



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI SEMİ-RIEMANNIAN MANİFOLDLARIN BİRASYONEL
KOBORDİZM İNVARİYANLARI**
Sara IŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalını

Eylül-2019
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Sara IŞIK

**BAZI SEMİ-RIEMANNIAN MANİFOLDLARIN BİRASYONEL
KOBORDİZM İNVARYANLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman

Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU

Eylül-2019
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Sara IŞIK tarafından hazırlanan “BAZI SEMİ-RIEMANNIAN MANİFOLDLARIN BİRASYONEL KOBORDİZM İNVARYANLARI ” adlı tez çalışması 06./09./19 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyeleri

Başkan

Dr. Öğr. Ali ÇAKMAK
Bitlis Eren Üni. Mat. Böl.

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Muhsin İNCESU
Muş Alp. Üni. Eğf. Fak. Mat. Eğitimi ABD

Üye

Dr. Öğr. Selçuk BAŞ
Muş Alp. Üni. Malazgirt Meslek Yüksek Okulu

İmza







Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 10./09./2019 Tarih ve 24./...3..... nolu kararı ile onaylanmıştır.



Doç. Dr. Sedat BOZARI 4.
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Bu çalışma Muş Alparslan Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: BAP-18-EMF-4902-02

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

This work was supported by Muş Alparslan University Scientific Research Coordination Unit. Project Number: BAP-18-EMF-4902-02


Sara IŞIK

06/ 09/ 2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI SEMİ-RIEMANNIAN MANİFOLDLARIN BİRASYONEL KOBORDİZM İNVARYANTLARI

Sara IŞIK

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU

2019, 62 Sayfa

Jüri

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU

Jüri Üyesi: Dr. Öğretim Üyesi Ali ÇAKMAK

Jüri Üyesi: Dr. Öğretim Üyesi Selçuk BAŞ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş bölümüdür. Giriş bölümünde konuyla ilgili literatür taraması yapıldı. İkinci bölümde semi-Riemannian manifoldlar ve invaryant teoriye ait bazı temel tanım, teorem ve ispatlara yer verildi. Üçüncü bölümde kobordizm kavramı, birasyonel kobordizm ve invaryantları verildi. Semi-Riemannian manifoldları için $k(U)$ invaryant, reglelik yapısı, homolojiler ve kodaira boyutuna değinildi. Dördüncü bölümde $R(3,1)$ semi-Riemannian uzayında ele alınan bazı manifoldların birasyonel kobordizm invaryantları incelenmiştir. Bunun için $R(3,1)$ uzayında verilen 4 temel 2Cob üreteç kobordizmi ele alınmıştır. Bunlar pantolon, eğik boru, silindir ve hiperboloid şekillerinde kobordizmlerdir. Tüm bu kobordizmlerin denklemleri verilmiş, grafikleri çizilmiş, maximum lineer bağımsız lightlike vektörlerinin sayısı olan $k(U)$ sayıları bulunmuş ve kodaira boyutları ele alınmıştır. Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kobordizm, Birasyonel invaryant, Semi-Riemannian manifold, Kodaira boyutu, Regle yapı.

ABSTRACT

MS THESIS

THE BIRATIONAL COBORDISM INVARIANTS OF SOME SEMI-RIEMANNIAN MANIFOLDS

Sara IŞIK

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ
ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS SCIENCE**

Advisor: Asst. Prof. Dr. Muhsin İNCESU

2019, 62 Pages

Jury

Advisor: Asst. Prof. Dr. Muhsin İNCESU

Jury member: Asst. Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

Jury member: Asst. Prof. Dr. Selçuk BAŞ

This thesis consists of five chapters. The first section is the introduction. In the introduction part, literature review was made. In the second part, semi-Riemannian manifolds, some basic definitions, theorems and proofs of invariant theory were given. In the third chapter, the concept of cobordism, rational cobordism and its invariants are given. $K(U)$ invariants, regle variety, homology and kodaira dimension were mentioned for semi-Riemannian manifolds. In the fourth chapter, birational cobordism invariants of some manifolds in $R(3,1)$ semi-Riemannian space are examined. For this, 4 basic 2Cob generator cobordism given in $R(3,1)$ space are discussed. These are trousers, oblique pipes, cylindrical and hyperboloid forms of cobordism. Equations of all these cobordisms are given, graphs are drawn, the maximum number of linear independent lightlike vectors $k(U)$ numbers were found and the kodaira dimensions were discussed. In the last section, conclusions and recommendations are given.

Keywords: Cobordism, Birational invariants, Semi-Riemannian manifolds, Kodaira dimension, Regle variety.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimize başladığım günden itibaren bana desteklerini esirgemeyen, hayata farklı bakmamı sağlayan, bu tez konusunu veren ve konuyu çalışırken büyük sabır gösteren saygıdeğer hocam Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU'ya teşekkürü bir borç bilirim. Bu süreç içerisinde maddi manevi her türlü desteği bana koşulsuz veren aileme de sonsuz saygı ve hürmetlerimi sunarım.

Sara IŞIK
MUŞ-2019

İÇİNDEKİLER

| | |
|--|-----------|
| ÖZET | iv |
| ABSTRACT | v |
| TEŞEKKÜR | vi |
| İÇİNDEKİLER | vii |
| ÇİZELGELER LİSTESİ | ix |
| SİMGELER | x |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. MATERYAL VE YÖNTEM | 3 |
| 2.1. Temel Kavramlar | 3 |
| 2.2. Yüzeyleler üzerine | 10 |
| 2.3. Gram Matrisi ve Gram Determinantı | 12 |
| 2.4. Bir Grubun Bir Cümle Üzerindeki Etkisi | 13 |
| 2.5. G- Denk Noktalar ve G- Yörünge | 17 |
| 2.6. G- invaryant Fonksiyonlar ve G-denklik Problemi | 19 |
| 2.7. Afın Manifoldlar ve Zariski Topolojisi | 22 |
| 2.8. Q ve J Operatörleri..... | 23 |
| 3. BİRASYONEL KOBORDİZM İNVARYANTLAR | 28 |
| 3.1. Kobordizm Kategori | 28 |
| 3.2. (B, f) Manifold | 32 |
| 3.3. Birasyonel Kobordizm | 34 |
| 3.4. $k(U)$ -İnvaryant | 40 |
| 3.5. Regle (Ruled) Yapısı | 41 |
| 3.6. Homoloji küreleri | 42 |

| | |
|--|-----------|
| 3.7. Kodaira boyutu | 43 |
| 4. BAZI SEMİ-RIEMANNIAN MANİFOLDLARIN BİRASYONEL KOBOR- DİZM İNVARYANLARI | 45 |
| 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER | 59 |
| 5.1 Sonuçlar | 59 |
| 5.2 Öneriler | 59 |
| KAYNAKLAR | 60 |
| ÖZGEÇMİŞ..... | 63 |

ÇİZELGELER LİSTESİ

| | |
|---|----|
| Çizelge 1. X Kümesinin elemanlarının G denklik bağıntısına göre yörüngeleri..... | 19 |
| Çizelge 2. kobordizm üreteçleri (URL-13, 2019)..... | 40 |
| Çizelge 3. Bir doğru ve bir parabol ile elde edilen kobordizm örneği | 45 |
| Çizelge 4. Dört yüzeyin birleşimiyle elde edilen kobordizm örneği | 50 |
| Çizelge 1.5. Kobordizm üzerindeki lightlike (ışıksal) vektörler | 52 |
| Çizelge 6. Eğik boru şeklindeki kobordizm örneği | 53 |
| Çizelge 7. Eğik boru kobordizmi üzerindeki ışıksal vektörler | 54 |
| Çizelge 8. Silindir boru şeklindeki kobordizm örneği | 55 |
| Çizelge 9. Silindir boru kobordizmi üzerindeki ışıksal vektörler | 56 |
| Çizelge 10. çift kanatlı hiperboloidin üst yarısı şeklindeki kobordizm örneği..... | 57 |
| Çizelge 11. Çift kanatlı hiperboloid kobordizmi üzerindeki ışıksal vektörler | 58 |

SİMGELER

Simgeler

| | |
|------------------------------|---------------------------------------|
| \langle , \rangle | : İç çarpım |
| \subset | : Alt cümle |
| A/R | : Bölüm kümesi |
| $H \triangleleft G$ | : Alt grup |
| \equiv | : Denklik bağıntısı |
| \cong | : İzomorfluk |
| $I \Delta K$ | : I, K nin ideali |
| $R(I)$ | : I idealinin radikali |
| $T_A(P)$ | : Tanjant uzay |
| $\nu_q[f]$ | : Yöne göre türev |
| $\kappa(s)$ | : Eğrilik |
| $\tau(s)$ | : Burulma |
| $\kappa_g(s)$ | : Jeodezik eğri |
| $\kappa_n(s)$ | : Normal eğrilik |
| $K(P)$ | : Gauss eğriliği |
| $H(P)$ | : Oratalama eğrilik |
| M | : Manifold |
| D | : Kategori |
| (C, ∂, i) | : Kobordizm kategori |
| $\Omega(D, \partial, i)$ | : Kobordizm yarı grubu |
| \mathfrak{N} | : Yönlendirilmiş kobordizm yarı grubu |
| G_x | : G-invaryant alt cümle |
| $X_1 \stackrel{G}{\sim} X_2$ | : G-denk |
| $\stackrel{G}{\sim}$ | : Denklik bağıntısı |
| $P(x)$ | : Polinom |

$R[x]^G$: G-invaryant polinomlar halkası
 $R(x)^G$: G-invaryant rasyonel fonksiyonlar cismi

1. GİRİŞ

1980 lerde 3 boyutlu cebirsel manifoldların birasyonel invaryantları için Mori'nin birasyonel geometri programı oluşturuldu. 90 lı yılların başlarında Yongbin Ruan, Mori'nin bu programını yeni oluşturulmakta olan Gromov-Witten teori ile simplektik geometriye genişletilebileceğini gözlemledi(Ruan, 2008). Böylece simplektik birasyonel program ortaya koymuş oldu. Böyle bir program iki yönden önemlidir: Simplektik geometrinin elastikiyeti, birasyonel cebirsel geometriyi daha iyi anlamamızı sağlar. Aynı şekilde Gromov-Witten teori, Mori teorisindeki rasyonel eğrileri daha iyi anlamamızı sağlar. İkinci olarak simplektik birasyonel geometri simplektik manifoldların sınıflandırılmasında önemli bir adımdır. (Ruan, 2008). Son 10 yıl içerisinde bu yönde herhangi kayda değer bir ilerleme yaşanmadı. Bu ilerlemenin olmamasının birçok sebebi vardır. Bunlardan bir tanesi Gromov-Witten teorideki hesaplamaların taşınmasının zorluğudur. Neyse ki, bu problemlere çözüm üretebilmek için çok büyük gayretler var. Gromov-Witten invaryantları hesaplayabilmek için birçok teknik geliştirildi. Gerçek anlamda simplektik birasyonel geometriye yeniden bir ivme vermek için şimdi iyi bir zamandır. Bu konuda Jianxun Hu ve Tian Jun Li bu yeni simplektik birasyonel geometri konusunu daha iyi bir konuma getirebilmek için bir dizi çalışma yapmaktalar. Bizim bu konudaki çalışmalarımız bitmiş değildir. Aksine bunlar çözüldüğünde ortaya daha pek çok problem çıkmaktadır.

Uzun zamandır simplektik geometride birasyonel denkliğin uygun bir kavramının ne olduğu gerçekten açık değildi. Simplektik geometride blow-up/blow-down gibi basit birasyonel operasyonlar biliniyordu. Fakat esnek simplektik kategoride genel birasyonel fonksiyon kavramının açık bir genellemesi yoktur. Bu durum son zamanlarda zayıf faktörizasyon teoreminin geliştirilmesiyle büyük ölçüde değişmiştir ki bu teoreme göre projektif manifoldlar arasındaki herhangi bir birasyonel fonksiyon blow-up ve blow-down ların (yukarı ve aşağı etkilerin) bir dizisi halinde ayrıştırılabilir. Bu temel sonuç 80 lerde Guillemin-Stenberg tarafından analiz edilen simplektik düzlem indirgemesinin remiyle mükemmelce yankı bulmaktadır. Bu nedenle biz birasyonel denkliğin simplektik analogu olarak kobordizm kavramını öneriyoruz. Simplektik kategoride diğer kobordizm kavramları ile karıştırmamak için biz bu kavrama “simplektik birasyonel kobordizm” diyeceğiz.

Birasyonel geometrinin en temel kavramı uniregledir. Cebiro-geometrik bir şekilde bunun anlamı bir manifoldun cebirsel eğrilerle kaplanabilmesi demektir. Dikkat etmek gerekir ki, cebirsel geometrideki tanımı basit bir şekilde taklit ederek bu kavramı tanımlamak anlamsızdır ve her noktadan geçen sabit sınıflarda bir simplektik kürenin olması da gerekir. Aksi takdirde her basit bağlantılı manifold uniregle olmalıdır. Diğer yandan Kollar- Ruan'ın teoremiyle bir uniregle projektif manifold, bir nokta arakesitiyle, sıfırdan farklı bir cins sıfır GW-invaryanta sahiptir. Bu nedenle, eğer bir nokta kısıtlaması dahil ederek sıfırdan farklı bir tür sıfır GW-invaryant varsa (M, ω) simplektik manifoldda uniregledir deriz. Böylece, simplektik uniregledir bir birasyonel invaryant olduğunu ispatlamak, simplektik birasyonel geometride temel bir problemdir. Açık ki deformasyon invaryantıdır. Bu çalışmanın amacı bunu ispatlamaktır.

Duggal ve Bejancu 1996 da yayınladıkları kitapta (Duggal, Krishan L., Bejancu, A., 1996) bir semi-Riemannian manifoldda lightlike (null) alt uzayın varlığını gösterdiler ve alt manifoldların geometrisi için ihtiyaç, duyulan önemli bir boşluğu doldurdular. Bu kitabın yayınlanmasından sonra hedef, lightlike geometrideki yeni geometrik sonuçların ispatı ve lightlike geometrinin fizikteki uygulamaları oldu. Böylece geometrinin önemli bir boşluğu dolduruldu ve yeni bir çalışma alanı ortaya çıktı.

1942 yılında Moskova Üniversitesinde Lev Pontrjagin, Charles Ehresmann sayesinde bir hücre alt bölümünü kullanarak Grassmann manifoldlarının homolojisini çalışmaya başlamıştır. Bu onun yeni önemli bir karakteristik sınıf oluşturmasına olanak sağlamıştır. Pontrjagin in matematiğe olan katkıları çok önemlidir. Çünkü o 14 yaşında başına gelen kaza sebebiyle görme yetisini tamamen kaybetmiştir.

1946 yılında Shiing-Shen Chern güneybatı Çin de kompleks vektör demetleri için bir sınıf tanımlamıştır. Hatta Chern göstermiştir ki kohomoloji yapısına sahip olan kompleks Grassmann manifoldlarını anlamak reel Grassmann manifoldlarını anlamaktan daha kolaydır. Chern (Chern, 1946) temel makalesinde Hermitian manifoldları için karakteristik sınıflarının bazı inşaaalarını vermiştir. Makale Obstruction teori, Schubert değişkenleri diferansiyel formlar, transgresyonlar vb. arasındaki ilişki için temel oluşturur.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1. $A \times B$ nin boş olmayan her alt kümesine A dan B ye bir bağıntı denir. $A = B$ ise bağıntıya A da bir bağıntı denir.

R, A da bir bağıntı olsun. $(a, b) \in R$ ise a, b ye R ile bağlıdır denir ve aRb ile gösterilir. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.2. R, A da bir bağıntı olsun.

- i) $\forall a \in A$ için aRa , (yansıma özelliği)
- ii) $aRb \Rightarrow bRa$, (simetri özelliği)
- iii) bRa ve $bRc \Rightarrow aRc$ geçişme özelliği

ise R ye A da bir denklik bağıntısı denir. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.3. R, A da bir denklik bağıntısı olsun. Bir $a \in A$ nın denklik sınıfı $\bar{a} = \{b \in A : bRa\}$ ile tanımlanır. Bütün denklik sınıfları kümesi A/R ile gösterilir ve bölüm kümesi olarak adlandırılır. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.4. G boş olmayan bir küme ve $*, G$ de bir ikli işlem olsun. $(G, *)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

G1: $*, G$ de bir ikili işlemdir.

G2: $*$ işeminin G de birleşme özelliği vardır. Yani, $\forall a, b, c \in G$ için, $a*(b*c) = (a*b)*c$ dir.

G3: $*$ işeminin, G de birim elmanı vardır. Yani, $\forall a \in G$ için, $a*e = e*a = a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır.

G4: $*$ işlemine göre, G deki her elemanın bir tersi vardır. Yani $a \in G$ için, $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ bulunabilir. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.5. $(G, *)$ bir grup ve $\forall a, b \in G$ için $a*b = b*a$ değişme özelliği de sağlanıyorsa gruba, değişmeli grup veya Abel grubu denir. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.6. G bir grup ve H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H, G deki işleme göre kendi başına bir grup ise H ye, G nin bir alt grubu denir ve $H < G$ ile gösterilir. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.7. $(G, .)$ ve $(H, *)$ iki grup ve $f: G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in G$ için $f(a*b) = f(a)*f(b)$ ise f ye G den H ye bir homomorfizma denir.

(Çallıalp, 2009)

Tanım 2.8. Örten, 1-1 bir homomorfizmaya bir izomorfizma denir. Eğer G ve H grupları arasında bir izomorfizma varsa bu gruplara izomorf gruplar denir ve $G \cong H$ yazılır. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.9. $R \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem $+$ ve \cdot olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

H1: $(R, +)$ bir değişmeli gruptur.

H2: \cdot işleminin R de birleşme özelliği vardır.

H3: \cdot işleminin $+$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır:

$$\forall a, b, c \in R \text{ için, } a(b+c) = ab+ac \text{ ve } (a+b)c = ac+bc.$$

(Çallıalp, 2009)

Tanım 2.10. R halkasında, $0_R \neq a \in R$ elemanı için;

$$ab = 0_R \text{ (veya } ba = 0_R) \text{ olacak şekilde } \exists 0_R \neq b \in R$$

bulunabilirse a ya, halkanın sıfır böleni, böyle bir b yoksa sıfır böleni değildir denir. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.11. Sıfır bölensiz bir halkaya tam halka denir. Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz (tam) halkaya da bir tamlık bölgesi denir. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.12. R birimli ve değişmeli bir halka ve $R - \{0_R\} = R^*$, ikinci işlem \cdot ye göre bir grup ise R ye bir cisim denir. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.13. R bir tamlık bölgesi olsun. $m1_R = 0_R$ olacak şekilde bir $m > 0$ tam sayısı varsa böyle m lerin en küçüğüne R nin karakteristiği denir. Eğer bu özellikte hiçbir $m > 0$ bulunamıyorsa R nin karakteristiği sıfır denir. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.14. R bir halka ve $\emptyset \neq I \subset R$ olsun.

i) $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$ ve

ii) $\forall a \in I$ ve $\forall r \in R$ için, $ra \in I$ (veya $ar \in I$)

İse I ya R nin sol (veya sağ) ideali denir.

Hem sol, hem de sağ bir ideale iki taraflı ideal veya kısaca ideal denir. İdealin tanımından, idealin bir alt halka olduğu anlaşılır. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.15. R ve S tamlık bölgeleri verildiğinde, R den S ye 1-1 bir homomorfizma bulunabiliyorsa R , S içine gömülebilir veya S , R nin bir genişlemesidir denir. (Çallıalp, 2009)

Tanım 2.16. Eğer K , bir L cisminin alt cismi ise, o zaman (L, K) sıralı ikilisi, bir cisim genişlemesidir. Ve

$$L / K$$

olarak yazılabilir. K üzerinde vektör uzayı olarak L nin boyutu

$$[L : K]$$

olarak yazılır. Bu boyutun sonlu olduğu durumda L / K genişlemesinin kendisine sonlu denir. (Pierce, 2018)

Tanım 2.17. Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleşen bir afin uzay denir:

$$(A1). \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

(A2). $\forall P \in A$ ve $\forall a \in V$ için $f(P, Q) = a$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır. (Hacısalihoglu, 1998)

Tanım 2.18. V , sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Bir

$$\psi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa ψ ye V üstünde bir iç çarpım denir.

(i) ψ bilinear formdur:

$$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in V \text{ için}$$

$$\psi(a_1 x_1 + a_2 x_2, y) = a_1 \psi(x_1, y) + a_2 \psi(x_2, y),$$

$$\psi(x, a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 \psi(x, y_1) + a_2 \psi(x, y_2).$$

(ii) ψ simetrik formdur:

$$\psi(x, y) = \psi(y, x), \quad \forall x, y \in V.$$

(iii) ψ pozitif tanımlıdır:

$$\psi(x, x) \geq 0, \quad \forall x \in V,$$

$$\psi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

(Hacısalihoglu, 2006)

Tanım 2.19. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayda yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır. (Hacısalihoglu, 1998)

Tanım 2.20. X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. X üzerindeki bir topoloji adını alır:

$$(T1). X, \emptyset \in \tau,$$

$$(T2). \forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau,$$

$$(T3). A_i \in \tau, i \in I, \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$$

(Hacısalihoglu, 1998)

Tanım 2.21. Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir. (Hacısalihoglu, 1998)

Tanım 2.22. X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : X \longrightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm (Topolojik dönüşüm) denir. (Hacısalihoglu, 1998)

Tanım 2.23. X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için, X de, sırasıyla, P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir. (Hacısalihoglu, 1998)

Tanım 2.24. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n -boyutlu topolojik manifolddur denir:

$$(M1). M \text{ bir Hausdorff uzaydır.}$$

$$(M2). M \text{ nin herbir açık alt cümlesi } E^n \text{ e veya } E^n \text{ in bir açık altcümlesine homeomorftur.}$$

(M3). M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.(Hacısalihoğlu,1998)

Tanım 2.25. M bir n - boyutlu topolojik manifold ve U da M nin bir açık cümlesi olsun. Eğer U bir ψ homeomorfizmi ile E^n nin bir W açık altcümlesine eşlenebiliyorsa:

$$\psi : U \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} W \subset E^n$$

(U, ψ) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu(harita) denir. $p \in U$ için $\psi(p) \in E^n$ dir ve

$$\psi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)), \quad x_i(p) \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

dir. Burada $x_i(p)$ reel sayısına $\psi(p)$ noktasının i -yinci koordinatı ve $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna da koordinat fonksiyonu denir.(Hacısalihoğlu, 2006)

Tanım 2.26. M bir n - boyutlu topolojik manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{U_a\}$ olsun. U_a açık cümlelerinin a indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_a\}$ örtüsü için $\{U_a\}$ $a \in A$ yazalım. E^n de U_a ya homeomorf olan bir açık cümle E_a ve

$$\psi_a : U_a \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} E_a$$

olsun. Koordinat komşuluklarının $\{(U_a, \psi_a)\} a \in A$ koleksiyonuna bir atlas (veya bir koordinat komşuluğu sistemi) denir.(Hacısalihoğlu, 2006)

Tanım 2.27. M bir n - boyutlu topolojik manifold ve $S = \{(U_a, \psi_a)\} a \in A$ de M nin bir atlası olsun. Eğer S atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise S ye $C^r, r \geq 1$ sınıfındandır denir: $U_a \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall a, \beta \in A$ için

$$\phi_{a\beta} = \psi_a \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_a \cap U_\beta) \rightarrow \psi_a(U_a \cap U_\beta)$$

ve

$$\phi_{\beta a} = \psi_\beta \circ \psi_a^{-1} : \psi_a(U_a \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_a \cap U_\beta)$$

fonksiyonları C^r sınıfındandır. Eğer S atlası M üzerinde C^r sınıftan ise S ye M üzerinde bir C^r sınıftan diferansiyellenebilir yapı denir.(Hacısalihoğlu, 2006)

Tanım 2.28. M bir n - boyutlu topolojik manifold ve M nin S atlası C^r sınıftan olsun. O zaman M ye bir n - boyutlu diferansiyellenebilir manifolddur denir. Eğer S

atlası C^w sınıfından ise M ye bir n - boyutlu analitik manifolddur denir.(Hacısalihoglu, 2006)

Tanım 2.29. V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için (P, \vec{v}) sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki bir tanjant vektörü denir. (Hacısalihoglu,1998)

Tanım 2.30. $\{T_A(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ vektör uzayına, A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve kısaca $T_A(P)$ ile gösterilir.(Hacısalihoglu,1998)

Tanım 2.31. $q \in \mathbb{R}^n$ olsun. $v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere q noktasından $q+v$ noktasına giden yönlü doğru parçasını, q noktasında, v teğet vektörü diye adlandıracağız ve v_q biçiminde göstereceğiz.

q noktasındaki bütün teğet vektörlerin kümesi $T_q(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz. $T_q(\mathbb{R}^n)$ kümesinde toplama işlemi, $v_q + w_q = (v+w)_q$ eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda v_q = (\lambda v)_q$ eşitliğiyle tanımlanır.

$v_q + w_q$ teğet vektörü, q noktasından $q+(v+w)$ noktasına giden yönlü doğru parçasıdır.

λv_q teğet vektörü, q noktasından $q+\lambda v$ noktasına giden yönlü doğru parçasıdır.

$T_q(\mathbb{R}^n)$ kümesi yukarıda tanımlanan işlemlere göre \mathbb{R} cismi üstünde bir vektör uzayıdır. Böylece elde edilen $T_q(\mathbb{R}^n)$ vektör uzayına, \mathbb{R}^n uzayının q noktasındaki teğet uzayı denir.(Sabuncuoğlu, 2010)

Tanım 2.32. $f \in C^\infty(q)$ ve $v_q \in T_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\gamma(t) = q + tv$ eşitliğiyle verilen

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $f \circ \gamma$ fonksiyonunun sıfır noktasındaki türevine, f fonksiyonunun v_q yönündeki türevi denir ve $v_q[f]$ biçiminde gösterilir. (Sabuncuoğlu, 2010)

Tanım 2.33. U , \mathbb{R}^n uzayının açık bir alt kümesi olsun. U nun her bir q noktasına, q noktasında bir teğet vektör karşılık getiren bir fonksiyona, U üstünde bir vektör alanı denir. (Sabuncuoğlu, 2010)

Tanım 2.34. M bir manifold ve X ile Y de M üzerinde diferansiyellenebilir vektör alanları olsunlar. X ve Y nin Lie braketi olarak $[X, Y]$ vektör alanı:

$$[\cdot, \cdot]: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y) \quad [X, Y]$$

$\forall p \in M$ için

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu operatörün özellikleri şunlardır:

(i) $[X, Y]$ vektör alanı M üzerinde diferansiyellenebilirdir.

(ii) $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ise

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X[g])Y - g(Y[f])X$$

(iii) $[X, Y] = -[Y, X]$.

(iv) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0, \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$

Bir vektör uzayında (iii) ve (iv) özelliklerine sahip olan bilineer operasyon tanımlanırsa bu vektör uzayına bir Lie Cebiri denir. (Hacısalihioğlu, 2006)

Tanım 2.35. Reel sayılar cismi üstünde, r tane vektör uzayı, v_1, v_2, \dots, v_r olsun.

$$f: v_1 \times v_2 \times \dots \times v_r \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $1 \leq i \leq r$, için $u_i, v_i \in V_i$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, au_i + bv_i, v_{i+1}, \dots, v_r) =$$

$$af(v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \dots, v_r) + bf(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_r)$$

olarak tanımlı ise f ye r -lineer fonksiyonu denir. Buna göre, f r -lineer ise her bir v_i ye göre lineerdir. Özel olarak, $r=2$ ise f ye bir bilineer (2- lineer) fonksiyon denir. (Hacısalihioğlu, 1998)

Tanım 2.36. V bir vektör uzayı ve V^* da V vektör uzayının dual uzayı olsun. Bu durumda

$$\phi: \overbrace{V \times V \times \dots \times V}^{m \text{ tane}} \times \overbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}^{n \text{ tane}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlanan ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ve $v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^* \in V^*$ olmak üzere

$$\phi(v_1, \dots, \lambda_1 v_k + \lambda_2 v_k', \dots) = \lambda_1 \phi(v_1, \dots, v_k, \dots) + \lambda_2 \phi(v_1, \dots, v_k', \dots)$$

şartını sağlayan ϕ dönüşümüne m . mertebeden kovaryant ve n . Mertebeden kontravaryant tensör adı verilir. Burada $v_k, v_k' \in V$ (veya V^*) dır.(Şahin, 2012)

2.2. Yüzeyler üzerine

Tanım 2.37. U , \mathbb{R}^2 uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$ kümesine, \mathbb{R}^3 uzayında bir basit yüzey denir.

M , \mathbb{R}^3 uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subseteq M$ olacak şekilde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M kümesine, \mathbb{R}^3 uzayında bir yüzey denir. (Sabuncuoğlu, 2010)

Tanım 2.38. M bir yüzey olsun. M nin her iki p ve q noktası için p ile q noktalarını birleştiren ve M içinde bulunan en az bir eğri varsa M yüzeyi irtibatlıdır, denir. (Sabuncuoğlu, 2010)

Tanım 2.39. S_p lineer dönüşümünün determinantına, M yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği denir ve $K(p)$ ile gösterilir.

S_p lineer dönüşümünün izinin yarısına, M yüzeyinin p noktasındaki ortalama eğriliği denir ve $H(p)$ ile gösterilir. (Sabuncuoğlu, 2010)

Tanım 2.40. S , E^3 de bir yüzey, $\gamma: I \rightarrow S$ birim hızlı bir eğri ve $\gamma''(s) = \gamma''(s)^T + \gamma''(s)^\perp$ olsun. $\|\gamma''(s)^T\| = k_g$ ve $\|\gamma''(s)^\perp\| = k_n$ ile k_g ve k_n ye sırasıyla γ eğrisinin jeodezik ve normal eğriliği denir.(Gray, 1939)

Tanım 2.41. M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir. (Sabuncuoğlu, 2010)

Tanım 2.42. V , $n \geq 1$ boyutlu reel vektör uzayı ve $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bir genelleştirilmiş iç çarpım olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ V nin bir ortonormal tabanı olmak üzere V de

$$g(e_i, e_i) = \langle e_i, e_i \rangle = -1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

olan e_i lerin sayısına g nin indeksi denir. (Naber, 1992)

Tanım 2.43. M bir C^∞ manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_p M$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g_p : T_p M \times T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) &\rightarrow g_p(X_p, Y_p) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non- degenere $(0,2)$ tensörüne M üzerinde bir metrik tensör denir (O'Neill, 1983)

Tanım 2.44. M bir C^∞ manifold olsun. M bir g metrik tensör ile donatılmışsa, M ye bir semi-Riemannian manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.45. Bir M Semi-Riemannian manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine semi-Riemannian manifoldun indeksi denir ve $\text{ind}M$ ile gösterilir.

Eğer indeks ν ise $0 \leq \nu \leq \text{boy}M$ dir. Özel olarak, $\nu = 0$ ise $\forall p \in M$ için g_p , $T_p M$ üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir Riemannian manifoldu olur. $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir Lorentz manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.46. V sonlu boyutlu reel vektör uzayı, V üzerindeki simetrik bilineer form

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

\mathbb{R} -bilineer fonksiyonu olsun. V üzerinde tanımlı b simetrik bilineer formu

- (i) $\nu \neq 0$ iken $b(v, v) > 0$ [< 0] pozitif [negatif] tanımlıdır,
- (ii) $\forall w \in V$ iken $b(v, w) = 0$ şartı sadece $\nu = 0$ için sağlanıyorsa nondegenere dir denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.47. M bir Semi-Riemannian manifoldu olsun. $X_p \in T_p M$ olmak üzere,

i) $g_p(X_p, X_p) > 0$ veya $X_p = 0$ ise X_p vektörüne spacelike,

ii) $g_p(X_p, X_p) < 0$ ise X_p vektörüne timelike,

iii) $g_p(X_p, X_p) = 0, X_p \neq 0$ ise X_p vektörüne lightlike (null)

denir(O'Neill,1983).

2.3. Gram Matrisi ve Gram Determinantı

R^n de $\{x_1, \dots, x_k\}$ keyfi vektörler sistemi verilsin.

Tanım 2.48. İki vektör arasında tanımlanan iç çarpım $\langle \cdot, \cdot \rangle$ olmak üzere,

$$G(x_1, \dots, x_k) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_k, x_1 \rangle & \dots & \langle x_k, x_k \rangle \end{pmatrix}$$

matrisine $\{x_1, \dots, x_k\}$ sisteminin Gram matrisi denir.(İncesu, 2008)

Tanım 2.49. Gram matrisinin determinantına $\{x_1, \dots, x_k\}$ sisteminin Gram Determinantı denir ve $\det G(x_1, \dots, x_k)$ ile gösterilir. (İncesu, 2008)

Şimdi, $\{x_1, \dots, x_k\}$ R^n de bir vektör sistemi olsun.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n}) \\ x_2 = (x_{21}, \dots, x_{2n}) \\ \vdots \\ x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \end{array} \right\} \text{ olmak üzere, } \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix} \text{ matrisini } \|x_1, \dots, x_k\|$$

ile gösterelim.

Önerme 2.50. x_1, \dots, x_k ve y_1, \dots, y_m , R^n öklid uzayında vektörler olsun. Bu takdirde,

$$\|x_1, \dots, x_k\|^T \cdot \|y_1, \dots, y_m\| = \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \dots & \langle x_1, y_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_k, y_1 \rangle & \dots & \langle x_k, y_m \rangle \end{pmatrix}$$

dir. Burada, $\|x_1, \dots, x_k\|^T$ matrisi, $\|x_1, \dots, x_k\|$ matrisinin transpozudur. (İncesu, 2008)

R^n de $\{x_1, \dots, x_n\}$ sistemini göz önüne aldığımızda $\|x_1, \dots, x_n\|$ matrisinin determinantını $[x_1, \dots, x_n]$ ile gösterelim. (İncesu, 2008)

$$\text{Sonuç : } [x_1, \dots, x_n] \cdot [y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \dots & \langle x_n, y_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1, y_n \rangle & \dots & \langle x_n, y_n \rangle \end{vmatrix}$$

dir. (İncesu, 2008)

$$\text{Sonuç : } x_1, \dots, x_n \in R^n \text{ için } \det G(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n]^2$$

dir. (İncesu, 2008)

Önerme 2.51. $x_1, \dots, x_m \in R^n$ olsun.

- 1) $\det G(x_1, \dots, x_m) \geq 0$, $\forall x_1, \dots, x_m \in R^n$;
- 2) $\det G(x_1, \dots, x_m) = 0 \Leftrightarrow \{x_1, \dots, x_m\}$ sistemi lineer bağımlıdır.

(İncesu, 2008)

Önerme 2.52. $x, y \in R^n$ için

- 1-) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ dir (Schwarz Eşitsizliği)
- 2-) $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ dir. $\Leftrightarrow x$ ve y lineer bağımlıdır.

(İncesu, 2008)

2.4. Bir Grubun Bir Cümle Üzerindeki Etkisi

Tanım 2.53. $(G, *)$ bir grup, X bir cümle ve $G \times X = \{ (g, x) ; g \in G, x \in X \}$ olmak üzere $\varphi : G \times X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Eğer,

1. $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 * g_2, x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in X$;
2. $\varphi(e, x) = x$, $\forall x \in X$ ve e, G nin birim elemanı,

ise φ dönüşümüne G grubunun X cümlesi üzerindeki etkisi denir. Bu etkiyi $G : X$ ile göstereceğiz. $\varphi(g, x)$ ifadesini de gx ile belirteceğiz. (İncesu, 2008)

Örnek : $G = LB(1) = \{ \lambda \in R : \lambda \neq 0 \}$ cümlesini alalım. Bu cümlede ikili işlem olarak reel sayılardaki çarpma işlemi alalım. Bu işleme göre G bir gruptur. G grubunun $X = R$ reel sayılar cümlesi üzerindeki $G : X$ etkisini, $g \in G$ reel sayısının $x \in R$ reel sayısı ile çarpımı olarak alalım. Yani,

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\xrightarrow{\varphi} \varphi(g, x) = gx \end{aligned}$$

olsun. Bu bir etkidir. Çünkü,

1. $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1, g_2 x) = \varphi(g_1 g_2, x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in X$;
2. $\varphi(1, x) = 1x = x$, $\forall x \in X$ ve $1 \in G$ birim eleman,

dır. (İncesu, 2008)

Örnek : $G = LH(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda > 0, \lambda \in R \right\}$ matrisler cümlesini alalım. Bu cümle,

matrislerin çarpma işlemine göre bir gruptur. G grubunun $X = R^2$ üzerindeki $G : R^2$

etkisini, $g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\varphi : G \times R^2 \rightarrow R^2$$

$$(g, x) \xrightarrow{\varphi} \varphi(g, x) = gx$$

yani g matrisinin x sütun matrisi ile çarpımı olarak tanımlayalım. Gerçekten bu bir

etkidir: Her $g_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in G$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ için,

$$\begin{aligned} 1. \quad \varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 x_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 x_2 \end{pmatrix} \\ &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \varphi(g_1 g_2, x) \end{aligned}$$

$$2. \quad \varphi(1, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2 \quad \text{ve} \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \text{ birim eleman.}$$

dır. (İncesu, 2008)

Örnek : G bir grup olmak üzere, $\varphi_1 = G : X_1$ ve $\varphi_2 = G : X_2$ de G grubunun verilen X_1 ve X_2 cümleleri üzerindeki iki etkisi olsun.

$X_1 x X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ olmak üzere

$$\varphi : G \times (X_1 x X_2) \rightarrow X_1 x X_2$$

$$(g, (x_1, x_2)) \xrightarrow{\varphi} \varphi(g, (x_1, x_2)) = (\varphi_1(g, x_1), \varphi_2(g, x_2))$$

dönüşümü de bir etkidir. Bu etkiyi $\varphi = G : X_1 x X_2$ ile göstereceğiz. Şimdi bunun bir etki olduğunu gösterelim: φ_1 ve φ_2 birer etki olduklarından,

1. $\varphi(g_1, \varphi(g_2, (x_1, x_2))) = \varphi(g_1, (\varphi_1(g_2, x_1), \varphi_2(g_2, x_2))) = \varphi(g_1, (\varphi_1(g_2, x_1), \varphi_2(g_2, x_2)))$
 $= (\varphi_1(g_1, \varphi_1(g_2, x_1)), \varphi_2(g_1, \varphi_2(g_2, x_2)))$
 $= (\varphi_1(g_1 g_2, x_1), \varphi_2(g_1 g_2, x_2))$
 $= \varphi(g_1 g_2, (x_1, x_2))$
2. $\varphi(e, (x_1, x_2)) = (\varphi_1(e, x_1), \varphi_2(e, x_2)) = (x_1, x_2) ; \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ ve $e \in G$ birim eleman.

(İncesu, 2008)

Örnek : $G=LB(1)$ olmak üzere , $\varphi_1 = G : R$ öyleki $\varphi_1(r, x) = rx$ ve $\varphi_2 = G : R$ öyleki $\varphi_2(r, x) = r^2 x$ verilsin. $R^2 = RxR = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R, x_2 \in R\}$ olmak üzere

$$\varphi : G \times R^2 \rightarrow R^2$$

$$(r, (x_1, x_2)) \xrightarrow{\varphi} \varphi(r, (x_1, x_2)) = (\varphi_1(r, x_1), \varphi_2(r, x_2))$$

dönüşümü de bir etkidir. Şimdi bunun bir etki olduğunu gösterelim: φ_1 ve φ_2 birer etki olduklarından,

1. $\varphi(r_1, \varphi(r_2, (x_1, x_2))) = \varphi(r_1, (\varphi_1(r_2, x_1), \varphi_2(r_2, x_2)))$
 $= \varphi(r_1, (r_2 x_1, r_2^2 x_2))$
 $= (\varphi_1(r_1, r_2 x_1), \varphi_2(r_1, r_2^2 x_2))$
 $= (r_1 r_2 x_1, r_1^2 r_2^2 x_2)$
 $= \varphi(r_1 r_2, (x_1, x_2))$
2. $\varphi(e, (x_1, x_2)) = (\varphi_1(e, x_1), \varphi_2(e, x_2)) = (x_1, x_2) ; \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ ve $e \in G$ birim eleman.

dır.(İncesu, 2008)

Bir $\varphi : G \times X \rightarrow X$ dönüşümüyle verilen bir etkide $g \in G$ elemanını seçip sabitlediğimizde

$$\varphi : G \times X \rightarrow X$$

$$(g, x) \xrightarrow{\varphi} \varphi(g, x) = gx$$

dönüşümü

$$\varphi(g, \cdot) : X \rightarrow X$$

$$x \xrightarrow{\varphi(g, \cdot)} \varphi(g, x) = gx$$

dönüşümüne indirgenmiş olur.

Tanım 2.54. G bir grup olmak üzere , $\varphi_1 = G : X_1$ ve $\varphi_2 = G : X_2$ de G grubunun verilen X_1 ve X_2 cümleleri üzerindeki iki etkisi olsun. Eğer, $\exists F : X_1 \longrightarrow X_2$ birebir ve örten dönüşümü,

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{F} & X_2 \\ \varphi_1(g, \cdot) \downarrow & & \downarrow \varphi_2(g, \cdot) \\ X_1 & \xrightarrow{F} & X_2 \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde ya da $F \circ \varphi_1(g, \cdot) = \varphi_2(g, \cdot) \circ F$ eşitliğini sağlayacak biçimde bulunabilirse φ_1 ve φ_2 etkilerine denktir denir. (İncesu, 2008)

Örnek : $G = LH(2)$ olsun. G grubunun $X_1 = \{(x, y) : y > x\} \subset R^2$ ve

$$X_2 = \{(x, y) : x > y\} \subset R^2 \text{ cümleleri üzerindeki etkileri } \lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$\varphi_1 : G \times X_1 \rightarrow X_1$$

$$(\lambda, (x, y)) = \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\varphi_1} \varphi_1(\lambda, (x, y)) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

ve

$$\varphi_2 : G \times X_2 \rightarrow X_2$$

$$(\lambda, (x, y)) = \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\varphi_2} \varphi_2(\lambda, (x, y)) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Bu durumda bir $F : X_1 \rightarrow X_2$ dönüşümü olarak $F(x, y) = (y, x)$ alınabilir. F , birebir ve örten bir dönüşümdür. Buna göre;

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{F} & X_2 \\ \varphi_1(\lambda, \cdot) \downarrow & & \downarrow \varphi_2(\lambda, \cdot) \\ X_1 & \xrightarrow{F} & X_2 \end{array}$$

$$(F \circ \varphi_1(\lambda, \cdot))(x, y) = F(\varphi_1(\lambda, \cdot)(x, y)) = F(\varphi_1(\lambda, (x, y))) = F(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y, \lambda x)$$

öte yandan

$$(\varphi_2(\lambda, \cdot) \circ F)(x, y) = \varphi_2(\lambda, \cdot)(F(x, y)) = \varphi_2(\lambda, \cdot)(y, x) = \varphi_2(\lambda, (y, x)) = (\lambda y, \lambda x)$$

olur. Böylece bu diyagramın değişmeli olduğu görülür. Buna göre bu iki etki denktir. (İncesu, 2008)

Örnek : $G = LB(1)$ alalım. $X_1 = X_2 = R$ olsun. Bu etkileri

$$\varphi_1 : G \times X_1 \rightarrow X_1$$

$$(\lambda, x) \xrightarrow{\varphi_1} \varphi_1(\lambda, x) = \lambda x$$

ve

$$\varphi_2 : G \times X_2 \rightarrow X_2$$

$$(\lambda, x) \xrightarrow{\varphi_2} \varphi_2(\lambda, x) = \lambda^2 x$$

biçiminde tanımlayalım. Bu etkiler denk etkiler değildir. Şimdi varsayalım ki bu etkiler denk olsun. O halde birebir ve örten bir $F : R \rightarrow R$ dönüşümü vardır öyle ki

$$F(\varphi_1(\lambda, x)) = \varphi_2(\lambda, F(x))$$

dir. O halde $F(\lambda x) = \lambda^2 F(x)$ olmalıdır. Buna göre $F(\lambda x) = F(-\lambda x)$ dir. Ancak $x \neq 0$ için $\lambda x \neq -\lambda x$ dir. Bu durum F nin birebir olmasıyla çelişir. Dolayısıyla bu etkiler denk değildir. (İncesu, 2008)

2.5. G- Denk Noktalar ve G- Yörünge

Tanım 2.55. G bir grup ve $\varphi = G: X$ etkisi verilmiş olsun Eğer $\forall h \in H$ ve $\forall g \in G$ için $gh \in H$ ise $H \subset X$ altcümlesine G-invaryant altcümle denir.

Bu tanımda H olarak $H = \{x_0\} \subset X$ alındığında Tanım 2.55. e göre; $\forall g \in G$ için $gx_0 = x_0$ ise bu x_0 noktasına G-invaryant nokta denir. (İncesu, 2008)

Tanım 2.56. $G: X$ verilsin. Bir $x \in X$ noktası için

$$Gx = \{gx : g \in G\}$$

cümlesine x elemanın G- yörüngesi denir. (İncesu, 2008)

Örnek : $G = LB(1)$ olsun. G grubunun $X = R$ üzerindeki etkisi

$$\varphi: G \times R \rightarrow R$$

$$(r, x) \xrightarrow{\varphi} \varphi(r, x) = rx$$

olsun. Bu etkiye göre bir $r \in R$ noktasının G- yörüngesi

$$Gr = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ R - \{0\}, & r \neq 0 \end{cases}$$

dir. (İncesu, 2008)

Örnek : $G = B(1) = \{F: F(x) = \lambda x + b, \lambda \neq 0, \lambda, b, x \in R\}$ olsun. G grubunun $X = R$ üzerindeki etkisi $k \in R$ olmak üzere,

$$\varphi_1: G \times R \rightarrow R$$

$$(r, x) \xrightarrow{\varphi} \varphi(r, x) = rx + k$$

olsun. Bu etkiye göre keyfi bir $r \in R$ noktasının G- yörüngesi

$$Gr = \{\varphi(g, r) : g \in B(1)\} = R$$

dir. (İncesu, 2008)

Önerme 2.57. $G: X$ etkisi verilmiş olsun. Keyfi $x \in X$ elemanın G- yörüngesi bir G-invaryant altcümledir. (İncesu, 2008)

İspat: $x \in X$ elemanın G- yörüngesi $Gx = \{gx : g \in G\}$ dir. Şimdi $Gx \subset X$ in bir G-invaryant altcümle olduğunu gösterelim. Bunun için her $y \in Gx$ ve her $g \in G$ için $gy \in Gx$ olduğunu göstermeliyiz. $y \in Gx$ olduğundan $\exists g_1 \in G$ öyleki $y = g_1 x$ dir.

Buna göre $gy = g(g_1x)$ yazabiliriz. Etkinin tanımından $g(g_1x) = (gg_1)x$ dir. G bir grup ve $g^* = gg_1 \in G$ olduğundan $gy = g^*x \in Gx$ dir. (İncesu, 2008)

Önerme 2.58. $G : X$ etkisi verilmiş olsun. Keyfi bir $x \in X$ elemanın G - yörüngesi Gx olmak üzere Gx -in kendisinden farklı G -invariant altcümlesi yoktur. (İncesu, 2008)

İspat: $H \subset Gx$ alalım ve H , G -invariant altcümle olsun. $H = Gx$ olduğunu gösterelim. e , G nin birim elemanı olmak üzere $x = ex$ ve $e \in G$ olduğundan $x \in Gx$ dir. $y \in H$ olsun. Bu takdirde $\exists g_1 \in G$ öyleki $y = g_1x \in H$ dir. H , G -invariant altcümle olduğundan her $g \in G$ için $gy = g(g_1x) \in H$ dir. O halde $g = g_1^{-1}$ için de doğrudur. Dolayısıyla, $gy = g_1^{-1}(g_1x) = (g_1^{-1}g_1)x = x \in H$ dir. $x \in H$ ve H , G -invariant altcümle ve her $g \in G$ için $gx \in H$ olduğundan $Gx \subset H$ dir. Buradan $Gx = H$ elde edilir. (İncesu, 2008)

Burada bu önerme ile şu gösterilmiş oldu: bir G -invariant altcümle eğer bir noktayı kapsıyorsa onun yörüngesini de kapsamaktadır ve bir elemanın kendisini içeren en küçük G -invariant altcümle o elemanın yörüngesidir. Yani bir $x \in X$ için x i kapsayan en küçük G -invariant altcümle Gx dir.

Sonuç: Keyfi $a \in Gx$ için $Ga = Gx$ dir.

İspat: $Ga \subset Gx$ altcümlesi, Önerme 2.57. e göre, Gx ' in invariant altcümlesidir. Bu takdirde, Önerme 2.58. e göre, $Ga = Gx$ dir. (İncesu,2008)

Önerme 2.59. G bir grup ve $G : X$ etkisi verilmiş olsun. $x, y \in X$ ($x \neq y$) noktalarının yörüngeleri Gx ve Gy ler olmak üzere $Gx \cap Gy \neq \emptyset$ ise, $Gx = Gy$ dir. Başka bir ifade ile $Gx \neq Gy$ ise $Gx \cap Gy = \emptyset$ dir. (İncesu,2008)

İspat: Varsayalım ki $Gx \cap Gy \neq \emptyset$ olsun. Bu takdirde $a \in Gx \cap Gy$ elemanı mevcuttur. Yukarıdaki sonuca göre $Ga = Gx$ ve $Ga = Gy$ dir. Dolayısıyla $Gx = Gy$ dir. (İncesu, 2008)

Tanım 2.60. G bir grup ve $G : X$ etkisi verilmiş olsun. Eğer, $\exists g \in G$ öyleki $x_2 = gx_1$ ise $x_1, x_2 \in X$ noktalarına G -denk noktalar denir. Bu noktaların G - denk olması $x_1 \sim_G x_2$ şeklinde gösterilir. (İncesu, 2008)

Tanım 2.61. X de $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ noktalar sistemi ve $G : X$ etkisi verilmiş olsun. Eğer bir $g \in G$, $i = 1, 2, \dots, k$ için $y_i = gx_i$ olacak biçimde bulunabilirse

$\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ve $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ noktalar sistemine G - denk denir ve $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \stackrel{G}{\approx} \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ şeklinde gösterilir. (İncesu, 2008)

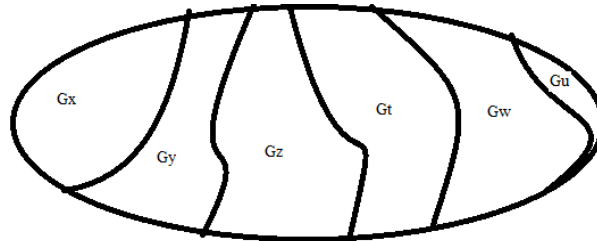
Önerme 2.62. Noktaların G - denklik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. (İncesu, 2008)

İspat: 1. $x_1 \stackrel{G}{\sim} x_1$ dir. Çünkü e , G nin birim elemanı olmak üzere $x_1 = ex_1$ dir.

2. $x_1 \stackrel{G}{\sim} x_2$ olsun. Bu takdirde bir $g \in G$ vardır öyleki, $x_2 = gx_1$ dir. Bu durumda $g^{-1}x_2 = (g^{-1}g)x_1 = x_1$ olacağından $x_2 \stackrel{G}{\sim} x_1$ dir.

3. $x_1 \stackrel{G}{\sim} x_2$ ve $x_2 \stackrel{G}{\sim} x_3$ olsun. Buna göre bir $g_1 \in G$ vardır, öyleki $x_2 = g_1x_1$ dir ve bir $g_2 \in G$ vardır öyleki, $x_3 = g_2x_2$ dir. O halde $x_3 = g_2(g_1x_1) = (g_2g_1)x_1$ ve $g_2g_1 \in G$ olduğundan $x_1 \stackrel{G}{\sim} x_3$ dir. Dolayısıyla $\stackrel{G}{\sim}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. (İncesu, 2008)

Böylece bir elemanın $\stackrel{G}{\sim}$ bağıntısına göre denklik sınıfları o elemanın G - yörüngeleridir. Bu $\stackrel{G}{\sim}$ bağıntısı cümlelerin elemanlarını arakesitleri boş olan denklik sınıflarına ayırmaktadır.



Çizelge 1. X Kümesinin elemanlarının G denklik bağıntısına göre yörüngeleri

2.6. G - invariant Fonksiyonlar ve G -denklik Problemi

Tanım 2.63. G bir grup, $f: X \rightarrow R$ fonksiyonu ve $G: X$ etkisi verilmiş olsun. Eğer, $x \stackrel{G}{\sim} y$ olduğunda $f(x) = f(y)$ ise ya da $\forall g \in G$ ve $\forall x \in X$ için $f(gx) = f(x)$ ise f fonksiyonuna G - invariant fonksiyon denir. (İncesu, 2008)

Örnek : $G = SO(1)$ alalım. G - invariant polinomların nasıl olduklarına bakalım. $P(x)$ bir G - invariant polinom olsun $SO(1) = \{1\}$ olduğundan $P(1x) = P(x)$ dir. Yani $P(x) = P(x)$ olur ki bunun anlamı tüm polinomlar $SO(1)$ - invarianttır.

Örnek : $G = O(1)$ olsun. G - invaryant polinomların nasıl olduklarına bakalım. $P(x)$ bir G - invaryant polinom olsun $O(1) = \{-1, 1\}$ olduğundan dolayı, $P(1x) = P(x)$ ve $P(-1x) = P(x)$ dir. Yani $P(-x) = P(x)$ bulmak yeterlidir. O halde

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

biçiminde bir polinom için $P(-x)$ polinomu ise

$$P(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - \dots + (-1)^n a_nx^n$$

olur. Bu iki polinomun eşit olmasından $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = 0$ elde edilir. O halde $O(1)$ invaryant polinomu

$$P(x) = a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}$$

biçimindedir. (İncesu, 2008)

Tanım 2.64. G bir grup, $H \subset G$ bir altgrup ve f, R^n de tanımlı bir reel fonksiyon olsun. Bir $\lambda(h)$, $h \in H$, reel fonksiyonu için

$$f(hx) = \lambda(h)f(x), \quad \forall h \in H, \quad \forall x \in R^n$$

ise, f ' ye nispi invaryant fonksiyon denir. $\lambda(h)$ fonksiyonuna da f nin çarpanı denir.

$x \in R^n$ ve $h_1, h_2 \in H$ olmak üzere f, λ çarpanına sahip bir nispi invaryant fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$f((h_1h_2)x) = f(h_1(h_2x)) = \lambda(h_1)f(h_2x) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)f(x)$$

ve

$$f((h_1h_2)x) = \lambda(h_1h_2)f(x)$$

olduğundan her iki tarafın eşitliğinden ve $f(x) \neq 0$ ise, keyfi $h_1, h_2 \in H$ için

$$\lambda(h_1h_2) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)$$

elde edilir. (İncesu, 2008)

Önerme 2.65. $H \subset B(n)$ bir altgrup ve f, H - invaryant rasyonel fonksiyon olsun. Bu durumda f ,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0$$

olacak şekilde çarpanları eşit iki nispi invaryant polinomun bölümü biçiminde yazılabilir. (İncesu, 2008)

İspat: $f(x)$, H - invaryant olduğundan $\forall h \in H$ için $f(hx) = f(x)$ dir. f rasyonel fonksiyon olduğundan, P ve Q aralarında asal polinomlar olmak üzere

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$f(hx) = \frac{P(hx)}{Q(hx)} = \frac{P(x)}{Q(x)} = f(x)$$

dir. Bu eşitlikten,

$$P(hx) \cdot Q(x) = P(x) \cdot Q(hx)$$

elde edilir. $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları aralarında asal ve

$$P(hx) = \frac{P(x)Q(hx)}{Q(x)}$$

olduğundan $Q(hx)$, $Q(x)$ polinomuna bölünecektir. Yani, bir $\varphi(x, h)$ polinomu mevcut öyleki, $Q(hx) = \varphi(x, h)Q(x)$ olacaktır. Polinomların eşitliğinden her iki tarafın derecesi eşit olacaktır. Bu durumda $\varphi(x, h)$ polinomu sadece h ye bağlı olmalıdır. O halde

$$Q(hx) = \varphi(h)Q(x)$$

dir. Bu eşitliği yukarıda yerine yazarsak,

$$P(hx) = \frac{P(x)\varphi(h)Q(x)}{Q(x)}$$

olacağından

$$P(hx) = \varphi(h)P(x)$$

dir. (İncesu, 2008)

Tüm bir bilinmeyenli reel katsayılı G - invaryant polinomların cümlesini $R[x]^G$ ile, tüm bir bilinmeyenli reel katsayılı G - invaryant rasyonel fonksiyonların cümlesini de $R(x)^G$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.66. K bir cisim ve K üzerinde toplama, çarpma ve skalerle çarpım işlemleri tanımlansın. Eğer

- 1- $(K, +, \cdot)$ değişmeli, birimli halka;
- 2- $(K, +, \lambda \cdot)$ R üzerinde vektör uzayı;
- 3- $\forall a, b \in K$ ve $\forall \lambda \in R$ için $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$

ise $(K, +, \cdot, \lambda \cdot)$ sistemine R -cebir denir. (İncesu, 2008)

Örnek : Bir bilinmeyenli polinomların $R[x]$ halkası birimli R -cebirdir.

Önerme 2.67. $R[x]^G$, $R[x]$ polinomlar R-cebirinin birimli alt R-cebiridir.

(İncesu, 2008)

İspat: $f_1, f_2 \in R[x]^G$ olsun. $\forall x \in R^n$ ve $\forall g \in G$ için,

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(gx) &= f_1(gx) + f_2(gx) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x), \\ (f_1 \cdot f_2)(gx) &= f_1(gx) \cdot f_2(gx) = f_1(x) \cdot f_2(x) = (f_1 \cdot f_2)(x),\end{aligned}$$

$\lambda \in R$ olmak üzere,

$$(\lambda f)(gx) = \lambda f(gx) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x)$$

ve $1(x) = 1 \in R[x]$ birim elemanı için

$$(1f)(gx) = 1(gx) \cdot f(gx) = 1 \cdot f(x) = f(x)$$

olduğundan $f_1 - f_2$, $f_1 \cdot f_2$, $\lambda \cdot f$, $1 \in R[x]^G$ dir. Yani, $R[x]^G$, $R[x]$ in birimli alt R-cebiridir. (İncesu, 2008)

2.7. Afin Manifoldlar ve Zariski Topolojisi

R^n , n- boyutlu reel vektör uzayı olsun.

Tanım 2.68. Eğer bir $\{f_\tau(x), \tau \in T\}$ ailesi, $f_\tau(x) \in R[x]$ olmak üzere bulunabiliyorsa

$$X = \{x \in R^n : f_\tau(x) = 0, \forall \tau \in T\} \subset R^n$$

alt cümlesine R^n nin bir afin manifoldu denir. (İncesu, 2008)

Örnek : R de keyfi bir sonlu altcümle bir afin manifolddur. Yani,

$X = \{r_1, r_2, \dots, r_m\} \subset R$ bir afin manifolddur. Çünkü,

$$X = \{x \in R : (x - r_1) \dots (x - r_m) = 0\} \subset R \text{ yazılabilir. (İncesu, 2008)}$$

Önerme 2.69. X, R de bir afin manifold olsun. Bu takdirde $X = R$ veya $X = \emptyset$ ya da X, R nin sonlu bir alt cümlesidir. (İncesu, 2008)

İspat: (Sağiroğlu, 2002)

Örnek : $n = 2$ durumunda iki değişkenli polinomların sıfır yerleri olarak

$$X = \{(x, y) \in R^2 : f(x, y) = ax + by + c = 0\}$$

cümlesini alalım, burada $a, b, c \in R$ sabit sayılar olsun. Bu cümle düzlemde bir doğrudur. Dolayısıyla keyfi doğru düzlemde bir afin manifolddur.

Önerme 2.70. Herhangi sayıda afin manifoldların arakesiti de bir afin manifolddur. (İncesu, 2008)

İspat: (Sağiroğlu, 2002)

Önerme 2.71. X_1, X_2 afin manifoldlar ise $X_1 \cup X_2$ de bir afin manifolddur.

İspat: (Sağıroğlu, 2002)

Sonuç : Sonlu sayıda afin manifoldun birleşimi de bir afin manifolddur.

Şimdi R^n deki afin manifoldlarla bir topoloji oluşturacağız. \mathfrak{T} ile R^n deki tüm afin manifoldlar sistemini gösterelim.yani,

$$\mathfrak{T} = \{X : X \subset R^n \text{ afin manifold}\}$$

olsun. Böylece

$$T1) R^n \in \mathfrak{T}$$

$$T2) \emptyset \in \mathfrak{T}$$

$$T3) \forall \tau \in T \text{ için } X_\tau \in \mathfrak{T} \text{ iken } \bigcap_{\tau \in T} X_\tau \in \mathfrak{T}$$

$$T4) X_1, X_2, \dots, X_m \in \mathfrak{T} \text{ için } \bigcup_{\tau=1}^m X_\tau \in \mathfrak{T}$$

dır. Dolayısıyla \mathfrak{T} sistemi, R^n de kapalı cümlelerle oluşturulmuş bir topolojidir. Bu topolojiye Zariski topolojisi denir.

R^n deki sonlu sayıda noktadan oluşan keyfi bir alt cümle Zariski topolojisine göre kapalıdır. Önerme 2.69. a göre $n = 1$ için R deki Zariski topolojisine göre R nin kapalı alt cümleleri ancak R, \emptyset ve sonlu alt cümleleridir. Buna göre R de $[0,1]$ aralığı öklid topolojisine göre kapalı olmasına karşın Zariski topolojisine göre kapalı değildir.

Önerme 2.72. R de Zariski topolojisi Housdorf topolojisi değildir. (İncesu, 2008)

İspat: Bu topolojiye göre bir noktayı içeren açık cümle, o noktayı ihtiva eden, ancak, R veya R den sonlu sayıda noktanın çıkartılmasıyla kalan cümledir. $x, y \in R$ ve $x \neq y$ olsun. x i içeren açık cümle olarak

$$B(x) = R \setminus \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$$

alalım. Benzer şekilde y i içeren açık cümle olarak $B(y) = R \setminus \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$ alalım.

$$B(x) \cap B(y) = R \setminus \{r_1, r_2, \dots, r_m\} \cup \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\} = R \setminus \{r_1, r_2, \dots, r_m, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\} \neq \emptyset$$

olduğundan Zariski topolojisi housdorf topolojisi değildir. (İncesu, 2008)

2.8. Q ve J Operatörleri

Tanım 2.73. K , birimli, değişmeli R - cebir ve $I \subset K$ boştan farklı bir alt cümle olsun.

1. $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$ ve
2. $\forall a \in I$ ve $\forall s \in K$ için $a \cdot s \in I$

koşulları sağlanıyorsa I ya K nin ideali denir ve $I \triangleleft K$ biçiminde gösterilir.

(İncesu, 2008)

Şimdi \mathcal{G} ve J operatörlerini tanımlayalım. $R[x_1, \dots, x_n]$ polinomlarının R -cebirinin ideallerinin cümlesini $L\{R[x_1, \dots, x_n]\}$ ile gösterelim.

Tanım 2.74. \mathcal{G} operatörü :

$$\mathcal{G}: L\{R[x_1, \dots, x_n]\} \rightarrow R^n$$

$$I \rightarrow \mathcal{G}(I) = \{x \in R^n : f(x) = 0, \forall f \in I\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $I \in L\{R[x_1, \dots, x_n]\}$ bir idealdir. (İncesu, 2008)

Tanım 2.75. J operatörü:

$$J: 2^{R^n} \rightarrow 2^{R[x_1, \dots, x_n]}$$

$$X \subset R^n \rightarrow J(X) = \{f \in R[x_1, \dots, x_n] : f(x) = 0, \forall x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $X \in 2^{R^n}$ dir. (İncesu, 2008)

Önerme 2.76. 1. $I \in L\{R[x_1, \dots, x_n]\}$ için $\mathcal{G}(I)$ bir afin manifolddur.

2. $X \in 2^{R^n}$ için $J(X) \in L\{R[x_1, \dots, x_n]\}$ dir. (İncesu, 2008)

İspat:

1. açıktır.

2. $f_1, f_2 \in J(X)$ olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için

$$(f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x) = 0 - 0 = 0$$

olduğundan $(f_1 - f_2) \in J(X)$ dir. Ayrıca, $f \in J(X)$ ve $\gamma \in R[x_1, \dots, x_n]$ olmak üzere

$\forall x \in X$ için $(\gamma \cdot f)(x) = \gamma(x) \cdot f(x) = \gamma(x) \cdot 0 = 0$ olduğundan $\gamma \cdot f \in J(X)$ dir.

Önerme 2.77. $I \in L\{R[x_1, \dots, x_n]\}$ ve $X \subset R^n$ için $I \subset J(\mathcal{G}(I))$ ve $X \subset \mathcal{G}(J(X))$ dir. (İncesu, 2008)

İspat: $f \in I$ olsun. Bu durumda keyfi $x \in \mathcal{G}(I)$ için $f(x) = 0$ dir. O halde $f \in J(\mathcal{G}(I))$ dir. Böylece, $I \subset J(\mathcal{G}(I))$ dir.

Şimdi, $x \in X$ olsun. Bu durumda keyfi $f \in J(X)$ için $f(x) = 0$ dir. O halde $x \in \mathcal{G}(J(X))$ dir. Böylece, $X \subset \mathcal{G}(J(X))$ elde edilir. ♦

Genel olarak $I \neq J(\mathcal{G}(I))$ ve $X \neq \mathcal{G}(J(X))$ dir. Bunlara birer örnek verelim.

Örnek : $n = 1$ boyutta $X = Q$ rasyonel sayılar cümlesi olsun. Bu durumda

$$J(Q) = \{f \in R[x] : f(x) = 0, \forall x \in Q\} = \{0\}$$

dir ve

$$\mathcal{G}(J(Q)) = \{x \in R : 0(x) = 0\} = R$$

olduğundan $Q \subset \mathcal{G}(J(Q))$, fakat $Q \neq \mathcal{G}(J(Q)) = R$ dir.

Örnek : $R[x]$ de $I = x^2 \cdot R[x]$ idealini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\mathcal{G}(I) = \{x \in R : f(x) = 0, \forall f \in I\} = \{x \in R : x^2 \varphi(x) = 0, \forall \varphi \in R[x]\} = \{0\} \text{ ve}$$

$$J(\mathcal{G}(I)) = \{\varphi \in R[x] : \varphi(0) = 0\}$$

şeklinde dir. Örneğin $f(x) = x$ polinomu için $f(0) = 0$ dir ancak $f \notin I = x^2 R[x]$ dir.

Böylece, $I \subset J(\mathcal{G}(I))$, fakat $I \neq J(\mathcal{G}(I))$ olduğu görülmüş olur.

Tanım 2.78. K bir birimli, değişmeli halka ve $I \triangleleft K$ bir ideali olsun. $a, b \in I$ olmak üzere $ab \in I$ için $a \in I$ ya da $b \in I$ ise I ya asal ideal denir. (İncesu, 2008)

Tanım 2.79. K bir birimli, değişmeli halka ve $I \triangleleft K$ bir ideal olsun. I idealinin asal radikali

$$R(I) = \bigcap_{\substack{I \subset P \\ P \text{ asal}}} P$$

olarak tanımlanır. Burada, eğer $I \neq K$ ise I – yı kapsayan asal ideal her zaman mevcuttur. Çünkü birimli halkalar her zaman bir maksimal ideale sahiptir. Eğer $I = K$ ise $R(I) = K$ dir. (İncesu, 2008)

2.8.9. \mathcal{G} Operatörünün Özellikleri

Önerme 2.80. $K = R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ve

- 1- $\mathcal{G}(K) = \emptyset$,
- 2- $\mathcal{G}(\{0\}) = R^n$,
- 3- $I_1, I_2 \triangleleft K$ ve $I_1 \subset I_2$ ise $\mathcal{G}(I_1) \supset \mathcal{G}(I_2)$,
- 4- $R(I)$, I idealinin radikali olmak üzere, $\mathcal{G}(I) = \mathcal{G}(R(I))$ dir.

İspat: (Sagiroğlu, 2002)

2.8.10. J Operatörünün Özellikleri

Önerme 2.81. $K = R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ olmak üzere,

- 1- $J(\emptyset) = K$,
- 2- $J(R^n) = \{0\}$,

- 3- $X, Y \subset R^n$ ve $X \subset Y$ ise $J(X) \supset J(Y)$,
- 4- $I \triangleleft K$ ve $R(I)$, I idealinin radikali ise $J(\mathcal{G}(I)) \supset R(I)$,
- 5- $X \subset R^n$ için $J(X) = R(J(X))$ dir. (İncesu,2008)

İspat: (Sagiroğlu, 2002)

Tanım 2.82. X bir topolojik uzay olsun. Eğer, $X_1, X_2 \subset X$ kapalı alt cümleleri, $X_1 \neq X$, $X_2 \neq X$ iken $X_1 \cup X_2 = X$ olacak biçimde bulunabiliyorsa X topolojik uzayına indirgenebilir denir. Aksi halde X topolojik uzayına indirgenemez denir. (İncesu, 2008)

Örnek : Zariski topolojisine göre R topolojik uzayı indirgenemezdir. Eğer aksi olmuş olsaydı R nin iki sonlu alt cümlelerin birleşimi şeklinde yazılabilir olması gerekirdi ki bu da R nin sonsuz olmasıyla çelişir. Dolayısıyla R indirgenemezdir.

Önerme 2.83. M topolojik uzayı indirgenemezdir ancak ve ancak M deki keyfi iki boştan farklı açık cümlelerin arakesiti boş değildir. (İncesu,2008)

İspat: (Sagiroğlu, 2002)

Önerme 2.84. R^n indirgenemezdir.

İspat: (Sagiroğlu, 2002)

Önerme 2.85. U , R^n de boştan farklı keyfi bir açık cümle ise $\overline{U} = R^n$ dir. Yani U , R^n de yoğundur.

İspat: (Sagiroğlu, 2002)

Önerme 2.86. $B \subset R^n$ bir alt cümle ve $f \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ öyleki $f(x) = 0, \forall x \in B$ olsun. Bu takdirde $f(x) = 0, \forall x \in \overline{B}$ dir. (İncesu, 2008)

İspat: Önceki önermeye göre $f: R^n \rightarrow R$ sürekli dönüşümdür. Dolayısıyla R nin 0 elemanı için $f^{-1}(0)$, R^n de kapalıdır. $f(x) = 0, \forall x \in B$ olduğundan $B \subset f^{-1}(0)$ dir. Buradan ve $f^{-1}(0)$ cümlesinin kapalı olmasından $\overline{B} \subset \overline{f^{-1}(0)} = f^{-1}(0)$ dir. Dolayısıyla $\overline{B} \subset f^{-1}(0)$ yani $\forall x \in \overline{B}$ için $f(x) = 0$ elde edilir.

Lemma (R^n için Cebirsel Eşitsizliklerin Önemli Olmadığı Prensibi):

$p_i \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $i = 1, 2, \dots, k$ sıfırdan farklı polinomlar olsunlar.

$$B = \{x \in R^n : p_i(x) \neq 0, i = 1, 2, \dots, k\}$$

olsun. Bir $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ polinomu için $F|_B = 0$ ($\forall x \in B$ için $F(x) = 0$) ise, $F|_{R^n} = 0$ dir. (İncesu, 2008)

Sonuç : $p_i \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $i = 1, 2, \dots, k$ sıfırdan farklı polinomlar ve

$$B = \{x \in R^n : p_i(x) \neq 0, i = 1, 2, \dots, k\}$$

olsun. $f, g \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ öyle ki, $f|_B = g|_B$ olsun. Bu takdirde $f|_{R^n} = g|_{R^n}$ dir.

İspat: $F = f - g$ dersek, sonucun varsayımına göre $(f - g)|_B = 0$ dir. Bu takdirde önceki önermeye göre $(f - g)|_{R^n} = 0$ dir. Dolayısıyla $f|_{R^n} = g|_{R^n}$ elde edilir.

3. BİRASYONEL KOBORDİZM İNVARYANTLAR

3.1. Kobordizm Kategorisi

Tanım 3.1. Bir kategori üç bölümden oluşur.

- (1) Elemanların bir koleksiyonu
- (2) Bu elemanların her bir parçası için birinden diğerine morfizmlerin bir koleksiyonu
- (3) Kompozisyon diye adlandırılan, morfizmlerin uyumlu parçaları üzerinde tanımlı ikili işlem

Bir kategori birim eleman ve asosyatif özellikleri sağlamalıdır.

- (1) Morfizmler şu kurallara uymak zorundadır. Eğer $u: A \rightarrow B$ bir morfizm ise $v: B \rightarrow C$ morfizm ise bu takdirde $A \xrightarrow{u+v} C$ bir morfizm vardır.
- (2) Morfizmlerin kompozisyonu asosyatif olmalıdır.
- (3) Her bir A nesnesi için I_A birim dönüşümü vardır. Öyle ki her $u: A \rightarrow B$ için I_A ile u nin bileşkesi u yu verir.

Topolojik uzaylar kategorisinde morfizmler topolojik uzaylar arasındaki sürekli dönüşümlerdir. Her ne kadar topolojik uzaylara sahip olan diğer kategori kavramları olsada bunlar topolojik uzayların ve sürekli dönüşümlerin standart kategorisi kadar öneme sahip değildir. (URL-7, 2019)

Tanım 3.2. Bir (C, ∂, ι) kobordizm kategorisi şu şartları sağlayan bir üçlüdür.

- 1) C bir sonlu toplamlı ve başlangıç nesnesi \emptyset olan bir kategoridir.
- 2) $\partial: C \rightarrow C$ funktörü $\partial \partial M = \emptyset$ (her $M \in C$ için) ve $\partial \emptyset = \emptyset$ şartını sağlayan toplamsal bir funktördür.
- 3) $\iota: \partial \rightarrow id$ funktörü, id birim funktör olmak üzere toplamsal funktörlerin bir doğal transformasyonudur.
- 4) C nin her zaman bir küçük C_0 alt kategorisi vardır öyle ki C nin her elemanı, C_0 in bir elemanına izomorfiktir. (Weston, URL-1,2019)

Burada, kompakt diferansiyellenebilir manifoldlar durumunda \emptyset yi bir boş manifold olarak ve ι yi da M nin ∂M yi içermesi olarak düşünürüz. D_0 alt kategorisinin varlığını Whitney gömme teoreminin, (her manifoldun \mathbb{R}^∞ un bir alt manifolduna izomorfik olması) biçimindeki ifadesiyle algılanır.(Hirsch,1976)

Kobordizm temel tanımı, şu denklik bağıntısıyla verilir.

Tanım 3.3. (C, ∂, ι) kobordizm kategorisinde, M ve N ye kobordant denir, $(M \equiv N)$, eğer $U, V \in C$ için

$$M + \partial U \cong N + \partial V$$

ise. (Weston, URL-1,2019)

Şimdi kobordizm bağıntısının temel özelliklerini verelim.

Önerme 3.4. $M, N, M', N' \in C$ olsun.

(1) \equiv bağıntı C de bir denklik bağıntısıdır ve bu bağıntının denklik sınıfları bir küme oluşturur.

(2) Eğer $M \equiv N$, $\partial M \cong \partial N$

(3) $\forall M$ için $\partial M \equiv \emptyset$

(4) Eğer $M \equiv M'$, $N \equiv N'$ ise $M + N \equiv M' + N'$ dir.(Weston, URL-1,2019)

Sonuç. (1) \equiv nin denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma simetri ve geçişme özelliği olduğunu gösterelim. Yansıma ve simetri izomorfizmin özelliklerinde görülebilir. Geçişme özelliğine gelince varsayalım ki $M \equiv N$ ve $M \equiv P$ olsun. Bu durumda $\exists U, V, W, X \in C$, $M + \partial U \cong N + \partial V$ ve $N + \partial W \cong P + \partial X$ dir. Burada

$$\begin{aligned} M + \partial(U + W) &\cong (M + \partial U) + \partial W \\ &\cong N + \partial V + \partial W \\ &\cong N + \partial V + \partial X \\ &\cong N + \partial(V + X) \Rightarrow M \equiv P \end{aligned}$$

dir.

(2) $M \equiv N$ olsun. $\exists U, V \in C \therefore M + \partial U \cong N + \partial V$ dir. O zaman

$$\begin{aligned}
\partial M &\cong \partial M + \emptyset \\
&\cong \partial M + \partial \partial U \\
&\cong \partial(M + \partial U) \\
&\cong \partial(N + \partial V) \\
&\cong \partial N + \partial \partial V \\
&\cong \partial N + \emptyset \\
&\cong \partial N
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\partial M &\cong \partial M \\
\partial(M + \emptyset) &\cong \emptyset + \partial M \\
\partial M + \partial \emptyset &\cong \emptyset + \partial M \\
\partial M &\cong \emptyset
\end{aligned}$$

(4) $M \equiv M'$ ve $N \equiv N'$ olsun. $\exists U, V, U', V' \in C$ öyle ki;

$M + \partial U \cong M' + \partial U'$ ve $N + \partial V \cong N' + \partial V'$ taraf tarafa toplanır

$$\begin{aligned}
M + N + \partial(U + V) &\cong M' + N' + \partial(U' + V') \\
M + N &\equiv M' + N'
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradaki kobordizm tanımı Thom'un orijinal tanımıyla aynı değil. Orijinal tanımında; M ve N (sınır olmaksızın) iki manifold olsun. M ve N ye kobordant denir ($M \equiv N$ dir) eğer sınırı olan bir T manifoldu $M + N \cong \partial T$ şartını sağlayacak şekilde kullanılabilir. (Thom, 1954) Oysaki bu iki tanımın denkliği çok rahat görülebilir.

Önerme 3.5. Sınırsız manifoldlar için Thom'un tanımı ile tanım 3.2. denktir. (Weston, URL-1, 2019)

İspat. Farzedelim ki M ve N kobordanttır. O zaman $M + \partial U \cong N + \partial V$ ile U ve V manifoldlar olur. Diyelim ki $T_1 = M \times I + U$, $T_2 = N \times I + V$ dir. O zaman $\partial T_1 = M + M + \partial U$ ve $\partial T_2 = N + N + \partial V$ dir. $M + \partial U \cong N + \partial V$ den $\partial T \cong M + N$ ile T bir manifold forma ortak sınır boyunca T_1 ve T_2 ye dikkatimizi vereceğiz.

Şimdi farz edelim ki $\partial T \cong M + N$ ile T ye sahibiz. O zaman

$$\begin{aligned}
M + \partial T &\cong M + M + N \\
&\cong N + \partial(M + I)
\end{aligned}$$

buradan $M \equiv N$ dir.

Şimdi kobordizm yarı grubun tanımı için devam edelim.

Tanım 3.6. C nin bir elemanı eğer $\partial M \cong \emptyset$ ise kapalı olduğunu söyleyebiliriz. Eğer $M \cong \emptyset$ ise M sınırlıdır deriz. (Weston, URL-1,2019)

Önerme 3.7. Diyelim ki M ve N , C nin elemanları olsun.

(1)Farzedelim ki $M \cong N$ olsun. O zaman M kapalıdır ancak ve ancak N kapalıysa ve M sınırlıdır ancak ve ancak N sınırlıysa.

(2)Eğer M ve N her ikisi de kapalıysa o zaman $M + N$ de kapalıdır. Eğer M ve N her ikisi de sınırlıysa o zaman $M + N$ de sınırlıdır.

(3)Eğer M sınırlıysa o zaman M kapalıdır. (Weston, URL-1,2019)

İspat. (1) Kapalı elemanlar etrafındaki ifade önerme 3.4. in ikinci partından yakındır. $Ve \equiv$ durumundan takip eden bağlayıcı elemanlar etrafındaki ifade bir eşdeğer bağlantıdır.

(2) Eğer M ve N ikisi de kapalıysa o zaman $\partial(M + N) \cong \partial M + \partial N \cong \emptyset + \emptyset \cong \emptyset$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}\partial(M + N) &\cong \partial M + \partial N \\ &\cong \emptyset + \emptyset \\ &\cong \emptyset\end{aligned}$$

Bu nedenle $M + N$ kapalıdır. Benzer şekilde eğer M ve N sınırlı ise o zaman $M \cong \emptyset$ ve $N \cong \emptyset$, böylece $M + N \cong \emptyset$.

(3) Eğer M sınırlı ise o zaman $M \cong \emptyset$. Burada önerme 3.4. in part 2 sinden $\partial M \cong \partial \emptyset \cong \emptyset$. Böylece M kapalıdır.

Önerme 3.1.4. ve 3.1.7. birleşimini aşağıda elde edeceğiz.

Önerme 3.8. C nin alt denklik sınıflarının durumu değişmeli, C de toplam ile birleşmeli bir işlemdir. Bu işlem için \emptyset sağlayan bir benzer elemanın sınıfıdır. (Weston, URL-1,2019)

Bunu düşünerek aşağıdaki tanımı yazabiliriz.

Tanım 3.9. $\Omega(D, \partial, \iota)$ kobordizm yarı grubu C de toplamayla indüklenmiş işlem ile, C nin kapalı elemanlarının denklik sınıflarının durumudur. (Weston, URL-1,2019)

Not edelim ki $\Omega(D, \partial, \iota)$ nin sınırlı elemanları ile kapalı elemanlarının oranı basittir ve homoloji teoride kesindir.

Yönlendirilmiş kobordizm yarı grubu $\Omega(C, \partial, \iota)$ genellikle \mathfrak{N} biçiminde gösterilir.

Kobordizm teorisinin temel problemidir, o zaman bu (C, ∂, ι) nın spesifik değerleri için bu yarı grubun determinantıdır. Şüphesiz o, bu hesaplamayı daha iyi sağlayan netlikte değildir.

Kobordizmin daha anlaşılır bir tanımını şöyle verebiliriz:

Tanım 3.10. (Kobordizm) W ; $n+1$ boyutlu, sınırlı olan, kompakt diferansiyellenebilir manifold; M ve N ler kapalı n manifoldlar ve i ve j dönüşümler ise

$$\left. \begin{array}{l} i: M \rightarrow \partial W \\ j: N \rightarrow \partial W \end{array} \right\}$$

biçiminde verilen ve $i(M)$ ile $j(N)$ ayrık ve $i(M) \cup j(N) = \partial W$ şartını sağlayan içine dönüşümler olmak üzere $(W; M, N, i, j)$ sıralısına bir $(n+1)$ - boyutlu kobordizm denir. (URL-2, 2019)

Terminolojide genellikle bu yapı $(W; M, N)$ olarak kısaltılır. Burada eğer bir W kobordizmi varsa M ve N ye kobordant denir. Verilen sabit bir M manifolduna kobordant olan tüm manifoldlar M nin kobordizm sınıfını oluşturur.

3.2. (B, f) Manifold

Tanım 3.11. Homotopi bir fonksiyondan diğerine sürekli dönüşümdür. İki fonksiyon arasındaki homotopi f ve g den, X uzayından Y uzayına bir sürekli G dönüşümünden $X \times [0,1] \mapsto Y$ öyleki $G(x,0) = f(x)$ ve $G(x,1) = g(x)$ dir. Burada x eşlemeyi belirtir. (URL-9, 2019)

Tanım 3.12. (Lifting) Diyelim ki $f: A \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. f nın bir yükseltmesi $F: A \rightarrow Y$ dönüşümüdür öyle ki $f = p \circ F$ dir. Örneğin çembere bir dönüşüm verildiğinde, yükseltme reel sayılar için bir dönüşümdür öyle ki bu nokta çemberin üzerindeki noktayı o noktaya karşılık gelen bir açıyla yükseltir. Uzayda yollar için X yükseltmelerinin daima varolduğunu ve başlangıç noktaları tarafından belirlendiğini görüyoruz.

Tanım 3.13. (Homotopy Lifting Teorem) Diyelim ki $H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow X$ bir yol olsun. Ve diyelim ki $y \in Y$ olsun Öyle ki $p(y) = H(0,0)$. O zaman bu $\tilde{H}: [0,1] \times [0,1] \rightarrow Y$ benzersiz bir homotopidir. Öyle ki $H = p \circ \tilde{H}$ ve $\tilde{H}(0,0) = y$.

Tanım 3.14. E , B topolojik uzaylar olsun. Bunlar arasında tanımlanan $f: E \rightarrow B$ dönüşümü homotopi lifting özelliklerini sağlıyorsa f e fibrasyon denir.

Tanım 3.15. Bir Grassmann manifold bir vektör uzayın alt vektörlerinin belirli koleksiyonudur. Özellikle \mathcal{G}_{nk} , \mathbb{R}^n vektör uzayının k -boyutlu alt uzaylarının Grassmann manifoldudur. G^n de ortonormal k -çatısının Stiefel manifold v_{nk} nın bir yörünge uzayı gibi bir normal manifold yapısıdır. Grassmann manifold hakkında söylemek istediğimiz ; vektör demetleri için sınıflandırılmış uzaydır. (URL-10, 2019)

Tanım 3.16. Ortonormal k -çatısının Stiefel manifoldu (v_1, \dots, v_k) vektörlerinin koleksiyonudur. Burada v_i tüm i ler için \mathbb{R}^n dedir ve k -değişkenler grubu (v_1, \dots, v_k) ortonormaldir. Bu \mathbb{R}^{nk} nın bir alt manifoldudur, $n_k - (k+1)k/2$ boyutuna sahiptir. (URL-11, 2019)

Tanım 3.17. Kanonik demet, karmaşık bir yapıda bulunan kompleks bir manifold üzerinde bulunan bir holomorfik çizgi demetidir. Bir koordinat tablosunda (z_1, \dots, z_n) , sıfırdan farklı $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ bölümü tarafından kapsamaktadır. Koordinat çizelgeleri arasındaki geçiş işlevi, koordinat değişkenliğinin jacobianının determinanı tarafından verilir. (URL-6, 2019)

Tanım 3.18. Bir Y örtüsünün X refinementi bir örtüdür öyleki her $x \in X$ bir $y \in Y$ nin bir alt kümesidir.

Tanım 3.19. Bir parakompakt uzay bir T_2 uzaydır öyleki her açık örtü bir local sonlu açık refinemente sahiptir. Parakompaktlık iyi bilinen bir özelliktir o topolojik uzaylarda sağlanır. Parakompaktlık kompaktlık özelliğine benzerdir. Tüm manifoldlar parakompaktır. (URL-8, 2019)

(Lashof,1963) u takip ederek \mathbb{R}^{n+r} de r düzlemlerin Grassmann manifoldu $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ olsun. $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ üzerinde r düzlemin noktalarından ve r - düzlemin parçalarından oluşan kanonik r - düzlem demetini $\gamma^r(\mathbb{R}^{n+r})$, ile gösterelim. $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+r+1}$ gömme fonksiyonunu kullanarak $G_r(\mathbb{R}^{n+r}) \rightarrow G_r(\mathbb{R}^{n+r+1})$ ve $\gamma^r(\mathbb{R}^{n+r}) \rightarrow \gamma^r(\mathbb{R}^{n+r+1})$ gömmelerini elde edebiliriz. Dönüşümleri kullanarak r - düzlemin sonsuz Grassmanını ve onun kanonik r - düzlem demetini tanımlayabiliriz:

$$BO_r = \lim_{x \rightarrow \infty} G_r(\mathbb{R}^{n+r})$$

ve

$$\gamma^r = \lim_{x \rightarrow \infty} \gamma^r(\mathbb{R}^{n+r})$$

dir.

Hatırlarsak BO_r parakompakt uzaylarda r düzlem demetleri için genel sınıflandırılan uzaydır. (Milnor; Stashe,1974)

Tanım 3.20. $f_r : B_r \rightarrow BO_r$ bir fibrasyon olsun. $\varepsilon : M \rightarrow BO_r$, M üzerinde bir r düzlem demeti olsun. ε üzerinde bir (B_r, f_r) yapısı; $\tilde{\varepsilon} : M \rightarrow B_r$ liftinglerinin bir denklik sınıfı olarak tanımlanır. (Yani $\varepsilon = f_r \circ \tilde{\varepsilon}$ dir. Bu durumda, $\tilde{\varepsilon}_1$ ve $\tilde{\varepsilon}_2$ liftleri, eğer homotopik ise bu liftlere denktir denir. Yani, eğer $H : M \times I \rightarrow B_r$ dönüşümü her m ve t için $H|_{m \times 0} = \tilde{\varepsilon}_1$ ve $H|_{m \times 1} = \tilde{\varepsilon}_2$ ve $f_r H(m, t) = \varepsilon(m)$ şartını sağlayacak şekilde bulunabilirse $\tilde{\varepsilon}_1$ ve $\tilde{\varepsilon}_2$ liftlerine denktir denir.

Lemma 3.21. Eğer r , M üzerinde olmasına bağlı kalarak yeterince büyük seçilirse bu takdirde herhangi iki $i_1, i_2 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+r}$ gömmelerin normal demetleri üzerindeki (B_r, f_r) yapıları arasında birebir ve örten eşleme vardır. (Yani $v(i_1)$ ve $v(i_2)$ normal demetlerinin liftleri arasında birebir örten bir eşleme vardır.)

Tanım 3.22. M manifoldu üzerinde (B, f) yapısı M nin içermelerinin normal demetlerinde uyumlu (B_r, f_r) yapılarının bir denklik sınıfıdır.

3.3. Birasyonel Kobordizm

Bu bölüm için temel referans (Guillemin,1989) dur.

Tanım 3.23. Eğer sonlu sayıda (X_i, ω_i) simplektik manifoldları $0 \leq i \leq k$ için $(X_0, \omega_0) = (X, \omega)$ ve $(X_k, \omega_k) = (X', \omega')$ ve her i için (X_i, ω_i) ve (X_{i+1}, ω_{i+1}) , bir yarı-serbest Hamiltonian S^1 simplektik ω_i manifoldunun indirgemesi olacak şekilde bulunabiliyorsa (X, ω) ve (X', ω') simplektik manifoldlarına birasyonel kobordant denir. (Hu, Li, Ruan, 2008)

Burada bir S^1 hareketi, sabit noktadan uzaksa, yarı-serbest olarak adlandırılır.

(Guillemin,1989) ye göre aşağıdaki temel faktörizasyon sonucuna sahibiz.

Teorem 3.24. Bir birasyonel kobordizm, her bir elemanı simplektik yapının blow-up, blow-down ve \mathbb{Z} lineer deformasyonu üzerine modellenen elemanların bir dizisi olarak ayrıştırılabilir. (Hu, Li, Ruan, 2008)

Zayıf faktörizasyon teoremiyle karşılaştırıldığında, aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.25. Herhangi bir polarizasyon ile iki birasyonel projektif manifold, simplektik manifoldlar olarak bireyoneldir.

(X, ω) bir simplektik manifold olsun $\pi: P \rightarrow X$ ise X üzerinde G grup yapısıyla beraber bir asal demet olsun \mathfrak{g} , G nin Lie cebiri olmak üzere P üzerindeki bir konneksiyon, P üzerinde dikey projeksiyona karşılık gelen, \mathfrak{g} -değerli 1-form verir. Bir G -invariant F-alt demeti, P üzerindeki bir konneksiyondan başka bir şey değildir. Bu ise $P \times \mathfrak{g}^*$ yi T^*P nin içine gömer. (p, τ) da İstenilen 1-form $\tau \cdot A$ ile verilir. Bunun sonucunda $d(\tau \cdot A)$, $P \times \mathfrak{g}^*$ fiberleri üzerinde non-dejeneredir. (Hu, Li, Ruan, 2008)

Lemma 3.26. $\omega_A = \pi^* \omega + d(\tau \cdot A)$ olmak üzere ve W_A , $0 \in \mathfrak{g}^*$ in G -invariant komşuluğu olmak üzere ω_A , bazı W_A lar için $p \times W_A$ üzerinde bir simplektik formdur. W_A üzerinde projeksiyon, $p \times W_A$ üzerinde bir moment dönüşümüdür. (Hu, Li, Ruan, 2008)

Dikkat edilirse dikey projeksiyon demeti, $\pi^* \omega$ nın ışık vektörlerini verir.

Daha genel olarak eğer (F, ω_F) , bir Hamiltonian G etkisiyle bir simplektik manifold ise,

$$P_G = p \times_G F$$

ilgili demeti oluşturabilir. (Hu, Li, Ruan, 2008)

3.3.5. \mathbb{Z} -lineer deformasyon

Tanım 3.27. ω , bir simplektik form, I bir aralık, κ bir integral sınıfını temsil eden kapalı bir 2-form olmak üzere bir \mathbb{Z} -lineer deformasyon,

$$\omega + t\kappa$$

simplektik formunun $t \in I$ süresince bir yoludur.

İki simplektik form eğer sınırlı bir sayıda \mathbb{Z} -lineer deformasyonla birleştirilebilirse bunlara \mathbb{Z} -lineer deformasyon denk formlar denir.

P , Cern sınıfı $[K]$ olan asal S^1 demet olsun. A ise $dA = \pi^* \kappa$ şartını sağlayan konneksiyon 1-form olsun. $\omega_A = \pi^* \omega + d(tA)$, ki burada $t, g^* = \mathbb{R}^*$ üzerinde lineer koordinattır, yazıldığında; lemmadan eğer $\omega + t\kappa$ bir $x \in X$ noktasında simplektik ise ω_A da $(\chi, \theta, t) \in P \times \mathbb{R}^*$ da simplektik olur. Böylece şu yazılabilir:

$\omega + t\kappa$, bir $x \in X$ noktasında simplektiktir $\Leftrightarrow \omega_A, (\chi, \theta, t) \in P \times \mathbb{R}^*$ da simplektik olur. Böylece Duistermaat-Heckman teoremi bir \mathbb{Z} -lineer deformasyonun birasyonel kobordizmdir ifadesiyle yorumlanabilir. (Hu, Li, Ruan, 2008)

Lemma 3.28. $t \in [0, 1]$ için ω_t , bir simplektik form olsun ve $[\omega_0] - [\omega_1]$ rasyonel olsun. Bu takdirde ω_0 ve ω_1 , \mathbb{Z} -lineer deformasyon denktir. (Hu, Li, Ruan, 2008)

3.3.8. Blow-up ve blow-down

X in $2n$ boyutlu kapalı bir simplektik manifold olduğunu ve $Y \subset X$ in de $2k$ ekboyutlu X in bir altmanifoldu olduğunu varsayalım.

Dejenerasyon formülü uygulayarak simplektik kesiti (Lerman, 1995) in ifadeleri cinsinden inceleyelim.

3.3.9. Simplektik kesit ve normal bağlantılı toplam

Varsayalım ki $X_0 \subset X$ in bir Hamiltonian S^1 etkiye sahip açık sıfır ekboyutlu açık altmanifold olsun. $H: X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda bir regüler değer olarak 0 değerli bir Hamiltonian fonksiyon olsun. Eğer $H^{-1}(0)$, X_0 in bir ayrık hiperyüzeyi ise bu takdirde sınırları $\partial X_0^\pm = H^{-1}(0)$ olan X_0^\pm ile gösterilen iki bağlantılı manifold elde ederiz. Burada $+$ ile gösterilen kısım $H < 0$ a karşılık gelmektedir. Yine varsayalım ki S^1 , $H^{-1}(0)$ üzerinde serbestçe hareket etsin. Bu takdirde $Z = H^{-1}(0)/S^1$ simplektik indirgemesi, boyutu 2 den daha düşük bir kanonik simplektik manifolddur. S^1 etkisinin $\partial X_0^\pm = H^{-1}(0)$ üzerinde çökmesiyle, sırasıyla reel 2 ekboyutlu ve $Z^\pm = Z$ zıt normal

demetleri içeren \bar{X}^\pm düzgün kapalı manifoldları elde ederiz. Üstelik \bar{X}^\pm manifoldları Z den uzak ω nin kısıtlaması ile örtüşen (ki bu Z^\pm ye kısıtlama Z üzerinde simplektik indirgemeden elde edilen ω_Z kanonik simplektik yapı ile örtüşür) $\bar{\omega}^\pm$ simplektik yapıyı da kabul eder. $(\bar{X}^\pm, \bar{\omega}^\pm)$ Simplektik manifold çiftleri γ boyunca X in simplektik kesiti olarak adlandırılır.

Simplektik yapıların uygun çarpımı ile donatılmış $X_0 \times \mathbb{C}$ çarpımını ve $X_0 \times \mathbb{C}$ üzerindeki S^1 etki çarpımı (burada S^1 , \mathbb{C} üzerinde kompleks çarpmayı ifade eder.) gözönüne alalım. Genişletilmiş etki eğer standart simplektik yapı $\sqrt{-1}d\omega \wedge d\bar{\omega}$ veya onun \mathbb{C} üzerindeki negatif çarpanını kullanırsak bu genişletilmiş etki Hamiltoniyandır.

Normal bağlantılı toplam işlemi (McCarthy,1994;Gompf,1995), veya fiber toplamı işlemi bu simplektik kesitin ters işlemidir. Zıt normal demetlere sahip iki ekboyutlu simplektik manifoldları içeren 2 simplektik altmanifold verildiğinde normal bağlantılı toplam işlemi belirtilen tubular komşuluklar ile yeni bir simplektik manifold üretir.

Dikkat edeli ki (X, ω) yı elde etmek için normal bağlantılı toplam işlemini

$$(\bar{X}^+, \bar{\omega}^+, \bar{Z}^+), (\bar{X}^-, \bar{\omega}^-, \bar{Z}^-)$$

parçalarına uygulayabiliriz. (Hu, Li, Ruan, 2008)

3.3.10. Blow-up ve blow-down

Şimdi Y boyunca blow-up inşa etmek için simplektik kesitimi uygulayalım. Normal demeti N_Y , bir simplektik vektör demetidir, yani $(\mathbb{R}^{2k}, \omega_{std})$ fiberli bir demettir. N_Y üzerinde uyumlu bir almost kompleks yapısını seçerek bir Hermityen demeti elde ederiz. P asli $U(k)$ demet olsun.

P için bir A ünitar konneksiyonu seçelim ve $W_A \subset u(k)^*$ Lemma 3.3.4. teki gibi olsun. $D_{\epsilon_0} \subset \mathbb{C}^k = \mathbb{R}^{2k}$, bu moment dönüşümü altında görüntüsü W_A içinde yer alan kapalı ϵ_0 -küresi olsun.

Evrensel yapıyı P ve $D_{\epsilon_0} \subset \mathbb{C}^k$ ya uygulayarak, her bir fiberde ω_{std} ye indirgenen ve sıfır kesit üzerinde ω/Y ye kısıtlanan $N_Y(\epsilon_0)$ disk demeti üzerinde $\omega_{\epsilon_0, A}$ simplektik formunu elde ederiz.

Simplektik komşuluk teoremi ile ve muhtemelen daha küçük bir ϵ_0 seçerek, X deki Y nin bir tubular $\mathcal{N}_{\epsilon_0}^\circ(Y)$ komşuluğu, $\omega_{\epsilon_0, A}$ simplektik formu ile $N_Y(\epsilon_0)$ disk demetine simplektomorfiktir.

$\phi: \mathcal{N}_{\epsilon_0}^\circ(Y) \rightarrow N_Y(\epsilon_0)$ ın böyle bir simplektomorfizm olsun. Kompleks çarpım ile $X_0 = \mathcal{N}_{\epsilon_0}^\circ(Y)$ üzerinde Hamiltonian S^1 etkisini gözönüne alalım. $0 < \epsilon < \epsilon_0$ seçip sabit bırakırsak

$$H(u) = |\phi(u)|^2 - \epsilon, \quad u \in \mathcal{N}_Y^\circ(\epsilon_0),$$

moment dönüşümü göz önüne alalım. Burada $|\phi(u)|$, N_Y Hermityen demetin bir fiberinde bir vektör olarak düşünülen $\phi(u)$ nun normudur. O halde $X_0 \times \mathbb{C}$ tamamen

$$\mathcal{N}_{\epsilon_0}^\circ(Y) \oplus \mathbb{C}.$$

dir. ϵ yarıçaplı N_Y diskinin küre demetine karşılık gelen X deki hiperyüzey $P = H^{-1}(0)$ ile gösterelim.

\bar{X}^+ ve \bar{X}^- kapalı iki simplektik manifoldları elde etmek için P boyunca X i kesitini alırız. Dikkat edelim ki Y pozitif tarafta yer alır.

\bar{X}^- , Y boyunca X in blow-up'ıdır. Burada yine dikkat edelim ki yapı ϵ 'a, A konneksiyonuna ve $\phi: \mathcal{N}_{\epsilon_0}^\circ(Y) \rightarrow N_Y(\epsilon_0)$ simplektomorfizmine bağlıdır. Üstelik (McDuff, D., Salamon, D., 1998) nin 250. sayfasında işaret edildiği gibi A , ϕ ve A' , ϕ' farklı seçimleri verildiğinde, ϵ yeterince küçük seçildiğinde sonuçlanan simplektik formlar izomorfiktir. Farklı seçimler ihmal edilerek blow-up sıklıkla \tilde{X} ile göstereceğiz.

2 ekboyutlu Z simplektik altmanifoldu E ile gösterilir. E ye olağanüstü bölen deriz.

Blow-down, blow-up'ın ters işlemidir. Daha kesin olarak, eğer \tilde{X} , X 'in Y boyunca E olağanüstü bölünüşüyle blow-up ise; bu takdirde belirtildiği gibi \tilde{X} 'in ve \bar{X}^+ 'nın E boyunca normal bağlantılı toplamı tekrar X 'i verir. \tilde{X} dan X i elde etme süreci, E boyunca blow-down olarak adlandırılır. Bunu blow-up ın topolojisini tanımlayalım:

Düzgün manifoldlar olarak, E , N_Y nin projektivizasyonuna diffeomorftur ve \bar{X}^+ , $N_Y \oplus \mathbb{C}$ nin bir projektivizasyonudur. Gözlemleyebiliriz ki

$$\tilde{X} = (X - \mathcal{N}_\epsilon(Y)) \cup_\phi \overline{N_Y(\epsilon_0)}^-$$

dir.

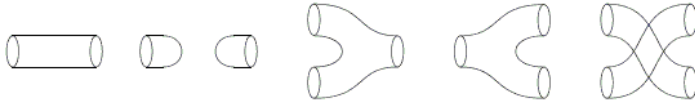
$$(2) \quad p: \tilde{X} \rightarrow X$$

dönüşümü tanımlayabiliriz. Ki bu dönüşüm $\mathcal{N}_{\epsilon_0}(Y)$ den uzak olan birim dönüşümdür. (ϵ, ϵ_0) dan $(0, \epsilon_0)$ a bir diffeomorfizm kullanılarak $\mathcal{N}_{\epsilon_0}(Y) - Y$ delinmiş komşuluğuyla birlikte $\mathcal{N}_{\epsilon_0}(Y) - \mathcal{N}_\epsilon(Y)$ birim dönüşümü ile inşa edilebilir. Böyle bir p dönüşümü tek değildir. Fakat homoloji ve kohomoloji üzerindeki indirgenmiş p^* ve p_* dönüşümleri farklı seçimlerde de aynı değer alır.

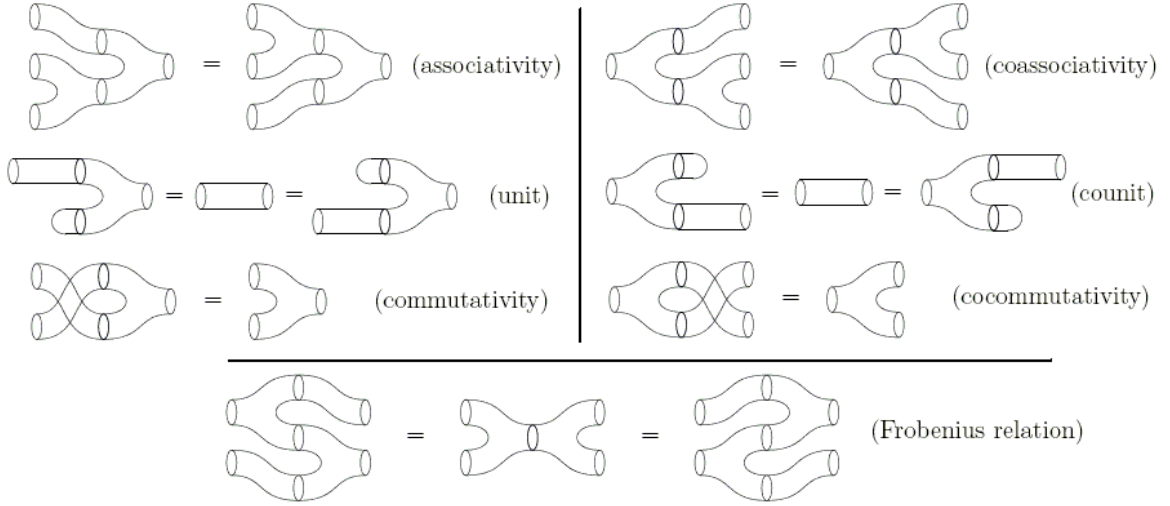
Özellikle eğer, Y 2-ekboyutlu ise, bu takdirde $E = Y$ olur. Ve \tilde{X} , X e diffeomorftur. Oysa, simplektik yapı tamamen aynı değildir. (\tilde{X}, E) çifti X ve \tilde{X} in simplektik kesitinin ortak parçası olduğunu görmek önemlidir. Daha açık bir şekilde, \tilde{X} , (\tilde{X}, E) ve $(\mathbb{P}(N_Y \oplus \mathbb{C}), E)$ içinde dejenere olurken X de (\tilde{X}, E) ve $(\mathbb{P}(N_{E/\bar{X}} \oplus \mathbb{C}), E)$ içinde dejenere değildir.

Son olarak, (Guillemin, 1989) de gösterildi ki blow-up/blow-down bir birasyonel kobordizm olarak açıkça gerçekleştirilebilir. (Hu, Li, Ruan, 2008)

Generators for 2Cob



Relations in 2Cob



Çizelge 2. kobordizm üreteçleri (URL-13, 2019)

3.4. $k(U)$ -İnvaryant

Tanım 3.29. $U \subset \mathbb{R}^{3+1}$ altuzay olmak üzere, U ya \mathbb{R}^{3+1} in regüler alt uzayı denir, eğer $\text{rankg} \downarrow U = \text{boy}U$ ise.

Regüler olmayan altuzaylara singüler altuzaylar denir. (Ören, 2007)

Tanım 3.30. $U \subset \mathbb{R}^{3+1}$ regüler altuzay olmak üzere, sıfırdan farklı keyfi $u \in U$ için $\langle u, u \rangle > 0$ ise, U ya uzaysal denir. (Ören, 2007)

Tanım 3.31. $U \subset \mathbb{R}^{3+1}$ regüler altuzay olmak üzere, sıfırdan farklı keyfi $u \in U$ için $\langle u, u \rangle < 0$ ise, U ya zamansal denir. (Ören, 2007)

Önerme 3.32. $k(U) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} U - \text{uzaysal} & , \text{boy}U = 1 \\ U - \text{zamansal} & , \text{boy}U = 1 \\ U - \text{uzaysal} & , \text{boy}U > 1 \end{cases}$.

(Ören, 2007)

İspat: $\Rightarrow: k(U) = 0$ olsun.

- 1) $\text{boy}U = 1$ olsun. Bu takdirde, sıfırdan farklı $u \in U$ için $U = \text{sp}\{u\}$ ile gösterelim. $k(U) = 0$ olduğundan $\langle u, u \rangle \neq 0$ dır. Eğer $\langle u, u \rangle < 0$ ise, U

zamansal vektörle üretildiğinden U daki tüm vektörler zamansal olup, U – zamansaldır. Diğer taraftan, $\langle u, u \rangle > 0$ ise, U uzaysal vektörle üretildiğinden U daki tüm vektörler uzaysal olup, U – uzaysaldır.

2) $boyU > 1$ olsun. Bu takdirde, U da $\{u_1, \dots, u_n\}$ tabanı seçelim öyle ki $U = sp\{u_1, \dots, u_n\}$ ile gösterelim.

Varsayalım ki, U – uzaysal olmasın. Bu takdirde, $k(U) = 0$ olduğundan, U daki tüm vektörler zamansal veya U da en az bir zamansal vektör ve en az bir uzaysal vektör mevcuttur.

2.1) U daki tüm vektörler zamansal olamaz. Eğer U daki tüm vektörler zamansal olsaydı $indexg \downarrow U = boyU$ olurdu. Ancak $boyU > 1$ olduğundan $indexg \downarrow U > 1$ olurdu. $index_{\mathbb{R}^{3+1}} = 1$ ve $indexg \downarrow U > 1$ olup, $indexg \downarrow U \leq 1$ olması gerektiğinden bu çelişkidir.

2.2) U da en az bir zamansal vektör ve en az bir uzaysal vektör olsun. Bu takdirde, bunlar lineer bağımsızdır. Şimdi, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $u + \lambda v$ vektörünü göz önüne alalım. Burada u ve v vektörleri için $\langle u, v \rangle^2 - \langle v, v \rangle \langle u, u \rangle > 0$ olup, buna göre

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\langle u, v \rangle \mp \sqrt{\langle u, v \rangle^2 - \langle v, v \rangle \langle u, u \rangle}}{\langle v, v \rangle} \quad \text{seçilirse, } \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = 0 \text{ dır. Ayrıca}$$

$u + \lambda v \neq 0$ olup, $k(U) = 0$ ile çelişir.

\Leftarrow : Varsayalım ki, $k(U) \neq 0$ olsun.

1) $boyU = 1$ için U – zamansal veya U – uzaysal olsun.

Sıfırdan farklı $u \in U$ için $U = sp\{u\}$ ile gösterelim. $k(U) \neq 0$ olduğundan $\langle u, u \rangle = 0$ dır. Bu ise U – zamansal veya U – uzaysal ile çelişir.

2) $boyU > 1$ için U – uzaysal olsun. Bu takdirde, $\forall u \in U$ için $\langle u, u \rangle > 0$ olup $k(U) = 0$ dır.

3.5. Regle (Ruled) Yapısı

Cebirsel geometride K -cismi üzerinde tanımlı bir cebirsel yapı, eğer bir projektif doğru ile K üzerindeki bazı yapıların çarpımına birasyonelece denk ise bu yapıya “regle” denir. Bir cebirsel yapı eğer, rasyonel eğriler ailesi ile kaplanırsa “uniregle (uniruled)” dir (Daha doğrusu, bir Y yapısı bulunabilirse öyleki $Y \times P^1 \rightarrow X$ dominant rasyonel dönüşümü var ve bu dönüşüm Y ye projeksiyon boyunca etki etmez ise X , uniregledir). Uniregle yapılar, tamamı için nispeten basit yapılar olarak kabul edilir. (URL-5, 2019)

3.5.1. Özellikler

Karakteristiği 0 olan bir cisim üzerindeki her regle olmayan yapı, $-\infty$ kodira boyutuna sahiptir. Tersine, bir varsayımdır. Ki o, en fazla üç boyut olarak bilinir. Yani, kodira boyutu $-\infty$ olan ve karakteristiği sıfır olan bir cebirsel yapı, uniregle olmalıdır. Bununla ilgili ifade tüm boyutlarda bilinir: (Boucksom, Demailly, Păun, ve Peternell, 2013) Boucksom, Demailly, Păun, ve Peternell gösterdi ki, karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki bir düzgün projektif X yapısı, uniregledir. $\Leftrightarrow X$ in kanonik demeti pseudo-effektive değildir (Yani, reel sayılarda tensörlendirilmiş Neron-Severi grubundaki, efektif bölümlerle elde edilmiş kapalı konveks koni içinde değildir.). Çok özel bir durumda karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki P^n de derecesi d olan bir düzgün hiperyüzey, uniregledir $\Leftrightarrow d \leq n$ dir. Aslında P^n deki derecesi $d \leq n$ olan bir düzgün hiperyüzey Fano yapısındadır ve bundan dolayı, (uniregellikten daha güçlü olan) rasyonel bağlantılıdır.

Sayılamayan cebirsel kapalı K -cismi üzerindeki X cebirsel yapısı uniregledir. \Leftrightarrow en az bir rasyonel eğri öyle ki X -in her k noktasından geçer. Tersine, bir sonlu cisim K -cebirsel kapanışı üzerinde cebirsel yapılar vardır ve bunlar uniregle değildir. Fakat bunların her k noktasından geçen bir rasyonel eğri vardır (p tek alınmak üzere herhangi bir F_p non-super singüler abelyen yüzeyinin Kummer yapısı bu özelliğe sahiptir.). (Bogomolov, Tsckinkel, 2005) rasyonel sayıların cebirsel kapanışı üzerinde bu özellikli yapıların olup olmadığı bilinmiyor.

Uniregellik bir geometrik özelliktir (bu cebir genişlemeleri altında değişmezdir). Halbuki reglelik değildir. Örneğin \mathbb{R} üzerindeki P^2 de $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ koniği uniregledir. Ancak, regle değildir. (\mathbb{C} kompleks sayılar üzerinde ki ilişkili eğri P^1 e izomorfiktir ve bundan dolayı da regledir. Pozitif yönde, karakteristiği sıfır olan bir cebirsel kapalı cisim üzerindeki boyutu en az iki olan her uniregle yapı regledir. \mathbb{C} üzerinde P^4 de düzgün kübik 3-fields ve düzgün kuartik 3-fields uniregledir. Ancak regle değildir.

Pozitif karakteristikte uniregellik çok farklı davranır. Özellikle genel tipte uniregle yüzeyler (hatta unirasyonel) vardır. $p \geq 5$ (Shioda, 1974) olan p asal sayıları için \bar{F}_p deki P^3 -de $x^{p+1} + y^{p+1} + z^{p+1} + w^{p+1} = 0$ yüzeyi bir örnektir. Böylece uniregellik, pozitif karakteristik kodira boyutunu $-\infty$ olmasını ima etmez. (URL-5, 2019)

3.6. Homoloji küreleri

Cebirsel topolojide bir X homoloji küresi, $n \geq 1$ için bir n -kürenin homoloji grubuna sahip bir n -manifoldudur. Yani,

$$\begin{aligned} H_0(X, Z) &= H_n(X, Z) = Z \text{ ve} \\ H_i(X, Z) &= \{0\}, \quad i \neq 0, n \end{aligned}$$

dir. Böylece, X , bir sıfırdan farklı b_n Betti sayılarıyla birlikte bir bağlantılı uzaydır.

Bir rasyonel homoloji küresi, benzer şekilde tanımlanır. Ancak burada rasyonel katsayılı homoloji kullanılır. (URL-3, 2019)

3.6.1. Poincare Homoloji Küresi

Poincare Homoloji Küresi bir homoloji küresinin özel bir örneğidir. Bir küresel 3-manifold, bir sonlu esas grup ile homoloji 3-küre anlamındadır (kendi üzerine 3-küre hariç). Bunun(Poincare Homoloji Küresi) esas grubu binary icosahedral grup diye bilinir ve 120 elemanlıdır. Bu gösteriyor ki poincare konjektörü tek başına homoloji terminolojisiyle gösterilemez. (URL-3, 2019)

3.6.2. Poincare Conjective(Theorem): Her basit bağlantılı, kapalı 3-manifold 3-küreye homeomorfiktir. (URL-3, 2019)

3.6.3. Yapı

Bu uzayın basit bir inşasını Dodecohedron(12 yüzlü) ile başlar Dodecohedron un her bir yüzü, onun karşı yüzüyle ve yüzleri karşı karşıya getirmek için minimum bir çevirme yaparak belirlenir. Karşı karşıya getirilen her bir parça kapalı 3 manifold verir.

Alternatif olarak Poincare homoloji küresi $SO(3)/I$ bölüm uzayı olarak oluşturulabilir. Burada I Icosahedral gruptur. (60 perçem rotasyonel simetrisi ile oluşturulmuş 120 parçadan oluşan gruptur.) (URL-3, 2019)

3.7. Kodaira boyutu

Cebirsel geometride $\kappa(X)$ kodaira boyutu (ya da kanonik boyut), bir X projektif yapının kanonik modelin boyutunu ölçer.

Igor Shafarevich, 1965 teki seminerde κ notasyonlu yüzeylerde bir önemli nümerik invariantını verdi. Shigeru Iitaka (1970) de bunu genişleterek, yüksek boyutlu yapılarda (kanonik boyut adıyla) kodaira boyutunu tanımladı ve daha sonra bunu Kunihiko Kodaira'dan sonra 1971 deki çalışmasında kodaira boyutu diye isimlendirmiştir.

$$\kappa(X) = \text{boy}X.$$

(URL-4, 2019)

3.7.2. Dış(Exterior) çarpım

u ve v vektörlerinin dış çarpımı $u \wedge v$ ile gösterilen büyüklüğü u ve v ile elde edilecek paralel kenarın alanı büyüklüğünde, u ve v vektörlerinin oluşturacağı Span uzayının dışında yar alan bir vektördür.

Önerme:Dış çarpım şu özellikleri sağlar

- i) $\forall u \in V$ vektörü için $u \wedge u = 0$ dir.
 ii) $\forall u, v \in V$ vektörü için $u \wedge v = -v \wedge u$ dir.
 iii) $\forall u, v, w \in V$ vektörü için $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$ dir.
 iv) $\forall u, v, w \in V$ için

$$u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$$

$$(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$$

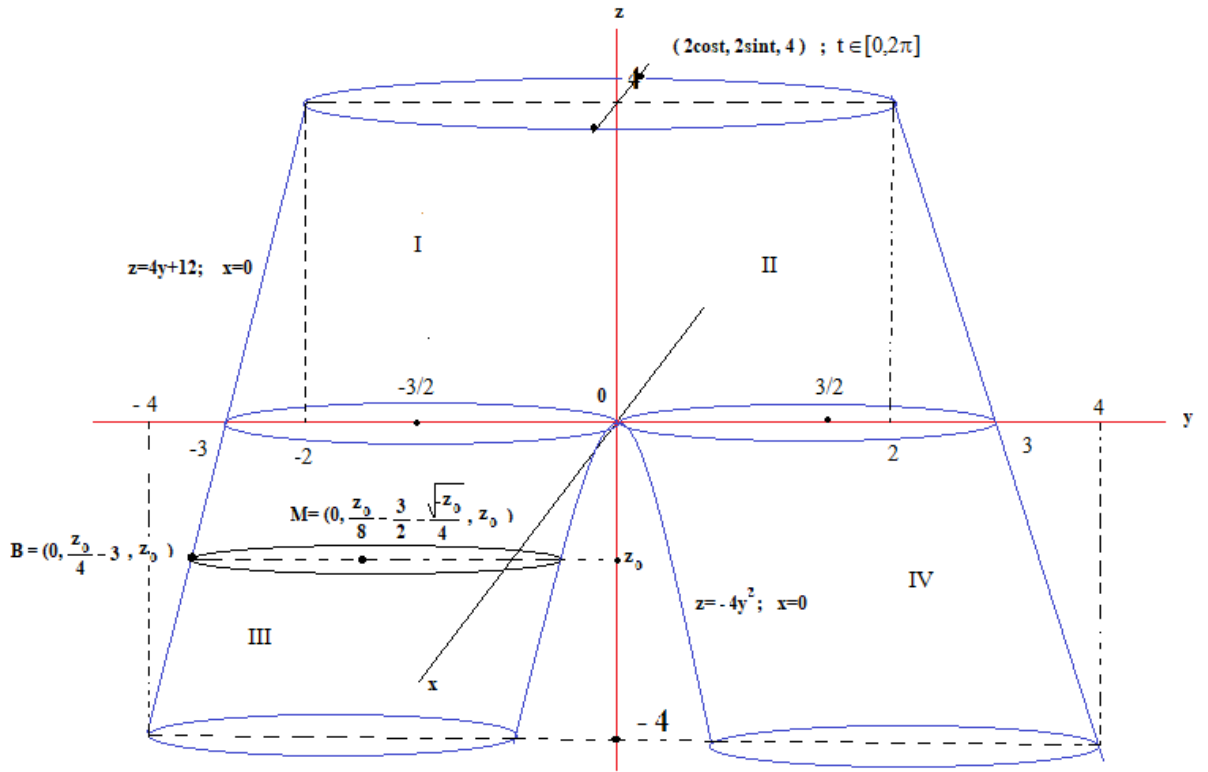
- v) $\forall u, v \in V, \forall k \in F$ cismi için

$$ku \wedge v = u \wedge kv = k(u \wedge v)$$

Not: Dış(vedge) çarpım, vektörel(Cross) çarpım ile sıkça karıştırılmaktadır. Vektörel çarpım asosyatif olmadığı halde dış çarpım asosyatif özelliktedir.

4. BAZI SEMİ-RIEMANNIAN MANİFOLDLARIN BİRASYONEL KOBORDİZM İNVARİYANTLARI

\mathbb{R}_1^3 Semi- Riemannian alt uzayında bir kobordizm örneği olarak en temel kobordizmlerden pantolon şeklindeki kobordizmi göz önüne alalım. Bu yüzeyi parametrik olarak yazmaya çalışalım. Bunun için yüzeyi 4 parçaya ayırarak aşağıdaki şekilde inceleyebiliriz.



Çizelge 3. Bir doğru ve bir parabol ile elde edilen kobordizm örneği

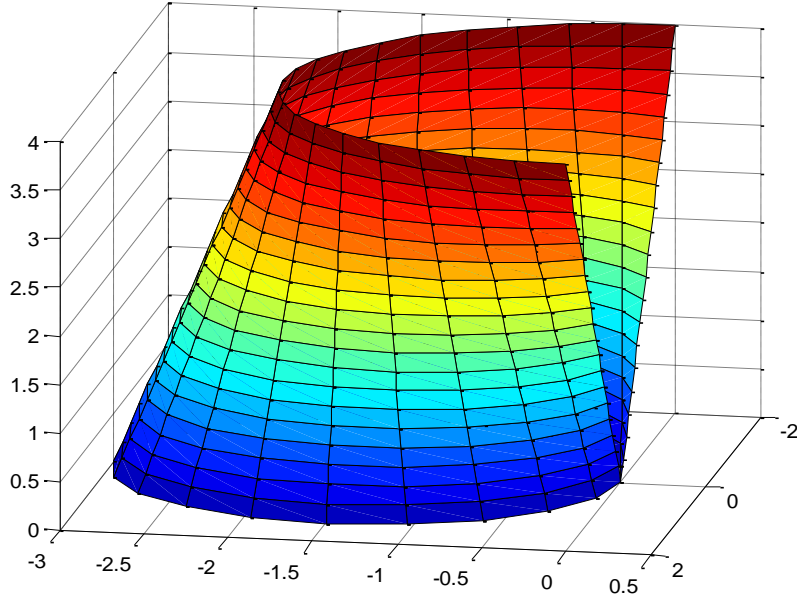
($\{z = 4y+12; x = 0\}$ doğrusu ve $\{z = 4y^2; x = 0\}$ parabolü ile elde edilen kobordizm örneği)

I yüzeyi:

$$a \in [0,1]$$

$$w \in [0, \pi]$$

$$\left. \begin{aligned} X &= 2 \cos w + a \left[\frac{3}{2} \cos \left(-\frac{3}{2} \pi + 2(w - \pi) \right) - 2 \cos w \right] \\ Y &= 2 \sin w + a \left[\frac{3}{2} \sin \left(-\frac{3}{2} \pi + 2(w - \pi) \right) - 2 \sin w - \frac{3}{2} \right] \\ Z &= 4(1 - a) \end{aligned} \right\} \textit{parametrik denklem}$$



II Yüzeyi:

$$a \in [0, 1]$$

$$w \in [\pi, 2\pi]$$

$$\left. \begin{aligned} G = X &= 2 \cos w + a \left[\frac{3}{2} \cos \left(-\frac{\pi}{2} + 2w \right) - 2 \cos w \right] \\ H = Y &= 2 \sin w + a \left[\frac{3}{2} \sin \left(-\frac{\pi}{2} + 2w \right) - 2 \sin w + 1,5 \right] \\ I = Z &= 4(1 - a) \end{aligned} \right\} \textit{parametrik denklem}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2w\right) &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(2w) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin(2w) \\ &= \sin(2w)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2w\right) &= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(2w) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin(2w) \\ &= -\cos(2w)\end{aligned}$$

$$X = 2 \cos w + a \left(\frac{3}{2} \sin 2w - 2 \cos w \right)$$

$$Y = 2 \sin w + a \left(-\frac{3}{2} \cos 2w - 2 \sin w + 1,5 \right)$$

$$\frac{\frac{X - 2 \cos w}{a} + 2 \cos w}{\frac{3}{2}} = \sin 2w$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\frac{\frac{Y - 2 \sin w}{a} + \sin w - 1,5}{-\frac{3}{2}} = \cos 2w$$

$$\left[\frac{\frac{X - 2 \cos w}{a} + 2 \cos w}{\frac{3}{2}} \right]^2 + \left[\frac{\frac{Y - 2 \sin w}{a} + \sin w - 1,5}{-\frac{3}{2}} \right]^2 = 1$$

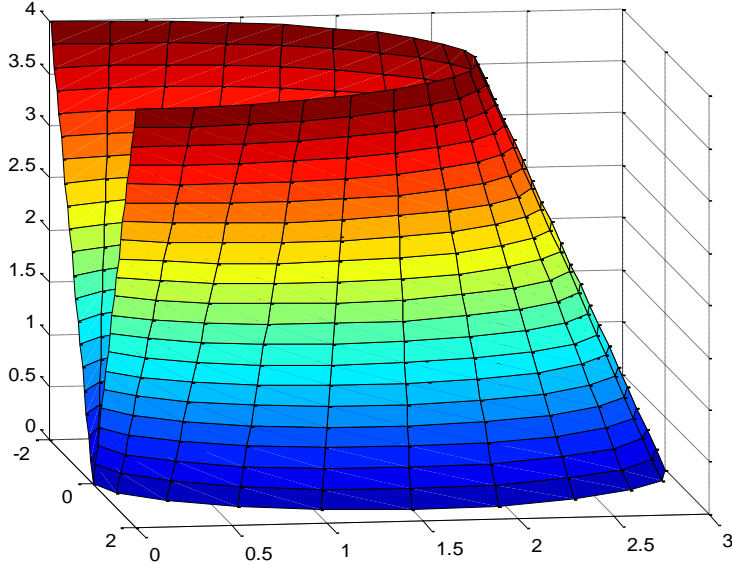
$$(X - 2 \cos w(1-a))^2 + (Y - 2 \sin w(1-a) - 1,5a)^2 = \frac{9a^2}{4}$$

$$\text{Yüzey için; } \Delta = z^2 + (z-4) \frac{(36+9z-3Y)}{8}$$

$$\frac{\frac{X^2}{4} + \frac{Z^2}{16} - \frac{Z}{4} \sqrt{\Delta}}{36 \left(1 - \frac{Z}{4}\right)^2} + \frac{\frac{Z^2}{4} + \Delta + Z \sqrt{\Delta}}{36 \left(1 - \frac{Z}{4}\right)^2} = 1$$

kartezyen denklem;

$$X^2 36 \left(1 - \frac{Z}{4}\right)^2 + \left(\frac{Z^2}{4} + \Delta + Z \sqrt{\Delta}\right) \left(\frac{\Delta}{4} + \frac{Z^2}{16} - \frac{Z}{4} \sqrt{\Delta}\right) - \left(\frac{\Delta}{4} + \frac{Z^2}{16} - \frac{Z}{4} \sqrt{\Delta}\right) \left(36 \left(1 - \frac{Z}{4}\right)^2\right) = 0$$



III Yüzeyi:

$$k \in [-4, 0]$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

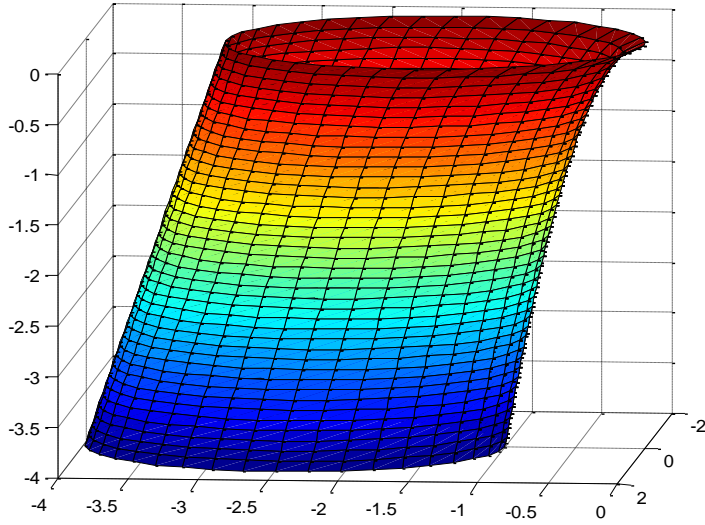
$$\left. \begin{aligned} A = X &= \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right] \cos t \\ B = Y &= \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right] \sin t + \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right] - \frac{\sqrt{-k}}{4} \\ C = Z &= k \end{aligned} \right\} \text{parametrik denklem}$$

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{A}{\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4}} \\ \sin t &= \frac{B - \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right] + \frac{\sqrt{-k}}{4}}{\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4}} \end{aligned} \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \frac{X^2}{\left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right]^2} + \frac{\left[Y - \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right] \right]^2}{\left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right]^2} = 1$$

$$k = Z$$

kartezyen denklem;

$$X^2 + \left[Y - \left[\frac{Z}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-Z}}{4} \right] \right]^2 - \left[\frac{Z}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-Z}}{4} \right]^2 = 0$$



IV Yüzeyi:

$$k \in [-4, 0]$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

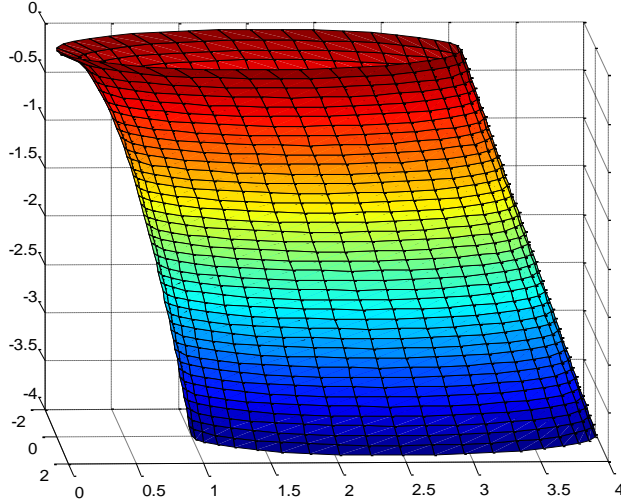
$$\left. \begin{aligned} D = X &= \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right] \cos t \\ E = Y &= \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right] \sin t - \frac{k}{8} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \\ F = Z &= k \end{aligned} \right\} \text{parametrik denklem}$$

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{X}{\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4}} \\ \sin t &= \frac{Y - \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right]}{\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4}} \end{aligned} \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \frac{X^2}{\left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right]^2} + \frac{\left[Y - \left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right] \right]^2}{\left[\frac{k}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-k}}{4} \right]^2} = 1$$

$$k = Z$$

kartezyen denklem;

$$X^2 + \left[Y - \left[\frac{Z}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-Z}}{4} \right] \right]^2 - \left[\frac{Z}{8} - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-Z}}{4} \right]^2 = 0$$



Böylece bu 4 yüzeyi:

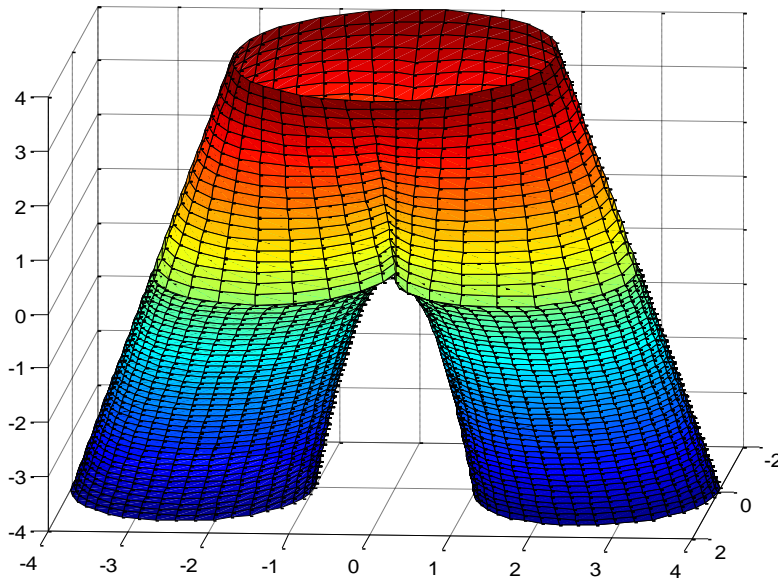
$Z > 0$ ve $Y < 0$ durumunda I yüzeyi;

$Z > 0$ ve $Y > 0$ durumunda II yüzeyi;

$Z < 0$ ve $Y < 0$ durumunda III yüzeyi;

$Z < 0$ ve $Y > 0$ durumunda IV yüzeyi;

biçiminde birleştirdiğimizde parametrik yüzey parçalı olarak elde edilecektir.



Çizelge 4. Dört yüzeyin birleşimiyle elde edilen kobordizm örneği

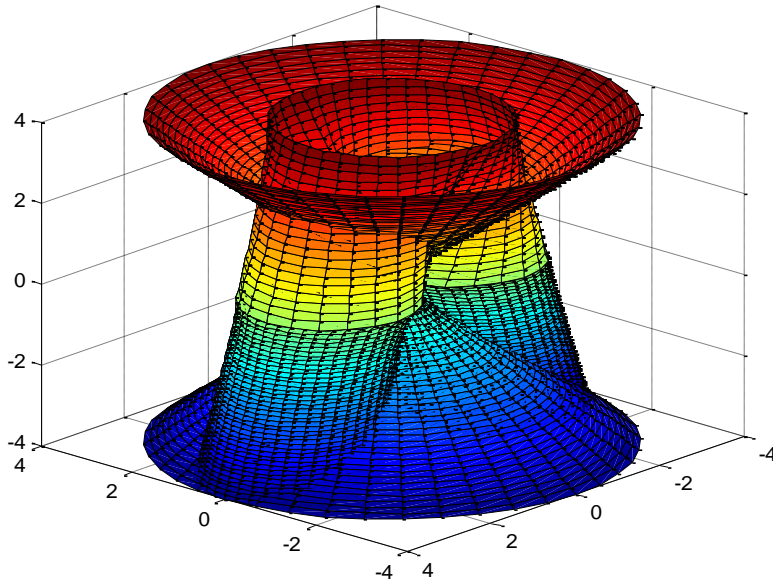
Elde edilen kobordizmin MATLAB kodu aşağıdaki gibidir:

```
[u,v]=meshgrid(0:0.05:1,pi:pi./20:2.*pi);
[a,w]=meshgrid(0:0.05:1,0:pi./20:pi);
[k,t]=meshgrid(-4:0.1:0,0:pi./20:2.*pi);
R=(k./8)-1.5+(sqrt(-k))./4;
A=R.*cos(t);
B=R.*sin(t)+R-(sqrt(-k))./2;
C=k;
D=A;
E=R.*sin(t)-(k./8)+1.5+(sqrt(-k))./4;
F=C;
j=-1.5.*pi+2.*(v-pi);
X=2.*cos(v)+u.*(1.5.*cos(j)-2.*cos(v));
Y=2.*sin(v)+u.*(1.5.*sin(j)-2.*sin(v)-1.5);
Z=4.*(1-u);
q=-pi./2+2.*w;
G=2.*cos(w)+a.*(1.5.*cos(q)-2.*cos(w));
H=2.*sin(w)+a.*(1.5.*sin(q)-2.*sin(w)+1.5);
I=Z;
hold on
surf(X,Y,Z)
surf(G,H,I)
surf(A,B,C)
surf(D,E,F)
hold off
```

Şimdi bu yüzeyin üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörleri elde edecek olursak bunlar birer elips çiftleri oluşturacaklardır. Bu çiftler yukarıdaki kobordizm ile $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ denklemiyle verilen uzay-zaman konisinin arakesitiyle bulunur. Bu eğrileri elde etmek için koninin parametrik denklemini de ifade edersek, $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi]$ olmak üzere parametrik denklem

$$X(u,v)=u\cos(v); \quad Y(u,v)=u\sin(v); \quad Z(u,v)=u;$$

biçimindedir. O halde arakesit grafiği aşağıdaki gibi olur:



Çizelge 1.5. Kobordizm üzerindeki lightlike (ışıkısal) vektörler

Bu elips çiftleri bir boyutlu manifold olduklarından boyutu 1 dir. O halde kobordizm üzerindeki lightlike yada ışıkısal vektörlerin boyutu $k(U)=1$ olur. Bu da (Ören,2007) e göre birasyonel kobordizm invariantıdır. Benzer şekilde, bu yüzeyler her biri karakteristiği sıfır olan complex cisim C üzerinde olduğundan örnekteki semi-Riemannian manifoldun bir diğer birasyonel kobordizm invariantı , kodaira boyutu $-\infty$ dur. Eğer yukarıdaki pantolon şeklindeki kobordizm yüzeyi tamamen space-like ya da tamamen timelike olsaydı bu durumlarda da $k(u)$ invariantı $k(u)=0$, kodaira boyutu yine $-\infty$ olurdu.

Örnek

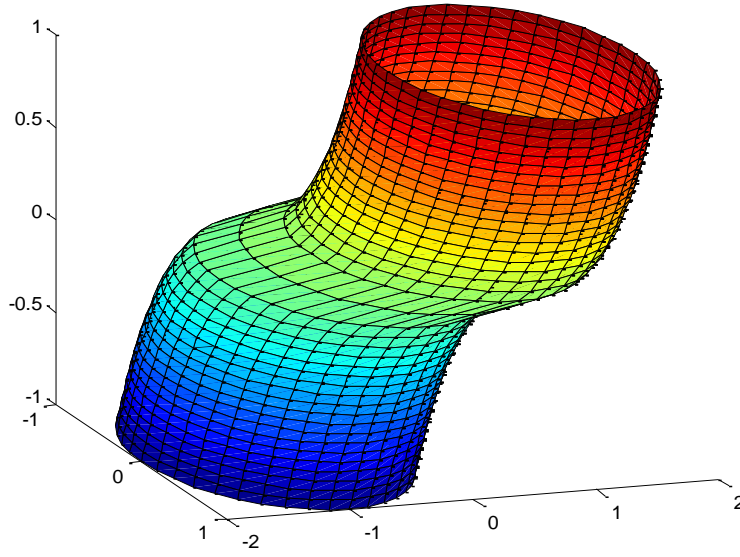
Şimdi ikinci bir örnek olarak yine R_1^3 uzayında eğik boru şeklindeki bir kobordizm göz önüne alalım. Bu yüzeyin parametrik denklemi $u \in R, v \in [0, 2\pi]$ olmak üzere:

$$X(u, v) = \sin v$$

$$Y(u, v) = \sqrt[3]{u} - \cos v$$

$$Z(u, v) = u$$

olur.



Çizelge 6. Eğik boru şeklindeki kobordizm örneği

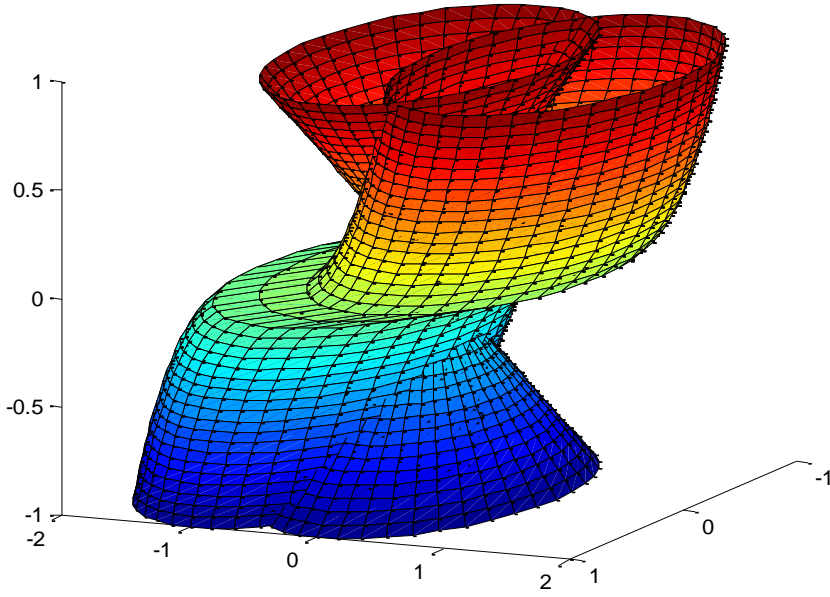
Eğik boru şeklindeki yukarıdaki kobordizm örneğine ait Matlab kod:

```
[u,v]=meshgrid(0:0.05:1,-pi./2:pi./20:3.*(pi./2));
[a,w]=meshgrid(-1:0.05:0,-pi./2:pi./20:3.*(pi./2));
X=sin(v);
Y=u.^(1./3)-cos(v);
Z=u;
A=-sin(w);
B=-(-a).^(1./3)+cos(w);
C=a;
hold on
surf(X,Y,Z)
surf(A,B,C)
hold off
```

biçimindedir. Şimdi bu yüzeyin üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörleri elde edecek olursak bunlar bir hiperbol çifti oluşturacaklardır. Bu çift yukarıdaki kobordizm ile $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ denklemiyle verilen uzay-zaman konisinin arakesitiyle bulunur. Bu eğrileri elde etmek için koninin parametrik denklemi yukarıdaki gibi, $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi]$ olmak üzere parametrik denklem

$$X(u,v)=u\cos(v); \quad Y(u,v)=u\sin(v); \quad Z(u,v)=u;$$

biçimindedir. O halde arakesit grafiği aşağıdaki gibi olur:



Çizelge 7. Eğik boru kobordizmi üzerindeki ışıksal vektörler

Bu hiperbol çifti bir boyutlu manifold olduğundan boyutu 1 dir. O halde kobordizm üzerindeki lightlike ya da ışıksal vektörlerin boyutu $k(U)=1$ olur. Bu da yine (Ören,2007) e göre birasyonel kobordizm invariantıdır. Benzer şekilde, bu yüzeyler her biri karakteristiği sıfır olan kompleks cisim C üzerinde olduğundan örnekteki semi-Riemannian manifoldun bir diğer birasyonel kobordizm invariantı , kodaira boyutu $-\infty$ dur. Eğer yukarıdaki eğik boru şeklindeki kobordizm yüzeyi tamamen space-like ya da tamamen timelike olsaydı bu durumlarda da yine $k(u)$ invariantı $k(u)=0$, kodaira boyutu yine $-\infty$ olurdu.

Örnek

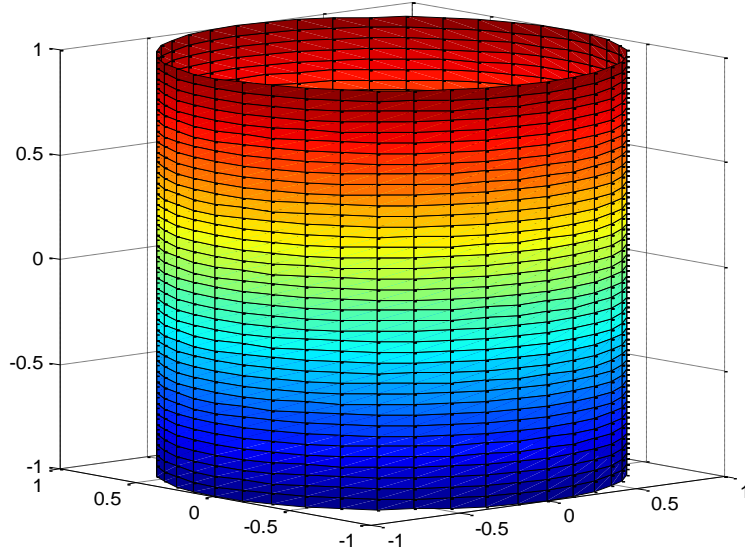
Şimdi üçüncü bir örnek olarak yine R_1^3 uzayında düz boru şeklindeki yarıçapı 1 br. olan bir silindir kobordizmini göz önüne alalım. Bu yüzeyin parametrik denklemi $u \in R, v \in [0, 2\pi]$ olmak üzere:

$$X(u, v) = \cos(v)$$

$$Y(u, v) = \sin(v)$$

$$Z(u, v) = u$$

olur.



Çizelge 8. Silindir boru şeklindeki kobordizm örneği

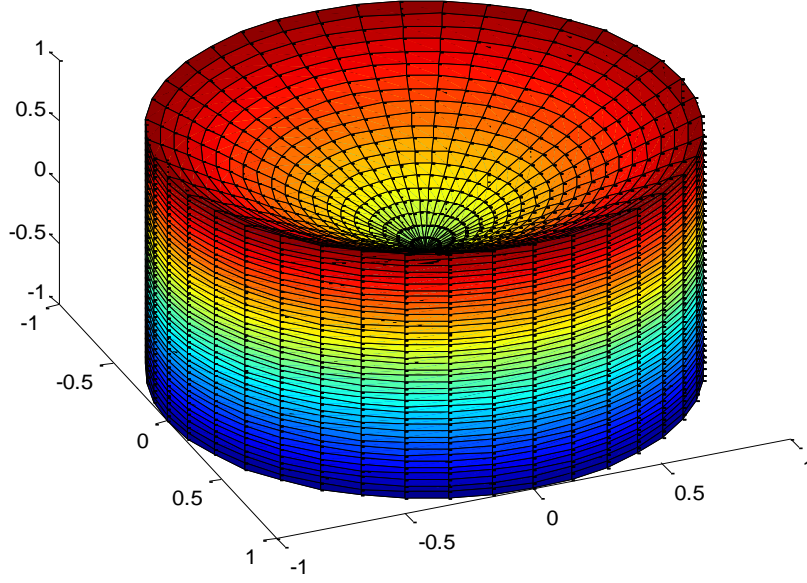
Silindir boru şeklindeki yukarıdaki kobordizm örneğine ait Matlab kod:

```
[u,v]=meshgrid(-1:0.05:1,0:pi./20:2.*pi);
X=cos(v);
Y=sin(v);
Z=u;
surf(X,Y,Z)
```

biçimindedir. Şimdi bu yüzeyin üzerindeki lightlike ya da ışıksal vektörleri elde edecek olursak bunlar bir çember çifti oluşturacaklardır. Bu çift yukarıdaki kobordizm ile $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ denklemiyle verilen uzay-zaman konisinin arakesitiyle bulunur. Bu eğrileri elde etmek için koninin parametrik denklemi yukarıdaki gibi, $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi]$ olmak üzere parametrik denklem

$$X(u,v)=u\cos(v); \quad Y(u,v)=u\sin(v); \quad Z(u,v)=u;$$

biçimindedir. O halde arakesit grafiği aşağıdaki gibi olur:



Çizelge 9. Silindir boru kobordizmi üzerindeki ışıksal vektörler

Bu çember çifti bir boyutlu manifold olduğundan boyutu 1 dir. O halde kobordizm üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörlerin boyutu $k(U)=1$ olur. Bu da yine (Ören,2007) e göre birasyonel kobordizm invariantıdır. Benzer şekilde, bu yüzeyler her biri karakteristiği sıfır olan complex cisim C üzerinde olduğundan örnekteki semi-Riemannian manifoldun bir diğer birasyonel kobordizm invariantı, kodaira boyutu $-\infty$ dur. Eğer yukarıdaki silindir şeklindeki kobordizm yüzeyi tamamen space-like ya da tamamen timelike olsaydı bu durumlarda da yine $k(u)$ invariantı $k(u)=0$, kodaira boyutu yine $-\infty$ olurdu.

Örnek

Şimdi dördüncü bir örnek olarak yine R_1^3 uzayında çift kanatlı hiperboloid şeklindeki timelike bir kobordizmi göz önüne alalım. Bu yüzeyin parametrik denklemi $v \in R, \varnothing \in [0, 2\pi]$ olmak üzere:

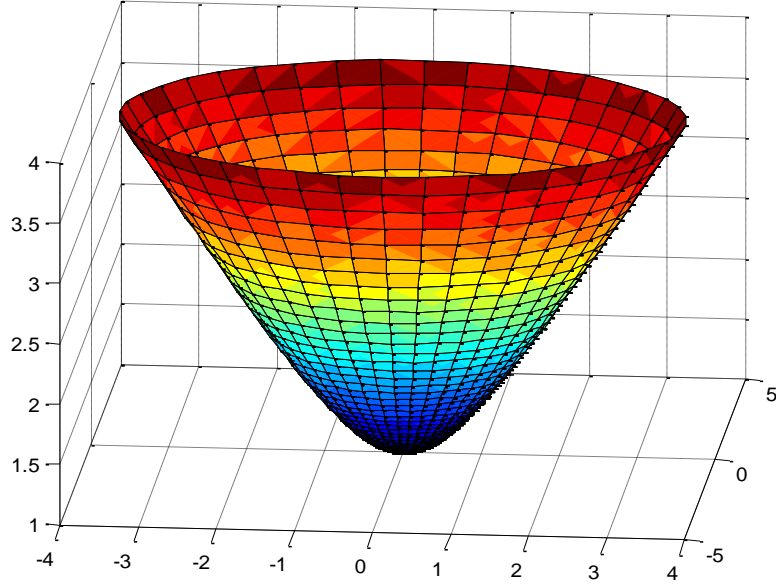
$$X(u, v) = \sinh(v) \cos(\varnothing)$$

$$Y(u, v) = \sinh(v) \sin(\varnothing)$$

$$Z(u, v) = \cosh(v)$$

olur. Kartezyen denklemi de

$$Z^2 = X^2 + Y^2 + 1 \text{ olur.}$$

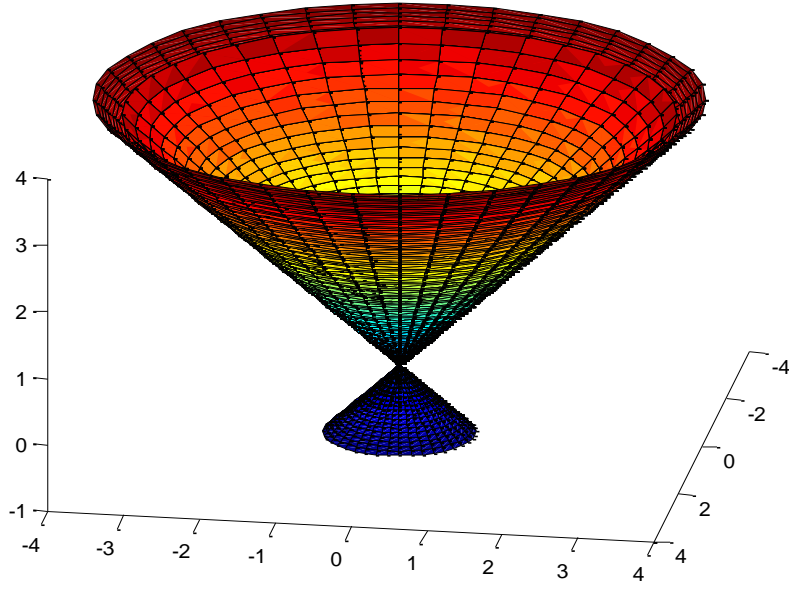


Çizelge 10. çift kanatlı hiperboloidin üst yarısı şeklindeki kobordizm örneği

Çift kanatlı hiperboloidin üst yarısı şeklindeki yukarıdaki kobordizm örneğine ait Matlab kod:

```
[u,v]=meshgrid(-2:0.05:2,0:pi./20:2.*pi);
X=sinh(u).*cos(v);
Y=sinh(u).*sin(v);
Z=cosh(u);
surf(X,Y,Z)
```

biçimindedir. Şimdi bu yüzeyin üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörler yukarıdaki kobordizm ile $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ denklemiyle verilen uzay-zaman konisinin arakesitiyle bulunur. Eğer kobordizmi sınırlı olarak seçersek arakesit oluşmayacağından kobordizm üzerindeki lightlike yada ışıksal vektörlerin boyutu $k(U)=0$ olur.



Çizelge 11. Çift kanatlı hiperboloid kobordizmi üzerindeki ışıksal vektörler

Benzer şekilde, bu yüzeyler her biri karakteristiği sıfır olan kompleks cisim C üzerinde olduğundan örnekteki semi-Riemannian manifoldun bir diğer birasyonel kobordizm invariantı, kodaira boyutu $-\infty$ dur. Hiperboloid şeklindeki kobordizm yüzeyi tamamen space-like olsaydı bu durumda da yine $k(U)$ invariantı $k(U)=0$, kodaira boyutu yine $-\infty$ olurdu.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada özel olarak alınan bazı semi-Riemannian manifoldların birasyonel invaryantları incelenmiştir. Bunun için R_1^3 uzayında verilen 4 temel 2Cob üreteç kobordizmi ele alınmıştır. Bunlar pantolon, eğik boru, silindir ve hiperboloid şekillerinde kobordizmlerdir. Tüm bu kobordizmlerin denklemleri verilmiş, grafikleri çizilmiş, maksimum lineer bağımsız lightlike vektörlerinin sayısı olan $k(U)$ sayıları bulunmuş ve kodaira boyutları ele alınmıştır.

5.2 Öneriler

Bu çalışmanın sonuçları dikkate alınarak birasyonel kobordizmin kullanıldığı tıbbi çalışmalar geliştirilebilir.

İnvaryant kavramı her türlü dönüşümler altında sabit kalan değerler olduğundan ezilen, kopan ya da herhangi bir sağlık nedeniyle deforme olan kan damarlarının yerine ikame edilecek suni damarlar için kobordizm kavramı oldukça önemli olduğundan bu yüzeylerin invaryantları da önemli olacaktır.

KAYNAKLAR

- Boucksom, Sebastien; Demailly, Jean-Pierre; Paun, Mihai; Peternell, Thomas ,2013. The pseudo-effective cone of a compact Kahler manifold and varieties of negative Kodaira dimension, *Journal of Algebraic Geometry*, 22 (2):201-248.
- Bogomolov, Fedor, Tschinkel, Yuri ,2005. Rational curves and points on K3 surfaces, *American Journal of Mathematics*,127(4):825-835.
- Chern,S.S., 1946. Charecteristic classes of Hermitian manifolds, *Annals of Mathematics*, 47(1),85-121.
- Çallıalp, F., 2009. Soyut Cebir, *Birsen Yayınevi İstanbul*.
- Duggal, Krishan L., Bejancu,A., 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*.
- Gray, A. 1939. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, *MATHEMATİKA. CRC Press LLC*.
- Guillemin, V., Sternberg, S., 1989. Birational equivalence in the symplectic category, *Invent. Math.* 97, 485-522.
- Gompf, R., 1995. A new construction of symplectic manifolds. *Ann. Math.* 142, 527-595.
- Hu, J., Jun Li, T., Ruan, Y., 2008. Birational Cobordism İnvariance of Uniruled Symplectic Manifold, *Invent. Math.* 172, 231-275.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1998. Diferansiyel Geometri, 1. Cilt 3. *Ankara Baskı Ertem Matbaa*.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 2006. Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş, *Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları*.
- Hirsch, M.W., New York, 1976. Di_ erential Topology, *Springer-Verlag*.
- İitaka, shigeru, 1970, ‘On D-dimensions of algebraic varieties’, *Proc. Japan Acad.*, 46(6):487-489.
- İitaka, shigeru 1971, “On D-dimensions of algebraic varieties.”,*J. Math. Soc. Japan*, 23(2):356-373.
- İncesu, M., 2008, Doktora tezi “Benzerlik Geometrisinde Noktaların Tam İnvaryantları Sistemi”, *Karadeniz Teknik Üniversitesi Trabzon*.
- Lerman, E., 1995. Symplectic cuts, *Math. Res. Lett.* 2, 247-258.
- Lashof, R.K., 1963. Poincare duality and cobordism, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 109,pp.257-277.
- MacLane, S., Birkhoff, G., 1988. Algebra, *AMS CHELSEA PUBLISHING*, 3rd ed.
- McCarthy, J., Wolfson, J., 1994. Symplectic normal connect sum. *Topology* 33, 729-764.
- McDuff, D., Salamon, D., 1998. Introduction to Symplectic Toplogy, 2nd edn. *Oxford Math. Monogr. Oxford University Press, New York*.
- Milnor, J.W., Stashe_, J.D., New Jersey, 1974. Characteriistic Classes, *Princeton University Press, Princeton*.
- Naber, G. L. 1992. ‘The Geometry of Minkowski Spacetime’ *New York, Springer-Verlag*.
- O’Neill, B., 1983. Semi-Riemann Geometry with Applications to relativity, *Akademic Press. Inc*.
- Ören, İ., 2007, Doktora tezi “O(3,1)-Ortogonal Grubu için Noktaların İnvaryantları”, *Karadeniz Teknik Üniversitesi Trabzon*.
- Pierce, D., 2018, Galois Teorisi, Matematik Bölümü, *MSGSU mat. msgsu.edu.tr, dpierce*.
- Sabuncuoğlu, A., kasım 2010. Diferansiyel Geometri, 4. Baskı *Nobel Yayın Dağıttım*.

- Shioda, Tetsuji, 1974. An example of unirational surfaces in characteristic p , *Mathematische Annalen*, 211:233-236.
- Shafarevich, Igor R., Averbuh, B. G., Vainberg, Ju. R., Zhizhchenko, A.B., Manin, Yuri I., Moishezon, Boris G., Tjuriana, G. N., Tjurin, A.N., 1965. Algebraic surfaces, *Akademiya Nauk SSSR. Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni V.A. Steklova*, 75:1-215.
- Sağiroğlu, Y., 2002, Doktora Tezi, Parametrik Eğrilerin Afin Diferensiyel İnvaryantları, *Karadeniz Teknik Üniv. Fen Bilimleri Ens.*
- Thom, R., 1954, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol.28, pp.17-86.
- URL-1: Weston, T., An Introduction To Cobordism Theory, <http://people.math.umass.edu/~weston/oldpapers/cobord.pdf>, Erişim Tarihi: 26.07.2019.
- URL-2: <https://en.wikipedia.org/wiki/cobordism>, Erişim Tarihi: 11.08.2019.
- URL-3: https://en.wikipedia.org/wiki/Homology_sphere, Erişim Tarihi: 26.07.2019.
- URL-4: https://en.wikipedia.org/wiki/Kodaira_dimension, Erişim Tarihi: 26.07.2019.
- URL-5: https://en.wikipedia.org/wiki/Ruled_variety, Erişim Tarihi: 26.07.2019.
- URL-6: <http://mathword.wolfram.com/CanonicalBundle.html>, Erişim Tarihi: 26.07.2019.
- URL-7: <http://mathword.wolfram.com/Category.html>, Erişim Tarihi: 26.07.2019.
- URL-8: <http://mathword.wolfram.com/ParacompactSpace.html>, Erişim Tarihi: 26.07.2019.
- URL-9: <http://mathword.wolfram.com/Homotopy.html>, Erişim Tarihi: 26.07.2019.
- URL-10: <http://mathword.wolfram.com/GrassmannManifold.html>, Erişim Tarihi: 26.07.2019.
- URL-11: <http://mathword.wolfram.com/StiefelManifold.html>, Erişim Tarihi: 26.07.2019.
- URL-12: <https://academiccesspit.wordpress.com/tag/cobordism/>; Erişim tarihi: 19.08.2019.
- URL-13: <https://academiccesspit.wordpress.com/tag/coborsism/>; Erişim Tarihi: 19.08.2019.

Ek- 9

| Kontrol Edilecek Hususlar | Evvet | Hayır |
|---|-------|-------|
| Sayfa yapısı uygun mu? | X | |
| Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu? | X | |
| Denklem yazımları uygun mu? | X | |
| İç kapak, onay sayfası, tez bildirim, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı? | X | |
| Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır? | X | |
| Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi? | X | |
| Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu? | X | |
| Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı? | X | |
| Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir) | X | |
| Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı? | X | |
| *Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu? | X | |

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

Unvanı Adı SOYADI

İmza

Öğrenci : Sara IŞIK

.....
Sara Işık

Danışman : Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU

.....
Muhsin İncesu

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına izin vermiyorum.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI

Tarih

İmza

Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖZÜ

17.09.2019

.....
Harun Özü

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Sara IŞIK
Uyruđu : T.C.
Dođum Yeri ve Tarihi : Merkez/MUŞ 11.06.1992
Telefon : 05426502465
e-mail : mat_sara@outlook.com

EĞİTİM

| Derece | Adı, İlçe, İl | Bitirme Yılı |
|---------------|------------------------------|---------------------|
| Lise | : Muş Lisesi Merkez/ Muş | 2010 |
| Üniversite | : Muş Alparslan Üniversitesi | 2015 |
| Yüksek Lisans | : Muş Alparslan Üniversitesi | 2019 |