



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR KİRİŞ SİSTEMİ İÇİN GEREKLİ VE
YETERLİ OPTİMALLIK KOŞULLARI
ÜZERİNE**

Hacer KARA KUBLAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2024
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR KİRİŞ SİSTEMİ İÇİN GEREKLİ VE
YETERLİ OPTİMALLIK KOŞULLARI
ÜZERİNE

Hacer KARA KUBLAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Kenan YILDIRIM

Jüri : Prof. Dr. Sertan ALKAN

Jüri : Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

Temmuz-2024
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

Hacer KARA KUBLAY tarafından hazırlanan “Bir Kiriş Sistemi İçin Gerekli Ve Yeterli Optimallik Koşulları Üzerine” adlı tez çalışması 14/06/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Sertan ALKAN

.....

İskenderun Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü

Danışman

Prof. Dr. Kenan YILDIRIM

.....

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü

Üye

Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

.....

Muş Alparslan Üniversitesi, Fakülte, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Hacer KARA KUBLAY

Tarih :/...../2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR KİRİŞ SİSTEMİ İÇİN GEREKLİ VE YETERLİ OPTİMALLIK KOŞULLARI ÜZERİNE

Hacer KARA KUBLAY

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kenan YILDIRIM

Bu tezde, Mindlin'in gradyan elastisite teorisine dayanan bir kiriş modelinin optimallik koşulları incelenmiştir. Kiriş sistemi harici bir dış kuvvete, homojen olmayan sınır koşullarına, performans gösterge fonksiyonu ve yer değiştirme fonksiyonu üzerinde eşitlikler/eşitsizlikler şeklinde tanımlanan bazı integral kısıtlamalarına bağlıdır. Sistemin optimallik koşullarını elde etmeden önce, kiriş sisteminin çözümünün tekliğini kanıtlamak için enerji integral yöntemi kullanılmıştır. Sistemin kontrol edilebilirlik özellikleri de tartışılmıştır. Kiriş sistemine karşılık gelen eşlenik sistem, maksimum prensibini kullanabilmek için uygun terminal koşulları ile türetilmiştir. Elde edilen teorik sonuçların doğruluğunu göstermek için, gerçek bir mekanik problem örneklendirilmiş ve sonuçlar tablo ve grafikler ile sunulmuştur.

2024, 28 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Esneklik, Optimallik, Mindlin, Maksimum Prensibi.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

ON THE NECESSARY AND SUFFICIENT OPTIMALITY CONDITIONS FOR A BEAM SYSTEM

Hacer KARA KUBLAY

**Muş Alparslan University
Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Advisor: Prof. Dr. Kenan YILDIRIM

In this thesis, optimality conditions of a beam model based on Mindlin's gradient elasticity theory is studied. The beam system depends on the external excitation function, non-homogeneous boundary conditions and some mixed integral constraints including inequality/equality on the control function and state variable. Before obtaining the optimality conditions of the system, energy integral method is employed for proving the uniqueness of the solution of the beam system. Controllability properties of the system is also discussed. Adjoint system corresponding to beam system is derived with suitable terminal conditions for achieving the maximum principle. In order to show the confirmation of the obtained theoretical results. A real mechanical problem is illustrated and results are presented in the table and graphical forms.

2024, 28 Pages

Keywords: Elasticity, Optimality, Mindlin, Maximum Principle.

TEŐEKKÖR

Bu alıőmanın gerekleőtirilmesinde bana yardımcı olan, yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerini paylaşan danışman hocam Prof. Dr. Kenan YILDIRIM' a teőekkör ederim. Canım eőim ağrı KUBLAY, biricik oğlum Harun KUBLAY varlığınız ve hayatımda olduğunuz için teőekkör ederim.

Hacer KARA KUBLAY
MUŞ-2024



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar DİZİNİ.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ.....	6
3. EŞLENİK SİSTEM VE OPTİMAL KOŞULLARI.....	8
4. SAYISAL ÖRNEK VE TARTIŞMA	19
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	24
KAYNAKLAR	25
EKLER	27

TABLolar DİZİNİ

Tablo 4.1 λ_3 'nin farklı değerleri için $J(v)$ ve $J(C)$ değerleri.....23



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 Kirişin enine kesiti.....	19
Şekil 4.2 Kontrollü ve kontrolsüz yer değiştirmeler	22
Şekil 4.3 Kontrollü ve kontrolsüz hızlar.....	22



1. GİRİŞ

Doğrusal veya Doğrusal olmayan plastisite ve elastisiteyi içeren klasik teorilerin, katı yapıları modelleyerek insan yaşam kalitesini artırmak için bilim ve mühendisliğe katkıları yadsınamaz. Euler-Bernoulli veya Timoshenko modelleri olarak da adlandırılan bu sürekli yapı teorileri, 1750'li yıllarda katı yapıların korunum yasalarını makro ölçeklerde açıklamak için ortaya atılmıştır. 1920'lerden sonra, özellikle gelişmiş optik ve elektron mikroskoplarının ayrıntılı kullanımından sonra, mühendislik ve malzeme bilimindeki yapıların ve sistemlerin boyutları mikro ve nano alanlara kadar ölçeklendirilmiştir. Malzemelerin mikro-nano alanlardaki esneklik özellikleri ve karakteristik davranışları da başlangıçta klasik sürekli yapı modelleri ile açıklanmaya çalışılmıştır. Ancak gelişmiş elektron ve optik mikroskoplarla yapılan gözlemler, klasik sürekli yapı teorilerin mikro veya nano ölçekli katı yapıların karakteristik davranışlarını ve elastisite özelliklerini açıklayamadığını, çünkü temel nano veya mikro yapı malzemelerin karakteristik iç uzunluk ölçeği parametrelerinin denklemlerde yer almadığını göstermiştir. Bu zorlukların üstesinden gelmek için, Cosserat ve Cosserat (1909), Tiersten ve Bleustein (1974)'in makalelerinde çeşitli çalışmalar ve teoriler sunulmuştur.

Mindlin (1964), mikro boyuttaki yapısal etkileri veya malzemelerdeki çift gerilme etkilerini hesaba katmak için daha yüksek dereceli terimler içeren doğrusal elastisite teorisini de içine alan gradyan elastisite teorisini tanıtmış ve geliştirmiştir. Mindlin, potansiyel ve kinetik enerji ifadelerine yeni terimler ekleyerek ve mikro yapıyı makro yapıyla ilişkilendiren açık ifadeler sunmadan içsel mikro yapısal parametreler ekleyerek teorisini geliştirmiştir (Polyzos ve Fotiadis, 2012). Mindlin'in bu teorisine göre, gerinimdeki enerji elastik gerinime ve elastik gerinimin gradyanlarına tabidir. Bu gradyanlar nedeniyle, yapı denklemleri mikro boyutlarda gradyan katsayıları olarak adlandırılan ek katsayılar içerir (Cosserat ve Cosserat (1909), (Polyzos ve Fotiadis (2012).) Buraya kadar yapılan çalışmalar, her ne kadar zarif olsalar da hiçbiri Mindlin teorisinde görünen sınır koşullarının yanı sıra hareket denklemini sürekli yapısal hücreler açısından bir bütün olarak türetememiştir. Dahası, Mindlin'in ikinci gradyan elastik teorisini doğrulayan yapısal süreklilik modeli literatürde sunulmamıştır. Polyzos ve Fotiadis (2012) çalışmasında Mindlin teorisinde ortaya çıkan ve Mindlin'in ikinci gradyan elastik teorisini doğrulayan bir model hareket denklemi sunulmuştur. Öte yandan, bu tür titreşim içeren sistemler için gerekli ve yeterli optimalite koşullarını belirlemek amacıyla

L. S. Pontryagin tarafından 1960'lerde adi diferansiyel denklemler ile temsil edilen optimal kontrol problemleri için gerekli bir koşul olarak Maksimum prensibi tanıtıldı (Pontryagin ve arkadaşları,1962). Egorov (1967), maksimum prensibinin kısmi diferansiyel denklemlerle modellenen bazı optimal kontrol problemleri için de gerekli koşul olduğunu gösterdiler. Barnes (1971) ve Lee (1963), kısıt fonksiyonları üzerinde bazı dışbükeylik varsayımları altında maksimum prensibinin kontrol problemleri için gerek ve aynı zamanda yeter şart olduğunu kanıtladılar. Russell (1966) ve Komkov (1968), ikinci dereceden performans fonksiyonelleri içeren bir sistem için gerekli ve yeterli koşulları elde etti. Yildirim (2020)'da, geliştirilmiş bir Boussinesq sisteminin aktif kontrolünü maksimum prensibi ile elde etti. Kucuk ve Yildirim (2014) birden fazla kontrol fonksiyonu içeren titreşime sahip bir Euler- Bernoulli kiriş sistemi için gerekli ve yeterli koşulların maksimum prensibi formunda elde edildiğini gösterdi. Sadek (1988) çalışmasında, dağıtık parametrelili bir sistem için gerekli ve yeterli koşullar maksimum prensip formunda türetilmiştir.

Bu çalışmanın literatüre özgün katkısı, Mindlin gradyan elastisite teorisini sağlayan bir kiriş sisteminin gerekli ve yeterli optimalite koşullarının ilk kez bu çalışmada maksimum prensibi şeklinde türetilmiş olmasıdır. Kucuk ve Yildirim (2014) ve Sadek (1988) çalışmaları ışığında yapılan bu çalışmada, Mindlin'in gradyan elastisite teorisini karşılayan bir kiriş modelinin gerekli ve yeterli optimalite koşulları maksimum prensip formunda incelenmiştir. Söz konusu kiriş sistemi, sistemde istenmeyen titreşimlere neden olan harici dış uyartım fonksiyonuna, termal veya manyetik etkileri gösteren homojen olmayan sınır koşullarına ve kontrol fonksiyonu ve performans indeks fonksiyoneli üzerinde eşitlik/eşitsizlik içeren bazı integral kısıtlamalarına bağlıdır. Sistemin optimalite koşullarını elde etmeden önce enerji integral yöntemi kullanılarak kiriş sisteminin çözümünün tekliği kanıtlanmıştır. Sistemin kontrol edilebilirlik özellikleri de gözlenebilirlik üzerinden tartışılmıştır. Kiriş sistemine karşılık gelen adjoint sistem, maksimum prensibi kullanabilmek için uygun terminal koşulları ile türetilmiştir. Elde edilen teorik sonuçların doğruluğunu göstermek için sayısal bir örnek verilmiş ve sonuçlar tablo ve grafik formunda sunulmuştur. Tablo ve grafikler incelendiğinde maksimum prensip formunda sunulan koşulların optimalite için gerekli ve yeterli olduğu görülmektedir.

Polyzos ve Fotiadis (2012) 'in tanımladığı aşağıdaki kiriş sistemini ele alalım;

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{l^4}{36} \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{l^2 p'}{3} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + f(t, x) + C(t, x) \quad (1)$$

Burada $v(t, x)$ yerdeğiştirme fonksiyonu, $(t, x) \in \Omega = \{(t, x) : t \in [0, t_f], x \in [0, l]\}$, x uzay değişkeni, l kirişin uzunluğu, t zaman değişkeni, t_f önceden belirlenmiş kontrol süresi, $c^2 = \frac{E}{p}$ kirişin kütle yoğunluğu, E elastisite modülü, $\rho' \equiv \rho$ mikro-yapısal hücrelerin yoğunluğu, f harici uyarım fonksiyonu, $C(t, x)$ kontrol fonksiyonu, $C(t, x) = C(t, x)$ veya genel olarak $C(t, x) = C(t)D(x)$ olup, burada $C(t)$ kontrol kuvveti fonksiyonu ve $D(x)$ kontrol kuvvetinin kiri üzerinde dağılımını gösteren bir fonksiyondur. $C(t, x) \in C_{ad}$ burada C_{ad} kabul edilebilir kontrol fonksiyonları kümesidir ve m bir sabit olmak üzere $C_{ad} = \{C(t, x) | C(t, x) \in L^2(\Omega), |C(t, x)| \leq m < \infty\}$ ile tanımlanır. Denklem (1) aşağıdaki başlangıç koşullarına tabidir.

$$v(0, t) = v_0(x) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = v_1(x) \quad (2)$$

ve

$v_0(x) \in H^1(0, l)$, $H^1(0, l) = \{u_0(x) \in L^2(0, l) : \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \in L^2(0, l)\}$, $v_1(x) \in L^2(0, l)$, ve $L^2(\Omega)$, Lebesgue anlamında verilen aşağıdaki iç çarpım ve norm ile Ω üzerinde karesi Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların kümesini temsil etmektedir;

$$\| \phi \|^2 = \langle \phi, \phi \rangle, \quad \langle \phi, \varphi \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \phi \varphi d\Omega.$$

Denklem (1) aşağıda verilen homojen olmayan sınır koşullarına tabidir

$$\begin{aligned} v(t, 0) &= \zeta_1(t), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, 0) = \zeta_2(t), \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, 0) = \zeta_3(t), \\ v(t, l) &= \zeta_4(t), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, l) = \zeta_5(t), \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, l) = \\ &\zeta_6(t), \end{aligned} \quad (3)$$

veya

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \xi_1(t), \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, 0) = \xi_2(t), \quad \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(t, 0) = \xi_3(t),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, l) = \xi_4(t), \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, l) = \xi_5(t), \quad \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(t, l) = \xi_6(t), \quad (4)$$

Sistem üzerinde aşağıdaki varsayımları yapalım;

$$(A1) \quad \frac{\partial^i v}{\partial t^i}, \frac{\partial^j v}{\partial x^j}, \frac{\partial^{m+n} v}{\partial x^m \partial t^n} \in L^2(\bar{\Omega}), \quad i = 0,1,2, \quad j = 0,1,2, \dots, 6, \quad m, n = 0,1,2,$$

$$(A2) \quad \zeta_i(t), \xi_i(t), (t) \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, 6.$$

O halde, denklem (1)-(4) ile tanımlanan sistemin bir çözümü vardır.(Zachmaonoglou,1986).

Teorem 1. Denklem (1) - (4) ile adlandırılan sistemin tek bir çözümü vardır.

İspat. v_1 ve v_2 nin aynı koşullar altında sistemin iki çözümü olduğunu varsayalım. O zaman fark $u = v_1 - v_2$ aşağıdaki homojen başlangıç koşullarını sağlar.

$$u(x, t) = 0, \quad u_t(x, t) = 0 \quad \text{ve} \quad t = 0 \quad (5)$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} u(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, 0) = 0, \\ u(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \ell) = 0, \end{aligned} \quad (6a)$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(t, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(t, \ell) = 0, \end{aligned} \quad (6b)$$

Şeklinde olur ve hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u_{xx} + \frac{1^2}{12} u_{xxxx} + \frac{1^4}{36} u_{xxxxxx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} + \frac{1}{c^2} \frac{1^2 p'}{3 p} u_{ttxx} = 0 \quad (7)$$

u 'nun özdeş olarak sıfıra eşit olduğunu gösterelim. Bunun için enerji integral fonksiyoneli aşağıdaki gibi tanıtalım:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2) + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} (u^2) + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6}{\partial x^6} (u^2) - \frac{1}{c^2} (u_t^2) + \frac{1}{c^2} \frac{\ell^2 p'}{3 p} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_t^2) \right\} dx \quad (8)$$

Ve $E(t)$ 'nin t 'den bağımsız olduğunu gösterelim. $E(t)$ 'nin t 'ye göre türevini alarak aşağıdaki eşitliği görmek kolaydır;

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u u_t) + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} (u u_t) + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6}{\partial x^6} (u u_t) - \frac{1}{c^2} (u_t u_{tt}) + \right. \\ \left. \frac{1}{c^2} \frac{\ell^2 p'}{3 p} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_t u_{tt}) \right\} dx \end{aligned} \quad (9)$$

Kısmi integrasyon alırsak ve denklem (6) ile belirtilen sınır koşullarını kullanırsak, denklem (9) aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^\ell \left\{ u_{xx} + \frac{\ell^2}{12} u_{xxxx} + \frac{\ell^4}{36} u_{xxxxxx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} + \frac{1}{c^2} \frac{\ell^2 p'}{3 p} u_{ttxx} \right\} u_t dx \quad (10)$$

Denklem (7) göz önüne alınırsa aşağıdaki eşitlik gözlemlenir;

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0 \text{ yani } E(t) = \text{sabittir.}$$

Eşitlik (5) ile tanımlanan koşullar göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2) + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} (u^2) + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6}{\partial x^6} (u^2) - \frac{1}{c^2} (u_t^2) + \frac{1}{c^2} \frac{\ell^2 p'}{3 p} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_t^2) \right\} \Big|_{t=0} dx = 0$$

Dolayısıyla, $u(x, t)$ 'nin sıfır ve $u = v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$ olduğu açıkça görülür. Yani, söz konusu sistemin tek bir çözümü vardır.

Teorem 1 dikkate alındığında, $v(x, t)$ çözümünün tekliğini korumak için, ilgili kontrol fonksiyonunun $C(t, x)$ tek olması gerektiği sonucuna varılır. Bu durumda, söz konusu sistemin tek bir $v(x, t)$ çözümüne ve tek bir $C(t, x)$ kontrol fonksiyonuna sahip olduğu söylenir. Bu durumda denklem (1)-(4) ile tanımlanan sistem gözlemlenebilir olarak adlandırılır. Hilbert Teklik yöntemi, gözlemlenebilirliğin kontrol edilebilirliğe eşdeğer olduğunu söyler (Guliyev ve Jabbarova, 2010 ve Pedersen, 2018). Böylelikle, denklem (1)-(4) kontrol edilebilirdir denir.

2. OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Optimal kontrol probleminin temel amacı, belirli bir t_f zaman diliminde performans indeksi fonksiyoneli minimize eden $C^0(t, x) \in C_{ad}$ optimal kontrol fonksiyonunu belirlemektir. Sistemin performans indeksi fonksiyonu, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$\begin{aligned} J_0(f(t, x)) &= \int_0^\ell [g_1(x, v(t_f, x)) + g_2(x, v_t(t_f, x))] dx \\ &+ \int_0^{t_f} \int_0^\ell g_0(t, x, v(t, x), C(t, x)) dt dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Kabul edilebilir kontrol fonksiyonu $C(t, x)$ denklem (1)-(2)'ye ve aşağıdaki kısıtlara tabidir.

$$\int_0^\ell h_2(x, v_t(t_f, x)) dx + \int_0^{t_f} \int_0^\ell g_{-2}(t, x, v(t, x), C(t, x)) dt dx = c_{-2}, \quad (12a)$$

$$\int_0^\ell h_1(x, v_t(t_f, x)) dx + \int_0^{t_f} \int_0^\ell g_{-1}(t, x, v(t, x), C(t, x)) dt dx = c_{-1}, \quad (12b)$$

$$\int_0^{t_f} \int_0^\ell g_i(t, x, v(t, x), C(t, x)) dt dx \leq c_i, \quad 1 \leq i \leq m \quad (12c)$$

$$\int_0^{t_f} \int_0^\ell g_i(t, x, v(t, x), C(t, x)) dt dx = c_i, \quad m \leq i \leq M, \quad (12d)$$

Burada, $i = -2, -1, 1, \dots, M$ için, h_1, h_2, g_0, g_i tüm parametrelerinin sürekli fonksiyonlarıdır. Ayrıca, h_1, g_0, g_i ve $i = -2, -1, 1, \dots, M$ için v 'ye göre sürekli türevi olan fonksiyonlardır. Ayrıca, h_2, g_2, v_t 'ye göre sürekli türevi olan fonksiyonlardır. $C^0(t, x)$ optimal kontrol fonksiyonu olduğunu ve v^0 in optimal yer değiştirmesine karşılık geldiğini varsayalım. $(t_1, x_1), \dots, (t_p, x_p) \in \Omega$ açık bölgesinde P keyfi nokta ve $C_j(t, x)$, $j = 1, \dots, P$ kabul edilebilir kontrol fonksiyonu $C \in C_{ad}$ 'nin P keyfi alt fonksiyonu olduğunu varsayalım. $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p$ ve $\zeta > 0$ olsun $x_i + P_\zeta < x_j$ için $x_i < x_j$, $x_p + P_\zeta < \ell$ ve $t_i + \zeta < t_f$ her $0 \leq i \leq P$ için. $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ ve $0 \leq \varepsilon_j \leq \zeta^2$ 'yi

sağlayan reel parametreler olsun. $X_1 = x_1$ ve $X_j = x_j + \sqrt{\varepsilon_1} + \dots + \sqrt{\varepsilon_{j-1}}$ ve $1 < j \leq P$ için dolayısıyla, $X_j \leq x \leq X_{j+1} + \sqrt{\varepsilon_j}$ aralıkları ve R_j dikdörtgenleri : $[t_f, t_j + \sqrt{\varepsilon_j}] \times [X_j, X_{j+1} + \sqrt{\varepsilon_j}]$ sırasıyla $1 \leq j \leq P$ için herhangi bir kesişime sahip değildir. ε vektörü $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_P) \in R^P$ ve R^P P -boyutlu bir Öklid uzayıdır ve $\varepsilon = |\varepsilon| = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_P$ olur ve buradan Kontrol $C_\varepsilon(t, x) \in \bar{\Omega}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} C^0(t, x) & (t, x) \notin \cup_{j=1}^P R_j, \\ C(t, x) & (t, x) \in R_j, \quad j = 1, \dots, P \end{cases} \quad (13)$$



3. EŞLENİK SİSTEM VE OPTİMAL KOŞULLARI

Optimalite için gereklilik ve yeterlilik şartı maksimum prensip formunda elde edilecektir. Kısıtlar üzerindeki bazı dışbükeylik koşulları varsayıldığında maksimum prensip ilkesi optimallik için yeterli gereklilik olarak görünmektedir. Maksimum prensibini sağlamak için bir adjoint değişken $v(t, x) \in \Omega^*$, burada Ω^* , Ω 'un dualidir. Ω' 'da olduğu gibi duali için iç çarpım, adjoint operatör boyunca tanımlanır. $v(t, x)$ aşağıdaki eşlenik denklemini sağlar.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{l^4}{36} \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{l^2}{3} \frac{p'}{p} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + \sum_{i=-2}^M \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial v}(t, x, v^0, C^0(t, x)) \quad (14)$$

burada $\lambda_i \leq 0$ ve Eşitlik (14) aşağıdaki homojen sınır koşullarına tabidir

$$\begin{aligned} v(t, 0) &= 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, 0) = 0, \\ v(t, \ell) &= 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, \ell) = 0, \end{aligned} \quad (15a)$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) &= 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(t, 0) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t, \ell) &= 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(t, \ell) = 0, \end{aligned} \quad (15b)$$

ve terminal koşulları;

$$\frac{1}{c^2} \frac{l^2}{3} \frac{p'}{p} v_{txx} - \frac{1}{c^2} v_t(t, x) = \lambda_{-1} \frac{\partial h_1}{\partial v}(x, v(t, x)) + \lambda_0 \frac{\partial g_1}{\partial v}(x, v(t, x)) \quad t = t_f \quad (16a)$$

$$v(t, x) = -\lambda_0 \frac{\partial g_2}{\partial v_t}(x, v_t(t, x)) - \lambda_{-2} \frac{\partial h_2}{\partial v_t}(x, v_t(t, x)) \quad t = t_f \quad (16b)$$

Eşitlik (14)-(16)'ya karşılık gelen çözümün varlığı ve tekliği Eşitlik (1)-(4)'e benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 2. v ve $\Delta v(t, x) = v(t, x) - v^0(t, x)$ $L^2(\Omega)$ 'da tanımlı iki fonksiyon olsun. Ayrıca, v ve $\Delta v(t, x)$ 'in sırasıyla Denklem (14)-(16) ve denklem (1)-(4)'ü sağladığını varsayalım. O zaman;

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^\ell \left\{ v \left[\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4 \Delta v}{\partial x^4} + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6 \Delta v}{\partial x^6} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial t^2} - \frac{\ell^2 p'}{3 p} \frac{\partial^4 \Delta v}{\partial t^2 \partial x^2} \right) \right] - \Delta v \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\ell^2 p'}{3 p} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} \right) \right] \right\} dx dt \\ & = \int_0^\ell \left\{ v(t_f, x) \frac{\ell^2 p'}{3 p} \frac{1}{c^2} \Delta v_{txx}(t_f, x) - v_t(t_f, x) \frac{\ell^2 p'}{3 p} \frac{1}{c^2} \Delta v_{xx}(t_f, x) - \right. \\ & \left. \frac{1}{c^2} \Delta v_t(t_f, x) v(t_f, x) + \frac{1}{c^2} v_t(t_f, x) \Delta v(t_f, x) \right\} dx \end{aligned} \quad (17)$$

İspat: Eşitlik (17)'nin sol tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa, teorem 2'nin sonucunu görmek kolaydır.

Tanım 1. $v, \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_M$ keyfi sabitleri için denklem (14)-(16) sisteminin çözümüdür. v^0 ve $v, C^0, C \in C_{ad}$ optimal kontrol fonksiyonlarına karşılık gelen tepki fonksiyonları olsun ve bir $C \in C_{ad}$ için aşağıdaki fonksiyonlardan herhangi biri olsun:

$$u(t, x) = g_i(t, x, v, C(t, x)),$$

$$u(t, x) = g_i(t, x, v^0, C^0(t, x)),$$

$$u(t, x) = v C^0, \quad C^0 \in C_{ad},$$

$$u(t, x) = v C, \quad C \in C_{ad} \text{ sabittir.}$$

Bir nokta (\bar{t}, \bar{x}) , herhangi bir yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki eşitliği sağlıyorsa $C \in C_{ad}$ için düzenli nokta olarak adlandırılır.

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\sqrt{\varepsilon}} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\sqrt{\varepsilon}} u(t, x) dx dt = \varepsilon u(\bar{t}, \bar{x}) + o(\varepsilon).$$

Saks (1937) dikkate alındığında, her $C \in C_{ad}$ için $[0, t_f] \times [0, \ell]$ 'nin tüm noktalarının düzenli nokta olduğu ortaya çıkar.

\mathcal{J} ve \mathcal{Z} vektör değerli fonksiyonları $(\mathcal{J}_{-2}, \mathcal{J}_{-1}, \mathcal{J}_0, \dots, \mathcal{J}_M)$ ve kümeyi gösterebiliriz

$$\mathcal{Z} = \{\mathcal{J}(C): C \in C_{ad}\} \subset R^{M+3} \text{ olsun.}$$

Tanım 2. Eğer aşağıdaki formda bir yüzey mevcutsa

$$\mathcal{J}_\varepsilon = \mathcal{J}(C^0) + \sum_{j=1}^P d_j \varepsilon_j + o(\varepsilon)$$

Z 'de yeterince küçük ε_j için ve d_1, \dots, d_P D 'den herhangi bir sonlu vektör koleksiyonu ise D kümesi Z kümesinin $\mathcal{J}(C^0)$ 'de türetilmiş kümesi olarak adlandırılır (Hestenes, 1966).

Teorem 3. $i = 1, 2, \dots, P$ için (t_i, x_i) noktalarının Ω içinde düzenli noktalar olduğunu varsayalım. $\bar{\mathcal{J}}(C)$ herhangi bir $C \in C_{ad}$ için aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{J}}(C) = & \int_0^\ell \{ \lambda_0 [g_{s1}(x, v(t_f, x)) + g_{s2}(x, v_t(t_f, x))] + [\lambda_{-2} h_2(x, v_t(t_f, x)) + \\ & \lambda_{-1} h_1(x, v(t_f, x))] \} dx + \int_0^{t_f} \int_0^\ell \sum_{i=-2}^M [\lambda_i g_i(t, x, v, C)] dt dx \end{aligned}$$

Eğer $P = 1$ ise $C \in C_{ad}$ için $\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0$, sabitleri vardır, λ_M (hepsi aynı anda sıfırdan farklı olmak üzere) öyle ki

$$\lambda_0 \leq 0, \quad \lambda_i \leq 0 \quad (0 \leq i \leq m), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\bar{\mathcal{J}}(C_\varepsilon) - \bar{\mathcal{J}}(C^0)}{\varepsilon} \leq 0$$

olsun. Burada C^0 'ler ve C_ε 'ler Eşitlik (13)'te tanıtılan fonksiyonlardır.

İspat. Kabul edilebilir kontrol fonksiyonları sınıfı üzerindeki $\mathcal{J}_{-2}, \mathcal{J}_{-1}, \mathcal{J}_0, \dots, \mathcal{J}_M$ fonksiyonellerini şu şekilde tanımlayın:

$$\mathcal{J}_{-2}(C) = \int_0^\ell h_2(x, v_t(t_f, x)) dx + \int_0^{t_f} \int_0^\ell G_{-2}(t, x, v, C) dx dt,$$

$$\mathcal{J}_{-1}(C) = \int_0^\ell h_1(x, v_t(t_f, x)) dx + \int_0^{t_f} \int_0^\ell G_{-1}(t, x, v, C) dx dt,$$

$$\mathcal{J}_i(C) = \int_0^{t_f} \int_0^\ell G_i(t, x, v, C) dx dt, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Lagrange çarpanlarını kullanmak için, $\mathcal{J}(C^0)$ 'deki Z kümesi için türetilmiş bir D kümesi oluşturmamız gerekir (Hestenes, 1966). Şimdi v_j fonksiyonlarını tanımlayalım; v_j için $j = -2, -1, 1, \dots, M$ olup aşağıdaki koşulları sağlamaktadır

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4 v_j}{\partial x^4} + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6 v_j}{\partial x^6} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} - \frac{\ell^2 p'}{3} \frac{\partial^4 v_j}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + \lambda_j \frac{\partial g_i}{\partial v}(t, x, v^0, C^0(t, x)), \quad (18)$$

burada $\lambda_i \leq 0$ 'dır, $0 \leq t \leq t_f$, $0 \leq x \leq \ell$ ve Eşitlik (18) aşağıdaki sınır koşullarına tabidir

$$\begin{aligned} \nu_j(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \nu_j}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^4 \nu_j}{\partial x^4}(t, 0) = 0, \\ \nu_j(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^2 \nu_j}{\partial x^2}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^4 \nu_j}{\partial x^4}(t, \ell) = 0, \end{aligned} \quad (19a)$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_j}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 \nu_j}{\partial x^3}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^5 \nu_j}{\partial x^5}(t, 0) = 0, \\ \frac{\partial \nu_j}{\partial x}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^3 \nu_j}{\partial x^3}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^5 \nu_j}{\partial x^5}(t, \ell) = 0, \quad -2 \leq j \leq M \end{aligned} \quad (19b)$$

ve terminal koşulları

$$\nu_j(t_f, 0) = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{l^2 p'}{3 p} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \nu_j(t_f, x) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nu_j(t_f, x) = 0 \quad i=1, \dots, M \quad \text{için} \quad (20a)$$

$$\nu_{-2}(t_f, x) = -\lambda_{-2} \frac{\partial h_2}{\partial v_t}(x, v_t(t_f, x)), \quad \frac{1}{c^2} \frac{l^2 p'}{3 p} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \nu_{-2}(t_f, x) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nu_{-2}(t_f, x) = 0, \quad (20b)$$

$$\nu_{-1}(t_f, x) = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{l^2 p'}{3 p} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \nu_{-1}(t_f, x) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nu_{-1}(t_f, x) = \lambda_{-1} \frac{\partial h_1}{\partial v}(x, v(t_f, x)) \quad (20c)$$

$$\nu_0(t_f, x) = -\lambda_0 \frac{\partial g_2}{\partial v_t}(x, v_t(t_f, x)), \quad (20d)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{l^2 p'}{3 p} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \nu_0(t_f, x) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nu_0(t_f, x) = \lambda_0 \frac{\partial g_1}{\partial v}(x, v_t(t_f, x)).$$

Her bir $(t, x) \in (0, t_f) \times (0, \ell)$ 'nin noktası için, $i = -2, -1, 0, \dots, M$, $d^i(t, x, \bar{C})$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$d^i(t, x, \bar{C}) = v_i(t, x)(\bar{C} - C^0) + g_{bi}(t, x, v^0(t, x), \bar{C}) - g_{bi}(t, x, v^0(t, x), C^0) \quad (21)$$

Şimdi göstereceğiz ki

$$D = \left\{ d/d = (d^{-2}(t, x, \bar{C}), \dots, d^M(t, x, \bar{C})), (t, x) \text{ nin düzenli bir noktası}, C^0, \bar{C} \in C_{ad} \right\}$$

$J(C^0)$ 'de Z için türetilmiş kümedir d_1, d_2, \dots, d_p D 'den keyfi sonlu bir vektör koleksiyonu olsun. ε 'nin yeterince küçük tüm pozitif değerleri için $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ vektör parametresine sürekli bağlı $J_\varepsilon \in Z$ noktalarının var olduğunu göstermeliyiz, öyle ki

$$J = J(C^0) + \sum_{j=1}^p d_j \varepsilon_j + o(\varepsilon)$$

$d_j \in D$ olduğundan, $j = 1, \dots, P$, C^0 'nin $(t_1, x_1), \dots, (t_p, x_p)$ düzenlilik noktaları ve $C_1, C_p \in C_{ad}$ alt fonksiyonları vardır. öyle ki

$$d_j = (d^{-2}(t_j, x_j, C_j), \dots, d^M(t_j, x_j, C_j)), j=1, \dots, P$$

J_ε 'nin $J_\varepsilon = J(C_\varepsilon)$ şeklinde tanımlanabileceğini göstereceğiz; burada C_ε Eşitlik (13)'te tanımlanan kabul edilebilir fonksiyondur. Ardından, $i = 1, \dots, M$

$$\begin{aligned} J_i(C_\varepsilon) - J_i(C^0) &= \int_0^{t_f} \int_0^\ell [g_{bi}(t, x, v_\varepsilon(t, x), C_\varepsilon(t, x)) - g_{bi}(t, x, v^0(t, x), C^0(t, x))] dx dt \\ &= \int_0^{t_f} \int_0^\ell [g_{bi}(t, x, v_\varepsilon(t, x), C_\varepsilon(t, x)) - g_{bi}(t, x, v^0(t, x), C_\varepsilon(t, x))] dx dt \\ &+ \int_0^{t_f} \int_0^\ell [g_{bi}(t, x, v^0(t, x), C_\varepsilon(t, x)) - g_{bi}(t, x, v^0(t, x), C^0(t, x))] dx dt \quad (22) \end{aligned}$$

$$= \int_0^{t_f} \int_0^\ell \frac{\partial g_i}{\partial v}(t, x, v^0, C^0(t, x)) \Delta v(x, t) dt dx + \sum_{j=1}^P \varepsilon_j [g_i(t_j, x_j, v^0(t_j, x_j), C_j) - g_i(t_j, x_j, v^0(t_j, x_j), C_j^0(t_j, x_j))] + \sum_{j=1}^P o(\varepsilon_j) \quad (23)$$

Eşitlik (23)'ü elde etmek için C^0 'nin Ω 'da regüler olduğunu kullanırız. Eşitlik (17)'de aşağıdaki eşitliği kullandıktan sonra

$$\mathfrak{M}v_i = \frac{\partial g_i}{\partial v}(t, x, v^0(t, x), C^0), \quad i = 1, \dots, M, \quad k = 1, \dots, N$$

Aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \int_0^\ell \Delta v(x, t) \mathfrak{M}v_i dt dx &= \int_0^{t_f} \int_0^\ell v_i(t, x) (C_\varepsilon(t, x) - C^0(t, x)) \\ &= \sum_{j=1}^P \varepsilon_j v_i(t_j, x_j) (C_j(t, x) - C_j^0(t, x)) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Denklem (21) ve denklem (23) aracılığıyla şunları yazabiliriz

$$J_i(C_\varepsilon) = J_i(C^0) + \sum_{j=1}^P d_j^i \varepsilon_j + o(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, M, \quad (24)$$

Burada d_j^i , d_j nin birinci bileşenini gösterir. $i = 0$ için aşağıdakiler geçerli olmak üzere,

$$\begin{aligned} J_0(C_\varepsilon) - J_0(C^0) &= \int_0^\ell \left[\frac{\partial g_1}{\partial v}(x, v^0(t_f, x)) \Delta v(t_f, x) + \frac{\partial g_2}{\partial v_t}(x, v_t^0(t_f, x)) \Delta v_t(t_f, x) \right] dx \\ &+ \sum_{j=1}^P \varepsilon_j [g_0(t_j, x_j, v_\varepsilon(t_j, x_j)) C_j - g_0(t_j, x_j, v_\varepsilon(t_j, x_j)) C_j^0] \\ &+ \int_0^{t_f} \int_0^\ell (\mathfrak{M}v_0) \Delta v(t, x) dt dx + o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (25)$$

Burada

$$J_0 = \int_0^\ell [\mathfrak{g}_1(x, v(t_f, x)) - \mathfrak{g}_2(x, v_t(t_f, x))] dx + \int_0^{t_f} \int_0^\ell G_0(t, x, v, C) dt dx \text{ olur.}$$

Denklem (17) ve denklem (18) dikkate alındığında gözlemlenmiştir ki;

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \int_0^\ell \Delta v(t, x) \mathfrak{M} v_0 dt dx &= \int_0^{t_f} \int_0^\ell v_0(t, x) (C_\varepsilon(t, x) - f^0(t, x)) dt dx \\ &- \int_0^\ell \left[\frac{\partial \mathfrak{g}_1}{\partial v}(x, v^0(t_f, x)) \Delta v(t_f, x) + \frac{\partial \mathfrak{g}_2}{\partial v_t}(x, v_t(t_f, x)) \Delta v_t(t_f, x) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Eşitlik (26), Eşitlik (25)'te yerine yazılırsa, $i = 0$ için Eşitlik (24) elde edilir. $i = -2, -1$ için Eşitlik (24), Eşitlik (17)-(18) kullanılarak elde edilebilir. J tanımı ile aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$J(C_\varepsilon) - J(C^0) = \sum_{j=1}^P d_j \varepsilon_j + o(\varepsilon)$$

J_ε $J(C_\varepsilon)$ olarak tanımlanırsa, D 'nin $J(C^0)$ 'de Z için türetilmiş bir küme olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla, lagrange çarpanları vardır (Hestenes, 1966). $0 \leq i \leq m$ ve bazı $\lambda_i \neq 0$ için $\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_M$ ve $\lambda_i \leq 0$ 'dır,

$$\sum_{i=-2}^M \lambda_i d^i \leq 0 \quad (27)$$

D 'deki herhangi bir $d = (d^{-2}, d^{-1}, d^0, \dots, d^M)$ vektörü için. **teorem 3**'ün sonucuna ulaşmak için $P = 1$ 'i dikkate alalım ve

$$\bar{J} = \sum_{i=-2}^M \lambda_i J_i$$

Eşitlik (24) ile aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\bar{J}(C_\varepsilon) - \bar{J}(C^0) = \varepsilon \sum_{i=-2}^M \lambda_i d^i + o(\varepsilon)$$

D 'deki herhangi bir $d = (d^{-2}, d^{-1}, d^0, \dots, d^M)$ için **teorem 3**'ün ispatını aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\bar{J}(C_\varepsilon) - \bar{J}(C^0)}{\varepsilon} = \sum_{i=-2}^M \lambda_i d^i \leq 0$$

Teorem 1. [Maksimum Prensip] Optimal kontrol fonksiyonu $C^0(t, x) \in C_{ad}$ için karşılık gelen optimal durum fonksiyonu şeklinde $v^0(t, x) = v(t, x, C^0)$ olsun. Denklem (1)-(4) ve $v^0(t, x) = v(t, x, C^0(t, x))$ sırasıyla denklem (14) ile gösterilen başlangıç koşullarını, denklem (15) ile gösterilen sınır koşullarını ve denklem (16) ile gösterilen terminal koşulları sağlar. Maksimum prensibe erişmek için Hamiltonian fonksiyonunu şu şekilde oluşturalım;

$$\mathcal{H}[(t, x, v^0, C^0(t, x))] = \mathcal{H}[(t, x, v(t, x), C(t, x))] \quad (28)$$

$$\mathcal{H}[t, x, v(t, x), C(t, x)] = v(t, x)C + \sum_{i=-2}^M \lambda_i g_i(t, x, v(t, x), C) \quad (29)$$

ise herhangi bir $C \in C_{ad}$ için

$$J_0[C^0(t, x)] \leq J_0[C(t, x)] \quad (30)$$

gerçekleşir.

İspat. Teorem 3 ve Lagrange çarpanları ile $0 \leq i \leq m$ ve bazı $\lambda_i \leq 0$ için $\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_M(t, x)$ 'ten bağımsız $\lambda_i \leq 0$ olacak şekilde

$$\sum_{i=-2}^M \lambda_i [v_i(t, x)(C - C^0(t, x)) + g_i(t, x, v(t, x), C) - g_i(t, x, v^0(t, x), C^0)] \leq 0$$

(31)

herhangi bir $C \in C_{ad}$ fonksiyonu için Eşitlik (31)'deki terimin

$$\sum_{i=-2}^M \lambda_i [v_i(t, x)C + g_i(t, x, v(t, x), C)] \quad (32)$$

$C = C^0(t, x) \in C_{ad}$ olduğunda maksimum değerini alır. Eşitlik (32)'deki ilk terimi dikkate alalım,

$$\sum_{i=-2}^M \lambda_i v_i(t, x)C$$

Eğer $v = \sum_{i=-2}^M \lambda_i v_i(t, x)$ olarak tanımlarsak

$$v(t, x)C + \sum_{i=-2}^M \lambda_i g_i(t, x, v(t, x), C)$$

olur ve teorem 1 kanıtlanmış olur.

Teorem 2. Eşitlik (1)-(2) ve Eşitlik (11)-(12) sistemlerini dikkate alalım. G_i fonksiyonları aşağıdaki biçimde olsun

$$G_i(t, x, v, C) = g_i^i(t, x, v) + \mathcal{H}^i(t, x, C), \quad i = -2, -1, 0, \dots, M$$

ve v denklem (14)-(16)'yı sağlayan sıfır olmayan çözüm olsun.

$$\mathfrak{M}_i = \sum_{i=-2}^M \lambda_i \frac{\partial G^i(t, x, v^0(t, x))}{\partial v}$$

Eşitlik (28)'deki maksimum prensibini sağlayan $\lambda_0, \lambda_i, i = -2, -1, 1, \dots, M$ ile C^0 kabul edilebilir kontrol fonksiyonunun varlığını varsayalım. Aşağıdaki varsayımlar yapılsın:

- $g_{-1}, h_{-1}, g_{-2}, \dots, g_M$ v' ye göre dışbükey ve g_{-2}, h_{-2} v_t 'ye göre dışbükeydir;
- $\lambda_0 < 0, \lambda_i \leq 0$ için $i = -1, \dots, m$;
- Eşitlik (12)'deki kısıtlamalar C^0 tarafından sağlanır;
- Eşitlik (12)'deki katı eşitsizlik geçerliyse, ilgili Lagrange çarpanı $\lambda_i = 0$ olur;
- $m < i < M$ için $-\lambda_i G^i, -\lambda_{-1} h_{-1}$ v 'nin konveks fonksiyonları ve $-\lambda_{-2} h_{-2}$ v_t 'nin konveks fonksiyonlarıdır.

Yukarıdaki gerekliliklerin varlığında Eşitlik (28) tarafından ortaya konan maksimum ilkesi C^0 'nin optimal olması için yeterlidir. Gereksinim (d) Hestenes (1966)'in çalışmasında belirtilmiştir. $h_{-1}, h_{-2}, G_i, m < i \leq M$ durumunda gereklilik (e) kanıtlanmıştır.

İspat. Eğer Eşitlik (12) C, v tarafından sağlanıyorsa, o zaman koşul doğrusal fonksiyon olması (d) ile,

$$\int_0^{t_f} \int_0^\ell \lambda_i [G^i(t, x, v) - G^i(t, x, v^0)] dx dt$$

$$+ \int_0^{t_f} \int_0^\ell \lambda_i [\mathcal{H}^i(t, x, C) - \mathcal{H}^i(t, x, C^0)] dx dt = 0$$

$i = -2, -1, 1, \dots, M$ için daha sonra aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir;

$$\begin{aligned} & -\lambda_0 [\mathcal{J}_0(C) - \mathcal{J}_0(C^0)] \geq \\ & - \int_0^\ell \lambda_0 \left[\begin{array}{c} \mathfrak{g}_{22}(x, v_t(t_f, x)) - \mathfrak{g}_{22}(x, v_t^0(t_f, x)) + \mathfrak{g}_{21}(x, v(t_f, x)) \\ - \mathfrak{g}_{11}(x, v^0(t_f, x)) \end{array} \right] dx \\ & - \int_0^{t_f} \int_0^\ell \sum_{i=-2}^M \lambda_i \left\{ \begin{array}{c} G^i(t, x, v(t, x)) G^i(t, x, v^0(t, x)) \\ - \left[\begin{array}{c} \mathcal{H}^i(t, x, C(t, x)) \\ - \mathcal{H}^i(t, x, C^0(t, x)) \end{array} \right] \end{array} \right\} dx dt \\ & - \int_0^\ell \lambda_{-1} [h_1(x, v(t_f, x)) - h_1(x, v^0(t_f, x))] dx \\ & - \int_0^\ell \lambda_{-2} [h_2(x, v(t_f, x)) - h_2(x, v^0(t_f, x))] dx \end{aligned}$$

Yukarıdaki dışbükeylik varsayımını kullanarak

$$\begin{aligned} & -\lambda_0 [\mathcal{J}_0(C) - \mathcal{J}_0(C^0)] \geq \\ & - \int_0^\ell \lambda_0 \left[\frac{\partial \mathfrak{g}_{21}}{\partial v}(x, v^0(t_f, x)) (\Delta v(t_f, x)) + \frac{\partial \mathfrak{g}_{22}}{\partial v_t}(x, v_t^0(t_f, x)) \Delta v_t(t_f, x) \right] dx \\ & - \int_0^{t_f} \int_0^\ell \sum_{i=-2}^M \lambda_i \frac{\partial G^i}{\partial V}(t, x, v^0(t, x)) \Delta v(t, x) dt dx \\ & + \int_0^{t_f} \int_0^\ell \sum_{i=-2}^M \lambda_i [\mathcal{H}^i(t, x, C^0(t, x)) - \mathcal{H}^i(t, x, C(t, x))] dt dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\ell \lambda_{-1} \frac{\partial h_1}{\partial v} (x, v^0(t_f, x)) \Delta v(t_f, x) dx - \int_0^\ell \lambda_{-2} \frac{\partial h_2}{\partial v_t} (x, v_t^0(t_f, x)) \Delta v_t(t_f, x) dx \\
& = - \int_0^\ell \lambda_0 \left[\frac{\partial g_1}{\partial v} (x, v^0(t_f, x)) \Delta v(t_f, x) + \frac{\partial g_2}{\partial v_t} (x, v_t^0(t_f, x)) \Delta v_t(t_f, x) \right] dx \\
& - \int_0^{t_f} \int_0^\ell (Mv) \Delta v(t, x) dx dt + \int_0^{t_f} \int_0^\ell \sum_{i=-2}^M \lambda_i \left[\begin{array}{c} \mathcal{H}^i(t, x, f^0(t, x)) \\ -\mathcal{H}^i(t, x, f(t, x)) \end{array} \right] dt dx \\
& - \int_0^\ell \left[\lambda_{-1} \frac{\partial h_1}{\partial v} (x, v^0(t_f, x)) \Delta v(t_f, x) + \lambda_{-2} \frac{\partial h_2}{\partial v_t} (x, v_t^0(t_f, x)) \Delta v_t(t_f, x) \right] dx
\end{aligned}$$

Ve son olarak **teorem 2** ve Eşitlik (19)-(20)'yi kullanarak şunu elde ederiz

$$-\lambda_0 [J_0(C) - J_0(C^0)] \geq$$

$$\int_0^{t_f} \int_0^\ell \left\{ v(t, x) [C^0(t, x) - C(t, x)] + \sum_{i=-2}^M \lambda_i \left[\begin{array}{c} \mathcal{H}^i(t, x, C^0(t, x)) \\ -\mathcal{H}^i(t, x, C(t, x)) \end{array} \right] \right\} dx dt \tag{33}$$

Eşitlik (33) ile verilen yukarıdaki eşitsizliğin (b) şartı nedeniyle negatif olmadığını göz önünde bulundurursak, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

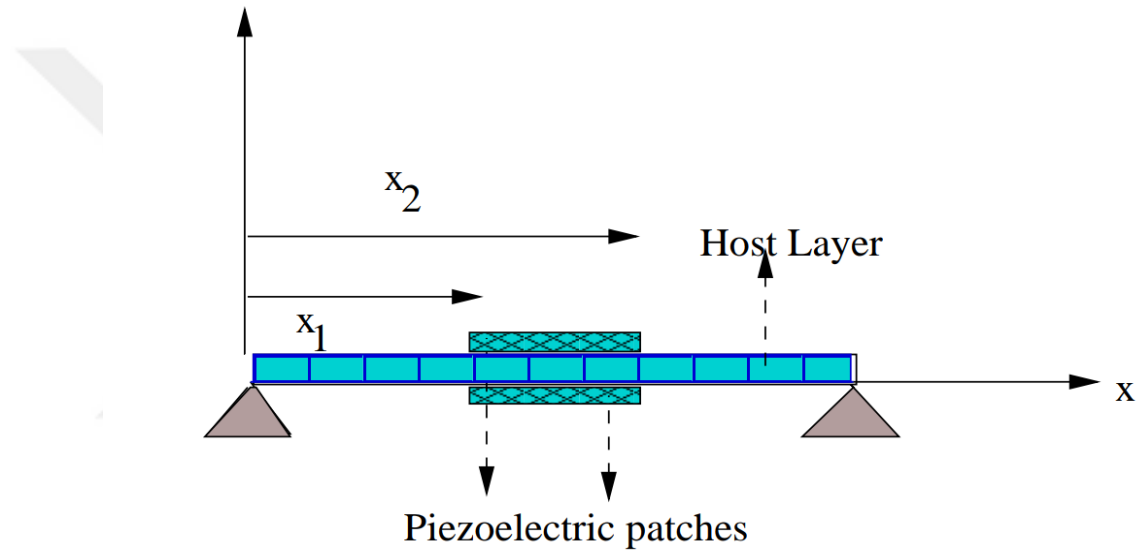
$$J_0(C(t, x)) - J_0(C^0(t, x)) \geq 0 \tag{34}$$

Böylece **Teorem 2**'nin ispatı tamamlanmış ve denklem (11)'deki performans endeksi fonksiyonelinin global minimum değeri için maksimum prensibin aynı zamanda yeterli bir koşul olduğu sonucuna varılmış olur.

4. SAYISAL ÖRNEK VE TARTIŞMA

Kiriş ve kenarları kirişin kenarına paralel olan kirişin her iki tarafında mükemmel şekilde sınırlandırılmış iki yama içeren homojen bir kiriş sistemi düşünelim. Kontrol süresinin başında kiriş deforme olmamış ve hareketsiz durumdadır ve Kiriş kontrol süresince harici dış kuvvet etkisine maruz bırakılır. Önceki bölümlerde elde edilen teorik sonuçları takip ederek bu örneğin amacı titreşimleri en iyi şekilde sönmölemek için piezoelektrik yama yapılarına uygulanacak minimum voltaj seviyesini bulmaktır.

Şekil 4.1 Kirişin enine kesiti



Şekil 4.1. ile tanımlanan kiriş sisteminin matematiksel modeli aşağıdaki gibi verilmiştir;

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{l^4}{36} \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{l^2 p'}{3} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + f(t, x) + C(t, x) \quad (35)$$

Burada $C(t, x) = C(t)[H''(x - x_1) - H''(x - x_2)]$ Burada $C(t)$ optimal kontrol voltaj fonksiyonu, H Heavi-side fonksiyonu ve x_1 ve x_2 piezoelektrik yama aktüatörlerinin konumlarıdır. Eşitlik (35) aşağıdaki homojen sınır koşullarına ve başlangıç koşullarına tabidir;

$$\begin{aligned}
v(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, 0) = 0, \\
v(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, \ell) = 0,
\end{aligned} \tag{36}$$

veya

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(t, 0) = 0, \\
\frac{\partial v}{\partial x}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(t, \ell) = 0,
\end{aligned} \tag{37}$$

$$v(0, x) = v_o(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = v_1(x) \tag{38}$$

Ayrıca, sistemin kontrol süresince minimize edilmesi gereken performans indeks fonksiyonel aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mathcal{J}(C) = \int_0^\ell [\lambda_1 v^2(t_f, x) + \lambda_2 v_t^2(t_f, x)] dx + \lambda_3 \int_0^{t_f} C^2(t) dt \tag{39}$$

Sol taraftaki ilk integral, kiriş üzerindeki bir noktanın yer değiştirmesinin ve hızının karesel bir fonksiyoneli içerir. İkinci integral ise kiriş sistemi üzerindeki piezoelektrik yama aktüatöre uygulanacak voltaj enerjisinin karesel bir fonksiyonudur. Önceki bölümdeki teorik sonuçları takip ederek bu bölümün amacı Eşitlik (35)-(38)'i sağlayan ve kontrol süresinde Eşitlik (39)'u en aza indiren $C(t)$ 'yi en uygun şekilde belirlemektir. Eşitlik (35)-(38) ile tanımlanan kiriş sisteminin optimalliğini elde etmek için eşlenik sistemi aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{l^4}{36} \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{l^2 p'}{3 p} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} \right) \tag{40}$$

Eşitlik (40) aşağıdaki homojen sınır koşullarına ve terminal koşullara tabidir;

$$\begin{aligned}
v(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, 0) = 0, \\
v(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, \ell) = 0,
\end{aligned} \tag{41a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(t, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(t, \ell) = 0, \quad (41b)$$

$$\frac{1}{c^2} \left[\frac{\ell^2}{3} \frac{p'}{p} v_{txx}(t, x) - v_t(t, x) \right] = 2\lambda_1 v(t, x) \quad t = t_f \quad (42a)$$

$$v(t, x) = -2\lambda_2 v_t(t, x) \quad t = t_f \quad (42b)$$

Önceki bölümlerde elde edilen teorik sonuçlar ışığında gerekli ve yeterli optimallik koşulları maksimum prensip formunda aşağıdaki şekilde elde edilmiştir;

$$\mathcal{H}[(t, x_1, x_2; v^0, C^0)] = \mathcal{H}[(t, x_1, x_2; v, C)] \quad (43)$$

$$\mathcal{H}[(t, x_1, x_2; v, C) = [v_x(t, x_2) - v_x(t, x_1)]C(t) - \lambda_3 C^2(t) \quad (44)$$

İse, o zaman

$$\mathcal{J}[C^0] = \mathcal{J}[C] \quad , \quad C \in C_{ad} \quad (45)$$

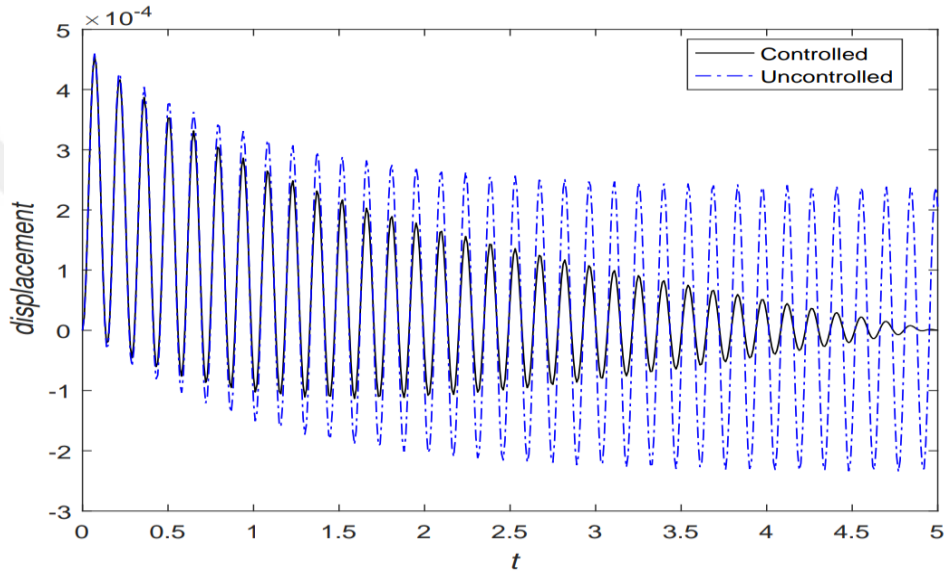
Dolayısıyla, optimum kontrol fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir;

$$C(t) = \frac{v_x(t, x_2) - v_x(t, x_1)}{2\lambda_3} \quad (46)$$

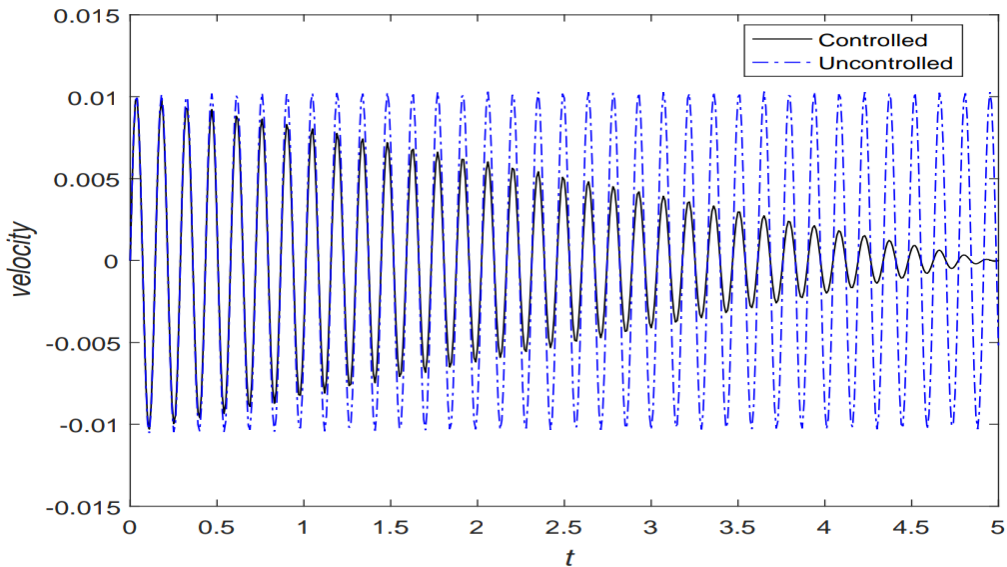
Eşitlik (35)-(46) ile tanımlanan sistemin çözümü MATLAB aracılığıyla gerçekleştirilmiştir. Sayısal sonuçları tartışmadan önce λ_3 değerinin Eşitlik (46) ile verilen kontrol fonksiyonu üzerindeki etkisine dikkat etmemiz gerekmektedir. Kontrol fonksiyonunda yer alan λ_3 değeri arttıkça $C(t)$ ile tanımlanan kontrol kuvvetinin değeri azalır. λ_3 değerinin ayarlanmasıyla optimal kontrol fonksiyonu $C(t)$ belirlenir. Sayısal hesaplamalarda, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ve λ_3 için 10^{-3} ve 10^3 olarak sırasıyla kontrollü ve kontrolsüz durumlar aşağıdaki şekillerdeki gibi elde edilmiştir. Başlangıç koşulları $v_0(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x)$ ve $v_1(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x)$ olarak hesaplamaya dâhil edilmiştir. Ayrıca,

harici dış etken fonksiyonu $f(t, x) = e^{-t}(1 - x)$ olarak alınmıştır. Önceden belirlenmiş kontrol terminal zamanı $t_f = 5$ ve kirişin uzunluğu $l = 1$ olarak sabitlenmiştir. Yamanın kiriş üzerindeki konumu $x_1 = 0.4$ ve $x_2 = 0.6$ olarak kabul edilmiştir. Eşitlik (39) ile tanımlanan performans indeksi fonksiyonundeki yer değiştirmelerin ve hızın değerleri kirişin orta noktası olan $x = 0.5$ 'te hesaplanmaktadır. Young modülü $E, 2 \times 10^7$ ve kirişin çizgi yoğunluğu $\rho, 6 \times 10^4$ 'dir.

Şekil 4.2 Kontrollü ve Kontrolsüz Yer Değiştirmeler



Şekil 4.3 Kontrollü ve Kontrolsüz Hızlar



Harici bir dış kuvvetin etkisi altındaki kirişin titreşimleri Şekil 4.2.'de çizilmiştir. Şekil 4.2. incelendiğinde, kirişteki titreşimlerin kontrolünün optimal bir şekilde olduğu sonucuna varılmaktadır. Aynı gözlem, Şekil 4.3.'te çizilen kiriş üzerindeki titreşimlerin kontrollü ve kontrolsüz hızları için de geçerlidir. Eşitlik (39)'da $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 0$ 'ı dikkate alarak kirişin dinamik tepki fonksiyonunu $J(v)$ olarak tanımlayalım. Ayrıca, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ve $\lambda_3 = 1$ Eşitlik (39)'u değerlendirerek kontrol süresince birikmiş kontrol voltaj fonksiyonunu $J(C)$ olarak tanımlayalım. Tablo1 dikkate alındığında, λ_3 değerinin optimum kontrol voltajı üzerinde azaldığı sonucuna varılmaktadır.

Tablo 4.1 λ_3 'nın farklı değerleri için $J(v)$ ve $J(C)$ değerleri

λ_3	$J(C)$	$J(V)$
10^3	$3e^{-5}$	$5.2e^{-10}$
10^0	$9e^{-8}$	$2e^{-6}$
10^{-3}	$1.5e^{-13}$	$6e^{-6}$

Kontrol fonksiyonunda yer alan λ_3 değerinde azalmaya karşılık, kiriş üzerindeki piezoelektrik yama aktüatöre uygulanan kontrol miktarı artar ve bu artışın sonucu olarak kirişin dinamik tepkisi azalır. Bu gözlemler, maksimum prensibin optimalite için gerekli ve yeterli koşul olduğunu göstermektedir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, Mindlin'in gradyan elastisite teorisine dayanan hiperbolik bir kiriş denkleminin optimalite koşulları incelenmiştir. İncelenen sistem harici uyarım fonksiyonuna ve homojen olmayan sınır koşullarına bağlıdır. Ayrıca, sistem kontrol fonksiyonu ve yer değiştirme fonksiyonu üzerinde bazı eşitlik/eşitsizlik kısıtlarına sahiptir. Sistemin optimalite koşullarını elde etmek için kiriş denkleminin çözümünün varlığı ve teklığı enerji integral yöntemi kullanılarak kanıtlanmış ve sistemin kontrol edilebilirliği tartışılmıştır. Optimallik için gerek ve yeter şartlar maksimum prensibi şeklinde türetilmiştir. Elde edilen teorik sonuçların geçerliliğini göstermek için bir örnek sunulmuş olup sonuçlar tablo ve grafiklerle verilmiştir.



KAYNAKLAR

- Barnes, E. R., 1971, Necessary and sufficient optimal conditions for a class of distributed parameter control systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 9, 62-82.
- Berkani, A., Tatar, N., 2019, Hareketli bir tabana sabitlenmiş viskoelastik bir Timoshenko kirişinin stabilizasyonu, *Math. Modelleme Nat. Phenomena*, 14, 501.
- Cosserat, E., Cosserat, F., 1909, *Deforme Olabilen Cisimlerin Teorisi*. Cornell Üniversitesi Kütüphanesi.
- Egorov, A. I., 1967, Necessary optimality conditions for distributedparameter systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 5 (3), 352-408.
- Gazis, D.C., Herman, R., Wallis, R.F., 1960. Kübik kristallerde yüzey elastik dalgaları. *Phys. Rev.* 119, 533544.
- Gazis, D.C., Wallis, R.F., 1964. Yarı-sonsuz kafeslerde yüzey çekimi ve yüzey modları. *Surface Sci.* 3, 1932.
- Guliyev, H. F., Jabbarova, K. S. (2010). İkinci mertebeden lineer hiper-bolik denklem için tam kontrol edilebilirlik problemi, *Diferansiyel Denklemler ve Kontrol Süreçleri*, N3.
- Green, A.E., Rivlin, R.S., 1964. Çok kutuplu süreklilik mekaniği. *Arch. Ration. Mech.Anal.* 17, 113147.
- Hestenes, M., 1966. *Calculus of variation and Optimal Control Theory*, John Wiley, New York.
- Koiter, W.T., 1964. Elastisite teorisinde çift gerilme III. *Proc. Kon. Nederl.Akad. Wetensch. B* 67, 1744, 196.
- Komkov, V., 1968, Theoptimal control of a transverse vibration of a beam, *SIAM Journal of Control*, 6, 401-421.
- Kucuk, I., Yildirim, K. , 2014. Tek Uzay Boyutunda Sönümlü Hiperbolik Denklem İçin Optimalitenin Gerekli ve Yeterli Koşulları, *Soyut ve Uygulamalı Analiz*, 2014, ID 493130.
- Lanczos, C., 1970. *Mekaniğin Varyasyonel İlkeleri*. Toronto Üniversitesi Yayınları, Toronto.
- Lee, E. B., 1963, A sufficient condition in the theory of optimal control, *SIAM Journal on Control*, 1, 241-245.
- Mindlin, R.D., Tiersten, H.F., 1962. Doğrusal elastikiyette çift gerilmelerin etkileri. *Arch.Rat. Mekanik. Anal.* 11, 415448.

- Mindlin, R.D., 1964. Doğrusal elastikiyette mikro yapı. Arch. Rat. Mech. Anal. 16,5178.
- Mindlin, R.D., 1965 . Mikro yapıli elastik malzemelerin denklemleri üzerine. Int.J. Solids Struct. 1, 7378.
- Mindlin, R.D., 1965. Çizgisel elastisitede ikinci gerilme ve yüzey gerilimi gradyanı. Int. J. Solids Struct. 1, 417438.
- Pedersen, M., 2018, Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering , *CRC Press*.
- Polyzos, D., Fotiadis, D. I., 2012. Derivation of Mindlin's first and second strain gradient elastic theory via simple lattice and continuum models, Int J. Solid and Struc., 49, 470- 480.
- Pontryagin, L., Boltyanski, V., Gamkrelidze, R. and Mishchenko, E., 1962, Mathematical Theory of Optimal Processes, *Wiley*, Chichester, UK.
- Russell, D. L. , 1966, Optimal regulation of linear symmetric hyperbolic systems with infinite dimensional controls, *SIAM Journal of Control*,4, 276-295.
- Sadek, I. , 1988. İntegral kısıtlamalarına tabi dağıtılmış parametrelili sistemlerin optimal kontrolü için gerekli ve yeterli koşullar, *J. Franklin Ins.*, 325(5), 565-583.
- Saks, S., 1937. Theory of the Integral, Hafner, New York.
- Tiersten, H.F., Bleustein, J.L., 1974. Genelleştirilmiş elastik süreklilikler. İçinde: Herrmann, G. (Ed.), R.D. Mindlin ve Uygulamalı Mekanik. Rergamon Press, New York, pp. 67103.
- Yildirim, K., Geliştirilmiş bir Boussinesq sisteminin aktif kontrolü, *Math. Doğal Fenomenlerin Modellenmesi. Phenomena*, 15, 2020.
- Zachmaonoglou, E. C., Thoe, D. W., 1986. Introduction to Partial Differential equations with applications, Dover Publ., New York.

EKLER**EK-1** Hesaplamalarda kullanılan Matematiksel Yazılım Programı

restart:

g1:=1: g2:=1: a:=1: g3:=1: mu:=10^(5): tf:=0.3:

w0:=unapply(0,x,y): w1:=unapply(0,x,y):

C:=unapply(1,x,y): P:=unapply(0,x,y,t):

Y5:=unapply(sqrt(2)*sin(Pi*y)*sqrt(2)*sin(Pi*x),x,y):

Ad:=solve(g1*r^2-a*g2*r+g3*4*(Pi^4)=0,r): ak1:=Re(subs(Ad[2])):

ak2:=Im(subs(Ad[2])):

Z:=unapply(exp(ak1*t)*(Z1*cos(ak2*t)+Z2*sin(ak2*t)),Z1,Z2,t):

Y1:=unapply(int(int(P(x,y,t)*Y5(x,y),x=0..1),y=0..1),t):

Y2:=unapply(int(int(C(x,y)*Y5(x,y),x=0..1),y=0..1),t):

Y3:=unapply(Z(Z1,Z2,t)*Y2(t),Z1,Z2,t):

K:=unapply(-Y3(Z1,Z2,t)/(2*mu),Z1,Z2,t):

Y4:=unapply(Y1(t)+K(Z1,Z2,t)*Y2(t),x,y):

S:=unapply(exp(-ak1*t)*(A*cos(ak2*t)+B*sin(ak2*t))+exp(-ak1*t)*

cos(ak2*t)*int(-Y4(Z1,Z2,tau)*sin(ak2*tau)/(ak2*exp(-ak1*tau)),

tau=0..t) + exp(-ak1*t)*sin(ak2*t)*int(Y4(Z1,Z2,tau)*cos

(ak2*tau)/(ak2*exp(-ak1*tau)),tau=0..t), Z1,Z2,t):

St:=unapply(diff(S(Z1,Z2,t),t),Z1,Z2,t):

aeq1:=S(Z1,Z2,0)=int(int(w0(x,y)*Y5(x,y),x=0..1),y=0..1):

aeq2:=St(Z1,Z2,0)=int(int(w1(x,y)*Y5(x,y),x=0..1),y=0..1):

SC:=solve({aeq1,aeq2},{A,B}): AA:=rhs(SC[1]): BB:=rhs(SC[2]):

SS:=unapply(exp(-ak1*t)*(AA*cos(ak2*t)+BB*sin(ak2*t))+exp(-ak1*t)*

t*cos(ak2*t)*int(-Y4(Z1,Z2,tau)*sin(ak2*tau)/(ak2*exp(-ak1*tau)

),tau=0..t) + exp(-ak1*t)*sin(ak2*t)*int(Y4(Z1,Z2,tau)*cos

(ak2*tau)/(ak2*exp(-ak1*tau)),tau=0..t), Z1,Z2,t):

SSt:=unapply(diff(SS(Z1,Z2,t),t),Z1,Z2,t):

```
Zt:=unapply(diff(Z(Z1,Z2,t),t),Z1,Z2,t):  
eq1:=2*SS(Z1,Z2,tf)=a*g2*Z(Z1,Z2,tf)-g1*Zt(Z1,Z2,t):  
eq2:=2*SSt(Z1,Z2,tf)= g1*Z(Z1,Z2,tf):  
AB:=solve({eq1,eq2},{Z1,Z2}):  
ZZ1:=rhs(AB[1]): ZZ2:=rhs(AB[2]):plot(SS(ZZ1,ZZ2,t),t=0..tf).
```

