



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KANSER TÜMÖRÜ İÇİN MODELLENEN  
BİR DİFÜZYON DENKLEMİNİN  
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

**ÖZLEM DEMİR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Şubat-2022**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KANSER TÜMÖRÜ İÇİN MODELLENEN  
BİR DİFÜZYON DENKLEMİNİN  
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

**ÖZLEM DEMİR**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Zeliha KÖRPİNAR**

**Şubat-2022**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL ve ONAYI

Özlem DEMİR tarafından hazırlanan “**Kanser Tümörü için Modellenen Bir Difüzyon Denklemine Yaklaşık Çözümleri**” adlı tez çalışması .../.../... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Doç. Dr. Erdal KORKMAZ  
Muş Alparslan Üniversitesi  
Fen Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Bölümü

.....

#### Danışman

Doç. Dr. Zeliha KÖRPİNAR  
Muş Alparslan Üniversitesi,  
İİB Fakültesi,  
İşletme Bölümü

.....

#### Üye

Doç. Dr. Münevver TUZ  
Fırat Üniversitesi,  
Fen Fakültesi,  
Matematik Bölümü

.....

Yukarıdaki sonuç;  
Enstitü Yönetim Kurulu ...../...../..... Tarih ve ...../..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI  
FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Özlem DEMİR

Tarih:

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## KANSER TÜMÖRÜ İÇİN MODELLENEN BİR DİFÜZYON DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Özlem DEMİR

Muş Alparslan Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Zeliha KÖRPİNAR

Bu çalışmada, kanser tümörü için modellenen bir difüzyon denkleminin yaklaşık çözümleri incelenmiştir.

Çalışmanın temel amacı, Residual kuvvet serisi metodu (RPSM) algoritmasını kullanarak kanser tümörü için modellenen farklı problemleri çözmek ve bulunan sonuçları incelemektir. Yöntemin açıklanması ve güvenilirliği göstermek için seri çözümlerin grafiksel sunumları verilmiştir. Bu yöntemin farklı kanser tümör problemlerinin yaklaşık çözümleri için alternatif olarak kullanılabileceği sonucuna varılmıştır.

**2022, 30 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Burgess Denklemi, Kanser Tümör Modelleri, Residual Kuvvet Serisi Metodu

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**NUMERICAL SOLUTIONS OF A DIFFUSION EQUATION MODELED FOR  
CANCER TUMOR**

**Özlem DEMİR**

**Muş Alparslan University  
Natural and Applied Science  
Mathematic Programme**

**Advisor: Assoc. Prof. Zeliha KÖRPINAR**

In this study, approximate solutions of a diffusion equation modeled for cancer tumor were investigated.

The main purpose of the study is to solve different problems modeled for cancer tumor using the Residual power series method (RPSM) algorithm and to examine the results found. Graphical representations of the serial solutions are given to explain the method and demonstrate its reliability. It has been concluded that this method can be used as an alternative for approximate solutions of different cancer tumor problems.

**2022, 30 Pages**

**Keywords:** Burgess Equation, Cancer tumor models, Residual power series method

## ÖNSÖZ

Bu çalışmamda, bilgi ve deneyimlerini paylaşan değerli danışmanım Sayın Doç. Dr. Zeliha KÖRPINAR'a teşekkürlerimi sunarım.

Her anımda varlıklarıyla güç aldığım sevgili aileme de sonsuz teşekkür ederim.

Özlem DEMİR  
MUŞ-2022



## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2.KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	5
2.1 Temel Tanım ve Teoremler .....	5
2.2 Residual Kuvvet Serisi Metodu .....	9
4.ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA .....	21
5. SONUÇ ve ÖNERİLER .....	26
KAYNAKLAR .....	28

## SİMGELER ve KISALTMALAR

### Simgeler

- $R$  : Reel sayılar kümesi  
 $\Delta$  : Diskriminant  
 $\infty$  : Sonsuz  
 $\mu$  : Mu  
 $\infty$  : Sonsuz  
 $Z$  : Tam sayılar kümesi  
 $\partial$  : Kısmi türev  
 $D$  : Türev  
 $\alpha$  : Alfa  
 $\beta$  : Beta  
 $\Delta$  : Delta  
 $\Omega$  : Omega  
 $\Gamma$  : Gama  
 $u(x, t)$  :  $t$  zamanındaki ve  $x$  konumundaki tümör hücrelerinin konsantrasyonu  
 $D$  : Dağılım katsayısı  
 $K$  : Tedaviye bağlı öldürme hızı  
 $p$  : Tümörün üreme hızı  
 $r$  : Tümörün başlangıç noktasına bağlı olan mesafe

### Kısaltmalar

- RPSM : Residual Kuvvet Serisi Metodu  
 $Res_m$  : m. Residual fonksiyon

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4. 1 a) Örnek1'deki $u_2$ 'nin yüzey grafiği, b) Örnek1'deki $u_3$ 'nin yüzey grafiği, c) Örnek1'deki $u_4$ 'ün yüzey grafiği, d) Örnek1'deki $u_5$ 'in yüzey grafiği ( $k=-1$ ).....	21
Şekil 4. 2a ) Örnek1'deki $u_1, u_2, u_3, u_4$ ve $u_5$ 'in iki boyutlu grafiği ( $k=-1, x=0.5$ )..	22
Şekil 4. 3 Örnek2'deki $u_5$ 'in yüzey grafiği ( $a=20, b=-0.5$ ).....	22
Şekil 4. 4 Örnek2'deki $u_5$ 'in iki boyutlu grafiği ( $a=20, b=-0.5$ ).....	23
Şekil 4. 5a) Örnek3'teki $u_2$ 'nin yüzey grafiği, b) Örnek3'teki $u_3$ 'nin yüzey grafiği, c) Örnek3'teki $u_4$ 'ün yüzey grafiği, d) Örnek3'teki $u_5$ 'in yüzey grafiği ( $p=2$ ) .....	24
Şekil 4. 6 a) Örnek3'teki $u_1, u_2, u_3, u_4$ ve $u_5$ in iki boyutlu grafiği ( $p=2, x=10$ ) ....	24

## 1. GİRİŞ

Dünyamızda geçen zamanla akışkanlar mekaniği, elektrik devreleri, sinyal işleme, dinamik sistemlerin kontrol teorisi, görüntü işleme, optik ve elastik gibi farklı bilim dalları ve mühendislik dallarında diferansiyel denklemlerin sayısız uygulamaları olmuştur.

Literatürde diferansiyel denklemlerin tam ve nümerik metodlarla çözümleri mevcuttur. Lineer olmayan denklemlerin analitik çözümleri kompleks olabilir. Bu karmaşıklığı gidermek için bazı nümerik metotlarla yaklaşık çözümler bulunur. Adomian ayrıştırma metodu (ADM), Laplace analiz metodu (LAM), homotopi analiz metodu (HAM), homotopi pertürbasyon metodu (HPM), diferansiyel dönüşüm metodu (DTM) ve pertürbasyon iterasyon (PIA) algoritması da bunlardan bazılarıdır (Evans ve ark., 2003; Inc ve Evans, 2004; Chen, 1999; Jang ve ark., 2001; Salınan, 2008).

Yukarıda verilen nümerik metotlardan farklı olarak doğrusallaştırma, pertürbasyon ve ayrıklaştırma yapılmadan uygun başlangıç şartları sayesinde doğrudan uygulanabilen pratik bir yöntem olmasından RPSM diğerlerine göre tercih edilir. Bu çalışmada kanser tümörü için modellenen bir difüzyon denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için residual kuvvet serisi metodu (RPSM) kullanılmıştır. Bu yöntemde, güç serilerinin katsayıları residual hata ifadesi ile bir veya daha fazla değişken cebirsel denklem ilişkisi sayesinde hesaplanır. Bununla birlikte sonuçta bir denklem serisine ulaşılır (El-Ajou, 2013).

Tümör; vücuttaki hücrelerin fazla bölünmesinden kaynaklı sınırsız ve kurlsız çoğalması sonucu dokuların büyümesidir. İyi(benign) huylu ve kötü(malign) huylu olmak üzere iki çeşit olarak sınıflandırılır. İyi huylu olanlar buldukları alan dışına çıkmaz ve farklı dokulara dağılmazlar. Bulduğu dokuda büyüyen ve farklı dokulara geçebilen anormal çoğalan tümörler kötü huyludur. Kanser olarak nitelendirilen kötü huylu tümörler, hücrelerin düzensiz bölünüp çoğalmasıyla kontrolsüz hızlı yayılım göstererek büyür (Telliöglü, 2011; Murray, 2003).

Kanser tümöründe yer alan zorluklar birçok araştırmacının bu alanda derin araştırmalara yönelmesine neden olmuştur. Bu problem tıp ve biyoloji alanında çalışan uzmanların ilgisini çekmekle birlikte uygulamalı matematikçilerin de ilgisini çekti (Benzekry,2014). Çünkü matematiksel modeller, problemi anlamakla birlikte hastalığı teşhis ederken ilerleyen zamanda kolaylık sağlamak için kullanılır (Swanson, 2002).

Gompertz, ilk olarak 1825'te kanser tedavisinde matematiksel modellemeyi kullandı. Hücre çoğalmasını ve ölümünü hesaba katarak tümör büyümesini modelledi. Daha sonra tümör mikro çevre çalışmalarında farklı bileşenlerin etkilerini araştırmak için birçok matematiksel model geliştirilmiştir (Diethelm, 2013; D'Onofrio, 2005; D'Onofrio, 2008; Sotolongo-Costa, 2003; Sung, 2020; De Vladar ve Gonzalez, 2004). Tümörün büyüme ve tedavi yanıtını incelemek için birçok yaklaşım vardır. Bunlardan bazıları istatistiksel modellerle birlikte olasılık-maksimasyon algoritması ve deneysel metodların çözümüne dayanmaktadır. Bu çalışmaların ikisinde de tümörün çoğalması veya azalması zamanın bir fonksiyonu olarak incelenmiştir. Tartışılan modellerden biri, farklı sabit kanser hücrelerinin çoğalması oranları için bir boyutlu büyüme denkleminde dayanmaktadır (2014, Benzekry). Yapılan çalışmalar, tümör büyümesinin ilkelerinin, genellikle sıradan diferansiyel denklemler olarak ifade edilmeye uygun olan genel büyüme yasalarından kaynaklanabileceğini düşündürmektedir (Gerlee,2013). Bu modellerin iki yönlü faydası vardır. Öncelikle deneysel verilere karşı tanımlayıcı güçlerini değerlendirerek büyüme hipotezlerini veya teorilerini test eder. Daha sonra tümör ilerlemesinin geçmiş ya da gelecekteki seyrini tahmin etmeye yardımcı olur (Laird 1965; Norton, 1976). Ayrıca tedavi öncesi ilaç geliştirmede bir tedavinin etkinliğini belirlemek ve kişiye özel bir tedavi profili uygulamak için etkilidir (Bernard, 2012; Simeoni , 2013).

Laajala ve arkadaşları 2012 de zamanla tümör hücrelerinin büyümesi veya azalmasına ilişkin simülasyonlar sunmuşlardır.2014 de Olaniyi Samuel Iyiola ve F.D. Zaman çalışmalarında öldürme oranının yanı sıra tümör hücrelerinin konsantrasyonunun mekana ve zamana bağlılığını dikkate alarak kesirli bir difüzyon modelini ele almışlardır(Iyiola ve Zaman, 2014; Laajala ve ark., 2012).

Burgess ve arkadaşları tarafından difüzyon bazlı bir model önerilmiştir. Burgess denklemi olarak bilinen aşağıdaki denklemi göz önüne alıyoruz.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial r} \right) + pu(x, t) - ku(x, t) \quad (1.1)$$

Burada

$u(x, t)$ ,  $t$  zamanındaki ve  $x$  konumundaki tümör hücrelerinin konsantrasyonu

$D$ , dağılım katsayısıdır.

$p$ , tümörün üreme hızıdır.

$k$ , tedaviye bağlı öldürme hızıdır.

r, tümörün başlangıç noktasına bağlı olan mesafeyi ölçer.

Moyo ve Leach, Lie modelinin simetri yöntemini kullanarak bu modelin bir boyutlu versiyonunu değişken ölüm oranıyla araştırdı (Moyo ve Leach, 2004).

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - K(x, t)u(x, t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

Burada  $K(x, t)$  tedavinin zamansal sürecini tanımlar ve  $K(x, t)$ u tümör hücrelerinin öldürülme hızıdır. Bunların en büyük katkılarından biri sadece zamanın bir fonksiyonu olmaması aynı zamanda kanserli hücrelerin hem konumunun hem de zamanın bir fonksiyonu olmasıdır. Bu daha gerçekçi bir varsayımdır (Iyiola ve Zaman, 2014).

Ayrıca Ali ve ark. ve Bokhari ve ark. çalışmalarında kanser hücrelerinin öldürme oranının hücrelerin bağlanma hızına bağlı olduğunu denklem (1.2) de dikkate almışlardır.  $K(u)$  genel hal olarak gösterilmiştir. Bu nedenle model doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemle sonuçlanır. Böylece radyal olarak simetrik olan basit modelden radyal olarak simetrik olmayan tümöre kadar çeşitli durumları dikkate aldılar. Birçok yazarın gerçek yaşam modellerinde eskinin önemini görmeye başlaması uzun sürmedi (Ali, 2014; Bokhari, Kara ve Zaman, 2009).

Kanserin süper yayılması üzerine kayda değer olan Iomin'in eseridir. Tümör gelişiminin hücrelerin fonksiyonel taşınmasına tekabül ettiğini gösterebildi. Kesirli taşımacılığın basitleştirilmiş yaklaşımı neoplazm hücrelerinin primer tümör durumunda keyfi olarak ana tümörden nasıl uzak görüldüğü sorusuna cevap verdi. Bu çalışmaları bu problemin bazı analitik çözümlerini sunmalarını sağladı (Iomin 2005; Iyiola ve Zaman 2014).

Olaniyi Samuel Iyiola ve F.D. Zaman çalışmalarında inceledikleri bazı kesirli mertebeden kanser tümörü modellerini ele almışlardır. Tümör hücrelerinin ortadan kaldırılma net oranı, tümörün büyümesini veya küçülmesini izlemeye yardımcı olacağı için, modelin  $K$ 'nin farklı değerleri için incelenmesi faydalı olacaktır. Bu belirli bir tedavi profili seçilmesine yardımcı olabilir (Ali, 2014; Bokhari, Kara ve Zaman, 2009; Iyiola ve Zaman, 2014). İlk önce, güçlü analitik tekniklerden biri olan RPSM kullanılarak yaklaşık analitik çözümler elde edilir. Bu çözümler ihtiyaca ve neyin hedeflendiğine bağlı olarak uygun mertebeden türevler alınarak hesaplanabilir. Bu çalışmanın amacı RPSM algoritmasını kullanarak kanser tümörü için modellenen aşağıdaki üç problemi çözmek ve bulunan sonuçları incelemektir.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - t^2 u(x, t) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{2}{x^2} u(x, t) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{2}{x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - u^2(x, t) \quad (1.5)$$

Bu çalışmada, bazı doğrusal olmayan problemlerin etkili seri çözümünü bulmak için RPSM'yi araştırıyoruz. Uygulanan algoritma, çözümleri bir yakınsama serisi şeklinde verir. Sonsuz seri çözümleri elde etmek için yinelenen işlemler oluşturulur. RPSM, fuzzy diferansiyel denklemler için etkili bir algoritma olarak ifade edildi (Abu Arqub, 2013). Emad Az-Zo'bi, yüksek mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik tedavisi için, artık güç serisi yöntemi olarak bilinen son zamanlarda geliştirilen tekniği genelleştirdi (Az-Zo'bi 2019; El-Ajou, 2013).



## 2.KAYNAK ARAŞTIRMASI

### 2.1 Temel Tanım ve Teoremler

#### Tanım 2.1

Diferansiyel denklemler, bir fonksiyon ya da birden fazla fonksiyonun, tek ya da birden fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içerir.

Tek ya da birden fazla bağımlı değişkeni, tek bir bağımsız değişkene göre türev içeren diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklemler denir. Bir diferansiyel denklemin mertebesi denklemden görülen en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. n. mertebeden bir adi diferansiyel denklem genel olarak,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

kapalı formunda gösterilebilir (Duchateau vd., 1986).

Bir  $a < x < b$  aralığında tanımlı bir  $\Phi$  fonksiyonunun  $a < x < b$  aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n. mertebeden türeve sahip fonksiyonu,

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0$$

ise  $\Phi$  fonksiyonuna  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  denkleminin çözümüdür denir.

Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit değeri parametre olarak kabul eden bir eğri ailesi olarak ortaya çıkar. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de özel çözüm denir (Cerit, 1997).

#### Tanım 2. 2

İçinde bir ya da daha fazla bağımlı değişkenin en az iki bağımsız değişkene kıyasla kısmi türevleriyle bir arada bağımlı ile bağımsız değişkenleri barındıran diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. Aşağıda verilmekte olan fonsiyon, bağımlı değişken z ve bağımsız değişken x ile y olarak alınan kısmi diferansiyel denklem

$$F(x, y, z_x, z_y, z_{xy}, z_{xx}, \dots) = 0 \quad (2.2)$$

biçiminde ifade edilir.

Böylece,

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$$

formunda gösterilir.

Sayısız adet bağımsız değişken barındıran ve yalnızca bir bağımlı değişkene ait kısmi türevli denklemlerin genel biçimi,  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), Z = Z(x)$  olacak şekilde

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, Z, Z_{x_1}, Z_{x_2}, \dots, Z_{x_n}, Z_{x_1 x_1}, Z_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

tarzındadır.

O zaman  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  ile ifade edilen bağımsız değişkeni ve  $z$ 'nin bağımlı değişkeni temsil etmesine karşı

$$z_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}, z_{x_1 y_i} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; i, j=1, 2, \dots, n$$

biçiminde yazılır.

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre içermeyen bir fonksiyona bu kısmi türevli denklemin bir özel çözümü denir. Öte yandan mertebesi kadar (sürekli türetilebilir) keyfi fonksiyon bulduran ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin genel çözümü denir (Koca, 2001).

### Tanım 2. 3

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken (veya bağımlı değişkenler) ve bunların denklemdeki tüm kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezine alındığında katsayılar sadece bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise lineer diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Diğer durumlarda lineer olmayan diferansiyel denklem olarak adlandırılır (Koca,2001).

### Tanım 2. 4

Bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümünde mertebesi sayısınca keyfi fonksiyon barındırır. Bundan dolayı adi diferansiyel denklemlere kıyasla kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak daha zordur. Başlangıçta modellenen probleme uygun çözümün bulunabilmesi için problem oluşturulurken bazı yardımcı şartlar gerekir. Bu şartlar genel olarak iki başlık altında toplanabilir.

(i)Sınır Şartları: Sınır koşulları kısmi diferansiyel denklemin sağlandığı  $\Omega$  bölgesinin  $T$  sınırı boyunca sağlanması gerekli koşullardır. Sınır koşullarının üç farklı biçimi  $\alpha, \beta$  ve  $g$  fonksiyonları  $\Gamma$  üzerinde tanımlı fonksiyonlar olacak şekilde özel adları şu biçimdedir:

Dirichlet şartı:  $u_{\Gamma} = g$ ,

Neumann Şartı:  $\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma}} = g$

Karışık(mixed) veya Robin şartı:  $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$

(ii)Başlangıç Şartları: Başlangıç koşulları düzenin başlangıcında  $\Omega$  bölgesi boyunca sağlanması gerekli koşullardır. Genellikle, başlangıç koşulları fonksiyonun ve zamana göre türevinin birleşimi biçimindedir.

Başlangıç şartlarıyla beraber verilen diferansiyel denkleme Cauchy problemi denir.

İkinci mertebeden ve iki serbest değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem,

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$$

genel biçimiyle verilebilir. Yukarıda verilen  $A, B, C, D, E, F$  katsayı fonksiyonları ve  $G$  fonksiyonu da sabit ya da değişken bulunduran fonksiyondur. Yukarıdaki denklem,

$\Delta = B^2 - 4AC$  diskriminantının işaretinin değişimine göre aşağıdaki gibi sınıflandırılır:

$\Delta > 0$  ise Hiperbolik,

$\Delta = 0$  ise Parabolik,

$\Delta < 0$  ise Eliptik

Herhangi bir biçimdeki problemin çözümü, klasik Hadamard testine göre aşağıdaki koşulları sağlarsa problem iki çeşit olarak adlandırılır. Bunlardan ilki iyi durumudur ki tüm koşulların sağlanması ile oluşur. Kötü durumda ise en az bir koşulun sağlanmaması ile oluşur. Bu koşullar aşağıdaki biçimde ifade edilmektedir.

1)Varlık

2)Teklik

3)Kararlılık

Esasında basitçe bir denklemin çözümünün varlığını açıklamanın en güzel yöntemi tüm koşulları sağlayan ve problemde yerine geçirildiğinde denkleme sağlayan çözümler inşa etmektir. Denklemin çözümünün bulunması, çözümün tekliğinin gösterilmesine bağlıdır. Adi diferansiyel denklemlere kıyasla kısmi diferansiyel denklemlerde çözüm şekilleri seri veya integraller gibi limit metotları içerir ve çözümler daima elementer fonksiyonların kapalı şekillerinde ifade edilmez. Böylece bir nümerik çözüm araştırılarak başlangıç

şartındaki değişimlerin küçüklüğüne bakılır ve bu değişimlere bağlı olarak işlemler sonucunda çözüm de küçük değişiklikler varsa çözüm karalıdır denir (Gustafson, 2012).

### Tanım 2.5

Diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyonu ve onun türevleri üzerinde değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerinin problemine başlangıç değer problemi, verilen şartlara da başlangıç şartları adı verilir (Dennemeyer, 1968).

### Tanım 2.6

Kompleks değişkenli bir  $f$  fonksiyonu, bir  $z_0$  noktasının belli bir  $D(z_0, \delta)$  komşuluğundaki bütün noktalarda differansiyellenebiliyorsa  $f, z_0$  noktasında analitiktir denir. Eğer kompleks değişkenli bir  $f$  fonksiyonu, bir  $S$  kümesinin bütün noktalarında analitikse  $f, S$  üzerinde analiktir denir. Bir  $f$  fonksiyonu  $C$  kompleks sayılar kümesinin tüm noktalarında analitikse,  $f$ 'ye tam fonksiyon denir (Franklin, 1964).

### Tanım 2.7

Diferansiyel denklemlerin çözümü için varlık ve teklik teoremi aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.3)$$

başlangıç değer problemi olmak üzere merkezi  $(x_0, y_0)$  noktasında olan  $D$  bölgesi

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b \quad (2.4)$$

biçiminde bir dikdörtgensel bölgede tanımlı olsun. Bununla birlikte (2.3) denklemindeki

$f$  fonksiyonu ve  $f$  'nin  $y$ 'ye göre kısmi türevi olan  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $D$  bölgesinde  $y$  'ye göre

Lipschitz şartını sağlasın. O halde  $h = \min\left(a, \frac{b}{m}, \frac{1}{k}\right)$  ve  $|f(x, y)| \leq m$  olacak şekilde aşağıdaki maddelere göre bir  $F(x)$  fonksiyonu  $y$  ve  $|x - x_0| \leq h$  aralığı mevcuttur.

i)  $y = F(x)$ , yukarıda verilen başlangıç değer probleminin  $|x - x_0| \leq h$  aralığında bir çözümüdür.

ii)  $F(x)$ ,  $|x - x_0| \leq h$  durumunda  $|F(x) - y_0| \leq b$  eşitsizliğini sağlar

iii)  $F(x_0) = y_0$  dır.

iv) (i),(ii) ve(iii) maddelerinin tümünü sağlayan,  $|x - x_0| \leq h$  aralığında tanımlı olan bir tane  $F(x)$  vardır (Özer ve Eser, 2002).

### Tanım 2.8

Kapalı  $D$  bölgesinde tanımlı olacak şekilde bir  $f(x, y)$ fonksiyonun var olduğunu kabul etmek üzere apsileri  $x$  ve ordinatları  $y_1$  ve  $y_2$  olarak seçilen iki keyfi nokta olsun. Seçilen her  $(x, y_1) \in D$  ve  $(x, y_2) \in D$  ikilisi için,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \quad (2.5)$$

ilişkisi halinde bir  $K$  sayısının varlığı mümkün olabiliyorsa,  $f(x, y)$  fonksiyonu Lipschitz koşulunu  $D$  bölgesinde sağlar denir (Özer ve Eser, 2002).

### Tanım 2.9

$X$  ve  $Y$  boş olmayan iki küme ve  $D \subset X$  olsun.  $D'$ 'nin her elemanına  $Y$ 'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala  $D$ 'den  $Y$ 'ye bir operatör veya dönüşüm denir (Musayev ve Alp, 2000).

### Tanım 2.10

Aynı  $K$  cismi üzerinde  $X$  ile  $Y$  iki lineer uzay ve  $T: X \rightarrow Y$  operatörü verilsin.  $X_0$  cümlesi  $X$  uzayının bir alt uzayı olsun. Eğer  $\forall x, y \in X_0$  ve  $\forall \alpha, \beta \in K$  için  $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$  ise  $A$  operatörüne lineer operatör denir (Musayev ve Alp, 2000).

### Tanım 2.11

$L, D(L)$  tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere,  $L_y = \lambda y$  eşitsizliğini sağlayan  $y(x) \neq 0$  fonksiyonu mevcut ise  $\lambda'$  ya  $L$  operatörünün özdeğeri,  $y(x, \lambda)$  fonksiyonuna ise  $\lambda'$  ya karşılık gelen özfonksiyon denir (Levitan ve ark., 1975).

### Tanım 2.12

$a \in R$  ve  $\forall k = 0, 1, 2, \dots$  için

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + \dots$$

katsayısı  $c_k \in R$  olmak üzere seri içine  $(x - a)^n$  biçiminde  $x$ 'e bağlı üslü ifadelerin gelmesiyle şeklindeki gibi oluşan seriye kuvvet serisi denir (Balcı, 1997).

## 2.2 Residual Kuvvet Serisi Metodu

RPSM nin gerekliliği için lineer olmayan bir diferansiyel denklemi alalım:

$$D_t u(x, t) + R(x)u(x, t) + N(x)u(x, t) = g(x, t) \quad t > 0, x \in i$$

başlangıç şartıyla ifade edilen

$$f_0(x) = u(x, 0) = f(x) \quad (2.13)$$

burada  $g(x, t)$  'nin sürekli fonksiyon olması ile birlikte  $R(x)$  ve  $N(x)$  de sırasıyla doğrusal ve doğrusal olmayan operatörlerdir.

RPSM metodu, aşağıda ele alınan denklemin çözümünü  $t = 0$  civarına kuvvet serisine genişletme ile oluşur.

$$f_{n-1}(x) = D_t^{(n-1)\alpha} u(x, 0) = h(x)$$

çözümün genişleme biçimi şöyledir:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n, \quad x \in I, 0 \leq t \leq R \quad (2.14)$$

Bir sonraki basamakta, m. kesik  $u(x, t)$  serisini  $u_m(x, t)$  şu biçimde yazılabilir:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^m f_n(x) t^n, \quad x \in I, 0 \leq t \leq R, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

1.RPSM nümerik çözümü  $u_1(x, t)$  aşağıdaki gibi yazılırsa:

$$u_1(x, t) = f(x) + f_1(x)t$$

O zaman  $u_m(x, t)$  şu şekilde yeniden formüle edilebilir:

$$u_m(x, t) = f(x) + f_1(x)t + \sum_{n=2}^m f_n(x) t^n, \quad x \in I, 0 \leq t \leq R, \quad m = 2, 3, \dots$$

Öncelikle aşağıdaki gibi residual fonksiyonunu tarif edelim:

$$Res(x, t) = D_t(x, t) + R(x)u(x, t) + N(x)u(x, t) - g(x, t)$$

ve m. residual fonksiyon olarak:

$$Res_m(x, t) = D_t u_m(x, t) + R(x)u_m(x, t) + N(x)u_m(x, t) - g(x, t),$$

$$m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

Açıktır ki, her  $x \in I$  ve  $t \geq 0$  için  $Res(x, t) = 0$  ve  $\lim_{m \rightarrow \infty} Res_m(x, t) = Res(x, t)$  dir.

Esasında bu,  $n = 1, 2, 3, \dots, m$  için  $D^{(n-1)}Res_m(x, 0) = 0$  ' a neden olur. Çünkü sabitin türevi sıfırdır.

$D^{n-1}Res_m(x, 0) = 0$  denklemini çözerek istenilen  $f_n(x)$  katsayılarını buluruz. Böylece, sırasıyla  $u_n(x, t)$  yaklaşık çözümleri elde edilebilir (Abu Arqub, 2013).



### 3.MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1 RPSM'nun Sayısal Uygulamaları

##### Örnek.1

Kanser hücrelerinin net öldürme oranı sadece zamana bağlı olan aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım (Iyiola ve F.D. Zaman, 2014).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - t^2 u(x, t), t \geq 1 \\ u(x, 0) &= e^{kx} \end{aligned} \quad (3.1)$$

(3.1) problemini başlangıç koşullarına tabi olan diferansiyel denkleminin kuvvet serisi açılımını kesik residual fonksiyonu olarak yazalım.

Farz edelim ki verilen denklemin çözümü,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n, x \in I, 0 \leq t < R \quad (3.2)$$

biçiminde olsun.

$u$ 'nun burada  $m$ . inci kesik serisi  $u_m$  :

$$u_m = \sum_{n=0}^m f_n(x) t^n, x \in I, 0 \leq t \leq R, m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

şeklindedir.

$u_0 = f_0(x) = u(x, 0) = f(x)$  başlangıç koşullarından yararlanarak (3.3) eşitliğini aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$u_m(x, t) = f(x) + \sum_{n=1}^m f_n(x) t^n, x \in I, 0 \leq t < R \quad (3.4)$$

Öncelikle seri açılımında  $f_n(x)$  olarak verilen (3.3) denklemindeki  $n=1, 2, 3, \dots, m$  katsayılarını elde ederek residual fonksiyonu,

$$Res(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + t^2 u(x, t)$$

şeklinde tarif edelim.

Böylece m. residual fonksiyonu  $Res_m$  aşağıdakine benzerdir.

$$Res_m(x, t) = \frac{\partial u_m(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_m(x, t)}{\partial x^2} + t^2 u_m(x, t), m=1,2,3,\dots \quad (3.5)$$

$f_1(x)$ 'i tespit etmek için (3.5) eşitliğinde  $m=1$  yazalım.

$$Res_1(x, t) = \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + t^2 u_1(x, t) \quad (3.6)$$

fonksiyonu yazılır. Bu denklemde

$$u_1(x, t) = f(x) + f_1(x)t$$

alınır ve  $Res_1 = 0$  olduğu düşünülürse

$f_1(x) = e^{kx}k^2$  bulunur. Böylece

$$u_1(x, t) = e^{kx} + e^{kx}k^2t \quad (3.7)$$

İlk olarak 1.RPS nümerik çözümü elde edilir.

Aynı işlemleri  $f_2(x)$  katsayısının bilinmeyen değerini elde etmek için sırasıyla yazalım.

$$Res_2(x, t) = \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} + t^2 u_2(x, t) \quad (3.8)$$

$$u_2(x, t) = e^{kx} + e^{kx}k^2t + t^2 f_2(x)$$

çözümünü  $Res_2$  fonksiyonunda yerine yazıp

$$\frac{\partial Res_2}{\partial t} = 0, (t=0)$$

eşitliği uygulanırsa  $f_2(x) = \frac{1}{2}e^{kx}k^4$  bulunur. O halde

$$u_2(x, t) = e^{kx} + e^{kx}k^2t + \frac{1}{2}e^{kx}k^4t^2 \quad (3.9)$$

2.RPS nümerik çözümü elde edilir.

Benzer şekilde m=3 için  $Res_3$ 'te  $u_3(x) = f_0(x) + f_1(x)t + f_2(x)t^2 + f_3(x)t^3$  yazılır ve

$$\frac{\partial Res_3}{\partial t} = 0, (t=0)$$

Eşitliği uygulanırsa  $f_3(x) = \frac{1}{6}e^{kx}(-2 + k^6)$  bulunur. O halde

$$u_3(x, t) = e^{kx} + e^{kx}k^2t + \frac{1}{2}e^{kx}k^4t^2 + \frac{1}{6}e^{kx}(-2 + k^6)t^3 \quad (3.10)$$

3.RPS yaklaşık çözümü bulunur.

Benzer şekilde m=4 için  $Res_4$ 'te  $u_4(x) = f_0(x) + f_1(x)t + f_2(x)t^2 + f_3(x)t^3 + f_4(x)t^4$

yazılır ve  $\frac{\partial Res_4}{\partial t} = 0, (t=0)$  eşitliği uygulanırsa  $f_4(x) = \frac{1}{24}e^{kx}k^2(-8 + k^6)$  bulunur. O halde

$$u_4(x, t) = e^{kx} + e^{kx}k^2t + \frac{1}{2}e^{kx}k^4t^2 + \frac{1}{6}e^{kx}(-2 + k^6)t^3 + \frac{1}{24}e^{kx}k^2(-8k^6)t^4 \quad (3.11)$$

Bu nedenle 4.RPS yaklaşık çözümü bulunur.

Benzer şekilde m=5 için  $Res_5$ 'te

$u_5(x) = f_0(x) + f_1(x)t + f_2(x)t^2 + f_3(x)t^3 + f_4(x)t^4 + f_5(x)t^5$  yazılır ve

$$\frac{\partial Res_5}{\partial t} = 0, (t=0)$$

Eşitliği uygulanırsa  $f_5(x) = \frac{1}{120}e^{kx}k^4(-20 + k^6)$  bulunur. O halde (3.1) denkleminin

5.RPS yaklaşık çözümü:

$$u_5(x) = e^{kx} + e^{kx}k^2t + \frac{1}{2}e^{kx}k^4t^2 + \frac{1}{6}e^{kx}(-2 + k^6)t^3 + \frac{1}{24}e^{kx}k^2(-8 + k^6)t^4 + \frac{1}{120}e^{kx}k^4(-20 + k^6)t^5 \quad (3.12)$$

şeklindedir.

**Örnek. 2**

Bu örnekte kanser hücrelerinin öldürme oranı yalnızca mekana bağlıdır ve ters orantılıdır (Iyiola ve F.D. Zaman, 2014).

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{2}{x^2} u(x, t)$$

$$u(x) = \frac{a}{x} + bx^2 \quad (3.13)$$

(3.13) problemini başlangıç koşullarına tabi olan diferansiyel denkleminin kuvvet serisi açılımını kesik residual fonksiyonu olarak yazalım.

Aşağıdaki şekilde denklemin çözümünün olduğunu varsayalım:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n, x \in I, 0 \leq t < R \quad (3.14)$$

$u$ 'nun burada  $m$ .ıncı kesik serisi  $u_m$ :

$$u_m = \sum_{n=0}^m f_n(x)t^n, x \in I, 0 \leq t \leq R, m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

şeklindedir.

$u_0 = f_0(x) = u(x, 0) = f(x)$  başlangıç koşullarından yararlanarak (3.15) eşitliğini aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$u_m(x, t) = f(x) + \sum_{n=1}^m f_n(x)t^n, x \in I, 0 \leq t < R \quad (3.16)$$

Öncelikle seri açılımında  $f_n(x)$  olarak verilen (3.15) denklemindeki  $n=1, 2, 3, \dots, m$  katsayılarını elde ederek residual fonksiyonunu,

$$Res(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x^2} u(x, t)$$

şeklinde tarif edelim. Böylece  $m$ . residual fonksiyonu  $Res_m$  aşağıdakine benzerdir:

$$Res_m = \frac{\partial u_m(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_m(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x^2} u_m(x, t), m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.17)$$

$f_1(x)$ 'i tespit etmek için (3.17) eşitliğinde  $m=1$  yazalım.

$$Res_1 = \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x^2} u_1(x,t), \quad (3.18)$$

fonksiyonu yazılır. Bu denklemde  $u_1(x,t) = f(x) + f_1(x)t$  alınarak  $t=0$  da  $Res_1 = 0$  olduğu göz önünde bulundurulursa  $f_1(x) = 0$  bulunur. O halde

$$u_1(x,t) = \frac{a}{x} + bx^2 \quad (3.19)$$

1.RPS nümerik çözümü elde edilir.

Aynı işlemleri  $f_2(x)$  katsayısının bilinmeyen değerini elde etmek için sırasıyla yazalım.

$$Res_2 = \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x^2} u_2(x,t) \quad (3.20)$$

$u_2(x,t) = \frac{a}{x} + bx^2 + t^2 f_2(x)$  çözümünü  $Res_2$  fonksiyonunda yerine yazıp

$$\frac{\partial Res_2}{\partial t} = 0, (t=0)$$

Eşitliği uygulanırsa  $f_2(x) = 0$  bulunur. O halde

$$u_2(x,t) = \frac{a}{x} + bx^2 \quad (3.21)$$

2.RPS nümerik çözümü bulunur. Aynı şekilde işlemlere devam edilirse,

$f_3(x) = 0, f_4(x) = 0, f_5(x) = 0$  elde edilir. O halde denklemin seri çözümü

$$u_5(x,t) = \frac{a}{x} + bx^2 \quad (3.22)$$

şeklinde bulunur.

### Örnek. 3

Buradaki kanser hücrelerinin öldürülme oranı, hücrelerin konsantrasyonuna (bir noktada toplanmasına) bağlıdır (Iyiola ve F.D. Zaman, 2014).

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{2}{x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - u^2(x,t)$$

$$u(x,t) = x^p \quad (3.23)$$

(3.23) problemini başlangıç koşullarına tabi olan diferansiyel denkleminin kuvvet serisi açılımını kesilmiş residual fonksiyonu ile yazalım.

Kabul edelim ki bu denklemin çözümü,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^m f_n(x)t^n, x \in I, 0 \leq t < R \quad (3.24)$$

biçiminde olsun.

$u$ 'nun burada  $m$ .ıncı kesik serisi  $u_m$ ,

$$u_m = \sum_{n=0}^m f_n(x)t^n, x \in I, 0 \leq t < R \quad (3.25)$$

şeklindedir.

$$u_0 = f_0(x) = u(x, 0) = f(x) \text{ başlangıç koşullarından yararlanarak (3.25)}$$

eşitliğini aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$u_m(x, t) = f(x) + \sum_{n=1}^m f_n(x)t^n, x \in I, 0 \leq t < R \quad (3.26)$$

Öncelikle seri açılımında  $f_n(x)$  olarak verilen (3.25) denklemindeki  $n=1,2,3,\dots,m$  katsayılarını elde ederek residual fonksiyonunu,

$$\text{Res}(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + u^2(x, t)$$

şeklinde tarif edelim.

Böylece  $m$  .residual fonksiyonu  $\text{Res}_m$  aşağıdakine benzerdir:

$$\text{Res}_m(x,t) = \frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial u_m(x,t)}{\partial x} + u_m^2(x, t), m=1,2,3,\dots \quad (3.27)$$

$f_1(x)$  'i tespit etmek için (3.27) eşitliğinde  $m=1$  yazalım.

$$\text{Res}_1(x,t) = \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} + u_1^2(x, t) \quad (3.28)$$

fonksiyonu yazılır. Bu denklemde  $u_1(x, t) = f(x) + f_1(x)t$  alınarak  $t=0$  da  $Res_1 = 0$  olduğu göz önünde bulundurulsa

$f_1(x) = -x^{-2+p}(3p - p^2 + x^{2+p})$  bulunur. O halde

$$u_1(x, t) = x^p - tx^{-2+p}(3p - p^2 + x^{2+p}) \quad (3.29)$$

1.RPS nümerik çözümü elde edilir.

Aynı biçimde; bilinmeyen  $f_2(x)$  katsayısının değerini elde etmek için sırasıyla yazalım.

$$Res_2(x, t) = \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} + u_2^2(x, t) \quad (3.30)$$

$$u_2(x, t) = x^p - tx^{-2+p}(3p - p^2 + x^{2+p}) + t^2 f_2[x]$$

çözümünü  $Res_2$  fonksiyonunda yerine yazıp  $\frac{\partial Res_2}{\partial t} = 0$ , ( $t=0$ ) eşitliği uygulanırsa

$$f_2(x) = \frac{1}{2} x^{-4+p} (-30p + 31p^2 - 10p^3 + p^4 + 12px^{2+p} - 6p^2x^{2+p} + 2x^{4+2p})$$

bulunur. O halde

$$u_2(x, t) = x^p - tx^{-2+p}(3p - p^2 + x^{2+p}) + \frac{1}{2} t^2 x^{-4+p} (-30p + 31p^2 - 10p^3 + p^4 + 12px^{2+p} - 6p^2x^{2+p} + 2x^{4+2p}) \quad (3.31)$$

2.RPS yaklaşık çözümü bulunur. Bu şekilde  $m=3$  için  $Res_3$  'de

$u_3(x) = f_0(x) + f_1(x)t + f_2(x)t^2 + f_3(x)t^3$  yazılır ve  $\frac{\partial Res_3}{\partial t} = 0$ , ( $t=0$ ) eşitliği uygulanırsa

$$f_3(x) = -\frac{1}{6} x^{-6+p} (840p - 1198p^2 + 651p^3 - 169p^4 + 21p^5 - p^6 - 180px^{2+p} + 308p^2x^{2+p} - 164p^3x^{2+p} + 28p^4x^{2+p} + 54px^{4+2p} - 34p^2x^{4+2p} + 6x^{6+3p})$$

elde edilir. Bu nedenle 3.RPS yaklaşık çözümü :

$$u_3(x, t) = x^p - tx^{-2+p}(3p - p^2 + x^{2+p}) + \frac{1}{2} t^2 x^{-4+p} (-30p + 31p^2 - 10p^3 + p^4 + 12px^{2+p} - 6p^2x^{2+p} + 2x^{4+2p}) - \frac{1}{6} t^3 x^{-6+p} (840p - 1198p^2 + 651p^3 - 169p^4 + 21p^5 - p^6 - 180px^{2+p} + 308p^2x^{2+p} - 164p^3x^{2+p} + 28p^4x^{2+p} + 54px^{4+2p} - 34p^2x^{4+2p} + 6x^{6+3p}) \quad (3.32)$$

olur. Benzer şekilde  $Res_4$  'te fonksiyonunda gerekli işlemler yapılırsa

$$f_4(= \frac{1}{24}x^{-8+p}(-45360p + 77292p^2 - 53964p^3 + 20089p^4 - 4320p^5 + 538p^6 - 36p^7 + p^8 + 6720px^{2+p} - 15520p^2x^{2+p} + 14128p^3x^{2+p} - 6328p^4x^{2+p} + 1392p^5x^{2+p} - 120p^6x^{2+p} - 1080px^{4+2p} + 2492p^2x^{4+2p} - 1768p^3x^{4+2p} + 404p^4x^{4+2p} + 288px^{6+3p} - 212p^2x^{6+3p} + 24x^{8+4p})$$

elde edilir. Bu nedenle 4.RPS yaklaşık çözümü:

$$u_4(x, t) = x^p - tx^{-2+p}(3p - p^2 + x^{2+p}) + \frac{1}{2}t^2x^{-4+p}(-30p + 31p^2 - 10p^3 + p^4 + 12px^{2+p} - 6p^2x^{2+p} + 2x^{4+2p}) - \frac{1}{6}t^3x^{-6+p}(840p - 1198p^2 + 651p^3 - 169p^4 + 21p^5 - p^6 - 180px^{2+p} + 308p^2x^{2+p} - 164p^3x^{2+p} + 28p^4x^{2+p} + 54px^{4+2p} - 34p^2x^{4+2p} + 6x^{6+3p}) + \frac{1}{24}t^4x^{-8+p}(-45360p + 77292p^2 - 53964p^3 + 20089p^4 - 4320p^5 + 538p^6 - 36p^7 + p^8 + 6720px^{2+p} - 15520p^2x^{2+p} + 14128p^3x^{2+p} - 6328p^4x^{2+p} + 1392p^5x^{2+p} - 120p^6x^{2+p} - 1080px^{4+2p} + 2492p^2x^{4+2p} - 1768p^3x^{4+2p} + 404p^4x^{4+2p} + 288px^{6+3p} - 212p^2x^{6+3p} + 24x^{8+4p}) \quad (3.33)$$

olur. Aynı şekilde  $Res_5$  fonksiyonunda gerekli işlemler yapılırsa,

$$f_5(x) = -\frac{1}{120}x^{-10+p}(3991680p - 7663536p^2 + 6262740p^3 - 2870440p^4 + 815815p^5 - 149513p^6 + 17710p^7 - 1310p^8 + 55p^9 - p^{10} - 453600px^{2+p} + 1219824p^2x^{2+p} - 1409952p^3x^{2+p} + 902384p^4x^{2+p} - 343504p^5x^{2+p} + 77456p^6x^{2+p} - 9552p^7x^{2+p} + 496p^8x^{2+p} + 50400px^{4+2p} - 154680p^2x^{4+2p} + 190380p^3x^{4+2p} - 116164p^4x^{4+2p} + 35044p^5x^{4+2p} - 4180p^6x^{4+2p} - 7200px^{6+3p} + 20536p^2x^{6+3p} - 17744p^3x^{6+3p} + 4936p^4x^{6+3p} + 1800px^{8+4p} - 1488p^2x^{8+4p} + 120x^{10+5p})$$

elde edilir. O halde (3.23) denkleminin 5.RPS yaklaşık çözümü :

$$u_5(x, t) = x^p - 1.5x^{-2+p}(3p - p^2 + x^{2+p}) + 1.125x^{-4+p}(-30p + 31p^2 - 10p^3 + p^4 + 12px^{2+p} - 6p^2x^{2+p} + 2x^{4+2p}) - 0.5625x^{-6+p}(840p - 1198p^2 + 651p^3 - 169p^4 + 21p^5 - p^6 - 180px^{2+p} + 308p^2x^{2+p} - 164p^3x^{2+p} + 28p^4x^{2+p} + 54px^{4+2p} - 34p^2x^{4+2p} + 6x^{6+3p}) + 0.2109375x^{-8+p}(-45360p + 77292p^2 - 53964p^3 + 20089p^4 - 4320p^5 + 538p^6 - 36p^7 + p^8 + 6720px^{2+p} - 15520p^2x^{2+p} + 14128p^3x^{2+p} - 6328p^4x^{2+p} + 1392p^5x^{2+p} - 120p^6x^{2+p} - 1080px^{4+2p} + 2492p^2x^{4+2p} - 1768p^3x^{4+2p} + 404p^4x^{4+2p} + 288px^{6+3p} - 212p^2x^{6+3p} + 24x^{8+4p}) - 0.06328125x^{-10+p}(3991680p - 7663536p^2 + 6262740p^3 - 2870440p^4 + 815815p^5 - 149513p^6 + 17710p^7 - 1310p^8 + 55p^9 - p^{10} - 453600px^{2+p} + 1219824p^2x^{2+p} - 1409952p^3x^{2+p} + 902384p^4x^{2+p} - 343504p^5x^{2+p} + 77456p^6x^{2+p} - 9552p^7x^{2+p} + 496p^8x^{2+p} + 50400px^{4+2p} - 154680p^2x^{4+2p} + 190380p^3x^{4+2p} - 116164p^4x^{4+2p} + 35044p^5x^{4+2p} - 4180p^6x^{4+2p} - 7200px^{6+3p} + 20536p^2x^{6+3p} - 17744p^3x^{6+3p} +$$

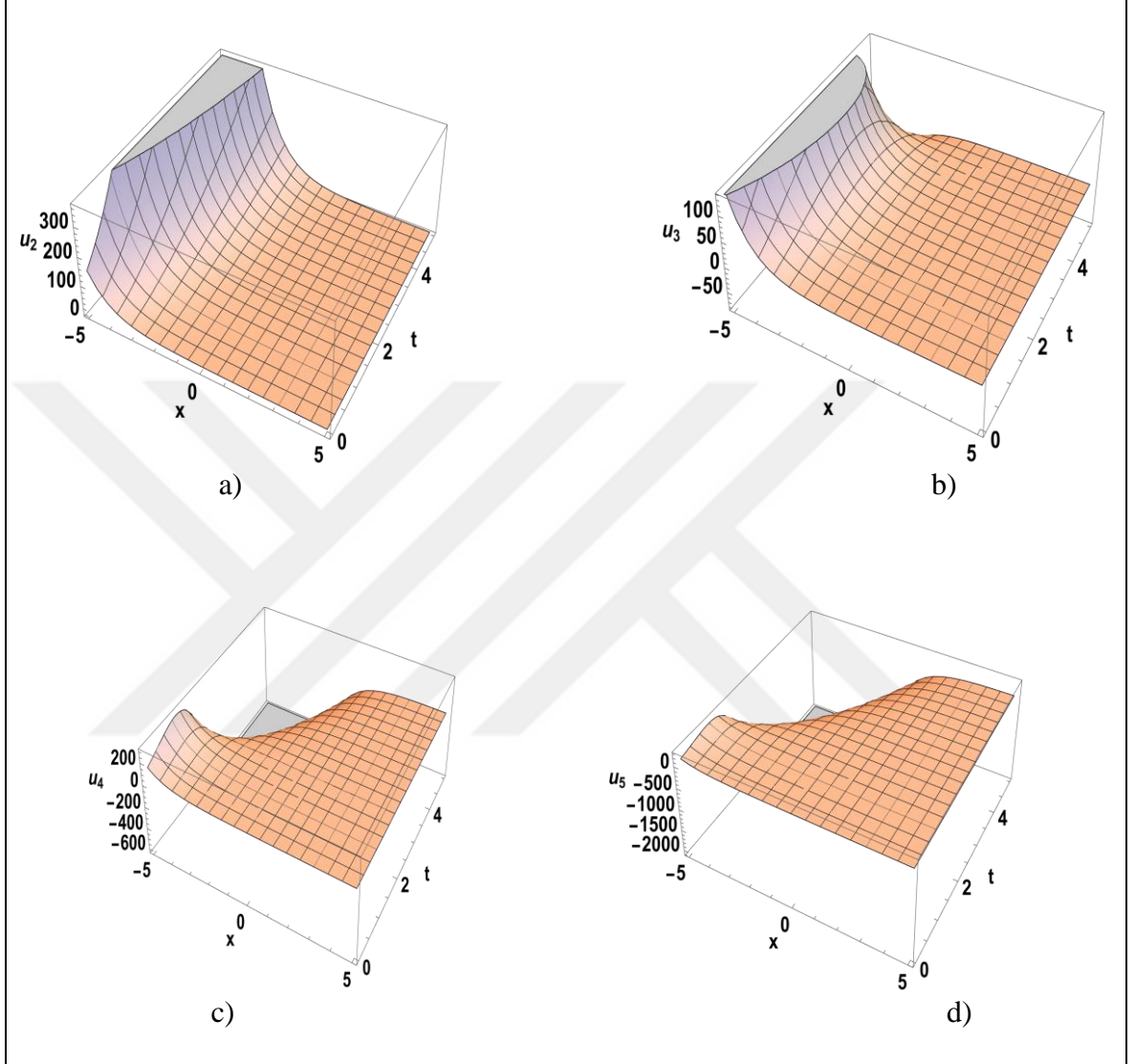
$4936p^4x^{6+3p} + 1800px^{8+4p} - 1488p^2x^{8+4p} + 120x^{10+5p}$ )  
şeklindedir.

(3.34)



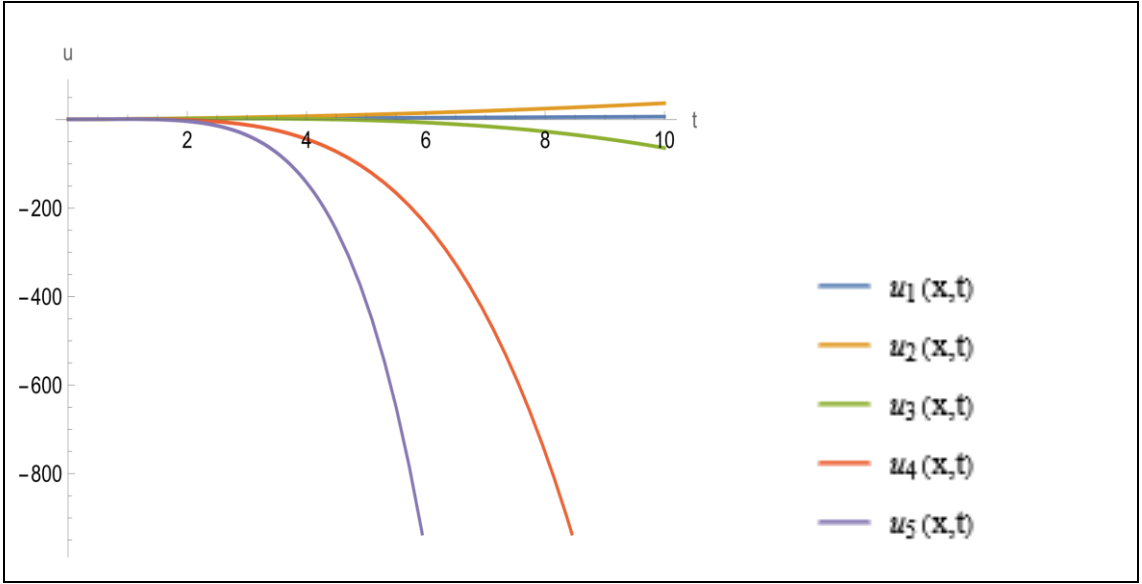
#### 4.ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde, her üç örnek için 3.bölümde elde edilen çözümlerin güvenilirliği ve davranışını araştırmak için grafikler çizdik



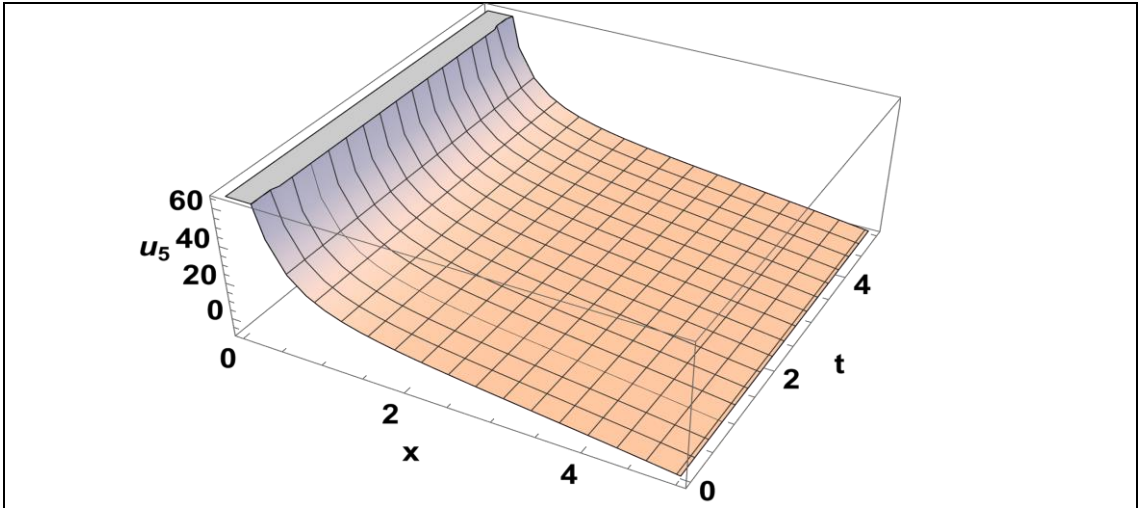
Şekil 4. 1 a) Örnekl'deki  $u_2$  'nin yüzey grafiği, b) Örnekl'deki  $u_3$  'nin yüzey grafiği, c) Örnekl'deki  $u_4$  'ün yüzey grafiği, d) Örnekl'deki  $u_5$  'in yüzey grafiği ( $k=-1$ )

Şekil 4.1'de Örnekl'in sırasıyla RPS ile elde edilen  $u_2, u_3, u_4$  ve  $u_5$  için çözüm grafiklerini vermektedir. Bu grafiklerde  $k=-1$  kullanıyoruz. Şekil 4.2'de  $u_2, u_3, u_4$  ve  $u_5$  arasında önemli bir fark olmadığından çok hızlı bir yakınsamaya sahip olduğumuzu gözlemliyoruz. Bu, RPS metodunda adım sayısının artması ile ilgili bir durumdur ve seri çözümde adım sayısı artıkça iyi sonuçlar elde edildiğini görüyoruz.

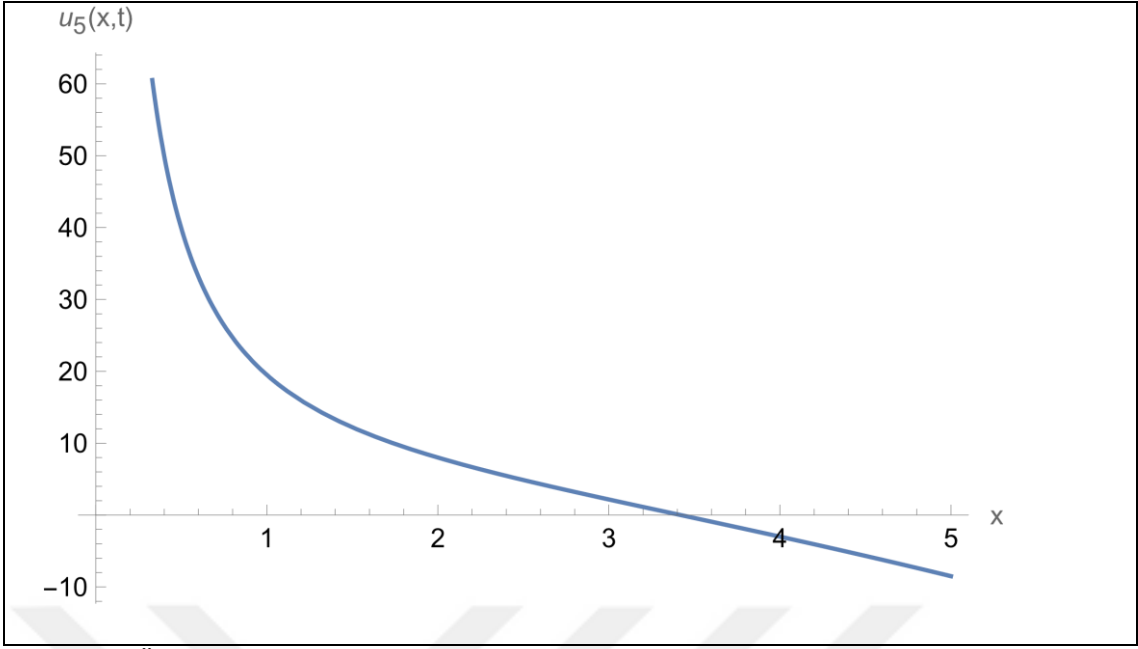


Şekil 4. 2 a ) Örnekl'deki  $u_1, u_2, u_3, u_4$  ve  $u_5$ 'in iki boyutlu grafiği ( $k=-1, x=0.5$ )

Şekil4.2'te kanser hücrelerinin konsantrasyonunun zamana karşı davranışının nasıl olduğunu kontrol etmek için, sabit bir  $x$  noktası ve uygun  $k$  değeri için 5 terimli seri çözümü ile elde edilen RPS yaklaşık çözümlerinin grafikleri iki boyutlu çizildik. Burada  $x = 0.5$  sabit ve  $k = -1$  aldık. Grafik incelendiğinde kanser hücrelerinin konsantrasyonunun azaldığı ve sonunda zamanla sifıra ulaştığı seri çözümde terim sayısı arttıkça daha iyi sonuçlar elde edildiğini gözlemledik.

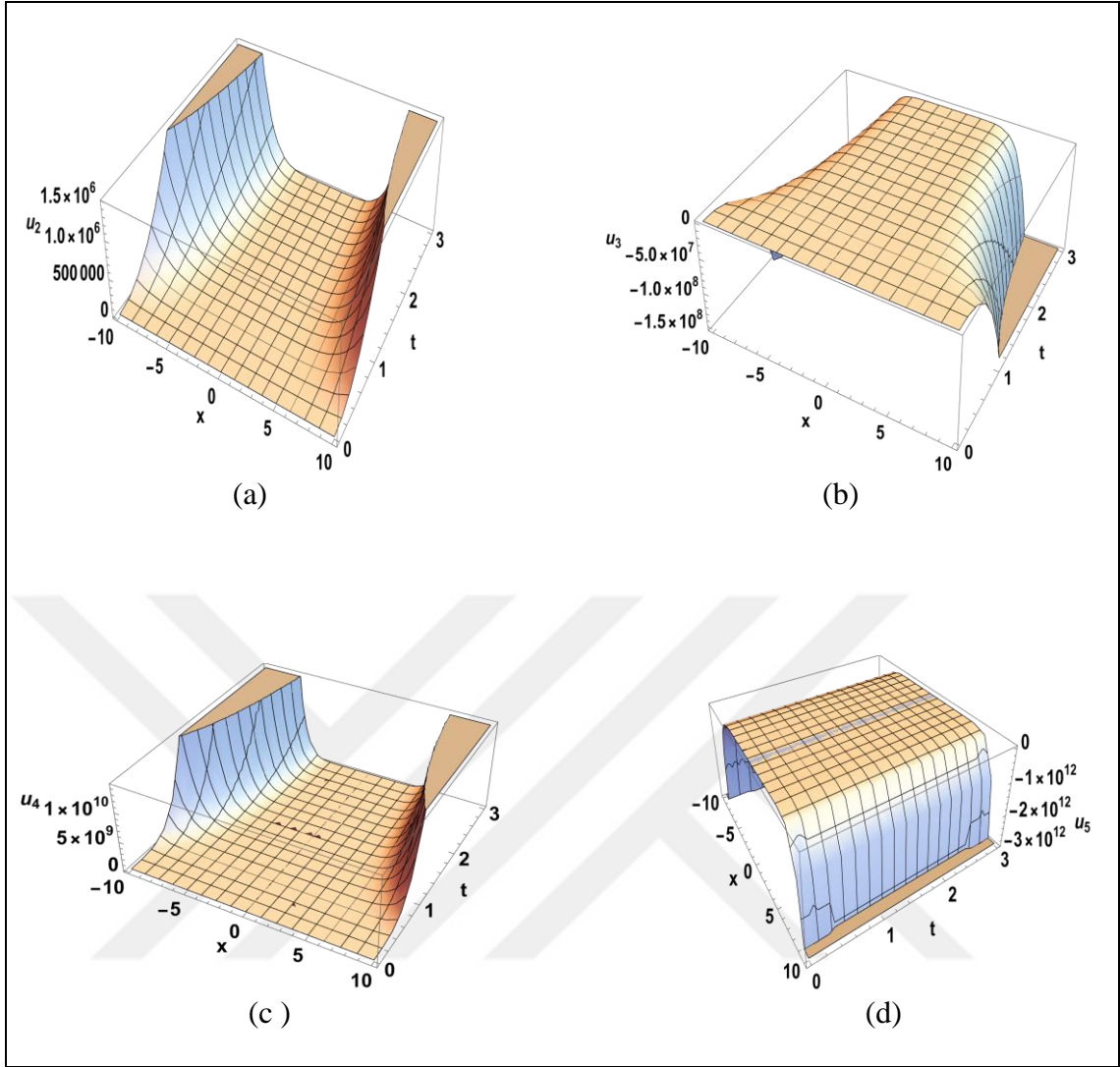


Şekil 4. 3 Örnekl'deki  $u_5$  'in yüzey grafiği ( $a=20, b= -0.5$ )

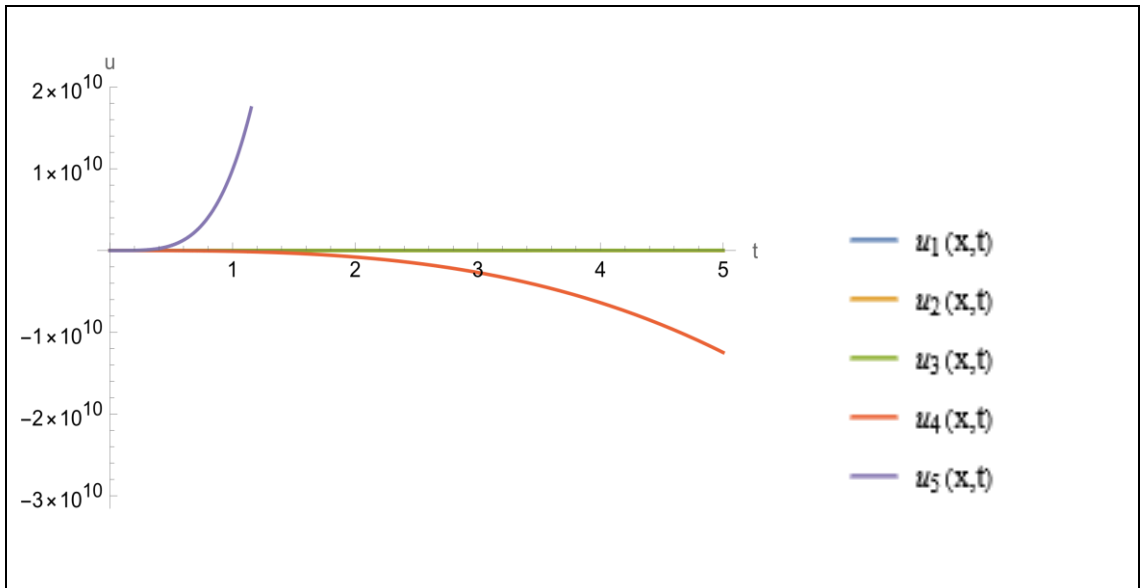


Şekil 4. 4 Örnek2'deki  $u_5$  'in iki boyutlu grafiği ( $a=20$ ,  $b=-0.5$ )

Örnek.2'de verilen denkleme RPS metodu uygulayarak 5.adımdaki seri çözümü ile elde edilen yaklaşık çözümün grafiği çizilmiştir. Her t zamanı için kanser hücrelerinin konsantrasyonunun davranışsal modelini açıkça görmek için Şekil4.3'te ve Şekil4.4'te sayısal sonuçlarını gösterdik. Hesaplama  $a = 20$  ve  $b = -0,5$  kullandık. Sonuçlar, bu tip öldürme oranı  $K$  ve seçilen parametre altında verilen başlangıç koşulu ile kanser hücrelerinin konsantrasyonunun zamanla azaldığını, sifira ulaştığını ve sonunda kaybolduğunu göstermektedir.



Şekil 4. 5a) Örnek3'teki  $u_2$  'nin yüzey grafiği, b) Örnek3'teki  $u_3$  'nin yüzey grafiği, c) Örnek3'teki  $u_4$  'ün yüzey grafiği, d) Örnek3'teki  $u_5$  'in yüzey grafiği ( $p=2$ )



Şekil 4. 6 a) Örnek3'teki  $u_1, u_2, u_3, u_4$  ve  $u_5$ 'in iki boyutlu grafiği ( $p=2, x=10$ )

Şekil 4.5'te Örnek 3'ün sırasıyla RPS ile elde edilen  $u_2, u_3, u_4$  ve  $u_5$  in çözüm grafiklerini vermektedir. Bu grafiklerde  $p = 2$  kullanıyoruz. Şekil 4.5'te  $u_2, u_3, u_4$  ve  $u_5$  arasında önemli bir fark olmadığından çok hızlı bir yakınsamaya sahip olduğumuzu gözlemledik. Bu, RPS metodunda adım sayısının artması ve uygun başlangıç şartının sağlanması ile ilgili bir durum olmakla birlikte seri çözümde adım sayısı arttıkça iyi sonuçlar elde edildiğini görüyoruz. Şekil 4.6'da kanser hücrelerinin konsantrasyonunun zamana karşı davranışının nasıl olduğunu kontrol etmek için, sabit bir  $x$  noktası ve uygun  $p$  değeri için 5 terimli seri çözümü ile elde edilen RPS yaklaşık çözümlerinin grafiklerini iki boyutlu çizdik. Burada  $x = 10$  sabit ve  $p = 2$  aldık. Grafik incelendiğinde kanser hücrelerinin konsantrasyonunun, seri çözümde terim sayısı arttıkça azaldığı gözlemlenirken ilk adımda elde edilen seri çözümün diğer iki örnekteki durumdan farklı olarak zamanla arttığını da gözlemledik. Bu durum  $K$ , öldürme oranının hem zamana hem de konuma bağlı olarak değiştiğini kanıtlar niteliktedir. Iyiola ve Zaman'ın 2014'te yaptıkları çalışmalarında  $K$ , öldürme oranının hücrenin konsantrasyonuna da bağlı olduğunu gösterdi (Iyiola ve Zaman, 2014).

## 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada kanser tümörü için modellenen bir difüzyon denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için residual kuvvet serisi metodunun (RPSM) kanser hücrelerinin konsantrasyonunu nasıl etkileyeceği incelendi. Çalışmanın amacı, RPSM algoritmasını kullanarak kanser tümörü için modellenen üç farklı problemin çözülmesi ve bulunan sonuçların incelenmesidir.

Üçüncü bölümde üç farklı problemin yaklaşık seri çözümlerini elde etmek için RPSM uygulandı. Serinin diğer terimleri bir başlangıç noktasından hareketle sırasıyla seri çözüm aranırken bulundu ve seri çözüm beş adım ilerletildi. Ayrıca, tedaviye bağlı öldürme oranı  $K$ 'nin üç farklı durumu ele alınıp incelendi. Birinci durumda,  $K$ 'nin sadece zamana bağlı olması; ikinci durumda sadece konuma bağlı olduğu ve üçüncü durumda da kanser hücrelerinin konsantrasyonuna bağlı olabileceği şekilde verilen problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için RPSM uygulandı. Wein ve Koplow modelinde terapiye bağlı öldürme oranı  $K$ 'nin sadece zamanın bir fonksiyonu olmadığı sonucuna varıldı. Bu durum hem konum hem de zaman açısından bir gelişmedir (Wein ve Koplow, 1999). Bu çalışmamızda  $K$ 'nin farklı durumlarının incelenmesine katkı sunmuştur.

Dördüncü bölümde, verilen net öldürme hızı  $K$ 'nin farklı durumları için üçüncü bölümde elde edilen çözümlerin güvenilirliği ve davranışını araştırmak için grafikler çizildi.  $K$ 'nin sadece zamana bağlı olduğu birinci örnekte adım sayısı arttıkça kanser hücrelerinin konsantrasyonun azaldığı, sıfıra yaklaştığı ve sonunda kaybolduğu gösterildi. Ayrıca Şekil 4.1 ve Şekil 4.5'te RPS ile elde edilen çözüm grafiklerinin arasında önemli bir farklılığın olmaması hızlı bir yakınsamaya sahip olduğumuzu gösterir. Bu, RPS metodunda adım sayısının artması ile ilgili bir durumdur ve seri çözümde adım sayısı arttıkça iyi sonuçlar elde edildiğini görüldü. İkinci örnekte  $K$ 'nin sadece konuma bağlı olduğu ve ters orantılı olduğu durum incelenmiştir. Bu durumda grafiksel sonuçlar, bu tip öldürme oranı  $K$  ve seçilen parametre altında verilen başlangıç koşulu ile kanser hücrelerinin konsantrasyonunun zamanla azaldığını, sıfıra ulaştığını ve sonunda kaybolduğunu göstermektedir. Üçüncü örnekte Şekil 4.6'da kanser hücrelerinin konsantrasyonunun zamana karşı davranışının nasıl olduğunu kontrol etmek için, 5 terimli seri çözümü ile elde edilen RPS yaklaşık çözümlerinin grafikleri iki boyutlu çizildi. Grafik incelenmesi sonucunda kanser hücrelerinin konsantrasyonunun, seri çözümde terim sayısı arttıkça azaldığı gözlemlenirken ilk adımda elde edilen seri çözümün diğer

iki örnekteki durumdan farklı olarak zamanla arttığı da gözlemlendi. Bu durum K, öldürme oranının hem zamana hem de konuma bağlı olarak değiştiğini kanıtlar niteliktedir. Iyiola ve Zaman'nın 2014'te yaptıkları çalışmalarında K, öldürme oranının hücrenin konsantrasyonuna da bağlı olduğunu gösterdi (Iyiola ve Zaman, 2014). Seri sayısı arttıkça kanser hücrelerinin konsantrasyonunun azaldığı bu tür kanser tümörü denklemleri için RPSM'nin etkinliğini ve gerekliliğini kanıtlar durumundadır.

RPSM, çözümlerin neredeyse doğru tahminini sağlar ve doğrusallaştırma, ayırıştırma veya diğer kısıtlayıcı varsayımları dikkate almadan doğrudan uygulanabilir. Bu yöntem, farklı kanser tümör problemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için alternatif olarak kullanılabilir. Tümörün öldürme oranı K'nın durumunun incelenmesi radyoterapi ve kemoterapinin hangi zaman aralığında verilmesinin gerekliliği için önemli bir çalışmadır.

**KAYNAKLAR**

- Abu Arqub, O., 2013. "Series Solution of Fuzzy Differential Equations under Strongly Generalized Differentiability." *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics* 5(1). doi: 10.5373/jaram.1447.051912,1-52.
- Ali, Saeed M., Ashfaque H. Bokhari, M. Yousuf, and F. D. Zaman. 2014. "A Spherically Symmetric Model for the Tumor Growth." *Journal of Applied Mathematics* 2014. doi: 10.1155/2014/726837.
- Alp, M., Musayev, B., 2000. Fonksiyonel Analiz, Kütahya, Balcı Yayınları, 123-126.
- Az-Zo'bi, Emad. 2019. "Exact Analytic Solutions for Nonlinear Diffusion Equations via Generalized Residual Power Series Method." *International Journal of Mathematics and Computer Science* 14(1), 69-78.
- Benzekry, S., Lamont C., Beheshti A., Tracz, A, and JML Ebo et al. (2014). "Classical mathematical models for description and prediction of experimental tumor growth," *PLOS Computational Biology* 10(8), e1003800.
- Balcı, M., 1997. Analiz 2, Ankara, Balcı Yayınları, 67.
- Bernard, Apexa, Holly Kimko, Dinesh Mital, and Italo Poggesi. 2012. "Mathematical Modeling of Tumor Growth and Tumor Growth Inhibition in Oncology Drug Development." *Expert Opinion on Drug Metabolism and Toxicology* 8(9), 1057-1069..
- Bokhari, A. H., A. H. Kara, and F. D. Zaman. 2009. "On the Solutions and Conservation Laws of the Model for Tumor Growth in the Brain." *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 350(1), 256-261.
- Cerit, C., 1997, Bilgisayar Uygulamalı Diferensiyel Denklemler (Çeviri), Beta Basım Yayınevi.
- Chen, C. N. (1999) The Development of Irregular Elements for Differential Quadrature Element Method Steady-State Heat Conduction Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 170(1-2): 1-14.
- Dennemeyer R., 1968, Partial Differential Equations and Boundary Value Problems. New York; McGraw-Hill
- De Vladar, Harold P., and Jorge A. González. 2004. "Dynamic Response of Cancer under the Influence of Immunological Activity and Therapy." *Journal of Theoretical Biology* 227(3). 335-348.
- Diethelm, K., 2013. "A Fractional Calculus Based Model for the Simulation of an Outbreak of Dengue Fever." *Nonlinear Dynamics* 71(4). 613-619.
- D'Onofrio, Alberto. 2005. "A General Framework for Modeling Tumor-Immune System Competition and Immunotherapy: Mathematical Analysis and Biomedical Inferences." *Physica D: Nonlinear Phenomena* 208(3-4). 220-235.
- D'Onofrio, Alberto. 2008. "Metamodeling Tumor-Immune System Interaction, Tumor Evasion and Immunotherapy." *Mathematical and Computer Modelling* 47(5-6). 614-637.

- Duchateau P., and Zachmann D. W., 1986, *Partial Differential Equations*, McGrawHill, Shaum's Outline Series.
- El-Ajou, Ahmad, Omar Abu Arqub, Zeyad al Zhou, and Shaher Momani. 2013. "New Results on Fractional Power Series: Theories and Applications." *Entropy*, 15(12), 5305-5323.
- Evans, D. J., Ergüt, M. and Bulut, H. (2003), *International Journal of Computer Mathematics*, 80(9): 1189-1198.
- Franklin P., 1964, *Functions of Complex Analysis*, Sir Isaac Pitman-Sons Ltd.
- Gerlee, Philip. 2013. "The Model Muddle: In Search of Tumor Growth Laws." *Cancer Research* 73(8), 2407-2411.
- Gustafson K.E., 2012, *Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*, Courier Corporation
- Inc, M. and Evans, D. J. (2004), *International Journal of Computer Mathematics*, 81(6): 685-692.
- Iomin, Alexander. 2005. "Superdiffusion of Cancer on a Comb Structure." *Journal of Physics: Conference Series* 7. doi: 10.1088/1742-6596/7/1/005,57-67.
- Iyiola, Olaniyi Samuel, and F. D. Zaman. 2014. "A Fractional Diffusion Equation Model for Cancer Tumor." *AIP Advances* 4(10). doi: 10.1063/1.4898331.
- Jang, M. J., Chen, C. L. and Liu, Y. C. (2001) Two-Dimensional Differential Transform for Partial Differential Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 121: 261-270.
- J.D. Murray. 2003. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer, 536-605.
- Koca, K., 2001, *Kısmi Türevli Denklemler*, Ankara, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, 2-3.
- Laajala, Teemu D., Jukka Corander, Niina M. Saarinen, Katja Mäkelä, Saija Savolainen, Mari I. Suominen, Esa Alhoniemi, Sari Mäkelä, Matti Poutanen, and Tero Aittokallio. 2012. "Improved Statistical Modeling of Tumor Growth and Treatment Effect in Preclinical Animal Studies with Highly Heterogeneous Responses in Vivo." *Clinical Cancer Research* 18(16). doi: 10.1158/1078-0432.CCR-11-3215,4385-4396.
- Laird, Anna Kane. 1965. "Dynamics of Tumour Growth: Comparison of Growth Rates and Extrapolation of Growth Curve to One Cell." *British Journal of Cancer* 19(2), 278-291.
- Levitan, B. M., Sargsian, I.S., Sargsjan, I.S., 1975, *Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators: Selfadjoint Ordinary Differential Operators*, *Amerikan Mathematical Soc.*,
- Moyo, S., Leach, P. 2004. "Symmetry Methods Applied to a Mathematical Model of a Tumour of the Brain." *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine* 50(1),204-210.
- Norton, L., Richard, S., Harmer D. Brereton, and Arthur E. Bogden. 1976. "Predicting the Course of Gompertzian Growth." *Nature* 264(5586), 542-544.

- Özer, M. N., Eser, 2002, Diferensiyel Denklemler (Teori ve Uygulamaları), *Birlik ofset*, Eskişehir.
- Salınan, S., (2008), Diferansiyel Dönüşüm Metodunun Kullanılarak Isı İletimi Modellemesi, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, 5.
- Simeoni, Monica, Giuseppe de Nicolao, Paolo Magni, Maurizio Rocchetti, and Italo Poggesi. 2013. "Modeling of Human Tumor Xenografts and Dose Rationale in Oncology." *Drug Discovery Today: Technologies* 10(3), e365-72.
- Sotolongo-Costa, O., L. Morales Molina, D. Rodríguez Perez, J. C. Antoranz, and M. Chacón Reyes. 2003. "Behavior of Tumors under Nonstationary Therapy." *Physica D: Nonlinear Phenomena* 178(3-4). 242-253.
- Sung, Wonmo, Clemens Grassberger, Aimee Louise McNamara, Lucas Basler, Stefanie Ehrbar, Stephanie Tanadini-Lang, Theodore S. Hong, and Harald Paganetti. 2020. "A Tumor-Immune Interaction Model for Hepatocellular Carcinoma Based on Measured Lymphocyte Counts in Patients Undergoing Radiotherapy." *Radiotherapy and Oncology* 151. doi: 10.1016/j.radonc.2020.07.025.
- Swanson, K. R., Alvord, E.C., Murray, J.D., 2002. Virtual brain tumours (gliomas) enhance the reality of medical imaging and highlight inadequacies of current therapy. *British Journal of Cancer* .86, 14-18.
- Telliöglu, R., (2011), Beyin Tümörlerinin Matematiksel Modellenmesi ve Analizi, , Yüksek Lisans Tezi, Bahşehir Üniversitesi, *Fen Bilimleri Enstitüsü*, 1.