (1 - d_2) ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))) \\ &= x^T(t) (A^T P + PA + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2 + A^T (R + mS) A) x(t) \\ &\quad + 2x^T(t) P B_1 f_1(t, x(t)) \\ &\quad + 2x^T(t) P B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + 2x^T(t) P C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\ &\quad + x^T(t) A^T (R + mS) B_1 f_1(t, x(t)) + x^T(t) A^T (R + mS) B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\ &\quad + x^T(t) A^T (R + mS) C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) + (f_1(t, x(t)))^T B_1^T (R + mS) A x(t) \\ &\quad + (f_1(t, x(t)))^T B_1^T (R + mS) B_1 f_1(t, x(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (f_1(t, x(t)))^T B_1^T (R + mS) B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
& + (f_1(t, x(t)))^T B_1^T (R + mS) C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\
& + (f_2(t, x(t - \tau_1(t))))^T B_2^T (R + mS) A x(t) \\
& + (f_2(t, x(t - \tau_1(t))))^T B_2^T (R + mS) B_1 f_1(t, x(t)) \\
& + (f_2(t, x(t - \tau_1(t))))^T B_2^T (R + mS) B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
& + (f_2(t, x(t - \tau_1(t))))^T B_2^T (R + mS) C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\
& + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T C^T (R + mS) A x(t) \\
& + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T C^T (R + mS) B_1 f_1(t, x(t)) \\
& + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T C^T (R + mS) B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
& + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T C^T (R + mS) C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\
& - f_1^T(t, x(t)) I f_1(t, x(t)) - (1 - d_1) f_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) I f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
& - (1 - d_2) ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))
\end{aligned}$$

biçiminde olur. Dolayısıyla

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T K \xi$$

olduğu görülür. Burada

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13}^T & K_{23}^T & K_{33} & K_{34} \\ K_{14}^T & K_{24}^T & K_{34}^T & K_{44} \end{pmatrix},$$

$$K_{11} = A^T P + P A + A^T (R + mS) A + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2,$$

$$K_{12} = P B_1 + A^T (R + mS) B_1,$$

$$K_{13} = P B_2 + A^T (R + mS) B_2,$$

$$K_{14} = P C + A^T (R + mS) C,$$

$$K_{22} = B_1^T (R + mS) B_1 - I,$$

$$K_{23} = B_1^T (R + mS) B_2,$$

$$K_{24} = B_1^T (R + mS) C,$$

$$K_{33} = B_2^T (R + mS) B_2 - (1 - d_1) I,$$

$$K_{34} = B_2^T (R + mS) C,$$

$$K_{44} = C^T (R + mS) C - (1 - d_2) R,$$

$$\xi = \left(x^T(t), f_1^T(t, x(t)), f_2^T(t, -x^T(t - \tau_1(t))), {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))^T \right)^T.$$

(3.10) eşitsizliğinden $\dot{V}(t)$ negatif tanımlıdır. Böylece (1.6) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. \square

Teorem 3.4 $\|C\| < 1$ olsun. Her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) olsun. Eğer

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{12}^T & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{13}^T & L_{23}^T & L_{33} & L_{34} \\ L_{14}^T & L_{24}^T & L_{34}^T & L_{44} \end{pmatrix} < 0, \quad (3.11)$$

LME sağlayacak şekilde simetrik pozitif tanımlı P, Q ve R matrisleri varsa, o zaman (1.6) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$L_{11} = PA + A^T P + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2 + Q + mA^T RA,$$

$$L_{12} = -A^T PC,$$

$$L_{13} = PB_1 + mA^T RB_1,$$

$$L_{14} = PB_2 + mA^T RB_2,$$

$$L_{22} = -(1 - d_2) Q,$$

$$L_{23} = -C^T PB_1,$$

$$L_{24} = -C^T PB_2,$$

$$L_{33} = mB_1^T RB_1 - I,$$

$$L_{34} = mB_1^T RB_2,$$

$$L_{44} = mB_2^T RB_2 - (1 - d_1) I,$$

ile tanımlı ve m bir pozitif sayı ve I birim matristir (Korkmaz ve Özdemir, 2023).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$V(t) = {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} \left((t, x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P (t, x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + a_2^2 \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) M_2^T M_2 x(s) ds + \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s) Q x(s) ds \\
& + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha(t, x(s) - Cx(s - \tau_2(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^\alpha(t, x(s) - Cx(s - \tau_2(s)))) ds d\theta.
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. P, Q ve R matrisleri pozitif tanımlı simetrik matrisler olduğundan, $V(t)$ fonksiyonu pozitif tanımlıdır. Lemma 1.5 ve Lemma 2.2'den (1.6) sisteminin çözümleri boyunca $V(t)$ fonksiyonun türevi

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &= {}_{t_0}D_t^\alpha \left((t, x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P (t, x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \right) \\
& + a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) - a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) + a_2^2 x^T(t) M_2^T M_2 x(t) \\
& - (1 - \tau_1'(t)) a_2^2 x^T(t - \tau_1(t)) M_2^T M_2 x(t - \tau_1(t)) \\
& + x^T(t) Q x(t) - (1 - \tau_2'(t)) x^T(t - \tau_2(t)) Q x(t - \tau_2(t)) \\
& + m ({}_{t_0}D_t^\alpha(t, x(t) - Cx(t - \tau_2(t))))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha(t, x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))) \\
& - \int_{t-m}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha(t, x(s) - Cx(s - \tau_2(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^\alpha(t, x(s) - Cx(s - \tau_2(s)))) ds \\
& \leq 2(x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P_0 D_t^\alpha(x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \\
& + a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) + a_2^2 x^T(t) M_2^T M_2 x(t) + x^T(t) Q x(t) \\
& + m ({}_{t_0}D_t^\alpha(t, x(t) - Cx(t - \tau_2(t))))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha(t, x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))) \\
& - f_1^T(t, x(t)) I f_1(t, x(t)) - (1 - d_1) f_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) I f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
& - (1 - d_2) x^T(t - \tau_2(t)) Q x(t - \tau_2(t)) \\
& = 2(x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P [Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t)))] \\
& + a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) + m [Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t)))]^T R \\
& \times [Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t)))] \\
& + x^T(t) M_2^T M_2 x(t) + a_2^2 x^T(t) Q x(t) - f_1^T(t, x(t)) I f_1(t, x(t)) \\
& - (1 - d_1) f_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) I f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
& - (1 - d_2) x^T(t - \tau_2(t)) Q x(t - \tau_2(t)) \\
& = x^T(t) (PA + A^T P + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2 + mA^T R A + Q) x(t) \\
& - 2x^T(t - \tau_2(t)) C^T P A x(t) + 2x^T(t) P B_1 f_1(t, x(t)) \\
& - 2x^T(t - \tau_2(t)) C^T P B_1 f_1(t, x(t)) + 2x^T(t) P B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
& - 2x^T(t - \tau_2(t)) C^T P B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
& + mx^T(t) A^T R B_1 f_1(t, x(t)) + mx^T(t) A^T R B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + mf_1^T(t, x(t)) B_1^T R A x(t) + mf_1^T(t, x(t)) B_1^T R B_1 f_1(t, x(t)) \\
& + mf_1^T(t, x(t)) B_1^T R B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + mf_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) B_2^T R A x(t) \\
& + mf_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) B_2^T R B_1 f_1(t, x(t)) \\
& + mf_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) B_2^T R B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) - f_1^T(t, x(t)) I f_1(t, x(t)) \\
& - (1 - d_1) f_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) I f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
& - (1 - d_2) x^T(t - \tau_2(t)) Q x(t - \tau_2(t))
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T L \xi,$$

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{12}^T & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{13}^T & L_{23}^T & L_{33} & L_{34} \\ L_{14}^T & L_{24}^T & L_{34}^T & L_{44} \end{pmatrix},$$

$$L_{11} = PA + A^T P + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2 + Q + mA^T RA,$$

$$L_{12} = -A^T PC,$$

$$L_{13} = PB_1 + mA^T RB_1,$$

$$L_{14} = PB_2 + mA^T RB_2,$$

$$L_{22} = -(1 - d_2) Q,$$

$$L_{23} = -C^T PB_1,$$

$$L_{24} = -C^T PB_2,$$

$$L_{33} = mB_1^T RB_1 - I,$$

$$L_{34} = mB_1^T RB_2,$$

$$L_{44} = mB_2^T RB_2 - (1 - d_1) I,$$

$$\xi = (x^T(t), x^T(t - \tau_2(t)), f_1^T(t, x(t)), f_2^T(t, x^T(t - \tau_1(t))))^T.$$

(3.11) eşitsizliğinden $\dot{V}(t)$ negatif tanımlıdır. Böylece (1.6) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. \square

Şimdi Teorem 3.3 ve Teorem 3.4'un sonuçları olan (1.6) sisteminin bazı varyas-

yonları için kararlılık teoremleri bir optimizasyon problemi olarak verilerek teoremlerin etkinliğini incelemek için bir örnek verilsin.

Sonuç 3.1 $\|C\| < 1$ olsun. Her $t > t_0$ için $\tau'_i(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum} & \quad -a_1^2 (\text{veya } -a_2^2) \\ \text{Kısıtlar} & \quad P > 0, R > 0, S > 0, K < 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü olabilecek şekilde simetrik pozitif tanımlı P, R ve S matrisleri varsa, o zaman (1.6) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sistemin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada K matrisi (3.10) ile tanımlı, m bir pozitif sayı ve I birim matristir (Korkmaz ve Özdemir, 2023).

Sonuç 3.2 $\|C\| < 1$ olsun. Her $t > t_0$ için $\tau'_i(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum} & \quad -a_1^2 (\text{veya } -a_2^2) \\ \text{Kısıtlar} & \quad P > 0, Q > 0, R > 0, L < 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde simetrik pozitif tanımlı P, Q ve R matrisleri varsa, o zaman (1.6) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sistemin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada L matrisi (3.11) ile tanımlı, m bir pozitif sayı ve I birim matristir (Korkmaz ve Özdemir, 2023).

Eğer (1.6) sisteminde $f_2(t, x(t - \tau_1(t))) = x(t - \tau_1(t))$ şeklinde tanımlanırsa bu sistem

$${}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + B_1 f(t, x(t)) + B_2 x(t - \tau_1(t)) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)), \quad (3.14)$$

olarak yazılır. Burada $0 < \alpha < 1$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ durum vektörü, $A, B_1, B_2, C \in R^{n \times n}$ bilinen matrisler, her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t) > 0$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $f(t, x)$ fonksiyonu her $t > t_0$ için $f(t, 0) = 0$ ile $(t, x) \in R \times R^n$ için

$$\|f(t, x)\| \leq a \|Mx\|$$

Lipschitz şartını sağlayan vektör değerli lineer olmayan bir fonksiyondur. Lipschitz şartındaki M uygun boyutlu sabit bir matris ve a pozitif bir sayıdır.

Sonuç 3.3 $\|C\| < 1$ olsun. Her $t > t_0$ için $\tau'_i(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) olsun. Eğer

$$\begin{array}{l} \text{Minimum} \quad -a^2 \\ \text{Kısıtlar} \quad \left\{ \begin{array}{l} P > 0, Q > 0, R > 0, S > 0 \\ K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13}^T & K_{23}^T & K_{33} & K_{34} \\ K_{14}^T & K_{24}^T & K_{34}^T & K_{44} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \end{array} \quad (3.15)$$

ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü olabilecek şekilde simetrik pozitif tanımlı P, Q, R ve S matrisleri varsa, o zaman (3.14) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$K_{11} = A^T P + PA + A^T (R + mS) A + Q + a^2 M^T M,$$

$$K_{12} = PB_1 + A^T (R + mS) B_1,$$

$$K_{13} = PB_2 + A^T (R + mS) B_2,$$

$$K_{14} = PC + A^T (R + mS) C,$$

$$K_{22} = B_1^T (R + mS) B_1 - I,$$

$$K_{23} = B_1^T (R + mS) B_2,$$

$$K_{24} = B_1^T (R + mS) C,$$

$$K_{33} = B_2^T (R + mS) B_2 - (1 - d_1) Q,$$

$$K_{34} = B_2^T (R + mS) C,$$

$$K_{44} = C^T (R + mS) C - (1 - d_2) R,$$

m bir pozitif sayı ve I birim matristir (Korkmaz ve Özdemir, 2023).

Sonuç 3.4 $\|C\| < 1$ olsun. Her $t > t_0$ için $\tau'_i(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) olsun. Eğer

$$\begin{array}{l} \text{Minimum} \quad -a^2 \\ \text{Kısıtlar} \quad \left\{ \begin{array}{l} P > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, R > 0 \\ L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{12}^T & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{13}^T & L_{23}^T & L_{33} & L_{34} \\ L_{14}^T & L_{24}^T & L_{34}^T & L_{44} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \end{array} \quad (3.16)$$

ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde simetrik pozitif tanımlı P, Q_1, Q_2 ve R matrisleri varsa, o zaman (3.14) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned} L_{11} &= PA + A^T P + a^2 M^T M + Q_1 + Q_2 + mA^T RA, \\ L_{12} &= -A^T PC, \\ L_{13} &= PB_1 + mA^T RB_1, \\ L_{14} &= PB_2 + mA^T RB_2, \\ L_{22} &= -(1 - d_2) Q_2, \\ L_{23} &= -C^T PB_1, \\ L_{24} &= -C^T PB_2, \\ L_{33} &= mB_1^T RB_1 - I, \\ L_{34} &= mB_1^T RB_2, \\ L_{44} &= mB_2^T RB_2 - (1 - d_1) Q_1, \end{aligned}$$

m bir pozitif sayı ve I birim matristir (Korkmaz ve Özdemir, 2023).

Eğer (1.6) sisteminde $B_2 = 0$ olarak alınırsa bu sistem

$${}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bf(t, x(t)) + C_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau(t)), \quad (3.17)$$

olur. Burada $0 < \alpha < 1$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ durum vektörü, $A, B, C \in R^{n \times n}$ bilinen matrisler, her $t > t_0$ için $\tau(t) > 0$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon, $f(t, x)$ fonksiyonu

her $t > t_0$ için $f(t, 0) = 0$ ile $(t, x) \in R \times R^n$ için

$$\|f(t, x)\| \leq a\|Mx\|$$

Lipschitz şartını sağlayan vektör değerli lineer olmayan bir fonksiyondur. Lipschitz şartındaki M uygun boyutlu sabit bir matris ve a pozitif bir sayıdır.

Sonuç 3.5 $\|C\| < 1$ olsun. Her $t > t_0$ için $\tau'(t) \leq d < 1$, olsun. Eğer

$$\begin{array}{l} \text{Minimum} \quad -a^2 \\ \text{Kısıtlar} \quad \left\{ \begin{array}{l} P > 0, R > 0, S > 0 \\ K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} \\ K_{13}^T & K_{23}^T & K_{33} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \end{array} \quad (3.18)$$

ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü olabilecek şekilde simetrik pozitif tanımlı P, R ve S matrisleri varsa, o zaman (3.17) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned} K_{11} &= A^T P + PA + A^T (R + mS)A + a^2 M^T M, \\ K_{12} &= PB + A^T (R + mS)B, \\ K_{13} &= PC + A^T (R + mS)C, \\ K_{22} &= B^T (R + mS)B - I, \\ K_{23} &= B^T (R + mS)C, \\ K_{33} &= C^T (R + mS)C - (1 - d)R, \end{aligned}$$

m bir pozitif sayı ve I birim matristir (Korkmaz ve Özdemir, 2023).

Sonuç 3.6 $\|C\| < 1$ olsun. Her $t > t_0$ için $\tau'(t) \leq d < 1$, olsun. Eğer

$$\begin{array}{l} \text{Minimum} \quad -a^2 \\ \text{Kısıtlar} \quad \left\{ \begin{array}{l} P > 0, Q > 0, R > 0 \\ L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12}^T & L_{22} & L_{23} \\ L_{13}^T & L_{23}^T & L_{33} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \end{array} \quad (3.19)$$

ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde simetrik pozitif tanımlı P, Q ve R matrisleri varsa, o zaman (3.17) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned} L_{11} &= A^T P + PA + Q + mA^T RA + a^2 M^T M, \\ L_{12} &= -A^T PC, \\ L_{13} &= PB + mA^T RB, \\ L_{22} &= -(1-d)Q, \\ L_{23} &= -C^T PB, \\ L_{33} &= mB^T RB - I, \end{aligned}$$

m bir pozitif sayı ve I birim matristir (Korkmaz ve Özdemir, 2023).

Eğer (1.6) sisteminde $B_1 = 0$ için

$${}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bf(t, x(t - \tau_1(t))) + C_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)), \quad (3.20)$$

olur. Burada $0 < \alpha < 1$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ durum vektörü, $A, B, C \in R^{n \times n}$ bilinen matrisler, her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t) > 0$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $f(t, x)$ fonksiyonu her $t > t_0$ için $f(t, 0) = 0$ ile $(t, x) \in R \times R^n$ için

$$\|f(t, x)\| \leq a\|Mx\|$$

Lipschitz şartını sağlayan vektör değerli lineer olmayan bir fonksiyondur. Lipschitz şartındaki M uygun boyutlu sabit bir matris ve a pozitif bir sayıdır.

Sonuç 3.7 $\|C\| < 1$ olsun. Her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) olsun. Eğer

$$\begin{array}{l} \text{Minimum} \quad -a^2 \\ \text{Kısıtlar} \quad \left\{ \begin{array}{l} P > 0, R > 0, S > 0 \\ K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} \\ K_{13}^T & K_{23}^T & K_{33} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \end{array} \quad (3.21)$$

ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü olabilecek şekilde simetrik pozitif

tanımlı P, R ve S matrisleri varsa, o zaman (3.20) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned} K_{11} &= A^T P + PA + A^T (R + mS)A + a^2 M^T M, \\ K_{12} &= PB + A^T (R + mS)B, \\ K_{13} &= PC + A^T (R + mS)C, \\ K_{22} &= B^T (R + mS)B - (1 - d_1)I, \\ K_{23} &= B^T (R + mS)C, \\ K_{33} &= C^T (R + mS)C - (1 - d_2)R, \end{aligned}$$

m bir pozitif sayı ve I birim matristir (Korkmaz ve Özdemir, 2023).

Sonuç 3.8 $\|C\| < 1$ olsun. Her $t > t_0$ için $\tau'_i(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) olsun. Eğer

$$\begin{array}{l} \text{Minimum} \\ \text{Kısıtlar} \end{array} \quad \begin{array}{l} -a^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} P > 0, Q > 0, R > 0 \\ L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12}^T & L_{22} & L_{23} \\ L_{13}^T & L_{23}^T & L_{33} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \end{array} \quad (3.22)$$

ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde simetrik pozitif tanımlı P, Q ve R matrisleri varsa, o zaman (3.20) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned} L_{11} &= A^T P + PA + Q + mA^T RA + a^2 M^T M, \\ L_{12} &= -A^T PC, \\ L_{13} &= PB + mA^T RB, \\ L_{22} &= -(1 - d_2)Q, \\ L_{23} &= -C^T PB, \\ L_{33} &= mB^T RB - (1 - d_1)I, \end{aligned}$$

m bir pozitif sayı ve I birim matristir (Korkmaz ve Özdemir, 2023).

Örnek 3.3 (1.6) ile verilen kesirli mertebeli nötral sistemin için

$$\tau_1(t) = 0.5t + 0.3\sin(t), \quad \tau_2(t) = 0.3t + 0.1\cos(t),$$

$$A = \begin{bmatrix} -70 & 10 \\ 10 & -50 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$f_1(t, x(t)) = a_1 \begin{pmatrix} \sin(x_2(t)) \\ \cos(x_1(t)) \end{pmatrix}, \quad f_2(t, x(t - \tau_1(t))) = 0.5 \begin{pmatrix} e^{-0.5t} \sin(x_2(t - \tau_1(t))) \\ e^{-0.3t} \cos(x_1(t - \tau_1(t))) \end{pmatrix},$$

şeklinde tanımlansın. $f_1(t, x(t))$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \|f_1(t, x(t))\|^2 &= a_1^2 (\sin^2(x_2(t)) + \cos^2(x_1(t))) \\ &\leq a_1^2 (x_1^2(t) + x_2^2(t)) \\ &= a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t), \end{aligned}$$

olur. Burada $M_1 = I_2$ olarak alınabilir. Benzer şekilde $f_2(t, x(t - \tau_1(t)))$ için

$$\begin{aligned} \|f_2(t, x(t - \tau_1(t)))\|^2 &= 0.25 (e^{-t} \sin^2(x_2(t - \tau_1(t))) + e^{-0.6t} \cos^2(x_1(t - \tau_1(t)))) \\ &\leq 0.25 (x_1^2(t) + x_2^2(t)) \\ &= 0.25 x^T(t - \tau_1(t)) M_2^T M_2 x(t - \tau_1(t)) \end{aligned}$$

olur. Burada $M_2 = I_2$ olarak alınabilir. $d_1 = 0.8$, $d_2 = 0.4$ ve $m = 0.001$ olarak seçilsin. Bu durumda (3.12) ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü $a_{1max} = 1.7796$ dır. Burada

$$P = \begin{bmatrix} 0.0746 & 0 \\ 0 & 0.0746 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.0011 & 0 \\ 0 & 0.0011 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0.0865 & 0 \\ 0 & 0.0865 \end{bmatrix}$$

ve

$$K = \begin{pmatrix} -1.0448 & 0.0557 & -0.0919 & 0.1198 & -0.0919 & 0.1198 & -0.0009 & 0.0012 \\ 0.0557 & -0.9334 & 0.1198 & 0.1476 & 0.1198 & 0.1476 & 0.0012 & 0.0015 \\ -0.0919 & 0.1198 & -0.8802 & 0 & 0.1198 & 0 & 0.0012 & 0 \\ 0.1198 & 0.1476 & 0 & -0.8802 & 0 & 0.1198 & 0 & 0.0012 \\ -0.0919 & 0.1198 & 0.1198 & 0 & -0.0802 & 0 & 0.0012 & 0 \\ 0.1198 & 0.1476 & 0 & 0.1198 & 0 & -0.0802 & 0 & 0.0012 \\ -0.0009 & 0.0012 & 0.0012 & 0 & 0.0012 & 0 & -0.0007 & 0 \\ 0.0012 & 0.0015 & 0 & 0.0012 & 0 & 0.0012 & 0 & -0.0007 \end{pmatrix}$$

Diğer taraftan bütün koşullar aynı iken, (3.13) ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü $a_{1max} = 1.7802$ olarak elde edilir. Burada

$$P = \begin{bmatrix} 0.0763 & 0 \\ 0 & 0.0763 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.0940 & 0 \\ 0 & 0.0940 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.0825 & 0 \\ 0 & 0.0825 \end{bmatrix}$$

ve

$$L = \begin{pmatrix} -6.7873 & 1.4124 & 0.5338 & -0.0763 & 0.6968 & 0.0094 & 0.6968 & 0.0094 \\ 1.4124 & -3.9626 & -0.0763 & 0.3813 & 0.0094 & 0.7156 & 0.0094 & 0.7156 \\ 0.5338 & -0.0763 & -0.0495 & 0 & -0.0763 & 0 & -0.0763 & 0 \\ -0.0763 & 0.3813 & 0 & -0.0495 & 0 & -0.0763 & 0 & -0.0763 \\ 0.6968 & 0.0094 & -0.0763 & 0 & -0.9906 & 0 & 0.0094 & 0 \\ 0.0094 & 0.7156 & 0 & -0.0763 & 0 & -0.9906 & 0 & 0.0094 \\ 0.6968 & 0.0094 & -0.0763 & 0 & 0.0094 & 0 & -0.1906 & 0 \\ 0.0094 & 0.7156 & 0 & -0.0763 & 0 & 0.0094 & 0 & -0.1906 \end{pmatrix}$$

Eğer $f_2(t, x(t - \tau_1(t))) = x(t - \tau_1(t))$ ve diğer koşullar aynı ise, (3.15) ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü $a_{max} = 2.2972$ olarak elde edilir. Burada

$$P = \begin{bmatrix} 0.2280 & 0 \\ 0 & 0.2280 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.0037 & 0 \\ 0 & 0.0037 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.0847 & 0 \\ 0 & 0.0847 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 5.1480 & 0 \\ 0 & 5.1480 \end{bmatrix}$$

ve

$$K = \begin{pmatrix} -2.7082 & 0.0507 & -0.3505 & 0.3758 & -0.3505 & 0.3758 & -0.0035 & 0.0038 \\ 0.0507 & -2.6068 & 0.3758 & 0.4012 & 0.3758 & 0.4012 & 0.0038 & 0.0040 \\ -0.3505 & 0.3758 & -0.6242 & 0 & 0.3758 & 0 & 0.0038 & 0 \\ 0.3758 & 0.4012 & 0 & -0.6242 & 0 & 0.3758 & 0 & 0.0038 \\ -0.3505 & 0.3758 & 0.3758 & 0 & -0.6538 & 0 & 0.0038 & 0 \\ 0.3758 & 0.4012 & 0 & 0.3758 & 0 & -0.6538 & 0 & 0.0038 \\ -0.0035 & 0.0038 & 0.0038 & 0 & 0.0038 & 0 & -0.0022 & 0 \\ 0.0038 & 0.0040 & 0 & 0.0038 & 0 & 0.0038 & 0 & -0.0022 \end{pmatrix}$$

Öte yandan bütün koşullar aynı iken, (3.16) ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü $a_{max} = 2.2959$ dur. Burada

$$P = \begin{bmatrix} 0.2326 & 0 \\ 0 & 0.2326 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.1512 & 0 \\ 0 & 0.1512 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 5.1767 & 0 \\ 0 & 5.1767 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0.2437 & 0 \\ 0 & 0.2437 \end{bmatrix}$$

ve

$$L = \begin{pmatrix} -21.1214 & 4.4713 & 1.6284 & -0.2326 & 2.2205 & 0.0151 & 2.2205 & 0.0151 \\ 4.4713 & -12.1788 & -0.2326 & 1.1632 & 0.0151 & 2.2508 & 0.0151 & 2.2508 \\ 1.6284 & -0.2326 & -0.1462 & 0 & -0.2326 & 0 & -0.2326 & 0 \\ -0.2326 & 1.1632 & 0 & -0.1462 & 0 & -0.2326 & 0 & -0.2326 \\ 2.2205 & 0.0151 & -0.2326 & 0 & -1.0202 & 0 & 0.0151 & 0 \\ 0.0151 & 2.2508 & 0 & -0.2326 & 0 & -1.0202 & 0 & 0.0151 \\ 2.2205 & 0.0151 & -0.2326 & 0 & 0.0151 & 0 & -0.9849 & 0 \\ 0.0151 & 2.2508 & 0 & -0.2326 & 0 & 0.0151 & 0 & -0.9849 \end{pmatrix}$$

Eğer $B_2 = 0$ ve diğer koşullar aynı ise, (3.18) ile verilen konveks optimizasyon

probleminin çözümü $a_{max} = 4.4271$ olur. Burada

$$P = \begin{bmatrix} 0.4316 & 0 \\ 0 & 0.4316 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.0070 & 0 \\ 0 & 0.0070 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0.1678 & 0 \\ 0 & 0.1678 \end{bmatrix}$$

ve

$$K = \begin{pmatrix} -5.2192 & 0.0870 & -0.6686 & 0.7121 & -0.0067 & 0.0071 \\ 0.0870 & -5.0453 & 0.7121 & 0.7555 & 0.0071 & 0.0076 \\ -0.6686 & 0.7121 & -0.2879 & 0 & 0.0071 & 0 \\ 0.7121 & 0.7555 & 0 & -0.2879 & 0 & 0.0071 \\ -0.0067 & 0.0071 & 0.0071 & 0 & -0.0013 & 0 \\ 0.0071 & 0.0076 & 0 & 0.0071 & 0 & -0.0013 \end{pmatrix}.$$

Diğer taraftan bütün koşullar aynı iken, (3.19) ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü $a_{max} = 4.4264$ dür. Burada

$$P = \begin{bmatrix} 0.4530 & 0 \\ 0 & 0.4530 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.3073 & 0 \\ 0 & 0.3073 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1.4198 & 0 \\ 0 & 1.4198 \end{bmatrix}$$

ve

$$L = \begin{pmatrix} -40.8748 & 8.6918 & 3.1712 & -0.4530 & 4.3152 & 0.0307 \\ 8.6918 & -23.4912 & -0.4530 & 2.2651 & 0.0307 & 4.3766 \\ 3.1712 & -0.4530 & -0.2840 & 0 & -0.4530 & 0 \\ -0.4530 & 2.2651 & 0 & -0.2840 & 0 & -0.4530 \\ 4.3152 & 0.0307 & -0.4530 & 0 & -0.9693 & 0 \\ 0.0307 & 4.3766 & 0 & -0.4530 & 0 & -0.9693 \end{pmatrix}.$$

Eğer $B_1 = 0$ ve diğer koşullar aynı ise, (3.21) ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü $a_{max} = 2.0265$ olarak elde edilir. Burada

$$P = \begin{bmatrix} 0.0896 & 0 \\ 0 & 0.0896 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.0014 & 0 \\ 0 & 0.0014 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0.0726 & 0 \\ 0 & 0.0726 \end{bmatrix}$$

ve

$$K = \begin{pmatrix} -1.1483 & 0.0425 & -0.1246 & 0.1458 & -0.0012 & 0.0015 \\ 0.0425 & -1.0633 & 0.1458 & 0.1671 & 0.0015 & 0.0017 \\ -0.1246 & 0.1458 & -0.0542 & 0 & 0.0015 & 0 \\ 0.1458 & 0.1671 & 0 & -0.0542 & 0 & 0.0015 \\ -0.0012 & 0.0015 & 0.0015 & 0 & -0.0008 & 0 \\ 0.0015 & 0.0017 & 0 & 0.0015 & 0 & -0.0008 \end{pmatrix}.$$

Öte yandan bütün koşullar aynı iken, (3.22) ile verilen konveks optimizasyon probleminin çözümü $a_{max} = 2.0250$ olarak elde edilir. Burada

$$P = \begin{bmatrix} 0.0915 & 0 \\ 0 & 0.0915 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.1266 & 0 \\ 0 & 0.1266 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.1000 & 0 \\ 0 & 0.1000 \end{bmatrix}$$

ve

$$L = \begin{pmatrix} -7.9756 & 1.6780 & 0.6405 & -0.0915 & 0.8263 & 0.0127 \\ 1.6780 & -4.6196 & -0.0915 & 0.4575 & 0.0127 & 0.8516 \\ 0.6405 & -0.0915 & -0.0600 & 0 & -0.0915 & 0 \\ -0.0915 & 0.4575 & 0 & -0.0600 & 0 & -0.0915 \\ 0.8263 & 0.0127 & -0.0915 & 0 & -0.1873 & 0 \\ 0.0127 & 0.8516 & 0 & -0.0915 & 0 & -0.1873 \end{pmatrix}.$$

Böylelikle elde edilen konveks optimizasyon problemlerinin çözümleri karşılaştırılarak iki teoremin etkinliği hakkında bilgi sahibi olunur.

Teorem 3.5 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau'_i(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{13}^T & K_{23}^T & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{14}^T & K_{24}^T & K_{34}^T & K_{44} & K_{45} \\ K_{15}^T & K_{25}^T & K_{35}^T & K_{45}^T & K_{55} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.23)$$

LME sağlayacak şekilde simetrik pozitif tanımlı P, R ve S matrisleri varsa, o zaman (1.7) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik karardır. Burada

$$K_{11} = A^T P + PA + A^T (R + mS) A + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2 + \varepsilon^2 a_3^2 M_3^T M_3,$$

$$\begin{aligned}
K_{12} &= PB_1 + A^T (R + mS) B_1, \\
K_{13} &= PB_2 + A^T (R + mS) B_2, \\
K_{14} &= PC + A^T (R + mS) C, \\
K_{15} &= PB_3 + A^T (R + mS) B_3, \\
K_{22} &= B_1^T (R + mS) B_1 - I, \\
K_{23} &= B_1^T (R + mS) B_2, \\
K_{24} &= B_1^T (R + mS) C, \\
K_{25} &= B_1^T (R + mS) B_3, \\
K_{33} &= B_2^T (R + mS) B_2 - (1 - d_1) I, \\
K_{34} &= B_2^T (R + mS) C, \\
K_{35} &= B_2^T (R + mS) B_3, \\
K_{44} &= C^T (R + mS) C - (1 - d_2) R, \\
K_{45} &= C^T (R + mS) B_3, \\
K_{55} &= B_3^T (R + mS) B_3 - (1 - d_3) I,
\end{aligned}$$

ile tanımlı, m ve ε birer pozitif sayılar ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
V(t) &= {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} (x^T(t) P x(t)) + \int_{-\tau_2(t)}^0 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s)^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s))) ds \\
&\quad + a_2^2 \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) M_2^T M_2 x(s) ds + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T S ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds d\theta \\
&\quad + \varepsilon a_3^2 \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) M_3^T M_3 x(\eta) d\eta ds
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. P, R ve S matrisleri pozitif tanımlı matrisler olduğundan, $V(t)$ fonksiyoneli pozitif tanımlıdır. (1.9) eşitsizliğinden

$$f_j^T(t, x(t)) f_j(t, x(t)) \leq \|a_j^2 M_j x\|^2 = a_j^2 x^T(t) M_j^T M_j x(t), \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.24)$$

olarak yazılır. Böylece Lemma 2.3 ve (3.24) eşitsizliğinden her sabit t için

$$-\varepsilon a_3^2 \int_{t-\tau_3(t)}^t x^T(s) M_3^T M_3 x(s) ds \leq -\tau_3(t) a_3^2 \int_{t-\tau_3(t)}^t x^T(s) M_3^T M_3 x(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq -\tau_3(t) \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3^T(s, x(s)) f_3(s, x(s)) ds \\
&\leq -\left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T I \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Denklem (3.25), Lemma 2.1 ve 2.2'den (1.7) sisteminin çözümleri boyunca fonksiyonun türevi

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= {}_{t_0}D_t^\alpha (x^T(t) Px(t)) + a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) - a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) \\
&\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t)) - (1 - \tau_2'(t)) ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))) \\
&\quad + a_2^2 x^T(t) M_2^T M_2 x(t) - (1 - \tau_1'(t)) a_2^2 x^T(t - \tau_1(t)) M_2^T M_2 x(t - \tau_1(t)) \\
&\quad + m ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))^T S ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t)) - \int_{t-m}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T S ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds \\
&\quad + \varepsilon a_3^2 \tau_3(t) x^T(t) M_3^T M_3 x(t) - \varepsilon a_3^2 (1 - \tau_3'(t)) \int_{t-\tau_3(t)}^t x^T(s) M_3^T M_3 x(s) ds \\
&\leq 2x^T(t) P D_t^\alpha x(t) + a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) + a_2^2 x^T(t) M_2^T M_2 x(t) + \varepsilon^2 a_3^2 x^T(t) M_3^T M_3 x(t) \\
&\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t))^T (R + mS) ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t)) \\
&\quad - (1 - d_1) f_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) I f_2(t, x(t - \tau_1(t))) - f_1^T(t, x(t)) I f_1(t, x(t)) \\
&\quad - (1 - d_2) ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))) \\
&\quad - (1 - d_3) \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T I \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \\
&= 2x^T(t) P [Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\
&\quad + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds] + [Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
&\quad + C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds]^T (R + mS) \\
&\quad \times [Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\
&\quad + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds] + a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) + a_2^2 x^T(t) M_2^T M_2 x(t) \\
&\quad + \varepsilon^2 a_3^2 x^T(t) M_3^T M_3 x(t) - f_1^T(t, x(t)) I f_1(t, x(t)) \\
&\quad - (1 - d_1) f_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) I f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
&\quad - (1 - d_2) ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))) \\
&\quad - (1 - d_3) \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T I \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^T(t) (A^T P + PA + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2 + \varepsilon^2 a_3^2 M_3^T M_3 + A^T (R + mS) A) x(t) \\
&\quad + 2x^T(t) P B_1 f_1(t, x(t)) + 2x^T(t) P B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
&\quad + 2x^T(t) P C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) + 2x^T(t) P B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \\
&\quad + x^T(t) A^T (R + mS) B_1 f_1(t, x(t)) + x^T(t) A^T (R + mS) B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
&\quad + x^T(t) A^T (R + mS) C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\
&\quad + x^T(t) A^T (R + mS) B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds + (f_1(t, x(t)))^T B_1^T (R + mS) A x(t) \\
&\quad + (f_1(t, x(t)))^T B_1^T (R + mS) B_1 f_1(t, x(t)) \\
&\quad + (f_1(t, x(t)))^T B_1^T (R + mS) B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
&\quad + (f_1(t, x(t)))^T B_1^T (R + mS) C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\
&\quad + (f_1(t, x(t)))^T B_1^T (R + mS) B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \\
&\quad + (f_2(t, x(t - \tau_1(t))))^T B_2^T (R + mS) A x(t) \\
&\quad + (f_2(t, x(t - \tau_1(t))))^T B_2^T (R + mS) B_1 f_1(t, x(t)) \\
&\quad + (f_2(t, x(t - \tau_1(t))))^T B_2^T (R + mS) B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
&\quad + (f_2(t, x(t - \tau_1(t))))^T B_2^T (R + mS) C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\
&\quad + (f_2(t, x(t - \tau_1(t))))^T B_2^T (R + mS) B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \\
&\quad + ({}_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T C^T (R + mS) A x(t) \\
&\quad + ({}_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T C^T (R + mS) B_1 f_1(t, x(t)) \\
&\quad + ({}_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T C^T (R + mS) B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
&\quad + ({}_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T C^T (R + mS) C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\
&\quad + ({}_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T C^T (R + mS) B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \\
&\quad + \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T B_3^T (R + mS) A x(t) \\
&\quad + \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T B_3^T (R + mS) B_1 f_1(t, x(t)) \\
&\quad + \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T B_3^T (R + mS) B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
&\quad + \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T B_3^T (R + mS) C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T B_3^T (R + mS) B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \\
& - f_1^T(t, x(t)) I f_1(t, x(t)) - (1 - d_1) f_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) I f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
& - (1 - d_2) ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))) \\
& - (1 - d_3) \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T I \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T K \xi, \quad (3.26)$$

olur. Burada

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{12}^T & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{13}^T & K_{23}^T & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{14}^T & K_{24}^T & K_{34}^T & K_{44} & K_{45} \\ K_{15}^T & K_{25}^T & K_{35}^T & K_{45}^T & K_{55} \end{pmatrix},$$

$$K_{11} = A^T P + PA + A^T (R + mS) A + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2 + \varepsilon^2 a_3^2 M_3^T M_3,$$

$$K_{12} = PB_1 + A^T (R + mS) B_1,$$

$$K_{13} = PB_2 + A^T (R + mS) B_2,$$

$$K_{14} = PC + A^T (R + mS) C,$$

$$K_{15} = PB_3 + A^T (R + mS) B_3,$$

$$K_{22} = B_1^T (R + mS) B_1 - I,$$

$$K_{23} = B_1^T (R + mS) B_2,$$

$$K_{24} = B_1^T (R + mS) C,$$

$$K_{25} = B_1^T (R + mS) B_3,$$

$$K_{33} = B_2^T (R + mS) B_2 - (1 - d_1) I,$$

$$K_{34} = B_2^T (R + mS) C,$$

$$K_{35} = B_2^T (R + mS) B_3,$$

$$K_{44} = C^T (R + mS) C - (1 - d_2) R,$$

$$K_{45} = C^T (R + mS) B_3,$$

$$K_{55} = B_3^T (R + mS) B_3 - (1 - d_3) I,$$

$$\xi = \left(x^T(t), f_1^T(t, x(t)), f_2^T(t, x(t - \tau_1(t))), {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))^T, \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T \right)^T$$

olduğu görülür. (3.23) eşitsizliğinden $\dot{V}(t)$ negatif tanımlıdır. Böylece (1.7) sisteminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. \square

Teorem 3.6 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{12}^T & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{13}^T & L_{23}^T & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{14}^T & L_{24}^T & L_{34}^T & L_{44} & L_{45} \\ L_{15}^T & L_{25}^T & L_{35}^T & L_{45}^T & L_{55} \end{pmatrix} < 0, \quad (3.27)$$

LME sağlayacak şekilde simetrik pozitif tanımlı P, Q_2 ve R matrisleri varsa, o zaman (1.7) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$L_{11} = PA + A^T P + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2 + \varepsilon^2 a_3^2 M_3^T M_3 + Q_2 + mA^T RA,$$

$$L_{12} = PB_1 + mA^T RB_1,$$

$$L_{13} = PB_2 + mA^T RB_2,$$

$$L_{14} = -A^T PC,$$

$$L_{15} = PB_3 + mA^T RB_3,$$

$$L_{22} = mB_1^T RB_1 - I,$$

$$L_{23} = mB_1^T RB_2,$$

$$L_{24} = -B_1^T PC,$$

$$L_{25} = mB_1^T RB_3,$$

$$L_{33} = mB_2^T RB_2 - (1 - d_1)I,$$

$$L_{34} = -B_2^T PC,$$

$$L_{35} = mB_2^T RB_3,$$

$$L_{44} = -(1 - d_2)Q_2,$$

$$L_{45} = -C^T PB_3,$$

$$L_{55} = mB_3^T RB_3 - (1 - d_3)I,$$

ile tanımlı, m ve ε birer pozitif sayılar ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
V(t) = & {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} \left((x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \right) \\
& + \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s) Q_2 x(s) ds + a_2^2 \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) M_2^T M_2 x(s) ds \\
& + \varepsilon a_3^2 \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) M_3^T M_3 x(\eta) d\eta ds \\
& + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_2(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_2(s)))) ds d\theta
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. P, R ve S matrisleri pozitif tanımlı matrisler olduğundan, $V(t)$ fonksiyoneli pozitif tanımlıdır. Denklem (3.25), Lemma 2.1 ve 2.2'den (1.7) sisteminin çözümleri boyunca fonksiyonun türevi

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) = & {}_{t_0}D_t^\alpha \left((x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \right) \\
& + a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) - a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) \\
& + a_2^2 x^T(t) M_2^T M_2 x(t) - (1 - \tau_1'(t)) a_2^2 x^T(t - \tau_1(t)) M_2^T M_2 x(t - \tau_1(t)) \\
& + x^T(t) Q_2 x(t) - (1 - \tau_2'(t)) x^T(t - \tau_2(t)) Q_2 x(t - \tau_2(t)) \\
& + \varepsilon a_3^2 \tau_3(t) x^T(t) M_3^T M_3 x(t) - \varepsilon a_3^2 (1 - \tau_3'(t)) \int_{t-\tau_3(t)}^t x^T(s) M_3^T M_3 x(s) ds \\
& + m ({}_{t_0}D_t^\alpha (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha (x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))) \\
& - \int_{t-m}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_2(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_2(s)))) ds \\
\leq & 2(x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P ({}_{t_0}D_t^\alpha (x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))) + a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) \\
& + a_2^2 x^T(t) M_2^T M_2 x(t) + \varepsilon^2 a_3^2 x^T(t) M_3^T M_3 x(t) + x^T(t) Q_2 x(t) \\
& + m ({}_{t_0}D_t^\alpha (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha (x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))) \\
& - f_1^T(t, x(t)) I f_1(t, x(t)) - (1 - d_1) f_2^T(t, x(t - \tau_1(t))) I f_2(t, x(t - \tau_1(t))) \\
& - (1 - d_2) x^T(t - \tau_2(t)) Q_2 x(t - \tau_2(t)) \\
& - (1 - d_3) \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T I \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \\
= & 2(x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P [Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t)))] \\
& + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \Big] + a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t) + a_2^2 x^T(t) M_2^T M_2 x(t) \\
& + \varepsilon^2 a_3^2 x^T(t) M_3^T M_3 x(t) + x^T(t) Q_2 x(t) + m [Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +B_2f_2(t,x(t-\tau_1(t))) + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds \Big] R [Ax(t) + B_1f_1(t,x(t)) \\
& +B_2f_2(t,x(t-\tau_1(t))) + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds \Big] \\
& - f_1^T(t,x(t))If_1(t,x(t)) - (1-d_1)f_2^T(t,x(t-\tau_1(t)))If_2(t,x(t-\tau_1(t))) \\
& - (1-d_2)x^T(t-\tau_2(t))Q_2x(t-\tau_2(t)) \\
& - (1-d_3) \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds \right)^T I \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds \\
= & x^T(t) (PA + A^T P + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2 + \varepsilon^2 a_3^2 M_3^T M_3 + mA^T RA + Q_2) x(t) \\
& - 2x^T(t-\tau_2(t))C^T PAx(t) + 2x^T(t)PB_1f_1(t,x(t)) \\
& - 2x^T(t-\tau_2(t))C^T PB_1f_1(t,x(t)) + 2x^T(t)PB_2f_2(t,x(t-\tau_1(t))) \\
& - 2x^T(t-\tau_2(t))C^T PB_2f_2(t,x(t-\tau_1(t))) + 2x^T(t)PB_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds \\
& - 2x^T(t-\tau_2(t))C^T PB_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds + mx^T(t)A^T RB_1f_1(t,x(t)) \\
& + mx^T(t)A^T RB_2f_2(t,x(t-\tau_1(t))) + mx^T(t)A^T RB_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds \\
& + mf_1^T(t,x(t))B_1^T RAx(t) + mf_1^T(t,x(t))B_1^T RB_1f_1(t,x(t)) \\
& + mf_1^T(t,x(t))B_1^T RB_2f_2(t,x(t-\tau_1(t))) \\
& + mf_1^T(t,x(t))B_1^T RB_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds + mf_2^T(t,x(t-\tau_1(t)))B_2^T RAx(t) \\
& + mf_2^T(t,x(t-\tau_1(t)))B_2^T RB_1f_1(t,x(t)) \\
& + mf_2^T(t,x(t-\tau_1(t)))B_2^T RB_2f_2(t,x(t-\tau_1(t))) \\
& + mf_2^T(t,x(t-\tau_1(t)))B_2^T RB_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds \\
& + m \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds \right)^T B_3^T RAx(t) \\
& + m \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds \right)^T B_3^T RB_1f_1(t,x(t)) \\
& + m \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds \right)^T B_3^T RB_2f_2(t,x(t-\tau_1(t))) \\
& + m \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds \right)^T B_3^T RB_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s,x(s)) ds \\
& - f_1^T(t,x(t))If_1(t,x(t)) - (1-d_1)f_2^T(t,x(t-\tau_1(t)))If_2(t,x(t-\tau_1(t))) \\
& - (1-d_2)x^T(t-\tau_2(t))Q_2x(t-\tau_2(t))
\end{aligned}$$

$$-(1-d_3) \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T I \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T L \xi, \quad (3.28)$$

olarak yazılır. Burada

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{12}^T & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{13}^T & L_{23}^T & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{14}^T & L_{24}^T & L_{34}^T & L_{44} & L_{45} \\ L_{15}^T & L_{25}^T & L_{35}^T & L_{45}^T & L_{55} \end{pmatrix},$$

$$L_{11} = PA + A^T P + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2 + \varepsilon^2 a_3^2 M_3^T M_3 + Q_2 + mA^T RA,$$

$$L_{12} = PB_1 + mA^T RB_1,$$

$$L_{13} = PB_2 + mA^T RB_2,$$

$$L_{14} = -A^T PC,$$

$$L_{15} = PB_3 + mA^T RB_3,$$

$$L_{22} = mB_1^T RB_1 - I,$$

$$L_{23} = mB_1^T RB_2,$$

$$L_{24} = -B_1^T PC,$$

$$L_{25} = mB_1^T RB_3,$$

$$L_{33} = mB_2^T RB_2 - (1-d_1)I,$$

$$L_{34} = -B_2^T PC,$$

$$L_{35} = mB_2^T RB_3,$$

$$L_{44} = -(1-d_2)Q_2,$$

$$L_{45} = -C^T PB_3,$$

$$L_{55} = mB_3^T RB_3 - (1-d_3)I,$$

$$\xi = \left(x^T(t), f_1^T(t, x(t)), f_2^T(t, x(t-\tau_1(t))), x^T(t-\tau_2(t)), \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \right)^T \right)^T$$

olduğu görülür. (3.27) eşitsizliğinden $\dot{V}(t)$ negatif tanımlıdır. Böylece (1.7) sisteminin

sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. \square

Şimdi Teorem 3.5 ve 3.6 birer konveks optimizasyon problemi olarak sunularak, bu teoremlerin birer sonuçları olarak (1.7) sisteminin bazı varyasyonlarının sıfır çözümlerinin kararlılığı için yeterli şartlar verilecektir. Bu sonuçların etkinliği iki örnek ile karşılaştırılacaktır.

Sonuç 3.9 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum : } & -a_1^2 \\ \text{Kısıtlar : } & P > 0, R > 0, S > 0, K < 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a_1^2 pozitif sayısı, P, R ve S simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (1.7) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada K matrisi (3.23) ile tanımlı, a_2^2, a_3^2, m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

Sonuç 3.10 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum : } & -a_1^2 \\ \text{Kısıtlar : } & P > 0, Q_2 > 0, R > 0, L < 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a_1^2 pozitif sayısı, P, Q_2 ve R simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (1.7) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada L matrisi (3.27) ile tanımlı, a_2^2, a_3^2, m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

Eğer (1.7) sisteminde $f_2(t, x(t - \tau_1(t))) = x(t - \tau_1(t))$ alındığında, (1.7) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağı

$$\begin{aligned} {}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = & Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 x(t - \tau_1(t)) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\ & + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_2(s, x(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.31)$$

olarak yazılır. Burada $0 < \alpha < 1$ reel bir sayı, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ durum vektörü, $A, B_1, B_2, B_3, C \in R^{n \times n}$ bilinen sabit matrisler, her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t) > 0$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $f_j(t, x)$ ($j = 1, 2$) fonksiyonları her $t > t_0$ için $f_j(t, 0) = 0$ ile

her $(t, x) \in R \times R^n$ için

$$\|f_j(t, x(t))\| \leq a_j \|M_j x\|$$

Lipschitz şartını sağlayan vektör değerli lineer olmayan bir fonksiyondur. Lipschitz şartındaki M_j uygun boyutlu sabit bir matrisler ve a_j pozitif sayılardır.

Sonuç 3.11 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau'_i(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{array}{l} \text{Minimum : } -a_1^2 \\ \text{Kısıtlar : } \end{array} \left\{ \begin{array}{l} P > 0, Q_1 > 0, R > 0, S > 0, \\ \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} & \Delta_{15} \\ \Delta_{12}^T & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} & \Delta_{25} \\ \Delta_{13}^T & \Delta_{23}^T & \Delta_{33} & \Delta_{34} & \Delta_{35} \\ \Delta_{14}^T & \Delta_{24}^T & \Delta_{34}^T & \Delta_{44} & \Delta_{45} \\ \Delta_{15}^T & \Delta_{25}^T & \Delta_{35}^T & \Delta_{45}^T & \Delta_{55} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \quad (3.32)$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a_1^2 pozitif sayısı, P, Q_1, R ve S simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.31) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\Delta_{11} = A^T P + PA + A^T (R + mS) A + a_1^2 M_1^T M_1 + Q_1 + \varepsilon^2 a_2^2 M_2^T M_2,$$

$$\Delta_{12} = PB_1 + A^T (R + mS) B_1,$$

$$\Delta_{13} = PB_2 + A^T (R + mS) B_2,$$

$$\Delta_{14} = PC + A^T (R + mS) C,$$

$$\Delta_{15} = PB_3 + A^T (R + mS) B_3,$$

$$\Delta_{22} = B_1^T (R + mS) B_1 - I,$$

$$\Delta_{23} = B_1^T (R + mS) B_2,$$

$$\Delta_{24} = B_1^T (R + mS) C,$$

$$\Delta_{25} = B_1^T (R + mS) B_3,$$

$$\Delta_{33} = B_2^T (R + mS) B_2 - (1 - d_1) Q_1,$$

$$\Delta_{34} = B_2^T (R + mS) C,$$

$$\Delta_{35} = B_2^T (R + mS) B_3,$$

$$\Delta_{44} = C^T (R + mS) C - (1 - d_2) R,$$

$$\begin{aligned}\Delta_{45} &= C^T (R + mS) B_3, \\ \Delta_{55} &= B_3^T (R + mS) B_3 - (1 - d_3) I,\end{aligned}$$

a_2^2, m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}V(t) &= {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} (x^T(t) P x(t)) + \int_{-\tau_2(t)}^0 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s)) ds \\ &+ \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-m}^t \int_\theta^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T S ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds d\theta \\ &+ \varepsilon a_2^2 \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) M_2^T M_2 x(\eta) d\eta ds\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.5'deki benzer işlemler yapıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f_1^T(t, x(t)), x(t - \tau_1(t)), {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))^T, \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f(s, x(s)) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. \square

Sonuç 3.12 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned}\text{Minimum : } & -a_1^2 \\ \text{Kısıtlar : } & \left\{ \begin{array}{l} P > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, R > 0, \\ Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} \\ Z_{12}^T & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} \\ Z_{13}^T & Z_{23}^T & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} \\ Z_{14}^T & Z_{24}^T & Z_{34}^T & Z_{44} & Z_{45} \\ Z_{15}^T & Z_{25}^T & Z_{35}^T & Z_{45}^T & Z_{55} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \quad (3.33)\end{aligned}$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a_1^2 pozitif sayısı, P, Q_1, Q_2 ve R simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.31) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned}Z_{11} &= PA + A^T P + a_1^2 M_1^T M_1 + \varepsilon^2 a_2^2 M_2^T M_2 + Q_1 + Q_2 + mA^T RA, \\ Z_{12} &= PB_1 + mA^T RB_1, \\ Z_{13} &= PB_2 + mA^T RB_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{14} &= -A^T PC, \\
Z_{15} &= PB_3 + mA^T RB_3, \\
Z_{22} &= mB_1^T RB_1 - I, \\
Z_{23} &= mB_1^T RB_2, \\
Z_{24} &= -B_1^T PC, \\
Z_{25} &= mB_1^T RB_3, \\
Z_{33} &= mB_2^T RB_2 - (1 - d_1) Q_1, \\
Z_{34} &= -B_2^T PC, \\
Z_{35} &= mB_2^T RB_3, \\
Z_{44} &= -(1 - d_2) Q_2, \\
Z_{45} &= -C^T PB_3, \\
Z_{55} &= mB_3^T RB_3 - (1 - d_3) I,
\end{aligned}$$

a_2^2, m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
V(t) &= {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} \left((x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \right) \\
&+ \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s) Q_2 x(s) ds \\
&+ \varepsilon a_2^2 \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) M_2^T M_2 x(\eta) d\eta ds \\
&+ \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_2(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_2(s)))) ds d\theta
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.6'daki benzer işlemler yapıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f_1^T(t, x(t)), x^T(t - \tau_1(t)), x^T(t - \tau_2(t)), \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_2(s, x(s)) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. \square

Eğer (1.7) sisteminde $B_2 = 0$ alındığında, (1.7) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağı

$${}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + C {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_1(t)) + B_2 \int_{t-\tau_2(t)}^t f_2(s, x(s)) ds, \quad (3.34)$$

olarak yazılır. Burada $0 < \alpha < 1$ reel bir sayı, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ durum vektörü, $A, B_1, B_2, C \in R^{n \times n}$ bilinen sabit matrisler, her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t) > 0$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $f_j(t, x)$ ($j = 1, 2$) fonksiyonları her $t > t_0$ için $f_j(t, 0) = 0$ ile her $(t, x) \in R \times R^n$ için

$$\|f_j(t, x(t))\| \leq a_j \|M_j x\|$$

Lipschitz şartını sağlayan vektör değerli lineer olmayan bir fonksiyondur. Lipschitz şartındaki M_j uygun boyutlu sabit bir matrisler ve a_j pozitif sayılardır.

Sonuç 3.13 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) ve $|\tau_2(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum : } & -a_1^2 \\ \text{Kısıtlar : } & \left\{ \begin{array}{l} P > 0, R > 0, S > 0, \\ H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{12}^T & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{13}^T & H_{23}^T & H_{33} & H_{34} \\ H_{14}^T & H_{24}^T & H_{34}^T & H_{44} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.35)$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a_1^2 pozitif sayısı, P, R ve S simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.34) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$H_{11} = A^T P + PA + A^T (R + mS) A + a_1^2 M_1^T M_1 + \varepsilon^2 a_2^2 M_2^T M_2,$$

$$H_{12} = PB_1 + A^T (R + mS) B_1,$$

$$H_{13} = PC + A^T (R + mS) C,$$

$$H_{14} = PB_2 + A^T (R + mS) B_2,$$

$$H_{22} = B_1^T (R + mS) B_1 - I,$$

$$H_{23} = B_1^T (R + mS) C,$$

$$H_{24} = B_1^T (R + mS) B_2,$$

$$H_{33} = C^T (R + mS) C - (1 - d_1) R,$$

$$H_{34} = C^T (R + mS) B_2,$$

$$H_{44} = B_2^T (R + mS) B_2 - (1 - d_2) I,$$

a_2^2, m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned} V(t) = & {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} (x^T(t) P x(t)) + \int_{-\tau_1(t)}^0 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s)) ds \\ & + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T S ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds d\theta \\ & + a_2^2 \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) M_2^T M_2 x(\eta) d\eta ds \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.5'deki benzer işlemler yapıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f_1^T(t, x(t)), {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_1(t))^T, \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t f_2(s, x(s)) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. \square

Sonuç 3.14 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) ve $|\tau_2(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum : } & -a_1^2 \\ \text{Kısıtlar : } & \left\{ \begin{array}{l} P > 0, Q_1 > 0, R > 0, \\ \Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} \\ \Theta_{12}^T & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} \\ \Theta_{13}^T & \Theta_{23}^T & \Theta_{33} & \Theta_{34} \\ \Theta_{14}^T & \Theta_{24}^T & \Theta_{34}^T & \Theta_{44} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.36)$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a_1^2 pozitif sayısı, P, Q_1 ve R simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.34) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\Theta_{11} = PA + A^T P + a_1^2 M_1^T M_1 + \varepsilon^2 a_2^2 M_2^T M_2 + Q_1 + mA^T R A,$$

$$\Theta_{12} = PB_1 + mA^T R B_1,$$

$$\Theta_{13} = -A^T P C,$$

$$\Theta_{14} = PB_2 + mA^T R B_2,$$

$$\Theta_{22} = mB_1^T R B_1 - I,$$

$$\Theta_{23} = -B_1^T P C,$$

$$\Theta_{24} = mB_1^T R B_2,$$

$$\begin{aligned}\Theta_{33} &= -(1-d_1)Q_1, \\ \Theta_{34} &= -C^T P B_2, \\ \Theta_{44} &= m B_2^T R B_2 - (1-d_2)I,\end{aligned}$$

a_2^2, m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}V(t) &= {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} \left((x(t) - Cx(t - \tau_1(t)))^T P (x(t) - Cx(t - \tau_1(t))) \right) \\ &+ \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \varepsilon a_2^2 \int_{-\tau_2(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) M_2^T M_2 x(\eta) d\eta ds \\ &+ \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_1(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_1(s)))) ds d\theta.\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.6'daki benzer işlemler yapıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f_1^T(t, x(t)), x^T(t - \tau_1(t)), \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t f_2(s, x(s)) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. \square

Eğer (1.7) sisteminde $B_1 = 0$ alındığında, (1.7) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağı

$$\begin{aligned}{}_{t_0}D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t - \tau_1(t))) + C {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\ &+ B_2 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_2(s, x(s)) ds,\end{aligned}\tag{3.37}$$

olarak alınsın. Burada $0 < \alpha < 1$ reel bir sayı, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ durum vektörü, $A, B_1, B_2, C \in R^{n \times n}$ bilinen sabit matrisler, her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t) > 0$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $f_j(t, x), (j = 1, 2)$ fonksiyonları her $t > t_0$ için $f_j(t, 0) = 0$ ile her $(t, x) \in R \times R^n$ için

$$\|f_j(t, x(t))\| \leq a_j \|M_j x\|$$

Lipschitz şartını sağlayan vektör değerli lineer olmayan bir fonksiyondur. Lipschitz şartındaki M_j uygun boyutlu sabit bir matrisler ve a_j pozitif sayılardır.

Sonuç 3.15 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum : } & -a_1^2 \\ \text{Kısıtlar : } & \begin{cases} P > 0, R > 0, S > 0, \\ N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{12}^T & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ N_{13}^T & N_{23}^T & N_{33} & N_{34} \\ N_{14}^T & N_{24}^T & N_{34}^T & N_{44} \end{pmatrix} < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.38)$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a_1^2 pozitif sayısı, P, R ve S simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.37) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned} N_{11} &= A^T P + PA + A^T (R + mS) A + a_1^2 M_1^T M_1 + \varepsilon^2 a_2^2 M_2^T M_2, \\ N_{12} &= PB_1 + A^T (R + mS) B_1, \\ N_{13} &= PC + A^T (R + mS) C, \\ N_{14} &= PB_2 + A^T (R + mS) B_2, \\ N_{22} &= B_1^T (R + mS) B_1 - (1 - d_1) I, \\ N_{23} &= B_1^T (R + mS) C, \\ N_{24} &= B_1^T (R + mS) B_2, \\ N_{33} &= C^T (R + mS) C - (1 - d_2) R, \\ N_{34} &= C^T (R + mS) B_2, \\ N_{44} &= B_2^T (R + mS) B_2 - (1 - d_3) I, \end{aligned}$$

a_2^2, m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned} V(t) &= {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} (x^T(t) P x(t)) + \int_{-\tau_2(t)}^0 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s)) ds \\ &+ a_1^2 \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) M_1^T M_1 x(s) ds + \int_{t-m}^t \int_\theta^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T S ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds d\theta \\ &+ \varepsilon a_2^2 \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) M_2^T M_2 x(\eta) d\eta ds \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.5'deki benzer işlemler yapıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f_1^T(t, x(t - \tau_1(t))), {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))^T, \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_2(s, x(s)) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. \square

Sonuç 3.16 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum : } & -a_1^2 \\ \text{Kısıtlar : } & \begin{cases} P > 0, Q_2 > 0, R > 0, \\ \Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} \\ \Xi_{12}^T & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} \\ \Xi_{13}^T & \Xi_{23}^T & \Xi_{33} & \Xi_{34} \\ \Xi_{14}^T & \Xi_{24}^T & \Xi_{34}^T & \Xi_{44} \end{pmatrix} < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.39)$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a_1^2 pozitif sayısı, P, Q_2 ve R simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.37) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\Xi_{11} = PA + A^T P + a_1^2 M_1^T M_1 + \varepsilon^2 a_2^2 M_2^T M_2 + Q_2 + mA^T RA,$$

$$\Xi_{12} = PB_1 + mA^T RB_1,$$

$$\Xi_{13} = -A^T PC,$$

$$\Xi_{14} = PB_2 + mA^T RB_2,$$

$$\Xi_{22} = mB_1^T RB_1 - (1 - d_1)I,$$

$$\Xi_{23} = -B_1^T PC,$$

$$\Xi_{24} = mB_1^T RB_2,$$

$$\Xi_{33} = -(1 - d_2)Q_2,$$

$$\Xi_{34} = -C^T RB_2,$$

$$\Xi_{44} = mB_2^T RB_2 - (1 - d_3)I,$$

a_2^2, m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
V(t) = & {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} \left((x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \right) \\
& + \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s) Q_2 x(s) ds + a_1^2 \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) M_1^T M_1 x(s) ds \\
& + \varepsilon a_2^2 \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) M_2^T M_2 x(\eta) d\eta ds \\
& + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_2(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_2(s)))) ds d\theta
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.6'daki benzer işlemler yapıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f_1^T(t, x(t - \tau_1(t))), x^T(t - \tau_2(t)), \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t f_2(s, x(s)) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. \square

Eğer (1.7) sisteminde $f_3(t, x(t)) = x(t)$ için, (1.7) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağı

$$\begin{aligned}
{}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = & Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\
& + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t x(s) ds,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

olur. Burada $0 < \alpha < 1$ reel bir sayı, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ durum vektörü, $A, B_1, B_2, B_3, C \in R^{n \times n}$ bilinen sabit matrisler, her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t) > 0$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $f_j(t, x)$, ($j = 1, 2$) fonksiyonları her $t > t_0$ için $f_j(t, 0) = 0$ ile her $(t, x) \in R \times R^n$ için

$$\|f_j(t, x(t))\| \leq a_j \|M_j x\|$$

Lipschitz şartını sağlayan vektör değerli lineer olmayan bir fonksiyondur. Lipschitz şartındaki M_j uygun boyutlu sabit bir matrisler ve a_j pozitif sayılardır.

Sonuç 3.17 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau'_i(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum : } & -a_1^2 \\ \text{Kısıtlar : } & \left\{ \begin{array}{l} P > 0, Q_3 > 0, R > 0, S > 0, \\ O = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} & O_{14} & O_{15} \\ O_{12}^T & O_{22} & O_{23} & O_{24} & O_{25} \\ O_{13}^T & O_{23}^T & O_{33} & O_{34} & O_{35} \\ O_{14}^T & O_{24}^T & O_{34}^T & O_{44} & O_{45} \\ O_{15}^T & O_{25}^T & O_{35}^T & O_{45}^T & O_{55} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.41)$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a_1^2 pozitif sayısı, P, Q_3, R ve S simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.40) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned} O_{11} &= A^T P + PA + A^T (R + mS) A + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2 + \varepsilon^2 Q_3, \\ O_{12} &= PB_1 + A^T (R + mS) B_1, \\ O_{13} &= PB_2 + A^T (R + mS) B_2, \\ O_{14} &= PC + A^T (R + mS) C, \\ O_{15} &= PB_3 + A^T (R + mS) B_3, \\ O_{22} &= B_1^T (R + mS) B_1 - I, \\ O_{23} &= B_1^T (R + mS) B_2, \\ O_{24} &= B_1^T (R + mS) C, \\ O_{25} &= B_1^T (R + mS) B_3, \\ O_{33} &= B_2^T (R + mS) B_2 - (1 - d_1) I, \\ O_{34} &= B_2^T (R + mS) C, \\ O_{35} &= B_2^T (R + mS) B_3, \\ O_{44} &= C^T (R + mS) C - (1 - d_2) R, \\ O_{45} &= C^T (R + mS) B_3, \\ O_{55} &= B_3^T (R + mS) B_3 - (1 - d_3) Q_3, \end{aligned}$$

a_2^2, m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
V(t) = & {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} (x^T(t) P x(t)) + \int_{-\tau_2(t)}^0 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s)) ds \\
& + a_2^2 \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) M_2^T M_2 x(s) ds + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T S ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds d\theta \\
& + \varepsilon \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) Q_3 x(\eta) d\eta ds
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. (3.25) eşitsizliği yerine

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \int_{t-\tau_3(t)}^t x^T(s) Q_3 x(s) ds & \leq -\tau_3(t) \int_{t-\tau_3(t)}^t x^T(s) Q_3 x(s) ds \\
& \leq - \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t x(s) ds \right)^T Q_3 \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t x(s) ds \right) \quad (3.42)
\end{aligned}$$

eşitsizliği alındığında, Teorem 2.13'deki benzer işlemler yapıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f_1^T(t, x(t)), f_2^T(t, x(t-\tau_1(t))), {}_{t_0}D_t^\alpha x(t-\tau_2(t))^T, \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t x(s) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. \square

Sonuç 3.18 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i^l(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned}
\text{Minimum : } & -a_1^2 \\
\text{Kısıtlar : } & \left\{ \begin{array}{l} P > 0, Q_2 > 0, Q_3 > 0, R > 0, \\ \Pi = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} \\ \Pi_{13}^T & \Pi_{23}^T & \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} \\ \Pi_{14}^T & \Pi_{24}^T & \Pi_{34}^T & \Pi_{44} & \Pi_{45} \\ \Pi_{15}^T & \Pi_{25}^T & \Pi_{35}^T & \Pi_{45}^T & \Pi_{55} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \quad (3.43)
\end{aligned}$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a_1^2 pozitif sayısı, P, Q_2, Q_3 ve R simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.42) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned}
\Pi_{11} & = PA + A^T P + a_1^2 M_1^T M_1 + a_2^2 M_2^T M_2 + \varepsilon^2 Q_3 + Q_2 + mA^T RA, \\
\Pi_{12} & = PB_1 + mA^T RB_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{13} &= PB_2 + mA^T RB_2, \\
\Pi_{14} &= -A^T PC, \\
\Pi_{15} &= PB_3 + mA^T RB_3, \\
\Pi_{22} &= mB_1^T RB_1 - I, \\
\Pi_{23} &= mB_1^T RB_2, \\
\Pi_{24} &= -B_1^T PC, \\
\Pi_{25} &= mB_1^T RB_3, \\
\Pi_{33} &= mB_2^T RB_2 - (1 - d_1)I, \\
\Pi_{34} &= -B_2^T PC, \\
\Pi_{35} &= mB_2^T RB_3, \\
\Pi_{44} &= -(1 - d_2)Q_2, \\
\Pi_{45} &= -C^T PB_3, \\
\Pi_{55} &= mB_3^T RB_3 - (1 - d_3)Q_3,
\end{aligned}$$

a_2^2, m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
V(t) &= {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} \left((x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \right) \\
&\quad + \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s) Q_2 x(s) ds + a_2^2 \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) M_2^T M_2 x(s) ds \\
&\quad + \varepsilon \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) Q_3 x(\eta) d\eta ds \\
&\quad + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^{\alpha} (x(s) - Cx(s - \tau_2(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^{\alpha} (x(s) - Cx(s - \tau_2(s)))) ds d\theta
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.6'daki benzer işlemler yapıldığında, (2.3) eşitsizliği yerine (3.42) eşitsizliği kullanıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f_1^T(t, x(t)), f_2^T(t, x(t - \tau_1(t))), x^T(t - \tau_2(t)), \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t x(s) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. \square

Eğer (1.7) sisteminde $f_2(t, x(t - \tau_1(t))) = x(t - \tau_1(t))$ ve $f_3(t, x(t)) = x(t)$ alın-

dığında, (1.7) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağı

$$\begin{aligned} {}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = & Ax(t) + B_1 f(t, x(t)) + B_2 x(t - \tau_1(t)) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\ & + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t x(s) ds, \end{aligned} \quad (3.44)$$

olarak yazılır. Burada $0 < \alpha < 1$ reel bir sayı, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ durum vektörü, $A, B_1, B_2, B_3, C \in R^{n \times n}$ bilinen sabit matrisler, her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t) > 0$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $f(t, x)$ fonksiyonu her $t > t_0$ için $f(t, 0) = 0$ ile her $(t, x) \in R \times R^n$ için

$$\|f(t, x(t))\| \leq a \|Mx\|$$

Lipschitz şartını sağlayan vektör değerli lineer olmayan bir fonksiyondur. Lipschitz şartındaki M uygun boyutlu sabit bir matris ve a pozitif bir sayıdır.

Sonuç 3.19 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum : } & -a^2 \\ \text{Kısıtlar : } & \begin{cases} P > 0, Q_1 > 0, Q_3 > 0, R > 0, S > 0, \\ \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14} & \Sigma_{15} \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{24} & \Sigma_{25} \\ \Sigma_{13}^T & \Sigma_{23}^T & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} & \Sigma_{35} \\ \Sigma_{14}^T & \Sigma_{24}^T & \Sigma_{34}^T & \Sigma_{44} & \Sigma_{45} \\ \Sigma_{15}^T & \Sigma_{25}^T & \Sigma_{35}^T & \Sigma_{45}^T & \Sigma_{55} \end{pmatrix} < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.45)$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a^2 pozitif sayısı, P, Q_1, Q_3, R ve S simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.44) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= A^T P + PA + A^T (R + mS) A + a^2 M^T M + Q_1 + \varepsilon^2 Q_3, \\ \Sigma_{12} &= PB_1 + A^T (R + mS) B_1, \\ \Sigma_{13} &= PB_2 + A^T (R + mS) B_2, \\ \Sigma_{14} &= PC + A^T (R + mS) C, \\ \Sigma_{15} &= PB_3 + A^T (R + mS) B_3, \\ \Sigma_{22} &= B_1^T (R + mS) B_1 - I, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{23} &= B_1^T (R + mS) B_2, \\
\Sigma_{24} &= B_1^T (R + mS) C, \\
\Sigma_{25} &= B_1^T (R + mS) B_3, \\
\Sigma_{33} &= B_2^T (R + mS) B_2 - (1 - d_1) Q_1, \\
\Sigma_{34} &= B_2^T (R + mS) C, \\
\Sigma_{35} &= B_2^T (R + mS) B_3, \\
\Sigma_{44} &= C^T (R + mS) C - (1 - d_2) R, \\
\Sigma_{45} &= C^T (R + mS) B_3, \\
\Sigma_{55} &= B_3^T (R + mS) B_3 - (1 - d_3) Q_3,
\end{aligned}$$

m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
V(t) &= {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} (x^T(t) P x(t)) + \int_{-\tau_2(t)}^0 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s)) ds \\
&+ \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-m}^t \int_\theta^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T S ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds d\theta \\
&+ \varepsilon \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) Q_3 x(\eta) d\eta ds
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.5'deki benzer işlemler yapıldığında, (3.25) eşitsizliği yerine (3.42) eşitsizliği kullanıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f^T(t, x(t)), x(t - \tau_1(t)), {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))^T, \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t x(s) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.20 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau'_i(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} & \text{Minimum : } -a^2 \\ & \text{Kısıtlar : } \left\{ \begin{array}{l} P > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, Q_3 > 0, R > 0, \\ \Upsilon = \begin{pmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & \Upsilon_{13} & \Upsilon_{14} & \Upsilon_{15} \\ \Upsilon_{12}^T & \Upsilon_{22} & \Upsilon_{23} & \Upsilon_{24} & \Upsilon_{25} \\ \Upsilon_{13}^T & \Upsilon_{23}^T & \Upsilon_{33} & \Upsilon_{34} & \Upsilon_{35} \\ \Upsilon_{14}^T & \Upsilon_{24}^T & \Upsilon_{34}^T & \Upsilon_{44} & \Upsilon_{45} \\ \Upsilon_{15}^T & \Upsilon_{25}^T & \Upsilon_{35}^T & \Upsilon_{45}^T & \Upsilon_{55} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \quad (3.46) \end{aligned}$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a^2 pozitif sayısı, P, Q_1, Q_2, Q_3 ve R simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.44) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\Upsilon_{11} = PA + A^T P + a^2 M^T M + \varepsilon^2 Q_3 + Q_1 + Q_2 + mA^T RA,$$

$$\Upsilon_{12} = PB_1 + mA^T RB_1,$$

$$\Upsilon_{13} = PB_2 + mA^T RB_2,$$

$$\Upsilon_{14} = -A^T PC,$$

$$\Upsilon_{15} = PB_3 + mA^T RB_3,$$

$$\Upsilon_{22} = mB_1^T RB_1 - I,$$

$$\Upsilon_{23} = mB_1^T RB_2,$$

$$\Upsilon_{24} = -B_1^T PC,$$

$$\Upsilon_{25} = mB_1^T RB_3,$$

$$\Upsilon_{33} = mB_2^T RB_2 - (1 - d_1) Q_1,$$

$$\Upsilon_{34} = -B_2^T PC,$$

$$\Upsilon_{35} = mB_2^T RB_3,$$

$$\Upsilon_{44} = -(1 - d_2) Q_2,$$

$$\Upsilon_{45} = -C^T PB_3$$

$$\Upsilon_{55} = mB_3^T RB_3 - (1 - d_3) Q_3,$$

m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
V(t) = & {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} \left((x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \right) \\
& + \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s) Q_2 x(s) ds \\
& + \varepsilon \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) Q_3 x(\eta) d\eta ds \\
& + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_2(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_2(s)))) ds d\theta
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.6'daki benzer işlemler yapıldığında, (3.25) eşitsizliği yerine (3.42) eşitsizliği kullanıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f^T(t, x(t)), x(t - \tau_1(t)), x^T(t - \tau_2(t)), \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t x(s) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. \square

Eğer (1.7) sisteminde $B_1 = 0$ ve $f_3(t, x(t)) = x(t)$ alındığında, (1.7) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağı

$${}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + B_1 f(x(t - \tau_1(t))) + C {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) + B_2 \int_{t-\tau_3(t)}^t x(s) ds, \quad (3.47)$$

olarak yazılır. Burada $0 < \alpha < 1$ reel bir sayı, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ durum vektörü, $A, B_1, B_2, C \in R^{n \times n}$ bilinen sabit matrisler, her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t) > 0$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $f(t, x)$ fonksiyonu her $t > t_0$ için $f(t, 0) = 0$ ile her $(t, x) \in R \times R^n$ için

$$\|f(t, x(t))\| \leq a \|Mx\|$$

Lipschitz şartını sağlayan vektör değerli lineer olmayan bir fonksiyondur. Lipschitz şartındaki M uygun boyutlu sabit bir matris ve a pozitif bir sayıdır.

Sonuç 3.21 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum : } & -a^2 \\ \text{Kısıtlar : } & \begin{cases} P > 0, Q_3 > 0, R > 0, S > 0, \\ \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} \\ \Phi_{13}^T & \Phi_{23}^T & \Phi_{33} & \Phi_{34} \\ \Phi_{14}^T & \Phi_{24}^T & \Phi_{34}^T & \Phi_{44} \end{pmatrix} < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.48)$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a^2 pozitif sayısı, P, Q_3, R ve S simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.47) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A^T P + PA + A^T (R + mS)A + a^2 M^T M + \varepsilon^2 Q_3, \\ \Phi_{12} &= PB_1 + A^T (R + mS)B_1, \\ \Phi_{13} &= PC + A^T (R + mS)C, \\ \Phi_{14} &= PB_2 + A^T (R + mS)B_2, \\ \Phi_{22} &= B_1^T (R + mS)B_1 - (1 - d_1)I, \\ \Phi_{23} &= B_1^T (R + mS)C, \\ \Phi_{24} &= B_1^T (R + mS)B_2, \\ \Phi_{33} &= C^T (R + mS)C - (1 - d_2)R, \\ \Phi_{34} &= C^T (R + mS)B_2, \\ \Phi_{44} &= B_2^T (R + mS)B_2 - (1 - d_3)Q_3, \end{aligned}$$

m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned} V(t) &= {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} (x^T(t)Px(t)) + \int_{-\tau_2(t)}^0 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s)) ds \\ &+ a^2 \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s)M^T Mx(s) ds + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T S ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds d\theta \\ &+ \varepsilon \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta)Q_3x(\eta) d\eta ds \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.5'deki benzer işlemler yapıldığında, (3.25) eşitsizliği yerine (3.42) eşitsizliği kullanıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f^T(t, x(t - \tau_1(t))), {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))^T, \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t x(s) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. \square

Sonuç 3.22 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2, 3$) ve $|\tau_3(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum : } & -a^2 \\ \text{Kısıtlar : } & \begin{cases} P > 0, Q_2 > 0, Q_3 > 0, R > 0, \\ X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{12}^T & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{13}^T & X_{23}^T & X_{33} & X_{34} \\ X_{14}^T & X_{24}^T & X_{34}^T & X_{44} \end{pmatrix} < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.49)$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a^2 pozitif sayısı, P, Q_2, Q_3 ve R simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.47) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned} X_{11} &= PA + A^T P + a^2 M^T M + \varepsilon^2 Q_3 + Q_2 + mA^T RA, \\ X_{12} &= PB_1 + mA^T RB_1, \\ X_{13} &= -A^T PC, \\ X_{14} &= PB_2 + mA^T RB_2, \\ X_{22} &= mB_1^T RB_1 - (1 - d_1)I, \\ X_{23} &= -B_1^T PC, \\ X_{24} &= mB_1^T RB_2, \\ X_{33} &= -(1 - d_2)Q_2, \\ X_{34} &= -C^T PB_2 \\ X_{44} &= mB_2^T RB_2 - (1 - d_3)Q_3, \end{aligned}$$

m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$V(t) = {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} \left((x(t) - Cx(t - \tau_2(t)))^T P (x(t) - Cx(t - \tau_2(t))) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t-\tau_2(t)}^t x^T(s) Q_2 x(s) ds + a^2 \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) M^T M x(s) ds \\
& + \varepsilon \int_{-\tau_3(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) Q_3 x(\eta) d\eta ds \\
& + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_2(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_2(s)))) ds d\theta.
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.6'daki benzer işlemler yapıldığında, (3.25) eşitsizliği yerine (3.42) eşitsizliği kullanıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f^T(t, x(t - \tau_1(t))), x^T(t - \tau_2(t)), \left(\int_{t-\tau_3(t)}^t x(s) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. \square

Eğer (1.7) sisteminde $B_2 = 0$ ve $f_3(t, x(t)) = x(t)$ alındığında, (1.7) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağı

$${}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + B_1 f(x(t)) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_1(t)) + B_2 \int_{t-\tau_2(t)}^t x(s) ds, \quad (3.50)$$

olarak yazılır. Burada $0 < \alpha < 1$ reel bir sayı, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ durum vektörü, $A, B_1, B_2, C \in R^{n \times n}$ bilinen sabit matrisler, her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t) > 0$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar, $f(t, x)$ fonksiyonu her $t > t_0$ için $f(t, 0) = 0$ ile her $(t, x) \in R \times R^n$ için

$$\|f(t, x(t))\| \leq a \|Mx\|$$

Lipschitz şartını sağlayan vektör değerli lineer olmayan bir fonksiyondur. Lipschitz şartındaki M uygun boyutlu sabit bir matris ve a pozitif bir sayıdır.

Sonuç 3.23 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) ve $|\tau_2(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned}
& \text{Minimum : } -a^2 \\
& \text{Kısıtlar : } \left\{ \begin{array}{l} P > 0, Q_2 > 0, R > 0, S > 0, \\ \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} \\ \Psi_{13}^T & \Psi_{23}^T & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ \Psi_{14}^T & \Psi_{24}^T & \Psi_{34}^T & \Psi_{44} \end{pmatrix} < 0, \end{array} \right. \quad (3.51)
\end{aligned}$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a^2 pozitif sayısı, P, Q_2, R ve S

simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.50) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned}
\Psi_{11} &= A^T P + PA + A^T (R + mS)A + a^2 M^T M + \varepsilon^2 Q_2, \\
\Psi_{12} &= PB_1 + A^T (R + mS)B_1, \\
\Psi_{13} &= PC + A^T (R + mS)C, \\
\Psi_{14} &= PB_2 + A^T (R + mS)B_2, \\
\Psi_{22} &= B_1^T (R + mS)B_1 - I, \\
\Psi_{23} &= B_1^T (R + mS)C, \\
\Psi_{24} &= B_1^T (R + mS)B_2, \\
\Psi_{33} &= C^T (R + mS)C - (1 - d_1)R, \\
\Psi_{34} &= C^T (R + mS)B_2, \\
\Psi_{44} &= B_2^T (R + mS)B_2 - (1 - d_2)Q_2,
\end{aligned}$$

m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
V(t) &= {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} (x^T(t)Px(t)) + \int_{-\tau_1(t)}^0 ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s))^T R ({}_{t_0}D_t^\alpha x(t+s)) ds \\
&\quad + \int_{t-m}^t \int_\theta^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s))^T S ({}_{t_0}D_s^\alpha x(s)) ds d\theta + \varepsilon \int_{-\tau_2(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) Q_2 x(\eta) d\eta ds.
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.5'deki benzer işlemler yapıldığında, (3.25) eşitsizliği yerine (3.42) eşitsizliği kullanıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f^T(t, x(t)), {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_1(t))^T, \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(s) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.24 $\|C\| < 1$, her $t > t_0$ için $\tau_i'(t) \leq d_i < 1$, ($i = 1, 2$) ve $|\tau_2(t)| \leq \varepsilon$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \text{Minimum : } & -a^2 \\ \text{Kısıtlar : } & \begin{cases} P > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, R > 0, \\ \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ \Omega_{12}^T & \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \\ \Omega_{13}^T & \Omega_{23}^T & \Omega_{33} & \Omega_{34} \\ \Omega_{14}^T & \Omega_{24}^T & \Omega_{34}^T & \Omega_{44} \end{pmatrix} < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.52)$$

konveks optimizasyon probleminin çözümü olacak şekilde a^2 pozitif sayısı, P, Q_1, Q_2 ve R simetrik pozitif tanımlı matrisleri varsa, o zaman (3.50) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sinir ağının sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. Burada

$$\Omega_{11} = PA + A^T P + a^2 M^T M + \varepsilon^2 Q_2 + Q_1 + mA^T RA,$$

$$\Omega_{12} = PB_1 + mA^T RB_1,$$

$$\Omega_{13} = -A^T PC,$$

$$\Omega_{14} = PB_2 + mA^T RB_2,$$

$$\Omega_{22} = mB_1^T RB_1 - I,$$

$$\Omega_{23} = -B_1^T PC,$$

$$\Omega_{24} = mB_1^T RB_2,$$

$$\Omega_{33} = -(1 - d_1) Q_1,$$

$$\Omega_{34} = -C^T PB_2$$

$$\Omega_{44} = mB_2^T RB_2 - (1 - d_2) Q_2,$$

m ve ε pozitif sabitler ve I birim matristir (Korkmaz ve ark., 2022).

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned} V(t) = & {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} \left((x(t) - Cx(t - \tau_1(t)))^T P (x(t) - Cx(t - \tau_1(t))) \right) \\ & + \int_{t-\tau_1(t)}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \varepsilon \int_{-\tau_2(t)}^0 \int_{t+s}^t x^T(\eta) Q_2 x(\eta) d\eta ds \\ & + \int_{t-m}^t \int_{\theta}^t ({}_{t_0}D_s^\alpha x((s) - Cx(s - \tau_1(s))))^T R ({}_{t_0}D_s^\alpha (x(s) - Cx(s - \tau_1(s)))) ds d\theta. \end{aligned}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.6'daki benzer işlemler yapıldığında, (3.25) eşitsizliği yerine (3.42) eşitsizliği kullanıldığında ve

$$\xi = \left(x^T(t), f^T(t, x(t)), x^T(t - \tau_1(t)), \left(\int_{t-\tau_2(t)}^t x(s) ds \right)^T \right)^T$$

olarak alındığında ispat tamamlanır. \square

Şimdi elde edilen sonuçların etkinliğini göstermek ve sonuçları kıyaslamak için iki örnek verelim.

Örnek 3.4

$$\begin{aligned} {}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = & Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\ & + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds \end{aligned} \quad (3.53)$$

ile verilen kesir mertebeli lineer olmayan nötral sinir ağı göz önüne alınsın. Burada

$$A = \begin{bmatrix} -40 & 5 & 3 \\ 4 & -20 & 1 \\ 1 & 2 & -20 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = B_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$f_1(t, x(t)) = a_1 \begin{pmatrix} \sin(x_2(t)) \\ \sin(x_1(t)) \\ \sin(x_3(t)) \end{pmatrix},$$

$$f_2(t, x(t - \tau_1(t))) = 0.4 \begin{pmatrix} e^{-0.5t} \sin(x_1(t - \tau_1(t))) \\ e^{-0.3t} \sin(x_2(t - \tau_1(t))) \\ e^{-0.4t} \sin(x_3(t - \tau_1(t))) \end{pmatrix},$$

$$f_3(t, x(t)) = 0.6 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x_1(t) + x_3(t)) \\ \sin(x_2(t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x_1(t) - x_3(t)) \end{pmatrix},$$

$\alpha \in (1, 0)$, $\tau_1(t) = 0.4t + 0.2\sin(t)$, $\tau_2(t) = 0.2t + 0.3\cos(t)$ ve $\tau_3(t) = 0.5 + 0.04\sin(t)$.

Dikkat edildiğinde $f_1(t, x(t))$ için,

$$\begin{aligned}\|f_1(t, x(t))\|^2 &= a_1^2 (\sin^2(x_2(t)) + \sin^2(x_1(t)) + \sin^2(x_3(t))) \\ &\leq a_1^2 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)) \\ &= a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t),\end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada $M_1 = I_3$. Benzer şekilde $f_2(t, x(t - \tau_1(t)))$ için,

$$\begin{aligned}\|f_2(t, x(t - \tau_1(t)))\|^2 &= 0.16 \left(e^{-t} \sin^2(x_2(t - \tau_1(t))) + e^{-0.6t} \sin^2(x_1(t - \tau_1(t))) \right. \\ &\quad \left. + e^{-0.8t} \sin^2(x_3(t - \tau_1(t))) \right) \\ &\leq 0.16 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)) \\ &= 0.16 x^T(t - \tau_1(t)) M_2^T M_2 x(t - \tau_1(t))\end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada $M_2 = I_3$. Benzer şekilde $f_3(t, x(t))$ için,

$$\begin{aligned}\|f_3(t, x(t))\|^2 &= 0.36 \left(\frac{1}{2} \sin^2(x_1(t) + x_3(t)) + \sin^2(x_1(t)) + \frac{1}{2} \sin^2(x_1(t) - x_3(t)) \right) \\ &\leq 0.36 \left(\frac{1}{2} (x_1(t) + x_3(t))^2 + x_2^2(t) + \frac{1}{2} (x_1(t) - x_3(t))^2 \right) \\ &= 0.36 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)) \\ &= 0.36 x^T(t) M_3^T M_3 x(t),\end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada $M_3 = I_3$. $d_1 = 0.6$, $d_2 = 0.5$, $d_3 = 0.04$, $\varepsilon = 0.54$, $m = 0.001$ olarak seçilsin. P, Q_1, Q_2, Q_3, R ve S matrisleri p, q_1, q_2, q_3, r ve s pozitif sayıları için,

$$P = p \times I_3, \quad Q_1 = q_1 \times I_3, \quad Q_2 = q_2 \times I_3, \quad Q_3 = q_3 \times I_3, \quad R = r \times I_3, \quad S = s \times I_3$$

olarak tanımlansın. a_{max} ilgili sonuçtaki konveks optimizasyon probleminin çözümü, λ_{max} negatif tanımlı olması gereken matrisin en büyük öz değeridir.

(3.53) ile verilen kesir mertebeli lineer olmayan nötral sinir ağı ve bu ağın bazı varyasyonları için elde edilen sonuçları kolayca kıyaslamak için konveks optimizasyon problemlerinin çözümleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Buradaki sayısal değerler Matlab-LMI araç kutusu kullanılarak elde edilmiştir.

Çizelge 3.1.'den görüldüğü gibi Teorem 3.6'dan elde edilen sonuçların tolare edi-

Çizelge 3.1. Örnek 3.4 için elde edilen sayısal değerler.

Sonuçlar	p	q_1	q_2	q_3	r	s	a_{max}	λ_{max}
Sonuç 3.9	0.1249	-	-	-	0.0040	0.0283	1.3360	-7.7393×10^{-7}
Sonuç 3.10	0.1515	-	0.5198	-	0.0817	-	1.3832	-0.0059
Sonuç 3.11	0.1337	1.1361	-	-	0.0043	0.0141	0.9778	-4.7656×10^{-7}
Sonuç 3.12	0.1676	1.2112	0.5721	-	0.0467	-	1.0479	-4.4837×10^{-5}
Sonuç 3.13	0.2765	-	-	-	0.0089	0.0765	2.1097	-8.9599×10^{-6}
Sonuç 3.14	0.3371	1.1542	-	-	0.1689	-	2.1779	-1.4180×10^{-4}
Sonuç 3.15	0.1602	-	-	-	0.0052	0.0287	1.5890	-1.4089×10^{-6}
Sonuç 3.16	0.1944	-	0.6635	-	0.0653	-	1.6410	-8.0470×10^{-5}
Sonuç 3.17	0.1326	-	-	1.3443	0.0043	0.0125	1.2761	-1.1118×10^{-6}
Sonuç 3.18	0.1626	-	0.5569	1.4256	0.0641	-	1.3285	-2.0478×10^{-4}
Sonuç 3.19	0.1715	1.4609	-	1.7441	0.0056	0.0088	0.9214	-1.2880×10^{-6}
Sonuç 3.20	0.2225	1.6103	0.7581	1.9257	0.0473	-	1.0168	-4.6914×10^{-5}
Sonuç 3.21	0.1853	-	-	1.8845	0.0060	0.0600	1.5803	-1.5411×10^{-6}
Sonuç 3.22	0.2279	-	0.7802	2.0066	0.1095	-	1.6414	-1.0765×10^{-4}
Sonuç 3.23	0.4626	-	4.7082	-	0.0149	0.1734	2.4975	-1.1171×10^{-5}
Sonuç 3.24	0.5694	1.9558	4.9996	-	0.2855	-	2.5944	-4.5609×10^{-4}

lebilir sınırları (a_{max}) Teorem 3.5'den elde edilen sonuçların tolere edilebilir sınırlarından büyüktür.

Örnek 3.5

$$\begin{aligned}
{}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = & Ax(t) + B_1 f_1(t, x(t)) + B_2 f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C_{t_0} D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\
& + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds
\end{aligned} \quad (3.54)$$

ile verilen kesir mertebeli lineer olmayan nötral sinir ağı göz önüne alınsın. Burada

$$A = \begin{bmatrix} -65 & 5 & 1 \\ 2 & -25 & 1 \\ 3 & 1 & -80 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad f_1(t, x(t)) = a_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x_1(t) + x_2(t)) \\ \sin(x_3(t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x_1(t) - x_2(t)) \end{pmatrix},$$

$$f_2(t, x(t - \tau_1(t))) = 0.5 \begin{pmatrix} e^{-0.6t} \sin(x_1(t - \tau_1(t))) \\ e^{-0.5t} \sin(x_2(t - \tau_1(t))) \\ e^{-0.8t} \sin(x_3(t - \tau_1(t))) \end{pmatrix},$$

$$f_3(t, x(t)) = 0.15 \begin{pmatrix} \sin(x_1(t) + x_3(t)) \\ \sin(x_2(t) + x_3(t)) \\ \sin(x_1(t) + x_2(t)) \end{pmatrix},$$

$\alpha \in (1, 0)$, $\tau_1(t) = 30 + 0.2t + 0.1\cos(t)$, $\tau_2(t) = 30 + 0.2t + 0.1\cos(t)$ ve $\tau_3(t) = 0.1 + 0.03\sin(t)$. Dikkat edildiğinde $f_1(t, x(t))$ için,

$$\begin{aligned} \|f_1(t, x(t))\|^2 &= a_1^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2(x_1(t) + x_2(t)) + \sin^2(x_3(t)) + \frac{1}{2} \sin^2(x_1(t) - x_2(t)) \right) \\ &\leq a_1^2 \left(\frac{1}{2} (x_1(t) + x_2(t))^2 + x_3^2(t) + \frac{1}{2} (x_1(t) - x_2(t))^2 \right) \\ &= a_1^2 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)) \\ &= a_1^2 x^T(t) M_1^T M_1 x(t), \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada $M_1 = I_3$. Benzer şekilde $f_2(t, x(t - \tau_1(t)))$ için,

$$\begin{aligned} \|f_2(t, x(t - \tau_1(t)))\|^2 &= 0.25 (e^{-1.2t} \sin^2(x_2(t - \tau_1(t))) + e^{-t} \sin^2(x_1(t - \tau_1(t))) \\ &\quad + e^{-1.6t} \sin^2(x_3(t - \tau_1(t)))) \\ &\leq 0.25 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)) \\ &= 0.25 x^T(t - \tau_1(t)) M_2^T M_2 x(t - \tau_1(t)) \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada $M_2 = I_3$. Benzer şekilde $f_3(t, x(t))$ için,

$$\begin{aligned} \|f_3(t, x(t))\|^2 &= 0.0225 (\sin^2(x_1(t) + x_3(t)) + \sin^2(x_2(t) + x_3(t)) + \sin^2(x_1(t) + x_2(t))) \\ &= 0.0225 ([x_1(t) + x_3(t)]^2 + [x_2(t) + x_3(t)]^2 + [x_1(t) + x_2(t)]^2) \\ &= 0.09 x^T(t) M_3^T M_3 x(t), \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada

$$M_3 = \begin{bmatrix} 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 4/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 4/6 \end{bmatrix},$$

$d_1 = 0.3$, $d_2 = 0.5$, $d_3 = 0.03$, $\varepsilon = 0.13$, $m = 0.001$ olarak seçilsin. P, Q_1, Q_2, Q_3, R ve S

matrisleri p, q_1, q_2, q_3, r ve s pozitif sayıları için,

$$P = p \times I_3, \quad Q_1 = q_1 \times I_3, \quad Q_2 = q_2 \times I_3, \quad Q_3 = q_3 \times I_3, \quad R = r \times I_3, \quad S = s \times I_3$$

olarak tanımlansın. a_{max} ilgili sonuçtaki konveks optimizasyon probleminin çözümü, λ_{max} negatif tanımlı olması gereken matrisin en büyük öz değeridir.

(3.54) ile verilen kesir mertebeli lineer olmayan nötral sinir ağı ve bu ağın bazı varyasyonları için elde edilen sonuçları kolayca kıyaslamak için konveks optimizasyon problemlerinin çözümleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Buradaki sayısal değerler Matlab-LMI araç kutusu kullanılarak elde edilmiştir.

Çizelge 3.2. Örnek 3.5 için elde edilen sayısal değerler.

Sonuçlar	p	q_1	q_2	q_3	r	s	a_{max}	λ_{max}
Sonuç 3.9	0.2034	-	-	-	0.0037	0.0591	2.1212	-6.6719×10^{-6}
Sonuç 3.10	0.2347	-	0.4821	-	0.2406	-	2.2420	-0.0010
Sonuç 3.11	0.2262	1.4181	-	-	0.0042	0.0264	1.9674	-1.8412×10^{-6}
Sonuç 3.12	0.2649	1.5066	0.5382	-	0.1582	-	2.1105	-1.1406×10^{-4}
Sonuç 3.13	0.3053	-	-	-	0.0056	0.0691	2.6803	-1.9592×10^{-6}
Sonuç 3.14	0.3547	0.7290	-	-	0.4201	-	2.8218	-5.6906×10^{-5}
Sonuç 3.15	0.2999	-	-	-	0.0055	0.0452	2.6490	-4.0936×10^{-6}
Sonuç 3.16	0.3462	-	0.7171	-	0.3926	-	2.7872	-7.9143×10^{-4}
Sonuç 3.17	0.5133	-	-	33.2800	0.0093	0.0929	3.3488	-1.6887×10^{-6}
Sonuç 3.18	0.5976	-	1.2075	36.0390	0.2756	-	3.5497	-1.8091×10^{-4}
Sonuç 3.19	3.5778	22.4603	-	277.0393	0.0608	0.2733	7.6140	-2.2252×10^{-6}
Sonuç 3.20	4.3805	25.1945	8.9098	265.5547	3.0956	-	8.3108	-1.1824×10^{-4}
Sonuç 3.21	0.5718	-	-	37.1806	0.0105	0.0792	3.5748	-8.2720×10^{-7}
Sonuç 3.22	0.6651	-	1.3682	41.7157	0.7704	-	3.7749	-7.5855×10^{-5}
Sonuç 3.23	4.9560	-	318.6191	-	0.0814	0.6323	10.5580	-6.2413×10^{-6}
Sonuç 3.24	5.9371	12.0162	361.7123	-	3.2834	-	11.3041	-2.7950×10^{-4}

Çizelge 3.2.'den görüldüğü gibi Teorem 3.6'dan elde edilen sonuçların tolare edilebilir sınırları (a_{max}) Teorem 3.5'den elde edilen sonuçların tolere edilebilir sınırlarından büyüktür.

Şimdi (1.10) kesir mertebeli sistemin kararlılığı incelenir. Lemma 2.5'ye göre, eğer (E, A) çifti regüler ve impaldan bağımsız ise

$$MEN := \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{E}, \quad MAN := \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} = \bar{A}, \quad (3.55)$$

olacak şekilde terslenebilen $M, N \in R^{n \times n}$ matrisleri bulunabilir. Şimdi

$$MBN = \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}, \quad N^{-1}x(t) = \eta(t) = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

olarak yazıldığında (1.10) sistemi

$$\bar{E}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t) = \bar{A} \eta(t) + \bar{B} \eta(t - \tau) \quad (3.57)$$

olarak yazılır. Burada

$${}_{t_0} D_t^\alpha \eta_1(t) = A_1 \eta_1(t) + B_1 \eta_1(t - \tau) + B_2 \eta_2(t - \tau) \quad (3.58)$$

$$0 = \eta_2(t) + B_3 \eta_1(t - \tau) + B_4 \eta_2(t - \tau). \quad (3.59)$$

(3.59) denkleminin kesirli türevi alındığında

$${}_{t_0} D_t^\alpha [\eta_2(t) + B_3 \eta_1(t - \tau) + B_4 \eta_2(t - \tau)] = 0 \quad (3.60)$$

olarak yazılır. (3.59) ve (3.60) denklemleri birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} {}_{t_0} D_t^\alpha \eta_2(t) &= -\eta_2(t) - B_3 \eta_1(t - \tau) - B_4 \eta_2(t - \tau) - {}_{t_0} D_t^\alpha B_3 \eta_1(t - \tau) \\ &\quad - {}_{t_0} D_t^\alpha B_4 \eta_2(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.61)$$

olarak elde edilir. (3.58) ve (3.61) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_t^\alpha \eta_1(t) \\ D_t^\alpha \eta_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 \eta_1(t) + B_1 \eta_1(t - \tau) + B_2 \eta_2(t - \tau) \\ -\eta_2(t) - B_3 \eta_1(t - \tau) - B_4 \eta_2(t - \tau) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_3 & -B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_t^\alpha \eta_1(t - \tau) \\ D_t^\alpha \eta_2(t - \tau) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.62)$$

olarak ifade edilebilir. Eğer

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_3 & -B_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

olarak alındığında (3.56) sistemi

$${}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t) + \hat{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t - \tau) = \hat{A} \eta(t) + \hat{B} \eta(t - \tau) \quad (3.64)$$

şeklinde yazılır.

Şimdi (1.10) kesir mertebeli singüler sisteminin çözümlerinin kararlılığı (3.64) nötral sistemi yardımıyla elde edilecektir. Bu çalışmanın kalanında (E, A) çifti regüler ve im-palsdan bağımsız ve \hat{C} matrisinin bütün özdeğerleri birim çember içinde olduğu kabul edilecektir.

Teorem 3.7 Eğer

$$\begin{cases} P\hat{A} + \hat{A}^T P + \hat{C}^T(Q_1 + Q_2)\hat{C} + Q_1 + 3Q_2 < 0 \\ \|\hat{P}\hat{A}\| < \lambda_{\min}(Q_1) \\ \|\hat{P}\hat{B}\| < \lambda_{\min}(Q_2) \end{cases} \quad (3.65)$$

olacak şekilde simetrik pozitif tanımlı P, Q_1 ve Q_2 matrisleri varsa (3.64) nötral denklem sisteminin çözümleri ve dolayısıyla (1.10) singüler denklem sisteminin çözümleri asimp-totik kararlıdır.

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned} V(t) = & {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} \left((\eta(t) + \hat{C}\eta(t - \tau))^T P (\eta(t) + \hat{C}\eta(t - \tau)) \right) \\ & + \int_{t-\tau}^t \eta^T(s) \hat{C}^T (Q_1 + Q_2) \hat{C} \eta(s) ds + 2 \int_{t-\tau}^t \eta^T(s) Q_2 \eta(s) ds \end{aligned}$$

ile tanımlansın. P, Q_1 ve Q_2 matrisleri pozitif tanımlı matrisler olduğundan, $V(t)$ fonksi-yoneli pozitif tanımlıdır. Lemma 2.1 ve 2.2'den (3.64) sisteminin çözümleri boyunca $V(t)$ fonksiyonun türevi

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & {}_{t_0}D_t^\alpha \left((\eta(t) + \hat{C}\eta(t - \tau))^T P (\eta(t) + \hat{C}\eta(t - \tau)) \right) + \eta^T(t) \hat{C}^T (Q_1 + Q_2) \hat{C} \eta(t) \\ & - \eta^T(t - \tau) \hat{C}^T (Q_1 + Q_2) \hat{C} \eta(t - \tau) + 2\eta^T(t) Q_2 \eta(t) \\ & - 2\eta^T(t - \tau) Q_2 \eta(t - \tau) \\ \leq & 2(\eta^T(t) + \hat{C}\eta(t - \tau))^T P {}_{t_0}D_t^\alpha (\eta(t) + \hat{C}\eta(t - \tau)) + \eta^T(t) \hat{C}^T (Q_1 + Q_2) \hat{C} \eta(t) \\ & + 2\eta^T(t) Q_2 \eta(t) - (1 - d) \eta^T(t - \tau) \hat{C}^T (Q_1 + Q_2) \hat{C} \eta(t - \tau) \\ & - \eta^T(t - \tau) Q_2 \eta(t - \tau) - \eta^T(t - \tau) Q_2 \eta(t - \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2(\eta^T(t) + \hat{C}\eta(t-\tau))^T P [\hat{A}\eta(t) + \hat{B}\eta(t-\tau)] + \eta^T(t) \hat{C}^T (Q_1 + Q_2) \hat{C}\eta(t) \\
&\quad + 2\eta^T(t) Q_2 \eta(t) - \eta^T(t-\tau) \hat{C}^T (Q_1 + Q_2) \hat{C}\eta(t-\tau) \\
&\quad - \eta^T(t-\tau) Q_2 \eta(t-\tau) \\
&= \eta^T(t) (P\hat{A} + \hat{A}^T P + \hat{C}^T (Q_1 + Q_2) \hat{C} + 2Q_2) \eta(t) + 2\eta^T(t) P\hat{B}\eta(t-\tau) \\
&\quad + 2\eta^T(t-\tau) \hat{C}^T P\hat{A}\eta(t) + 2\eta^T(t-\tau) \hat{C}^T P\hat{B}\eta(t-\tau) \\
&\quad - \eta^T(t-\tau) \hat{C}^T (Q_1 + Q_2) \hat{C}\eta(t-\tau) - \eta^T(t-\tau) Q_2 \eta(t-\tau).
\end{aligned}$$

Lemma 2.6'den

$$\begin{aligned}
2\eta^T(t-\tau) \hat{C}^T P\hat{A}\eta(t) &= 2\eta^T(t-\tau) \hat{C}^T Q_1^{\frac{1}{2}} Q_1^{-\frac{1}{2}} P\hat{A}\eta(t) \\
&\leq \frac{1}{\beta} \eta^T(t) \hat{A}^T P Q_1^{-1} P\hat{A}\eta(t) \\
&\quad + \beta \eta^T(t-\tau) \hat{C}^T Q_1 \hat{C}\eta(t-\tau), \\
2\eta^T(t) P\hat{B}\eta(t-\tau) &= 2\eta^T(t) P\hat{B} Q_2^{-\frac{1}{2}} Q_2^{\frac{1}{2}} \eta(t-\tau) \\
&\leq \frac{1}{\beta} \eta^T(t) P\hat{B} Q_2^{-1} \hat{B}^T P\eta(t) \\
&\quad + \beta \eta^T(t-\tau) Q_2 \eta(t-\tau), \\
2\eta^T(t-\tau) \hat{C}^T P\hat{B}\eta(t-\tau) &= 2\eta^T(t-\tau) \hat{C}^T Q_2^{\frac{1}{2}} Q_2^{-\frac{1}{2}} P\hat{B}\eta(t-\tau) \\
&\leq \frac{1}{\beta} \eta^T(t-\tau) \hat{B}^T P Q_2^{-1} P\hat{B}\eta(t-\tau) \\
&\quad + \beta \eta^T(t-\tau) \hat{C}^T Q_2 \hat{C}\eta(t-\tau),
\end{aligned}$$

burada β pozitif bir sayıdır. (3.65) denkleminde

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq \eta^T(t) \left[\hat{A}^T \left(\frac{1}{\beta} P Q_1^{-1} P \right) \hat{A} - Q_1 \right] \eta(t) \\
&\quad + \eta^T(t) \left[P \left(\frac{1}{\beta} \hat{B} Q_2^{-1} \hat{B}^T \right) P - Q_2 \right] \eta(t) \\
&\quad + \eta^T(t-\tau) \left[\hat{B}^T \left(\frac{1}{\beta} P Q_2^{-1} P \right) \hat{B} - Q_2 \right] \eta(t-\tau) \\
&\quad - (1-\beta) \eta^T(t-\tau) \hat{C}^T (Q_1 + Q_2) \hat{C}\eta(t-\tau) \\
&\quad - (1-\beta) \eta^T(t-\tau) Q_2 \eta(t-\tau)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Spectral norm tanımından

$$\begin{aligned}
\left[\lambda_{\max} \left(Q_1^{-\frac{1}{2}} \hat{A}^T (PQ_1^{-1}P) \hat{A} Q_1^{-\frac{1}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \left[\lambda_{\max} \left(Q_1^{-\frac{1}{2}} \hat{A}^T P Q_1^{-1} P \hat{A} Q_1^{-\frac{1}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\| Q_1^{-\frac{1}{2}} \hat{A}^T P Q_1^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 \\
&\leq \left\| Q_1^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 \|\hat{A}^T P\| \\
&= \frac{1}{\lambda_{\min}(Q_1)} \|\hat{A}^T P\|, \\
\left[\lambda_{\max} \left(Q_2^{-\frac{1}{2}} P (\hat{B} Q_2^{-1} \hat{B}^T) P Q_2^{-\frac{1}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \left[\lambda_{\max} \left(Q_2^{-\frac{1}{2}} P \hat{B} Q_2^{-1} \hat{B}^T P Q_2^{-\frac{1}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\| Q_2^{-\frac{1}{2}} \hat{B}^T P Q_2^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 \\
&\leq \left\| Q_2^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 \|\hat{B}^T P\| \\
&= \frac{1}{\lambda_{\min}(Q_2)} \|\hat{B}^T P\|,
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left[\lambda_{\max} \left(Q_2^{-\frac{1}{2}} \hat{B}^T (PQ_2^{-1}P) \hat{B} Q_2^{-\frac{1}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \left[\lambda_{\max} \left(Q_2^{-\frac{1}{2}} \hat{B}^T P Q_2^{-1} P \hat{B} Q_2^{-\frac{1}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\| Q_2^{-\frac{1}{2}} \hat{B}^T P Q_2^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 \\
&\leq \left\| Q_2^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 \|\hat{B}^T P\| \\
&= \frac{1}{\lambda_{\min}(Q_2)} \|\hat{B}^T P\|,
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Denklem (3.65) göz önüne alındığında

$$\lambda_{\max} \left(Q_1^{-\frac{1}{2}} \hat{A}^T (PQ_1^{-1}P) \hat{A} Q_1^{-\frac{1}{2}} \right) < 1,$$

$$\lambda_{\max} \left(Q_2^{-\frac{1}{2}} P (\hat{B} Q_2^{-1} \hat{B}^T) P Q_2^{-\frac{1}{2}} \right) < 1$$

ve

$$\lambda_{\max} \left(Q_2^{-\frac{1}{2}} \hat{B}^T (PQ_2^{-1}P) \hat{B} Q_2^{-\frac{1}{2}} \right) < 1$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$$\lambda_{\max} \left(Q_1^{-\frac{1}{2}} \hat{A}^T (PQ_1^{-1}P) \hat{A} Q_1^{-\frac{1}{2}} \right) < \mu < 1,$$

$$\lambda_{\max} \left(Q_2^{-\frac{1}{2}} P (\hat{B}Q_2^{-1}\hat{B}^T) P Q_2^{-\frac{1}{2}} \right) < \mu < 1$$

ve

$$\lambda_{\max} \left(Q_2^{-\frac{1}{2}} \hat{B}^T (PQ_2^{-1}P) \hat{B} Q_2^{-\frac{1}{2}} \right) < \mu < 1$$

olacak şekilde $\mu > 0$ sayısı vardır. Ayrıca $\hat{A}^T (PQ_1^{-1}P) \hat{A} \geq 0$, $P (\hat{B}Q_2^{-1}\hat{B}^T) P \geq 0$ ve $\hat{B}^T (PQ_2^{-1}P) \hat{B} \geq 0$ olduğundan ve Lemma 2.7'den

$$\hat{A}^T (PQ_1^{-1}P) \hat{A} < \mu Q_1,$$

$$P (\hat{B}Q_2^{-1}\hat{B}^T) P < \mu Q_2$$

ve

$$\hat{B}^T (PQ_2^{-1}P) \hat{B} < \mu Q_2$$

olarak yazılır. $0 < \frac{\mu}{\beta} < 1$ olacak şekilde $\beta < 1$ seçildiğinde

$$M_1 : \hat{A}^T \left(\frac{1}{\beta} PQ_1^{-1}P \right) \hat{A} - Q_1 < \left(\frac{\mu}{\beta} - 1 \right) Q_1 < 0,$$

$$M_2 : P \left(\frac{1}{\beta} \hat{B}Q_2^{-1}\hat{B}^T \right) P - Q_2 < \left(\frac{\mu}{\beta} - 1 \right) Q_2 < 0$$

ve

$$M_3 : \hat{B}^T \left(\frac{1}{\beta} PQ_2^{-1}P \right) \hat{B} - Q_2 < \left(\frac{\mu}{\beta} - 1 \right) Q_2 < 0$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \eta^T(t) (M_1 + M_2) \eta(t) + \eta^T(t - \tau) M_3 \eta(t - \tau) \\ &\quad - (1 - \beta) \eta^T(t - \tau) \hat{C}^T (Q_1 + Q_2) \hat{C} \eta(t - \tau) \\ &\quad - (1 - \beta) \eta^T(t - \tau) Q_2 \eta(t - \tau) \end{aligned}$$

olarak yazılır. Dolayısıyla $\dot{V}(t)$ negatif tanımlı olur. Bu da ispatı tamamlar. \square

Örnek 3.6

$$E_{t_0} D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) \quad (3.66)$$

ile verilen kesirli mertebeli singüler sistem için $\tau = 0.01$,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

olarak alınsın.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

için

$$\bar{E} = MEN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = MAN = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = MBN = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix},$$

olarak elde edilir. Böylece (3.66) ile ifade edilen singüler sistem

$${}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t) + \hat{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t - \tau) = \hat{A} \eta(t) + \hat{B} \eta(t - \tau) \quad (3.67)$$

olarak yazılır. Burada

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \eta(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ -x_1(t) - x_2(t) \end{bmatrix}$$

dir. Eğer

$$P = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.09 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0.0925 & 0 \\ 0 & 0.0925 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0.0238 & 0 \\ 0 & 0.0238 \end{bmatrix}$$

alınırsa, $\lambda_{\min}(Q_1) = 0.0925$, $PA = 0.0900$, $\lambda_{\min}(Q_2) = 0.0238$, $PB = 0.0206$ ve

$$\lambda_{\max}(P\hat{A} + \hat{A}^T P + \hat{C}^T (Q_1 + Q_2) \hat{C} + Q_1 + 3Q_2) = -0.0100$$

olarak elde edilir. Teorem 3.7'deki aksiyomlar sağlandığından (3.67) ile verilen nötral sistemin sıfır çözümü ve dolayısıyla (3.66) ile verilen singüler sistemin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

Şimdi, Linear Matris Eşitsizliği yardımıyla Lyapunov-Krasovskii yöntemi kullanılarak

$${}_{t_0}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau_1(t)) + C_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)), \quad (3.68)$$

kesirli mertebeden lineer nötral skaler denklemini kesirli mertebeden lineer singüler sisteme çevirerek (3.68) denkleminin çözümlerinin kararlılığı için yeterli şartlar sunulacaktır. Burada $0 < \alpha < 1$ bir sayı ve ${}_{t_0}D_t^\alpha x(t)$ ifadesi $x(t)$ fonksiyonun α . mertebeden Riemman-Liouville kesirli türevi, $x \in R$ durum vektörü, $A, B, C \in R$ bilinen reel sayılar, her $t > t_0$ için $\tau_1(t), \tau_2(t) > 0$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır.

$\tau_1(t) > 0$ fonksiyonu için $|\tau'_1(t)| < M$ olarak verilsin. $M < m$ olacak şekilde $m \in N$ alalım. Ayrıca

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) \\ x_1\left(t - \frac{\tau_1(t)}{m}\right) &= x_2(t) \\ x_2\left(t - \frac{\tau_1(t)}{m}\right) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ x_{m-1}\left(t - \frac{\tau_1(t)}{m}\right) &= x_m(t) \end{aligned}$$

alındığında

$$\begin{aligned} x_1(t - \tau_1(t)) &= x_2\left(t + \frac{1-m}{m}\tau_1(t)\right), \\ x_1(t - \tau_1(t)) &= x_3\left(t + \frac{2-m}{m}\tau_1(t)\right), \\ &\vdots \\ x_1(t - \tau_1(t)) &= x_{m-1}\left(t + \frac{(m-2)-m}{m}\tau_1(t)\right), \\ x_1(t - \tau_1(t)) &= x_m\left(t - \frac{\tau_1(t)}{m}\right), \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (3.68) denklemi,

$$\begin{cases} {}_{t_0}D_t^\alpha x_1(t) = Ax_1(t) + Bx_m\left(t - \frac{\tau_1(t)}{m}\right) + C_{t_0}D_t^\alpha x_1(t - \tau_2(t)), \\ 0 = x_2(t) - x_1\left(t - \frac{\tau_1(t)}{m}\right) \\ 0 = x_3(t) - x_2\left(t - \frac{\tau_1(t)}{m}\right) \\ \vdots \\ 0 = x_m(t) - x_{m-1}\left(t - \frac{\tau_1(t)}{m}\right) \end{cases} \quad (3.69)$$

olarak ifade edilebilir. Kolaylık için $y(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]^T$, $\frac{\tau_1(t)}{m} = \tau(t)$ alındığında (3.69) sistemi

$$\bar{E}_{t_0}D_t^\alpha y(t) = \bar{A}y(t) + \bar{B}y(t - \tau(t)) + \bar{C}_{t_0}D_t^\alpha y(t - \tau_2(t)), \quad (3.70)$$

olarak yazılır. Burada

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{m-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -I_{m-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Şimdi

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}, \quad y(t) = [\eta_1(t) \ \eta_2(t)], \quad (3.71)$$

olarak yazıldığında (3.70) sistemi

$${}_{t_0}D_t^\alpha \eta_1(t) = A\eta_1(t) + B_1\eta_1(t - \tau(t)) + B_2\eta_2(t - \tau(t)) + C_{t_0}D_t^\alpha \eta_1(t - \tau_2(t)) \quad (3.72)$$

$$0 = \eta_2(t) + B_3\eta_1(t - \tau(t)) + B_4\eta_2(t - \tau(t)). \quad (3.73)$$

olarak yazılır. (3.73) denkleminin kesirli türevi alındığında

$${}_{t_0}D_t^\alpha [\eta_2(t) + B_3\eta_1(t - \tau(t)) + B_4\eta_2(t - \tau(t))] = 0 \quad (3.74)$$

olarak yazılır. (3.73) ve (3.74) denklemleri birlikte düşünüldüğünde

$${}_{t_0}D_t^\alpha \eta_2(t) = -\eta_2(t) - B_3\eta_1(t - \tau(t)) - B_4\eta_2(t - \tau(t))$$

$$-{}_{t_0}D_t^\alpha B_3 \eta_1(t - \tau(t)) - {}_{t_0}D_t^\alpha B_4 \eta_2(t - \tau(t)) \quad (3.75)$$

olarak elde edilir. (3.72) ve (3.75) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_t^\alpha \eta_1(t) \\ D_t^\alpha \eta_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 \eta_1(t) + B_1 \eta_1(t - \tau(t)) + B_2 \eta_2(t - \tau(t)) \\ -\eta_2(t) - B_3 \eta_1(t - \tau(t)) - B_4 \eta_2(t - \tau(t)) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_3 & -B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_t^\alpha \eta_1(t - \tau(t)) \\ D_t^\alpha \eta_2(t - \tau(t)) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_t^\alpha \eta_1(t - \tau_2(t)) \\ D_t^\alpha \eta_2(t - \tau_2(t)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.76)$$

olarak ifade edilebilir. Eğer

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_3 & -B_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_3 & -B_4 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

olarak alındığında (3.76) sistemi

$${}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t) = \hat{A} \eta(t) + \hat{B} \eta(t - \tau(t)) + \hat{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t - \tau(t)) + \bar{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t - \tau_2(t)) \quad (3.78)$$

olarak elde edilir. Dikkat edildiğinde

$$|\tau'(t)| = \frac{|\tau_1'(t)|}{m} \leq d_1 < 1$$

olacak şekilde d_1 sayısı vardır.

Çalışmanın bu kısmında (3.68) nötral denkleminin çözümlerinin kararlılığı (3.78) nötral sistemi yardımıyla elde edilecektir. Bu çalışmanın kalanında \bar{C} ve \hat{C} matrislerinin bütün özdeğerleri birim çember içinde olduğu kabul edilecektir.

Teorem 3.8 Her $t > t_0$ için $|\tau_2'(t)| \leq d_2 < 1$ ve $|\tau'(t)| \leq d_1 < 1$ olsun. Eğer

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12}^T & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13}^T & M_{23}^T & M_{33} & M_{34} \\ M_{14}^T & M_{24}^T & M_{34}^T & M_{44} \end{pmatrix} < 0, \quad (3.79)$$

LME sağlayacak şekilde simetrik pozitif tanımlı P, Q, R_1, R_2 , ve R_3 matrisleri varsa, o zaman (3.78) ile tanımlı kesir mertebeli nötral sisteminin çözümleri ve dolayısıyla (3.68) nötral denkleminin çözümleri asimptotik kararlıdır. Burada

$$\begin{aligned}
M_{11} &= P\hat{A} + \hat{A}^T P + Q + \hat{A}^T (R_1 + R_2) \hat{A}, \\
M_{12} &= P\hat{B} + \hat{A}^T (R_1 + R_2) \hat{B}, \\
M_{13} &= P\hat{C} + \hat{A}^T (R_1 + R_2) \hat{C}, \\
M_{13} &= P\bar{C} + \hat{A}^T (R_1 + R_2) \bar{C}, \\
M_{22} &= \hat{B}^T (R_1 + R_2) \hat{B} - (1 - d_1) Q, \\
M_{23} &= \hat{B}^T (R_1 + R_2) \hat{C}, \\
M_{24} &= \hat{B}^T (R_1 + R_2) \bar{C}, \\
M_{33} &= \hat{C}^T (R_1 + R_2) \hat{C} - (1 - d_1) R_1, \\
M_{34} &= \hat{C}^T (R_1 + R_2) \bar{C}, \\
M_{44} &= \bar{C}^T (R_1 + R_2) \bar{C} - (1 - d_2) R_2,
\end{aligned}$$

ile tanımlı ve m bir pozitif sayıdır.

İspat. Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
V(t) &= {}_{t_0}D_t^{\alpha-1} (\eta^T(t) P \eta(t)) + \int_{t-\tau(t)}^t \eta^T(s) Q \eta(s) ds \\
&+ \int_{-\tau(t)}^0 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t+s))^T R_1 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t+s)) ds \\
&+ \int_{-\tau_2(t)}^0 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t+s))^T R_2 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t+s)) ds
\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Lemma 2.1 ve Lemma 2.2'den (3.78) sisteminin çözümleri boyunca $V(t)$ fonksiyonun türevi

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= {}_{t_0}D_t^\alpha (\eta^T(t) P \eta(t)) + \eta^T(t) Q \eta(t) - (1 - \tau'(t)) \eta^T(t - \tau(t)) Q \eta(t - \tau(t)) \\
&+ ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t))^T R_1 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t)) \\
&- (1 - \tau'(t)) ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t - \tau(t)))^T R_1 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t - \tau(t))) \\
&+ ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t))^T R_2 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t)) \\
&- (1 - \tau_2'(t)) ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t - \tau_2(t)))^T R_2 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t - \tau_2(t)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\eta^T(t) P_{t_0} D_t^\alpha \eta(t) + \eta^T(t) Q \eta(t) - (1-d_1) \eta^T(t-\tau(t)) Q \eta(t-\tau(t)) \\
&\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t))^T R_1 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t)) + ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t))^T R_2 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t)) \\
&\quad - (1-d_1) ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t-\tau(t)))^T R_1 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t-\tau(t))) \\
&\quad - (1-d_2) ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t-\tau_2(t)))^T R_2 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t-\tau_2(t)))
\end{aligned} \tag{3.80}$$

olarak yazılır. (3.78) denkleminde

$$\begin{aligned}
2\eta^T(t) P_{t_0} D_t^\alpha \eta(t) &= 2\eta^T(t) P [\hat{A}\eta(t) + \hat{B}\eta(t-\tau(t)) \\
&\quad + \hat{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau(t)) + \bar{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau_2(t))] \\
&= \eta^T(t) (P\hat{A} + \hat{A}^T P) \eta(t) + 2\eta^T(t) P\hat{B}\eta(t-\tau(t)) \\
&\quad + 2\eta^T(t) P\hat{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau(t)) \\
&\quad + 2\eta^T(t) P\bar{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau_2(t))
\end{aligned} \tag{3.81}$$

ve

$$\begin{aligned}
&({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t))^T R_1 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t)) + ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t))^T R_2 ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t)) \\
&= [\hat{A}\eta(t) + \hat{B}\eta(t-\tau_1(t)) + \hat{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau(t)) + \bar{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau_2(t))]^T (R_1 + R_2) \\
&\quad \times [\hat{A}\eta(t) + \hat{B}\eta(t-\tau_1(t)) + \hat{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau(t)) + \bar{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau_2(t))] \\
&= \eta^T(t) \hat{A}^T (R_1 + R_2) \hat{A} \eta(t) + \eta^T(t) \hat{A}^T (R_1 + R_2) \hat{B} \eta(t-\tau(t)) \\
&\quad + \eta^T(t) \hat{A}^T (R_1 + R_2) \hat{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau(t)) \\
&\quad + \eta^T(t) \hat{A}^T (R_1 + R_2) \bar{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau_2(t)) \\
&\quad + \eta^T(t-\tau(t)) \hat{B}^T (R_1 + R_2) \hat{A} \eta(t) \\
&\quad + \eta^T(t-\tau(t)) \hat{B}^T (R_1 + R_2) \hat{B} \eta(t-\tau(t)) \\
&\quad + \eta^T(t-\tau(t)) \hat{B}^T (R_1 + R_2) \hat{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau(t)) \\
&\quad + \eta^T(t-\tau(t)) \hat{B}^T (R_1 + R_2) \bar{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau_2(t)) \\
&\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t-\tau(t)))^T \hat{C}^T (R_1 + R_2) \hat{A} \eta(t) \\
&\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t-\tau(t)))^T \hat{C}^T (R_1 + R_2) \hat{B} \eta(t-\tau(t)) \\
&\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t-\tau(t)))^T \hat{C}^T (R_1 + R_2) \hat{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau(t)) \\
&\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t-\tau(t)))^T \hat{C}^T (R_1 + R_2) \bar{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t-\tau_2(t)) \\
&\quad + ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t-\tau_2(t)))^T \bar{C}^T (R_1 + R_2) \hat{A} \eta(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t - \tau_2(t)))^T \bar{C}^T (R_1 + R_2) \hat{B} \eta(t - \tau(t)) \\
& + ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t - \tau_2(t)))^T \bar{C}^T (R_1 + R_2) \hat{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t - \tau(t)) \\
& + ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t - \tau_2(t)))^T \bar{C}^T (R_1 + R_2) \bar{C}_{t_0} D_t^\alpha \eta(t - \tau_2(t))
\end{aligned} \tag{3.82}$$

olarak elde edilir. (3.80), (3.81) ve (3.82) ifadelerinden

$$\dot{V}(t) \leq \xi^T M \xi$$

olduğu görülür. Burada

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{12}^T & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13}^T & M_{23}^T & M_{33} & M_{34} \\ M_{14}^T & M_{24}^T & M_{34}^T & M_{44} \end{pmatrix},$$

$$M_{11} = P\hat{A} + \hat{A}^T P + Q + \hat{A}^T (R_1 + R_2) \hat{A},$$

$$M_{12} = P\hat{B} + \hat{A}^T (R_1 + R_2) \hat{B},$$

$$M_{13} = P\hat{C} + \hat{A}^T (R_1 + R_2) \hat{C},$$

$$M_{14} = P\bar{C} + \hat{A}^T (R_1 + R_2) \bar{C},$$

$$M_{22} = \hat{B}^T (R_1 + R_2) \hat{B} - (1 - d_1) Q,$$

$$M_{23} = \hat{B}^T (R_1 + R_2) \hat{C},$$

$$M_{24} = \hat{B}^T (R_1 + R_2) \bar{C},$$

$$M_{33} = \hat{C}^T (R_1 + R_2) \hat{C} - (1 - d_1) R_1,$$

$$M_{34} = \hat{C}^T (R_1 + R_2) \bar{C},$$

$$M_{44} = \bar{C}^T (R_1 + R_2) \bar{C} - (1 - d_2) R_2,$$

$$\xi = \left(\eta^T(t), \eta^T(t - \tau(t)), ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t - \tau(t)))^T, ({}_{t_0}D_t^\alpha \eta(t - \tau_2(t)))^T \right)^T.$$

(3.77) eşitsizliğinden $\dot{V}(t)$ negatif tanımlıdır. Böylece ispat tamamlanır. \square

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, sırasıyla;

$$\begin{aligned}
 E_{t_0}D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bx(t - \tau), \\
 {}_{t_0}D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bx(t - \tau_1(t)) + C_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)), \\
 {}_{t_0}D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + B_1f_1(t, x(t)) + B_2f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)), \\
 {}_{t_0}D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + B_1f_1(t, x(t)) + B_2f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\
 &\quad + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds,
 \end{aligned}$$

kesir mertebeli singular sistemler, lineer ve lineer olmayan kesir mertebeli nötral denklem sistemleri ile kesir mertebeli nötral sinir ağlarının asimptotik kararlılığı için yeterli koşullar Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli kullanılarak elde edilmiştir. Lineer ve lineer olmayan kesir mertebeli nötral denklem sistemleri ve kesir mertebeli nötral sinir ağlarının kararlılığına ilişkin iki ayrı sonuç elde edilmiştir. Bu sonuçlar, örneklerle desteklenmiş ve karşılaştırma amacıyla konveks optimizasyon problemleri olarak ifade edilmiştir. Konveks optimizasyon problemleri, Matlab programının LMI Toolbox paketi kullanılarak çözülmüş ve bu çözümler tablo halinde sunulmuştur. Tablolardan, her bir problem için ifade edilen ilk teoremin, ikinci teoremden daha kullanışlı olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, gecikmeli singular sistemler, gecikmeli nötral diferansiyel denklem sistemi olarak modellenerek, bu sistemlerin kararlılığı için bazı koşullar sunulmuştur.

4.2 Öneriler

Bu tez çalışmasında, incelenen sistemlerin kararlılığının Lyapunov-Razumikhin yöntemi ile araştırılması önerilmektedir. Ayrıca, bu sistemlerin kararlılık analizi sırasında Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin tamsayı mertebeden türevi kullanılmıştır. Bununla birlikte, Lyapunov-Krasovskii fonksiyonelinin kesirli türevi kullanılarak da kararlılık analizi yapılabilir. Bu çalışmada incelenen sistemlerin yanı sıra, araştırmacılara üzerinde henüz çalışılmamış aşağıdaki sistemler

$$E_{t_0}D_t^\alpha x(t) = f(x(t), x(t - \tau_1(t)), {}_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t))) + A \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds,$$

$$E_{t_0}D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + B_1f_1(t, x(t)) + B_2f_2(t, x(t - \tau_1(t))) + C_{t_0}D_t^\alpha x(t - \tau_2(t)) \\ + B_3 \int_{t-\tau_3(t)}^t f_3(s, x(s)) ds,$$

singular sistemlerin kararlılığı ve sınırlılığı araştırılması önerilir.



KAYNAKLAR

- Ahmad, S., Rao, M.R.M., 1999, Theory of ordinary differential equations: With applications of biology and engineering, *Affiliated East-West Private Lmt.*
- Altun, Y., Tunç, C. 2020. On the asymptotic stability of a nonlinear fractional-order system with multiple variable delays, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, 15 (1), 26.
- Ardjouni, A., Djoudi, A. 2011. Fixed points and stability in linear neutral differential equations with variable delays, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74 (6), 2062-2070.
- Atangana, A., Akgül, A., Owolabi, K.M. 2020. Analysis of fractal fractional differential equations, *Alexandria Engineering Journal*, 59, 1117–1134.
- Bellen, A., Zennaro, M., 2003, Numerical methods for delay differential equations, *Clarendon Press*, New York.
- Borri, A., Cacace, F., Gaetano, A.D., Germani, A., Manes, C., Palumbo, P., Panunzi, S., Pepe, P. 2017. Luenberger-Like Observers for Nonlinear Time-Delay Systems with Application to the Artificial Pancreas: The Attainment of Good Performance, *IEEE Control Systems*, 37, 33–49.
- Burton, T.A., 1985, Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, *Academic Press*, Orlando.
- Chen, H., Shi, P., Lim, C., Hu, P. 2016a. Exponential Stability for Neutral Stochastic Markov Systems With Time-Varying Delay and Its Applications, *IEEE Transactions on Cybernetics*, 46, 1350–1362.
- Chen, L., He, Y., Chai, Y., Wu, R. 2014. New results on stability and stabilization of a class of nonlinear fractional-order systems, *Nonlinear Dynamics*, 75, 633–641.
- Chen, L., Liu, C., Wu, R., He, Y., Chai, Y. 2016b. Finite-time stability criteria for a class of fractional-order neural networks with delay, *Neural Computing and Applications*, 27, 549–556.
- Cheng, L., Hou, Z., Tan, M. 2008. A Neutral-Type Delayed Projection Neural Network for Solving Nonlinear Variational Inequalities, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 55, 806–810.
- Dai, L., 1989, Singular control systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, *Springer-Verlag*, Berlin, 118.
- Deng, W., Li, C., Lü, J. 2007. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays, *Nonlinear Dynamics*, 48, 409–416.
- Dinh, T.N., Kamal, S., Pandey, R. 2023. Fractional-Order System: Control Theory and Applications, *Fractal and Fractional*, 7(1), 48.
- Domoshnitsky, A., Levi, S., Kappel, R.H., Litsyn, E., Yavich, R. 2021. Stability of neutral delay differential equations with applications in a model of human balancing, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*.
- Driver, R. 1977. Ordinary and Delay Differential Equations, *Springer-Verlag*, , New York-Deidelberg.

- Duarte-Mermoud, M.A., Aguila-Camacho, N., Gallegos, J.A., Castro-Linares, R. 2015. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22 (1-3), 650–659.
- Fabbri, G., Faggian, S., Gozzi, F. 2008. On the Dynamic Programming approach to economic models governed by DDE's, *Math. Popul. Stud.*, 15 (4), 267-290.
- Gu, K., 2000, An integral inequality in the stability problem of time-delay systems, volume 3, *IEEE*, 2805–2810.
- Hale, J.K., 1977, Theory of Functional Differential Equations, *Springer-Verlag*, New York-Heidelberg.
- Hale, J.K., Lunel, S.M.V., 1993, Introduction to functional differential equations, *Springer-Verlag*, New York.
- Haykin, S., 1998, Neural networks: a comprehensive foundation, *Prentice Hall PTR*.
- Heymans, N., Podlubny, I. 2006. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives, *Rheologica Acta*, 45, 765–771.
- Hopfield, J.J. 1982. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proceedings of The National Academy of Sciences*, 79 (8), 2554-2558.
- Keller, A. 2010. Contribution of the delay differential equations to the complex economic macrodynamics, *WSEAS Transactions on Systems*, 9 (4), 358-371.
- Kilbas, A.A., Srivastava, H., Trujillo, J.J., ve ark., 2006, Theory and applications of fractional differential equations, volume 204, *elsevier*.
- Korkmaz, E., Özdemir, A. 2019. On stability of fractional differential equations with Lyapunov functions, *Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7 (1), 635–638.
- Korkmaz, E., Özdemir, A. 2022. Asymptotical Stability of Riemann-Liouville Fractional Neutral System with Multiple Time-varying Delays., *Applications & Applied Mathematics*, 17 (1).
- Korkmaz, E., Özdemir, A. 2023. LMI Approach for Asymptotical Stability of Riemann-Liouville Nonlinear Fractional Neutral Systems with Time-Varying Delays, *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 28 (3), 908–918.
- Korkmaz, E., Özdemir, A., Yildirim, K. 2022. Asymptotical Stability of Riemann-Liouville Nonlinear Fractional Neutral Neural Networks with Time-Varying Delays, *Journal of Mathematics*, 2022 (1), 6832472.
- Kuang, Y., 1993, Delay differential equations with applications in population dynamics, *Academic press*, Boston.
- Lakshmanan, S., Lim, C., Prakash, M., Nahavandi, S., Balasubramaniam, P. 2017. Neutral-type of delayed inertial neural networks and their stability analysis using the LMI Approach, *Neurocomputing*, 230, 243–250.
- Lakshmikantham, V., Leela, S., 1969, Differential and integral inequalities; theory and applications PART B: Functional, partial, abstract, and complex differential equ-

ations, *Academic press*.

- Li, H., Zhong, S.m., Li, H.b. 2015. Asymptotic stability analysis of fractional-order neutral systems with time delay, *Advances in Difference Equations*, 2015, 1–11.
- Liu, M., Dassios, I., Milano, F. 2018. On the Stability Analysis of Systems of Neutral Delay Differential Equations, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 38, 1639 – 1653.
- Liu, S., Jiang, W., Li, X., Zhou, X.F. 2016a. Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems, *Applied Mathematics Letters*, 51, 13–19.
- Liu, S., Wu, X., Zhang, Y.J., Yang, R. 2017. Asymptotical stability of Riemann–Liouville fractional neutral systems, *Applied Mathematics Letters*, 69, 168–173.
- Liu, S., Wu, X., Zhou, X.F., Jiang, W. 2016b. Asymptotical stability of Riemann–Liouville fractional nonlinear systems, *Nonlinear Dynamics*, 86, 65–71.
- Luo, J. 2007. Fixed points and stability of neutral stochastic delay differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 334, 431–440.
- Lyapunov, A.M. 1992. The general problem of the stability of motion, *International journal of control*, 55 (3), 521–790.
- Ma, J., Zheng, B., Zhang, C. 2012. A Matrix Method for Determining Eigenvalues and Stability of Singular Neutral Delay-Differential Systems, *J Appl Math*, 2012, 749847:1–749847:11.
- Ma, S., Zhang, C. 2012. H_∞ control for discrete-time singular Markov jump systems subject to actuator saturation, *Journal of the Franklin Institute*, 349 (3), 1011–1029.
- Magin, R. 2004a. Fractional calculus in bioengineering, part 1, *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 32 (1).
- Magin, R. 2004b. Fractional calculus in bioengineering, part 2, *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 32 (2).
- Magin, R. 2004c. Fractional calculus in bioengineering, part 3, *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 32 (3&4).
- Malkin, I.G., 1959, Theory of Stability of Motion: Translated from a Publication of the State Publishing House of Technical-Theoretical Literature, Moscow-Leningrad, 1952, volume 3352, *US Atomic Energy Commission, Office of Technical Information*.
- Metzler, R., Klafter, J. 2000. The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Physics Reports*, 339 (1), 1–77.
- Norkin, S.B., El’sgol’ts, L.E., 1973, Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments, *Academic Press*, New York-London.
- Ostertag, E. 2011. Linear Matrix Inequalities, *Mono- and Multivariable Control and Estimation*, 267–290.
- Persidskiy, K. 1933. About dynamic stability in the first approximation, *Matematicheskii Sbornik*, 40, 284–293.
- Podlubny, I., 1999, Fractional differential equations: an introduction to fractional deriva-

- tives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, *Academic Press*, San Diego.
- Qian, D., Li, C., Agarwal, R.P., Wong, P.J. 2010. Stability analysis of fractional differential system with Riemann–Liouville derivative, *Mathematical and Computer Modelling*, 52 (5-6), 862–874.
- Raffoul, Y.N. 2004. Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delays using fixed-point theory, *Mathematical and Computer Modelling*, 40 (7-8), 691–700.
- Schmidt, A., Gaul, L. 2002. Finite Element Formulation of Viscoelastic Constitutive Equations Using Fractional Time Derivatives, *Nonlinear Dynamics*, 29, 37–55.
- Shakourifar, M., Enright, W. 2011. Reliable Approximate Solution of Systems of Volterra Integro-Differential Equations with Time-Dependent Delays, *SIAM J Sci Comput*, 33, 1134–1158.
- Smith, O.J. 1959. A controller to overcome dead time, *ISA journal*, 6 (2), 28–33.
- Volterra, V. 1926. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically, *Nature*, 119 (2983), 12–13.
- Wangersky, P.J., Cunningham, W.J. 1957. Time Lag in Prey-Predator Population Models, *Ecology*, 38 (1), 136–139.
- Wu, M., Huang, N., wen Zhao, C. 2008. Fixed Points and Stability in Neutral Stochastic Differential Equations with Variable Delays, *Fixed Point Theory and Applications*, 2008, 1–11.
- Wu, W.H., Wang, F., Chang, M.S. 2010. Sensitivity analysis of dynamic biological systems with time-delays, *BMC Bioinformatics*, 11, S12 – S12.
- Xu, L. 2017. Study on Systematic Modeling Method of Fractional Calculus, *Advances in Engineering Research*, 107, 428-431.
- Xu, S., Van Dooren, P., Stefan, R., Lam, J. 2002. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty, *IEEE Transactions on automatic control*, 47 (7), 1122–1128.
- Yang, X., Li, C., Huang, T., Song, Q. 2017. Mittag–Leffler stability analysis of nonlinear fractional-order systems with impulses, *Applied Mathematics and Computation*, 293, 416–422.
- Zhang, B. 2005. Fixed points and stability in differential equations with variable delays, *Nonlinear analysis: theory, methods & applications*, 63 (5-7), e233–e242.
- Zhang, Y., Li, D., Lao, D. 2012. Smith predictor in the DDE application, *24th Chinese Control and Decision Conference*, 2346–2351.
- Zhang, Y., Xu, S., Chu, Y., Lu, J. 2010. Robust global synchronization of complex networks with neutral-type delayed nodes, *Appl Math Comput*, 216, 768–778.
- Zheng, C., Wei, Z., Wang, Z. 2016. Robustly adaptive synchronization for stochastic Markovian neural networks of neutral type with mixed mode-dependent delays, *Neurocomputing*, 171, 1254–1264.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Abdulhamit ÖZDEMİR

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Muş İMKB Anadolu Lisesi, Muş, Sayısal	2007-2011
Üniversite	: Muş Alparslan Üniversitesi, Muş, Matematik	2011-2015
	Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, Adalet	2011-2014
	Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, İktisat	2014-2016
Yüksek Lisans	: Bitlis Eren Üniversitesi, Bitlis, Uygulamalı Matema- tik	2015-2017
Doktora	: Muş Alparslan Üniversitesi, Muş, Matematik	2018-2024

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2018-2019	Güzeltepe İmam Hatip Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2019-2020	Ahi Evran Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2020-2021	Muş Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2021-2023	Muş Bilim Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2023-	Muş Alparslan Üniversitesi	Arş. Gör.

UZMANLIK ALANI

-

YABANCI DİLLER

İngilizce

BELİRTMEK İSTEDİĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

-

YAYINLAR

1. Korkmaz, E., Özdemir, A. 2019. On stability of fractional differential equations with Lyapunov functions, *Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi* 7 (1), 635-638.
2. Korkmaz, E., Özdemir, A. ve Yıldırım, K. 2022. Asymptotical Stability of Riemann-Liouville Nonlinear Fractional Neutral Neural Networks with Time-Varying Delays, *Journal of Mathematics*, 1, 1-13.
3. Korkmaz, E., Özdemir, A. 2022. Asymptotical Stability of Riemann-Liouville Fractional Neutral System with Multiple Time-varying Delays, *Appl. Appl. Math.* 17 (1), 99-108.
4. Korkmaz, E., Özdemir, A. 2022. Stability and Boundedness of Solutions of Nonlinear Third Order Differential Equations with Bounded Delay, *Journal of Mathematical Sciences and Modelling* 5 (2), 40-47.
5. Korkmaz, E., Özdemir, A. 2023. LMI Approach for Asymptotical Stability of Riemann–Liouville Nonlinear Fractional Neutral Systems with Time-Varying Delays, *Yuzuncu Yil University Journal of the Institute of Natural & Applied Sciences* 28 (3), 908-918.