



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GREEN FONKSİYONU VE PARÇACIKLARIN  
ESNEK SAÇILMA PROBLEMİ**

**Hasret CİNAKLI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Mayıs-2020**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GREEN FONKSİYONU VE PARÇACIKLARIN  
ESNEK SAÇILMA PROBLEMİ**

**Hasret CİNAKLI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman**  
**Prof. Dr. Cevad SELAM**

**Mayıs-2020**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL VE ONAYI

Hasret CİNAKLI tarafından hazırlanan “Green Fonksiyonu Ve Parçacıkların Esnek Saçılma Problemi” adlı tez çalışması 22/04/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

#### Danışman

Prof. Dr. Cevad SELAM  
Muş Alparslan Üniversitesi,  
İİBF, İşletme Bölümü

İmza



#### Başkan

Doç.Dr. Erhan PİŞKİN  
Dicle Üniversitesi, Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi,  
Matematik Bölümü




#### Üye

Doç. Dr. Erdal KORKMAZ  
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Bölümü



Yukarıdaki sonuç;  
Enstitü Yönetim Kurulu ...../...../..... Tarih ve ...../..... nolu kararı  
ile onaylanmıştır.

  
Doç. Dr. Sedat BOZARI  
FBE Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.



İmza

Hasret CİNAKLI

Tarih: 22/04/2020

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

## GREEN FONKSİYONU VE PARÇACIKLARIN ESNEK SAÇILMA PROBLEMİ

Hasret CİNAKLI

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cevad SELAM

Bu çalışmada, Green Fonksiyonu ve Parçacıkların Esnek Saçılma Problemi incelenmiştir. Ayrıca Nötronların Çekirdekten Saçılması süreci ele alınmıştır.

Beş bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde konuya ilişkin ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde kaynak araştırması, üçüncü bölümde integral denklemler tanımlanmış ve sınıflandırılmıştır. Ayrıca Green Fonksiyonu ele alınmış ve onun aracılığı ile diferansiyel denklemlerin integre edilmesi yöntemi gösterilmiştir. Dördüncü bölümde parçacıkların esnek saçılmasının Klasik Teorisi verilmiş ve Green fonksiyonuna dayanarak söz konusu saçılmanın Kuantum Teorisine dokunulmuştur. Beşinci bölümde ise elde edilen formüllere dayanarak farklı enerjiye sahip nötronların  $^{40}_{20}\text{Ca}$  çekirdeğinden saçılma tesir kesitleri hesaplanmış ve deneysel değerlerle karşılaştırılmıştır.

**2020, 53 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Green Fonksiyonu, İntegral Denklemler, Saçılma.

## **ABSTRACT**

### **MS THESIS**

## **GREEN FUNCTION AND ELASTIC SCATTERING OF PARTICLES**

**Hasret CİNAKLI**

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ  
ALPARSLAN UNIVERSITY  
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN MATHEMATICS SCIENCE**

**Advisor: Prof. Dr. Cevad SELAM**

In this study, Green's function and elastic scattering problems of particles are examined. In addition, elastic scattering process of neutrons from the nucleus is discussed.

Preliminary information on the subject is given in the first part of this thesis, which consists of five chapters. In these condpart, integral equations are defined and classified. In addition, Green's Function is discussed and the method of integrating differential equations is shown. In the four chapter, the Classical Theory of elastic scattering of particles is given and the Quantum Theory of the scattering is touched based on the Green function. In the five section, based on the Formula sobtained, scattering crossections of the neutrons with different energy from the  $^{40}_{20}\text{Ca}$  nucleus were calculated and compared with the experimental values.

**2020, 53 Pages**

**Keywords:** Scattering, Green Function, İntegral Equation.

## ÖNSÖZ

Tez çalışmamın hazırlanmasında emeği bulunan başta ailem olmak üzere, bu tezin hazırlanması süresince, her anlamda benden desteğini eksik etmeyen, akademik gelişmemde bilgi ve becerilerini paylaşarak bana yardımcı olan, her daim bana yol gösteren değerli danışman hocam Prof. Dr. Cevad SELAM' a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Hasret CİNAKLI  
MUŞ-2020

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xi
1. GİRİŞ .....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	2
3. İNTEGRAL DENKLEMLER .....	3
3.1. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması .....	3
3.1.1. Lineer İntegral Denklemler .....	3
3.1.2. Lineer Olmayan İntegral Denklemler .....	6
3.2. Simetrik İntegral Denklemler.....	7
3.2.1. Simetrik operatörler. Hilbert – Schmidt Teoremi .....	9
3.2.2. Operatör Biçimindeki Denklemlerin Çözülmesi.....	19
3.2.3. Simetrik Çekirdekli İntegral Denklemler.....	21
3.3. Green Fonksiyonunun Sınır Değer Problemlerinin İntegral Denklemlere İndirgenmesi.....	26
3.3.1. Adi Diferansiyel Denklemler İçin Sınır Değer Problemlerinin Green Fonksiyonu .....	26
3.3.2. Delta Fonksiyonu ve Özellikleri .....	29
3.3.3. Sınır Değer Problemlerinin İntegral Denklemlere İndirgenmesi .....	30
4. PARÇACIKLARIN ESNEK SAÇILMASI.....	31
4.1. Esnek Saçılmanın Klasik Teorisi .....	31
4.1.1. Parçacıkların Esnek Çarpışması .....	31
4.1.2. Parçacıkların Esnek Saçılması .....	34
4.2. Esnek Saçılmanın Kuantum Teorisi.....	38
4.2.1. Spinsiz Parçacıkların Esnek Saçılması.....	38
4.2.2. Esnek Saçılmada Born Yaklaşımı .....	42
5. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	43
5.1. Nötronların Çekirdeklerden Saçılması .....	43
5.1.1. Dikdörtgen Potansiyelinden Saçılma .....	43
5.1.2. Saxon -Woods Potansiyelinden Saçılma.....	44
5.1.3. Farklı Enerjiye Sahip Nötronların $^{40}_{20}\text{Ca}$ Çekirdeğinden Saçılması.....	45

<b>6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....</b>	<b>48</b>
6.1 Sonuçlar .....	48
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>49</b>
<b>EK 1.....</b>	<b>50</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>53</b>

## SİMGELER ve KISALTMALAR

$V$  : Her

$\hbar$  : Planck sabiti

$C$  : Işık hızı

$\hbar c$  : 197.332792 MeV fm

$A$  : Çekirdeğin kütle numarası

$r_0$  : 1.24 çekirdeğin yarıçap parametresi

$a_0$  : 0.63 çekirdeğin yüzey kalınlığı

$R_0$  :  $r_0 A^{1/3}$  fm çekirdeğin yarıçapı

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3. 1 $H(t, s)$ Fonksiyonu .....	6
Şekil 3. 2 Basamak Fonksiyonu.....	27
Şekil 4. 1 Çarpışmadan Sonraki Momentumların Diyagramı.....	32
Şekil 4. 2 Çarpışmadan Sonraki Hızların Diyagramı .....	34
Şekil 4. 3 Saçılma Olayının Geometrik Görünüşü .....	35
Şekil 4. 4 Bir Mutlak Sert Parçacığın Kendisinden Çok Ağır Mutlak Sert Cisimden Saçılması Diyagramı .....	37
Şekil 4. 5 Klasik teoriye göre esnek saçılmanın diferansiyel tesir kesitinin saçılma açısına bağlılık grafiği.....	38
Şekil 4. 6 KM Sisteminde Esnek Saçılma Şeması.....	38
Şekil 5. 1 Dikdörtgen potansiyel grafiği .....	43

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5. 1 Nötronun $^{40}_{20}\text{Ca}$ çekirdeğinden esnek saçılma diferansiyel tesir kesitinin saçılma açısına bağlılık grafiği. ....	46
---	----

## 1. GİRİŞ

Tez konusu olarak ‘‘Green Fonksiyonu ve Parçacıkların Esnek Saçılma Problemi’’ ele alındı. Bu konuyla ilgili tarafımdan birçok kaynaklar incelendi. Bunların arasında: İntegral Denklemler Teorisine giriş (KrasnovM.L; DavidovA.S, 1967; Uryson P.S,1951) kitaplarında lineer integral denklemlerin tanımı, sınıflandırılması ve çözüm yöntemleri ele alınmıştır. Aynı kitaplarda integral denklemlerin çözümlerinin varlık ve teklik koşulları gösterilmiştir. (Petrovsky,1965; SobolevS.A,1996) çalışmalarında ise integral denklemler teorisi farklı fizik, mekanik ve mühendislikle ilgili problemlere uygulanmıştır.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Sunulan tez çalışmasında Green fonksiyonu yöntemi ile homojen olmayan ikinci dereceden lineer diferansiyel denklem integral denkleme dönüştürülerek parçacıkların kuantum saçılma sürecine uygulanmıştır. Parçacıkların kuantum saçılma teorisi (Landau L.D, Lifshitz E.M, 1957; Mikhlın S.G, 1959; Lalesco T, 1912) yayınlarında ele alınmıştır. Söz konusu tezde birinci Born yaklaşımında parçacıkların hem dikdörtgen hem de Saxon-Woods tipli potansiyellerden saçılma tesir kesitleri için analitik formüller bulunmuştur. Bu formüllerle yapılan hesaplamalarla elde edilen sonuçlar deneysel değerlerle karşılaştırılmıştır.

Tezin birinci kısmında integral denklemler ve Green fonksiyonu hakkında temel bilgiler verilmiştir. Tezin ikinci kısmında parçacıkların esnek saçılmasının hem klasik ve hem de kuantum teorisi verilmiştir. Kuantum teorisinde var olan diferansiyel denklemler Green fonksiyonu aracılığı ile çözülmüştür. Saxon-Woods potansiyelinin binomial fonksiyonlar cinsinden seriye açılması yöntemine dayanarak parçacığın bu potansiyelden saçılma tesir kesiti için ilk defa analitik ifadeler bulunmuştur.

Tezin bir sonraki bölümünde ise farklı enerjiye sahip nötronun  $^{40}_{20}\text{Ca}$  çekirdeğinden saçılma tesir kesitleri hesaplama sonuçları deneysel değerlerle karşılaştırılmıştır.

### 3. İNTEGRAL DENKLEMLER

#### 3.1. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegral denklemler kısaca; bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanabilir. Ancak bu tanım yetersiz kalmaktadır. Çünkü bu tanımdan hareket ederek, integral denklemlerin hepsini kapsayacak bir teori kurmak mümkün değildir. Matematikte, fizikte, mühendislikte kısaca teknik şeyler içeren bütün problemlerin çoğu diferansiyel veya integral denklemlerin çözülmesi problemine indirgenir. 1700'lerde başlamasına rağmen integral denklemlerin çözülmesi bugüne kadar güncelliğini koruyor. İntegral denklemlerle ilgili yoğun çalışmalar 19.yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Önceleri dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmışken, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve birtakım sonuçlar alınmaya başlandığı tespit edilmiştir. Abel 1823 yılında bir mekanik problemini incelerken ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Ancak integral denklem kavramını (Reymond, 1888) yılında yayınlanan bir çalışmada önerdiği anlaşılmaktadır. Bilinmeyen fonksiyonu integral altında bulunan denklemlere integral denklemler denir. Fakat böyle bir tanım, tam değildir, en azından o nedenle ki; söz konusu tanımda integral işlemi dışında bilinmeyen fonksiyon üzerinde daha hangi işlemin yapıldığı belirtilmemiştir. Örneğin; bilinmeyen fonksiyonu  $x(t)$  olan aşağıdaki integral denklem

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(s) ds + x(0)$$

bir özdeşliktir ve bu özdeşlik belirli  $(-a, a)$  aralığında sürekli ve diferansiyellenebilir her bir fonksiyon için sağlanır.

Amacımız integral denklemlerin mantıksal açıdan kusursuz tanımını vermek olmadığı için burada yukarıda gösterilen betimsel tanımla yetineceğiz. Tanımın tam olmamasına rağmen bu tezde ele alınacak integral denklemlerin önemli sınıflarından bahsedilecektir.

##### 3.1.1. Lineer İntegral Denklemler

Bilinmeyen fonksiyonu doğrusal bir biçimde içeren integral denklemlere doğrusal integral denklemler denir. Örneğin;

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) \varphi(s) ds + f(t) \quad (3.1)$$

doğrusal integral denklemdir. Burada  $\varphi(t)$  aranan fonksiyon,  $f(t)$ ,  $K(t, s)$  bilinen fonksiyonlar ve  $\lambda$  ise bir parametredir.  $a \leq t, s \leq b$  kuadratik alanda belirlenen  $K(t, s)$

fonksiyonuna (3.1) denkleminin *çekirdeği*,  $a \leq t \leq b$  aralığında belirlenen  $f(t)$  fonksiyonuna ise *serbest terim* denir.

2 'ye ayrılır:

- a. **Fredholm denklemi:** Bu denklem, doğrusal integral denklemlerin en önemli sınıflarından biridir. Fredholm denklemleri iki türdür; 1. tür ve 2. tür Fredholm denklemi. 2. tür doğrusal Fredholm denkleminin en basit biçimi aşağıdaki şekildedir:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) ds + f(t) \quad (3.2)$$

Burada  $\varphi(t)$  bilinmeyen fonksiyondur. a,b integral sınırları sonsuz da olabilir.

t değişkeninin değişim aralığı olarak integral sınırları kabul edilir. (3.2) denkleminde yer alan  $K(t, s)$  çekirdeği  $Q\{a \leq t, s \leq b\}$  kare alanında,  $f(t)$  serbest terimi ise  $a \leq t \leq b$  bölgesinde ya süreklidirler ya da aşağıdaki eşitsizliği sağlarlar:

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 dt ds < +\infty, \quad (3.3)$$

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty. \quad (3.4)$$

(3.3) eşitsizliğini sağlayan çekirdeklere *Fredholm çekirdekleri* denir.

Eğer  $f(t) \equiv 0$  ise (yani,  $[a, b]$  kapalı bölgesinin hemen-hemen tüm noktalarında  $f(t) = 0$  ise) (3.2) denkleminde *homojen integral denklem*, aksi durumda ise *homojen olmayan integral denklem* denir.

(3.2)'nin sadece bir denklem olarak düşünülmediğini, onun  $\lambda$  parametresine bağlı olan denklemler ailesini belirttiğini not edelim.

Bilinmeyen fonksiyonu sadece integral içinde bulunan denklemlere **1. Tür Fredholm denklemi** denir. Bu tür denklemin en basit hali aşağıdaki gibidir:

$$\int_a^b K(t, s)\varphi(s)ds = f(t) \quad (3.5)$$

Burada  $K(t, s)$  ve  $f(t)$  yukarıda gösterilen koşulları sağlar.

**Örnek 3.1** Aşağıdaki denklem

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (t + s^2)\varphi(s)ds + \sin t$$

3.tür Fredholm denklemdir. Burada  $K(t, s) = t + s^2$  ve serbest terim  $f(t) = \sin t$  fonksiyonları sırasıyla  $\varphi[0 \leq t, s \leq 1]$  kare alanında ve  $0 \leq t \leq 1$  bölgesinde süreklidir.

Aşağıdaki denklem

$$\varphi(t) = \int_1^{+\infty} e^{-ts} \varphi(s) ds + e^{-t^2/2}$$

Fredholm denklemdir, çünkü (3.3) ve (3.4)

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f^2(t) ds &= \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt < +\infty \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} K^2(t,s) dt ds \\ &= \int_1^{+\infty} dt \int_1^{+\infty} e^{-2ts} ds = \frac{1}{2} a \int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt < +\infty \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Aşağıdaki denklem

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|} \varphi(s) ds + f(t)$$

Fredholm denklemi değildir. Çünkü bu durumda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(t,s)|^2 dt ds = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t-s|} ds \quad (3.5)$$

olacaktır. Bu denkleminin sağ tarafındaki iç integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t-s|} ds = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)} ds + \int_t^{+\infty} e^{-(s-t)} ds = 1,$$

bire eşit olduğu için ıraksaktır.

**b. Volterra denklemleri:** Aşağıdaki denklem 2. tür çizgisel Volterra denklemi adlanır:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t,s) \varphi(s) ds + f(t) \quad a \leq t \leq b \quad (3.6)$$

Burada  $\varphi(t)$  bilinmeyen fonksiyon,  $K(t,s)$  çekirdeği ve  $f(t)$  serbest terimi bilinen fonksiyonlar,  $\lambda$  ise sayısal parametredir.

$F(t) \equiv 0$  durumunda (3.6) denklemi

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t,s) \varphi(s) ds$$

biçimine indirgenir ve **2.tür homojen Volterra denklemi** olarak adlandırılır.

**1. tür Volterra denklemi** ise

$$\int_a^t K(t,s) ds = f(t) \quad (3.7)$$

biçimindedir.

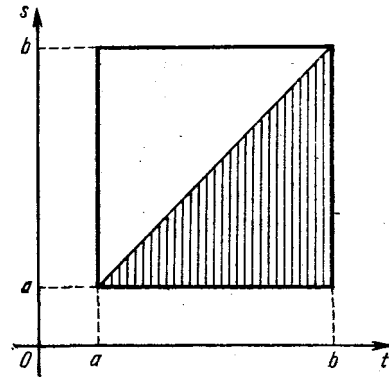
Bazı kısıtlamalar altında Volterra denkleminin Fredholm denkleminin bir özel hali gibi bakılabilir. Problemin mantığına göre (3.6) denkleminin  $K(t,s)$  çekirdeği  $s$  değişkenine göre  $a \leq s \leq t$  aralığında tanımlanmıştır. Söz konusu çekirdeği  $s > t$  bölgesine uzatalım. Bunun için  $t < s \leq b$  aralığında

$$K(t,s) = 0$$

alalım. Bu durumda (3.6) denklemi çekirdeği aşağıdaki gibi belirlenmiş:

$$\mathcal{H}(t,s) = \begin{cases} K(t,s) & s \leq t \quad \text{için} \\ 0 & s > t \quad \text{için} \end{cases}$$

Bir Fredholm denklemdir.



Şekil 3.1  $H(t,s)$  Fonksiyonu

Şekildeki taranmış bölgede  $H(t,s)$  fonksiyonu  $K(t,s)$  fonksiyonunun aynısı, bölgenin diğer yarısında ise özdeşlikle sıfırdır.  $\mathcal{H}(t,s)$  bu şekilde belirtildiğinde aşağıdaki Fredholm integral denklemi

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) \varphi(s) ds + f(t)$$

(3.6) denklemi ile özdeştir.

Bu nedenle Fredholm denklemleri için bulunan sonuçlar, Fredholm denkleminin özel hali olan Volterra denklemlerine kolayca uygulanabilir. Fakat Volterra denkleminin kendine has özellikleri de vardır.

### 3.1.2. Lineer Olmayan İntegral Denklemler

Doğrusal olmayan integral denklemler çok çeşitli olduğu için onların sınıflandırılması kolay değildir. Bunlar içerisinde teorik ve uygulama açısından önemli olanları ele alalım. 3'e ayırılır:

**a. Uryson denklemi:**

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t, s, \varphi(s)) ds \quad (3.8)$$

Genelde  $K(t, s, \varphi)$  fonksiyonunun  $a \leq t, s \leq b; -M \leq \varphi \leq M, M > 0$  aralıklarında sürekli olduğu düşünülür. Burada M-yeterince büyük bir sayıdır.

2°.Uryson denkleminin özel hali olan önemli denklemlerden biri **Hammerstein denklemidir**.

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t, s) F(s, \varphi(s)) ds \quad (3.9)$$

burada  $K(t, s)$  Fredholm çekirdeğidir.

**a. Lyapunov-Lihtenstein Denklemi:**

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K_{[1]}(t, s) \varphi(s) ds$$

burada daha yüksek kattan çizgisel olmayan terimlerde ilave edilebilir.

**b. Volterrannın doğrusal olmayan denklemi**

$$\varphi(t) = \int_a^b F(t, s, \varphi(s)) ds \quad (3.10)$$

Burada  $F(t, s, \varphi)$  fonksiyonu  $t, s, \varphi$ 'lere göre  $a \leq t, s \leq b, -M \leq \varphi \leq M$  aralığında süreklidir.

**3.2. Simetrik İntegral Denklemler**

Simetrik integral denklemler teorisi [bu denklemlerin çekirdekleri değişkenlerine göre simetriktir, yani  $K(t, s) = K(s, t)$ ] Fredholm teorisinden bağımsız bir şekilde oluşturulabilir.

İlk önce simetrik çizgisel operatörlerle ilgili genel teoremleri ele alalım.

Aşağıdaki operatör biçimindeki denklemi ele alalım:

$$Ax - \lambda x = f \quad (3.11)$$

Burada A- tamamen sürekli simetrik operatör, f ise bilinen bir elementtir, f yerine ise

$$f = \sum_i \eta_i x_i + f_0 \text{ yazarsak}$$

$$\sum_i (\lambda_i - \lambda) \xi_i x_i - \lambda x_0 = \sum_i \eta_i x_i + f_0 \quad (3.12)$$

denklemini buluruz. İki durumu ele alalım:

**Durum 3.1** Her bir  $i$  indisi için  $\lambda \neq \lambda_i$  olsun. (3.12) denkleminin her iki tarafını  $x_k$  ile skaler çarpalım.  $x_k$  elemanı tüm  $(k \neq i)x_i, x_0$  ve  $f_0$  elemanları ile ortogonal olduğu için

$$(\lambda_k - \lambda)\xi_k = \eta_k \quad (3.13)$$

veya

$$\xi_k = \frac{\eta_k}{\lambda_k - \lambda} \quad (3.14)$$

bulunur. Buradan bulunan  $\xi_i$  (3.12)'de yazılırsa

$$-\lambda x_0 = f_0$$

veya

$$x_0 = -\frac{1}{\lambda} f_0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$x = \sum_i \frac{\eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i - \frac{1}{\lambda} f_0 \quad (3.15)$$

ifadesi bulunur. Bulunan sonuç  $\lambda = \lambda_i (i = 1, 2, \dots)$  için (3.1) denkleminin çözümüdür. İstenilen  $f$  için söz konusu çözüm bir değerlidir. Buradan da  $\lambda \neq \lambda_i (i = 1, 2, \dots)$  için  $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$  rezolventinin var olduğu görülmektedir.

Görüldüğü gibi öz değere eşit olmayan  $\lambda$ - sabitinin her bir değeri  $A$  operatörünün regüler değeridir. Yani Hilbert uzayındaki tamamen homojen simetrik operatörün spektrumu sadece öz değerlerden oluşmaktadır.

**Durum 3.2**  $\lambda = \lambda_m = \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_{m+p-1}$  olsun. Buradan  $p$ - $\lambda$  öz değerinin tekrarlanma katıdır.

$k \neq m, m+1, \dots, m+p-1$  olduğunda  $\xi_k$  eskisi gibi (3.14) formülü ile belirtilir.  $k = m, m+1, \dots, m+p-1$  değerlerinin herhangi birine eşitliği durumunda ise (3.13) eşitliği genellikle sağlanmaz. Zira eşitliğin sol tarafı sıfıra eşit, sağ tarafı genellikle sıfırdan farklıdır. Bu durumda (3.13) denkleminin çözümünün varlığı için  $\eta_k = 0 (k = m, m+1, \dots, m+p-1)$  gerekir. Yani (3.11) denklemindeki serbest terimin  $\lambda$ -ya karşılık gelen  $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+p-1}$  elemanları ile ortogonal olması gerekir. Bu durumda (3.13) denkleminin  $0=0$  özdeşliğine dönüşür ve (3.13) ifadesi tüm  $\xi_k$  katsayıları için sağlanıyor. Bu durumda (3.11) denkleminin çözümü

$$x = \sum_{i \neq m, m+1, \dots, m+p-1} \frac{\eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i + \sum_{k=m}^{m+p-1} C_k x_k - \frac{1}{\lambda} f_0 \quad (3.16)$$

biçiminde olur. Burada  $C_m, C_{m+1}, \dots, C_{m+p-1}$  serbest sabitlerdir.

Böylece (3.11) denklemini her zaman çözülebilir değildir. Çözüldüğü durumda ise onun çözümü bir değerli değildir. (3.15) formülünü değişik biçimde yazalım:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{\eta_i (\lambda_i - \lambda - \lambda_i)}{\lambda_i - \lambda} x_i - \frac{1}{\lambda} f_0 = -\frac{1}{\lambda} \left( \sum_i \eta_i x_i + f_0 - \sum_i \frac{\lambda_i \eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{\lambda_i \eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i - \frac{1}{\lambda} f_0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Bu bilinen Schimidt formülüdür.

### 3.2.1. Simetrik operatörler. Hilbert – Schimidt Teoremi

#### Hilber- Schimidt Teoremi

**Tanım 3.1** Her bir  $x, y \in H$  için

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (3.18)$$

koşulunu sağlayan ve  $H$  Hilbert uzayından  $H$  Hilbert uzayına etkiyen çizgisel  $A$  operatörüne simetrik operatör denir.

(3.18) denkleminde

$$A^*y = Ay \quad \forall y \in H$$

olduğu görülmektedir. Yani simetrik operatör eşlenik operatörüne eşittir. Bu nedenle simetrik operatörlere öz eşlenik operatörler de denir.

$K(t, s)$  çekirdek fonksiyonu gerçek(reel) olan  $L_2[a, b]$  uzayında bir Fredholm integral operatörü ele alalım

$$Ax = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

Burada  $K(t, s)$  çekirdeği  $L_2$  uzayında gerçek fonksiyondur. Fubini teoreminden:

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)x(s)ds \right\} y(t) dt \\ &= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)y(t)dt \right\} x(s) ds = (x, A^*y) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$A^*y = \int_a^b K(t,s)y(t)dt$$

Böylece eşlenik operatörü bulmak için integral işlemini birinci değişkene göre yapmak gerekir, oysa başlangıç operatörde integral işlemi ikinci değişken üzerindedir.

Eğer  $K(t, s)$  çekirdeği simetrik ise yani

$$K(t, s) = K(s, t) \quad \forall t, s$$

bu durumda

$$A^*y = \int_a^b K(t,s)y(t)dt = \int_a^b K(s,t)y(t)dt = Ay$$

olacaktır. Yani Fredholm operatörü de simetrik olacaktır.

Karmaşık değerli  $K(t, s)$  çekirdeği ise

$$K(t, s) = \overline{K(s, t)}$$

Koşulu sağlandığında simetrik çekirdek adlanır.

Çekirdeği simetrik olan integral denklemlere simetrik integral denklemler denir.

Çizgisel operatörlerle (simetrik olmayada bilir) bağlı aşağıdaki hususları anımsayalım.

$$Ax - \lambda x = 0 \text{ veya } (A - \lambda I)x = f \quad (3.19)$$

denklemini ele alalım. Burada  $A$  – Banach  $X$  uzayında bir çizgisel operatördür.  $\lambda$  ise bir parametredir.

(3.19) denklemi ile beraber aşağıdaki denklemi de ele alalım:

$$Ax - \lambda x = 0 \text{ veya } (A - \lambda I)x = 0 \quad (3.20)$$

Bu, (3.19) denkleminin homojen kısmıdır. Söz konusu denklemin her zaman sıfırcı çözüm adlanan  $x = 0$  çözümü vardır.

Belirli bir  $\lambda$  değerinde  $(A - \lambda I)$  operatörü için  $(A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda$  ters operatörünün var olduğunu düşünelim. Bu operatör (3.19) operatörünün rezolvent operatörü adlanır.  $\lambda$ 'nın söz konusu değerinde istenilen  $f \in X$  için (I) denkleminin

$$x = R_\lambda f$$

tekil çözümü vardır. Bu durumda (3.20) homojen denkleminin ise sadece trivial çözümü  $x = 0$  vardır.

**Tanım 3.2** Eğer  $\lambda$  parametresinin herhangi değerinde  $R_\lambda$  – rezolventi tüm  $X$  uzayında tanımlı ve sınırlı ise ve tüm  $f \in X$  için (3.19) denklemi tekil çözüme sahip ise, bu değere  $A$  operatörünün regüler değeri denir.

Regüler değerler kümesi  $A$  operatörünün rezolvent kümesi  $\rho(A)$  adlanır. Verilmiş  $\lambda$  değerinde (3.20) denkleminin sıfır çözümü dışında da çözümü varsa, bu durumda  $\lambda$ 'ya  $A$  operatörünün öz değeri, sıfır olmayan çözüme ise  $A$  operatörünün bu değere karşılık gelen öz elemanı (öz fonksiyonu) denir.

$R^n$  uzayında  $A$  çizgisel operatörünün öz vektörü öyle bir  $\vec{x}$  vektörüdür ki, ona  $A$  operatörü ile etkilendiğinde  $x$  vektörüne kolleniar bir vektör alınır, yani

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

İstenilen  $\vec{x}$  vektörü birim  $I$  vektörünün öz vektörüdür, öz değeri ise birdir. Çünkü

$$I\vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x}$$

Benzerlik katsayısı  $\alpha$  olan benzerlik operatörünün söz konusu  $\alpha$  öz değerine karşılık gelen öz vektörü istenilen  $\vec{x}$  fonksiyonu olabilir. Çünkü tanımına göre

$$Ax = \alpha x \text{ 'dır.}$$

$R^2$ 'de etkileyen  $0 < \varphi < \pi$  aralığında  $\varphi$  açısı kadar döndürme operatörü öz vektöre sahip değildir. Çünkü  $\vec{x} \neq 0$  ne olursa olsun  $0 < \varphi < \pi$  aralığındaki herhangi açı kadar döndürüldüğünde  $0$ , kendisine koelenior vektöre dönüşmez.

Eğer  $\lambda$  değeri  $A$  operatörünün öz değeri ise ve belirli bir  $f$  için (3.19) denkleminin çözümü var ise, bu durumda söz konusu çözüm tek değildir. Gerçekten, eğer  $\vec{x}_0$  (I) denkleminin çözümü ise yani

$$A\vec{x}_0 - \lambda\vec{x}_0 = 0$$

denklemi sağlanıyorsa ve  $\vec{e}$   $A$  operatörünün öz elemanı ise (söz konusu  $\lambda$ 'ya karşılık gelen) bu durumda öz elemanın tanımına göre

$$A\vec{e} - \lambda\vec{e} = 0$$

eşitliği ve buradan da

$$A(\vec{x}_0 + \vec{e}) - \lambda(\vec{x}_0 + \vec{e}) = A\vec{x}_0 - \lambda\vec{x}_0 + A\vec{e} - \lambda\vec{e} = \vec{f}$$

yazılabilir. Yani  $\vec{x}_0 + \vec{e}$  vektörü de (3.19) denkleminin çözümüdür.

**Tanım 3.3** Regüler olmayan tüm  $\lambda$  değerlerine  $A$  operatörünün  $\sigma(A)$  spektrumu denir.  $A$  operatörünün öz değerleri onun spektrumuna dahildir.

**Örnek 3.2**  $A$  operatörü  $R^n$  uzayında etkiyen bir operatör olsun.

$\mathfrak{A} = a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) ise söz konusu operatörün matrisi olsun. Bu durumda

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = f \quad (3.21)$$

denklemin sayıda bilinmeyenli  $n$ . dereceden homojen olmayan çizgisel cebirsel denklemlerdir. Burada  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  ve  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$ 'dir. Çizgisel eğer sistemin  $\Delta(\lambda)$  determinantı sıfır değil ise, yani  $\lambda$  değeri  $\Delta(\lambda) = 0$  denkleminin kökü değil ise, bu durumda istenilen  $\vec{f}$  için (3.21) denkleminin tekil çözümü vardır. Bu nedenle söz konusu  $\lambda$  parametreleri regülerdir.  $\Delta(\lambda) = 0$  denkleminin kökleri ise spektrumu oluşturur. Zira  $\lambda$ 'nın söz konusu değerlerinde (3.21) denklemi genelde çözülemiyor.  $\lambda$ 'nın bu değerlerinde

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = 0$$

homojen denklemi sıfır olmayan çözüme sahiptir, yani spektrumun istenilen noktası öz değerdir.

$C[0,1]$  uzayında bağımsız değişkenle çarpma operatörünün ele alalım.

$$A\vec{x}(t) = t\vec{x}(t)$$

Bu durumda (3.19) denklemi

$$t\vec{x}(t) - \lambda\vec{x}(t) = \vec{f}(t)$$

veya

$$(t - \lambda)x(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (3.22)$$

biçiminde olacaktır. Eğer  $\lambda \in [0,1]$  ise, bu durumda istenilen  $f(t) \in C[0,1]$  için (3.19) denkleminin aşağıdaki şekilde sürekli

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{t - \lambda} \vec{f}(t)$$

tekil çözümü vardır. Yani bütün  $\lambda \in [0,1]$ 'lar regülerdir. Diğer taraftan kolayca gösterilebilir ki, [38]  $\lambda \in [0,1]$  olan  $\lambda$ 'nın tüm değerleri spektrumdaki noktalardır. Bu arada spektrumun hiçbir noktası öz değer değildir. Zira

$$(t - \lambda)\vec{x}(t) = 0 \quad \lambda \in [0,1]$$

homojen denkleminin  $C[0,1]$  aralığındaki çözümü sadece  $\vec{x}(t) = 0$ 'dır. Gerçekten, istenilen belirlenmiş  $\lambda_0 \in [0,1]$  için  $(t - \lambda_0)$  çarpan sadece  $t = \lambda_0$  olduğunda sıfırdır;  $(t - \lambda_0)\vec{x}(t)$ 'nin  $[0,1]$  aralığında özdeşlikle sıfır olması için ise mutlaka  $\vec{x}(t) \equiv 0$  olması gerekir.

Aşağıdaki integral denklemi ele alalım:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t)$$

ve

$$A\varphi = \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds$$

notasyonunu yapalım.  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  olduğunu kabul edelim ve denklemi

$$A\varphi - \mu\varphi = -\mu f$$

biçiminde yazalım. Görüldüğü gibi,  $A$  operatörünün öz değerleri (eğer var ise)  $K(t,s)$  çekirdeğinin karakteristik değerlerinin ters değerleridir.

Sınırlı boyutlu simetrik operatörlere benzer olarak,  $H$  Hilbert uzayında simetrik operatörlerin öz eleman ve öz değerlerinin özelliklerini inceleyelim.

1. Simetrik  $A$  operatörünün  $H$  Hilbert uzayındaki öz değerlerinin tümü gerçek değerlidir. Bunu gösterelim.  $Ax = \lambda x$ ,  $\|x\| \neq 0$  olsun. Bu durumda

$$\lambda(x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x)$$

buradan da  $\lambda = \bar{\lambda}$  eşitliği bulunur. Yani  $\lambda$  gerçek değerdir.

2. Simetrik operatör için farklı öz değerlerin karşılık gelen öz elemanlar ortogonaldır.

$Ax = \lambda x$  ve  $Ay = \mu y$ ,  $\lambda \neq \mu$  olsun. Bu durumda

$$\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$$

yazılabilir. Buradan da  $(x, y) = 0$  alınır. Tanıma göre bu koşul  $H$  Hilbert uzayında ortogonalite koşuludur.

Simetrik  $A$  operatörü için  $(Ax, x)$  her zaman gerçek değerdir. Gerçekten

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$$

yazılabilir. Bu da  $(Ax, x)$ ' in gerçek değer olduğunu gösterir.

Aşağıdaki bir kavramı tanımlayalım. Eğer istenilen  $y \in H$  için

$$(x_n, y) \rightarrow (x_0, y)$$

ise, bu takdirde  $\{x_n\}$  ( $x_n \in H$ ) serisi  $x_0 \in H$  elementine zayıf yakınsaktır denir ve  $x_n \xrightarrow{\text{zayıf}} x_0$  olarak işaretlenir.  $H$  Hilbert uzayında norma göre yakınsaklığa ise kuvvetli yakınsaklık denir. Eğer bir seri kuvvetli yakınsak ise, o seri hem de zayıf yakınsaktır. Bunun tersi doğru değildir.

Bilindiği gibi sonlu boyutlu uzay küresi kompakttır, yani onun elemanlarından oluşan her bir sonsuz dizi yakınsak olan alt dizi içerir. (Bolzano-Weierstrass prensibi). Sonsuz boyutlu uzaylarda ise bunun doğru olmadığını gördük. Buna rağmen, sonlu boyutlu uzaylarda kuvvetli yakınsaklıkla zayıf yakınsaklık çakışır. Zayıf kompaktlık özelliği sonsuz boyutlu uzay içinde geçerlidir.

Hilbert uzayında her bir sonlu küme zayıf kompakttır, yani böyle kümeye dahil olan istenilen elementler dizisi içerisinde zayıf yakınsak olan bir dizi vardır.

İleride işimize yarayacak bir teoremi ispatlayalım.

**Teorem 3.1**  $H$  Hilbert uzayında etkileyen, sıfır olamayan istenilen tamamen sürekli simetrik  $A$  operatörünün sıfır olmayan en az bir tane  $\lambda$  öz değeri vardır.

**İspat 3.1**  $A \neq 0$  operatörü  $H$  Hilbert uzayında etkileyen tamamen sürekli simetrik operatör olsun.  $S_1: \|x\|=1$  birim küresinde kuadratik forma sahip  $(Ax, x)$  fonksiyoneli ele alalım. Analiz kursuna göre,  $m$  – boyutlu uzayın kapalı sonlu  $\bar{G}$  bölgesinde (kompakt kümede) sürekli olan  $m$  değişkenli  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  fonksiyonu bu bölgede en büyük ve en küçük değerlerini alır.

Buna benzer olarak,  $S_1 \subset H$  küresi zayıf kompakt ve  $(Ax, x)$  kuadratik formu ise zayıf sürekli olduğuna göre söz konusu  $(Ax, x)$  fonksiyoneli  $S_1$  de en büyük ve en küçük değerine sahiptir.

$$M = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$$

kabul edelim. ( $M = \|A\|$  olduğu gösterilebilir.)

Üst sınır tanımına göre normlu öyle  $\{e_n\}$  dizisi bulunabilir ki, onun için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ae_n, e_n)$$

vardır ve onun değeri ya  $+M$ , ya da  $-M$ 'dir. Sıfır olmayan bu limiti  $\lambda_1$  ile gösterelim.  $A$  operatörü tamamen sürekli olduğu için sonlu  $\{e_n\}$  dizisinden limiti:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Ae_{n_i} = h \quad (3.23)$$

olan bir  $\{e_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$  alt dizi ayrılabilir.

$$\|Ae_{n_i} - \lambda_1 e_{n_i}\|^2 = (Ae_{n_i} - \lambda_1 e_{n_i}, Ae_{n_i} - \lambda_1 e_{n_i}) = \|Ae_{n_i}\|^2 - 2\lambda_1(Ae_{n_i}, e_{n_i}) + \lambda_1^2,$$

olduğu için aşağıdaki limit yazılabilir:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|Ae_{n_i} - \lambda_1 e_{n_i}\|^2 = \|h\|^2 - 2\lambda_1^2 + \lambda_1^2 = \|h\|^2 - \lambda_1^2. \quad (3.24)$$

Fakat

$$\|Ae_{n_i}\| \leq M\|e_{n_i}\| = M = |\lambda_1|,$$

olduğundan  $\|h\| \leq |\lambda_1|$  bulunur.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|Ae_{n_i} - \lambda_1 e_{n_i}\| = 0, \quad (3.25)$$

Bu eşitlikten  $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{n_i}$ 'nin var olduğu görülmektedir. Limitinin  $h/\lambda_1$ 'ye eşit olduğunu görürüz. Normu bire eşit olan  $x_1 = h/\lambda_1$  elementini ele alalım.

$$Ax_1 - \lambda_1 x_1 = 0$$

veya

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1$$

bulunur. Bu, sıfır olmayan  $\lambda_1$  öz değerine karşılık gelen sıfır olmayan  $x_1$  ( $\|x_1\| = 1$ ) elemanın var olduğunu gösterir. Bu arada

$$|\lambda_1| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|A\|.$$

Yukarıda gösterilenlere dayanarak aşağıdaki hüküm verilebilir.

Sıfırdan farklı öz değere sahip olmayan herhangi bir tamamen sürekli simetrik operatör kesinlikle sıfır operatördür:  $A = 0$

$n$  boyutlu uzayda simetrik olmayan operatörler için ise aşağıdaki teorem vardır:

$n$  - boyutlu uzayda her bir çizgisel dönüşüm en azından, bir tane öz vektöre sahiptir.

Bu husus  $H$  Hilbert uzayında tamamen sürekli olan genel operatörlere şamil edilemez. Bunu gösterelim.  $l_2$ 'de aşağıdaki gibi belirlenen bir  $A$  operatörü verilsin:

$$Ax = A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}}{n-1}, \dots\right).$$

Söz konusu operatörün tamamen süreklidir, fakat hiçbir öz vektöre sahip değildir.

Bir başka örnek olarak  $L_2[0,1]$ 'de sürekli çekirdeğe sahip Volterra integralini gösterelim:

$$Ax = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds$$

Bu integral operatör bir tanede olsa sıfır olmayan öz elemana sahip değildir.

**Tanım 3.4** Eğer her bir  $x \in L$  için  $Ax \in L$  ise, bu durumda  $L \in H$  alt uzayın  $A$  operatörünün değişmez (invariant) alt uzayı denir.

Eğer  $A$  operatörü simetrik ise, hem  $L$  alt uzayı hemde,  $L$  alt uzayının  $H$  Hilbert uzayındaki ortogonal ek uzayı  $H \ominus L$  onun invariant alt uzayı olacaktır. ( $L$  alt uzaya ortogonal olan tüm  $Z \in H$  elemanlarından oluşan alt uzaya  $L$  alt uzayının  $H$  Hilbert uzayında ortogonal ek alt uzayı denir). Bunu gösterelim  $y$  – alt uzayının bir elemanı ve  $x \in H \ominus L$  olsun. Bu durumda

$$(Ax, y) = (x, Ay) = 0$$

olacaktır.  $L$  invariant alt uzay olduğu için  $Ay \in L$ 'dir. Böylece  $Ax \perp L$  alt uzayın her bir elemanı ile ortogondur. Yani  $Ax \in H \ominus L$ . Bu da  $H \ominus L$  alt uzayının da invariant olduğunu gösterir.

Simetrik ve tamamen sürekli operatörün spektrumunun oluşturulmasına bakalım.  $x_1$  elemanından oluşmuş  $L_1$  alt uzayını, yani  $\{tx_1\}$  elemanları kümesini ele alalım. Burada  $t$  sayısal parametredir. Bu durumda

$$Atx_1 = tAx_1 = t\lambda_1 x_1 \in L_1$$

olduğu için  $L_1$  alt uzayı  $A$  operatörünün invariant alt uzayıdır. Bu durumda  $H_1 = H \ominus L_1$ 'de invariant alt uzay olacaktır. Şimdi  $H_1$  alt uzayında etkileyen öyle bir,  $x_2 \in H_1$ ,  $\|x_2\| = 1$  elemanı vardır ki, onun için

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2$$

olsun. Öyle ki,  $x_2$  elemanı  $x_1$  elemanına ortogondur ve

$$|\lambda_2| = \sup_{S_1 \cap H_1} |(Ax, x)| \leq \sup_{S_1} |(Ax, x)| = |\lambda_1|$$

Daha sonra ise  $x_1$  ve  $x_2$  elemanlarından oluşan  $L_2$  alt uzayı ele alalım ve aynı işlemleri yapalım ve bunu devam ettirelim.

Mantıksal olarak burada iki durum vardır.

**1. n. adımdan sonra**

$$\alpha_n = \inf_{S_1 \cap H_n} (Ax, x) = \beta_n = \sup_{S_1 \cap H_n} (Ax, x) = 0$$

Sonucuna varılır, bu durumda  $H_n$  uzayında  $(Ax, x) = 0$ 'dır. Bu ise sadece  $H_n$  uzayında  $Ax \equiv 0$  olduğunda mümkündür. Böylece

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

ve

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ 'ler}$$

A operatörünün tüm öz vektör ve sıfır olmayan öz değerler sistemini oluşturur. Bu durumda

$$H = L_n \oplus N$$

olacaktır. Burada  $L_n$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  elemanlarından oluşan bir alt uzaydır, N ise A operatörünün sıfırlarından oluşmuş (yani  $\lambda=0$  öz değerlerine karşılık gelen elemanlardan oluşmuş) bir alt uzaydır. Bu uzay  $\text{Ker}A$  olarak gösterilir.  $\oplus$  sembolü ise ortogonal alt uzayların toplamını gösterir.

Böylece, istenilen  $x \in H$  elemanı

$$x = \sum_{i=1}^n c_i x_i + x_0, \quad x_0 \in \text{Ker}A$$

biçiminde gösterilebilir. Buradan da

$$Ax = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i x_i$$

bulunur. Bu durumda A operatörü H Hilbert uzayını kendi sonlu boyutlu alt uzayına görüntülediği için 0, bu anlamda sonlu boyutlu operatördür.

Yozlaşmış çekirdekli Fredholm integrali buna bir örnektir.

2. Operatörün öz elemanlarının oluşturulması sürecini sınırsız devam ettirmek mümkündür. Bu durumda ortogonal ve normalize olunmuş

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

öz elemanlar sistemini buluruz. Söz konusu sistem sayılabilir düzeydedir. Bunu aşağıdaki teorem gösterir.

**Teorem 3.2** A operatörü H Hilbert uzayında etkileyen tamamen sürekli simetrik bir operatör olsun. Bu durumda söz konusu operatör mutlak değeri verilmiş  $\rho > 0$  tan büyük olan sınırlı sayıda öz değeri vardır ve her bir sıfır olmayan öz değere sonlu sayıda lineer bağımsız öz vektör karşılık gelir.

**İspat 3.2** Bunun tersini, yani A operatörünün bütün i'ler için  $|\lambda_i| \geq \rho > 0$  olan sonsuz sayıda öz değerlerinin olduğunu düşünelim. Her bir  $\lambda_i$  öz değerine en azından bir tane  $x_i$  öz elemanı karşılık gelecektir. Genel kurala dayanarak  $\|x_i\| = 1$  yazılabilir.  $\{x_i\}, i = 1, 2, \dots$ , elemanlar topluluğu sonlu bir kümedir. Diğer taraftan teoremin şartına göre A operatörü tam sürekli olduğu için  $\{Ax_i\}, i = 1, 2, \dots$ , kümesi kompakt kümedir.  $i \neq j$ 'ler için  $x_i$  ve  $x_j$  ortogonal oldukları için

$$\begin{aligned} \|Ax_i - Ax_j\|^2 &= \|\lambda_i x_i - \lambda_j x_j\|^2 = (\lambda_i x_i - \lambda_j x_j, \lambda_i x_i - \lambda_j x_j) \\ &= \lambda_i^2 \|x_i\|^2 + \lambda_j^2 \|x_j\|^2 = \lambda_i^2 + \lambda_j^2 \geq 2\rho^2 \end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. Buradan da,  $\{Ax_i\}$ 'nin kompakt küme olmasına rağmen,  $\{Ax_i\}$ 'in ve onun herhangi bir alt kümesinin yakınsak olmadığı görülmektedir. Bu çelişki varsayımın doğru olmadığını, teoremin ise ispatını gösterir. Teoremin ikinci kısmı da benzer şekilde ispatlanır.

**Sonuç 3.1** Eğer tamamen sürekli ve simetrik olan bir A operatörü sayılabilir  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , öz değer kümesine sahip ise, bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

olacaktır.

Şimdi artık A operatörünün tüm öz değer ve öz elemanlarını sıralayabiliriz. Sıralama öz değerlerin mutlak değerinin azalma yönünde yapılacaktır. Her bir öz değer onun

katı kadar tekrarlanacaktır (yani bu öz değere karşılık gelen lineer bağımsız öz elemanlar sayısı kadar). Böylece aşağıdaki sonlu bir sistem

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

elde edilir. Bunlar, A operatörünün öz değer ve öz vektörlerinden oluşmuş tam takımlardır.

L-  $\{x_i\}$  ortonormal sistemden oluşturulmuş bir alt uzay olsun. Eğer,  $x \in L$ , yani  $x = \sum_i \xi_i x_i$  ise, bu durumda  $Ax = \sum_i \xi_i \lambda_i x_i \in L$  olacaktır. Bu, L uzayının A operatörünün invaryant alt uzayı olduğunu gösterir. Bu durumda  $N = H \ominus L$  de Aoperatörünün invaryant alt uzayı olacaktır. N alt uzayında  $Ax = 0$  olacağı açıktır. Aksi taktirde N alt uzayında A operatörünün sıfır olmayan ortonormal öz elemanı var olurdu. Bu ise olamaz, zira tüm öz elemanlar L alt uzayına aittir. Bulunan bu sonuçlar Hilbert – Schimidt adı verilen temel teoremini içeriğini oluşturur.

**Teorem 3.3** Her bir tamamen sürekli simetrik doğrusal A operatörünün, H Hilbert uzayında her bir  $x \in H$  için aşağıdaki koşulları sağlayan:

$$x = \sum_k \xi_k x_k + x_0, \quad x_0 \in N = \text{Ker}A \quad (3.26)$$

$$Ax = \sum_k \lambda_k \xi_k x_k \quad (3.27)$$

ve  $\{\lambda_n\}$  öz değerlerine karşılık gelen ortonormal  $\{x_i\}$  öz elemanları vardır. Burada  $\sum_k$  işlemi A operatörünün öz eleman sayısına bağlı olarak ya sonlu bir toplamdır, ya da sonsuz dizidir. Eğer  $\{x_i\}$  öz elemanlar sistemi sonsuz ise,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ ’ dir.

Bu teorem, öz eşlenik doğrusal operatörün ortonormal baz- aracılığı ile sonlu ölçülü Öklid uzayında köşegen hale gelmesi işleminin H Hilbert uzayında tam sürekli simetrik operatöre de uygulanabilirliğini gösterir.

### 3.2.2. Operatör Biçimindeki Denklemlerin Çözülmesi

Aşağıdaki operatör biçimindeki denklemi ele alalım:

$$Ax - \lambda x = f \quad (3.28)$$

Burada A- tamamen sürekli simetrik operatör, f ise bilinen bir elementtir,  $f \in H$  (3.28) formülünde, x ve Ax yerine § 24’ün ifadelerini, f yerine ise  $f = \sum_i \eta_i x_i + f_0$  yazarsak

$$\sum_i (\lambda_i - \lambda) \xi_i x_i - \lambda x_0 = \sum_i \eta_i x_i + f_0 \quad (3.29)$$

denklemini buluruz. İki durumu ele alalım:

**Durum 3.3** Her bir  $i$  indisi için  $\lambda \neq \lambda_i$  olsun. (3.29) denkleminin her iki tarafını  $x_k$  ile skaler çarpalım.  $x_k$  elemanı tüm  $(k \neq i)x_i, x_0$  ve  $f_0$  elemanları ile ortogonal olduğu için

$$(\lambda_k - \lambda) \xi_k = \eta_k \quad (3.30)$$

veya

$$\xi_k = \frac{\eta_k}{\lambda_k - \lambda} \quad (3.31)$$

bulunur. Buradan bulunan  $\xi_i$  (3.29)'de yazılırsa

$$-\lambda x_0 = f_0$$

veya

$$x_0 = -\frac{1}{\lambda} f_0$$

elde edilir.

$$x = \sum_i \frac{\eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i - \frac{1}{\lambda} f_0 \quad (3.32)$$

ifadesi bulunur. Bulunan sonuç  $\lambda = \lambda_i (i = 1, 2, \dots)$  için denklemin çözümüdür. İstenilen  $f$  için söz konusu çözüm bir değerlidir. Buradan da  $\lambda \neq \lambda_i (i = 1, 2, \dots)$  için  $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$  rezolventinin var olduğu görülmektedir.

Görüldüğü gibi öz değere eşit olmayan  $\lambda$ - sabitinin her bir değeri  $A$  operatörünün regüler değeridir. Yani Hilbert uzayındaki tamamen homojen simetrik operatörün spektrumu sadece öz değerlerden oluşmaktadır.

**Durum 3.4**  $\lambda = \lambda_m = \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_{m+p-1}$  olsun. Buradan  $p$ - $\lambda$  öz değerinin tekrarlanma katıdır.

$k \neq m, m+1, \dots, m+p-1$  olduğunda  $\xi_k$  eskisi gibi (3.31) formülü ile belirtilir.  $K$ -nın  $m, m+1, \dots, m+p-1$  değerlerinin herhangi birine eşitliği durumunda ise (3.30) eşitliği genellikle sağlanmaz. Zira eşitliğin sol tarafı sifira eşit, sağ tarafı genellikle sifirdan farklıdır. Bu durumda (3.30) denkleminin çözümünün varlığı için  $\eta_k = 0$  ( $k = m, m+1, \dots, m+p-1$ ) gerekir. Yani (3.28) denklemindeki serbest terimin  $\lambda$ -ya karşılık gelen  $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+p-1}$  elemanları ile ortogonal olması gerekir. Bu

durumda (3.30) denklemi  $0=0$  özdeşliğine dönüşür ve (3.30) ifadesi tüm  $\xi_k$  katsayıları için sağlanıyor. Bu durumda (3.30) denkleminin çözümü

$$x = \sum_{i \neq m, m+1, \dots, m+p-1} \frac{\eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i + \sum_{k=m}^{m+p-1} C_k x_k - \frac{1}{\lambda} f_0 \quad (3.33)$$

biçiminde olur. Burada  $C_m, C_{m+1}, \dots, C_{m+p-1}$  serbest sabitlerdir. Böylece bu formülü değişik biçimde yazalım:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{\eta_i (\lambda_i - \lambda - \lambda_i)}{\lambda_i - \lambda} x_i - \frac{1}{\lambda} f_0 = -\frac{1}{\lambda} \left( \sum_i \eta_i x_i + f_0 - \sum_i \frac{\lambda_i \eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{\lambda_i \eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i - \frac{1}{\lambda} f_0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Bu bilinen Schimidt formülüdür.

### 3.2.3. Simetrik Çekirdekli İntegral Denklemler

$L_2[a, b]$  uzayında aşağıdaki integral denklemini ele alalım:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) \varphi(s) ds + f(t) \quad (3.35)$$

Burada  $K(t, s)$  özdeşlikle sıfır olmayan ve  $L_2$  uzayında simetrik bir fonksiyondur.

Bilindiği gibi,

$$A\varphi = \int_a^b K(t, s) \varphi(s) ds$$

Operatörü  $L_2[a, b]$  Hilbert uzayında tamamen sürekli ve simetriktir.

Böylece aşağıdaki sonuçlar söylenebilir:

- 1)  $K[t, s]$  çekirdek fonksiyonu en azından bir tane karakteristik değere sahiptir ve onun tüm karakteristik değerleri gerçektir.
- 2) Farklı karakteristik değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar ortogonaldir.
- 3) Her bir karakteristik değere sınırlı sayıda çizgisel bağımsız öz fonksiyon karşılık gelir.

**Egzersiz 3.1**  $\lambda_0 - K(t, s)$  simetrik çekirdek fonksiyonunun karakteristik değeri olsun. Söz konusu karakteristik değere karşılık gelen çizgisel bağımsız öz fonksiyon sayısı olsun. Aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu gösteriniz.

$$P < \lambda_0^2 B^2 \left( B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 dt ds \right)$$

Ortogonalleştirme işlemini yaparak söz konusu karakteristik değere karşılık gelen çizgisel bağımsız öz fonksiyonlarını birbirine ortogonal hale getirilebilir.

Ortogonalleştirme süreci,  $L_2[a, b]$  uzayında sınırlı sayıda ya da sayılabilir

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$$

Çizgisel bağımsız fonksiyonlar verilsin. (Çizgisel uzayda istenilen sonlu alt sistemi çizgisel bağımsız olan sonsuz sayıda elementten oluşan sistem çizgisel bağımsızdır.)

Otogonalleştirme süreci (Sonin-Schmidt) aşağıdaki işlemlerle

$$\psi_1(t) = \varphi_1(t), \quad \omega_1(t) = \frac{\psi_1(t)}{\|\psi_1\|}$$

$$\psi_n(t) = \varphi_n(t) - \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_n, \omega_k) \omega_k(t)$$

$$\Omega_n(t) = \frac{\psi_n(t)}{\|\psi_n\|}, \quad n = 2, 3, \dots$$

$\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t)$ , ortonormal fonksiyonlar sisteminin oluşturulmasıdır. Burada

$$\|\psi_n\| = \left( \int_a^b \psi_n^2(t) dt \right)^{1/2}, \quad (\varphi_n, \omega_k) = \int_a^b \varphi_n(t) \omega_k(t) dt$$

Şimdi (3.35) denkleminin her tarafını  $\lambda \neq 0$ 'a bölelim ve  $\frac{1}{\lambda} = \mu$ ,  $-\frac{1}{\lambda} f(t) = g(t)$  gibi gösterelim. Böylece:

$$\int_a^b K(t,s) \varphi(s) ds - \mu \varphi(t) = g(t) \quad (3.36)$$

Denklemi elde edilir. Söz konusu denklemin operatör biçimi aşağıdaki gibidir:

$$A\varphi - \mu\varphi = g \quad (3.37)$$

Burada A- tamamen homojen simetrik operatördür.

Bu sonuçlara göre A operatörünün spektrumu sınırlı sayıda veya sayılabilir değerlerden

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$$

oluşan bir küme oluşturur. Eğer  $\mu'$  nün değeri bunlardan hiçbirine eşit değilse, bu durumda istenilen  $g(t) \in L_2[a, b]$  için

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mu} \sum_i \frac{\mu_i g_i}{\mu_i - \mu} \varphi_i(t) - \frac{1}{\mu} g(t) \quad (3.38)$$

biçiminde bir tekel çözümü vardır. Burada  $\varphi_j(t)$  fonksiyonları  $K(t, s)$  çekirdeğinin öz normlu fonksiyonlarıdır ve

$$g_i = \int_a^b g(t) \varphi_i(t) dt.$$

Bu durumda homojen denklemin ( $g(t) \equiv 0$ ) bir tek sıfır (trivial)  $\varphi(t) \equiv 0$  çözümü vardır.

Eğer  $\mu$ - değeri  $A$  operatörünün katı  $p$  olan öz değerine eşit ise, yani

$\mu = \mu_m = \mu_{m+1} = \dots = \mu_{m+p-1}$  ise ve  $g(t)$  fonksiyonu söz konusu öz değere karşılık gelen  $K(t, s)$  çekirdeğinin öz fonksiyonlarına ortogonal ise, yani

$$\int_a^b g(t) \varphi_k dt = 0 \quad (k = m, m + 1, \dots, m + p - 1) \quad (3.39)$$

koşulu sağlanırsa, bu durumda (3.37) denklemini çözülebilir. Fakat onun çözümü tekil değildir. Bu sonuç Fredholm teoremi ile tamamı ile uyum içindedir. Zira bu durumda homojen eşlenik integral denklemler örtüşür.

Bu durumda  $\varphi(t)$  çözümü aşağıdaki formülle verilir:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \frac{1}{\mu} \sum_{i \neq m, m+1, \dots, m+p-1} \frac{\mu_i g_i}{\mu_i - \mu} \varphi_i(t) - \frac{1}{\mu} g(t) + \\ & + C_m \varphi_m(t) + \dots + C_{m+p-1} \varphi_{m+p-1}(t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$C_m, C_{m+1}, \dots, C_{m+p-1}$  geliş güzel sabitlerdir. Eğer eski parametrelere geri dönmüş olursak, öz değerler sonsuz küme oluşturduğu durumda  $\lambda_k = \frac{1}{\mu_k}$  ve  $\lambda_k \rightarrow \infty$  sonucunu elde ederiz.

Yani,  $L_2$ 'de simetrik çekirdeğe sahip 2. tür Fredholm denklemini her zaman sonlu sayıda karakteristik değere sahiptir.

Karakteristik değer olmayan  $\lambda$ 'lar için (3.35) denkleminin çözümü için

$$\varphi(t) = \lambda \sum_i \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(t) + f(t) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3.41)$$

ifadesi bulunur. Burada  $f_i = \int_a^b f(t) \varphi_i(t) dt$  (6) formülünden ise:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \lambda \sum_{i=m, m+1, \dots, m+p-1} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(t) + f(t) \\ & + \sum_{k=m}^{m+p-1} C_k \varphi_k(t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

ifadesi bulunur.  $C_k$  ( $k = m, m + 1, \dots, m + p - 1$ ) gelişigüzel sabitlerdir.

(3.41) ve (3.42) formülleri simetrik çekirdekli integral denklemler için Schimidt formülleri adlanır.

Eğer (3.41) ve (3.42) denklemlerinin sağ tarafları sonsuz seri ise, bu durumda onlar ortalama olarak yakınsaktırlar. Eğer ek olarak  $K(t, s)$  çekirdeğinin aşağıdaki (A) koşulunu da sağladığını

$$\int_a^b K^2(t, s) ds \leq A = \text{const} \quad \forall t \in [a, b]$$

kabul edersek, bu durumda (3.7) serisi mutlak ve düzenli yakınsak olacaktır. Bunu gösterelim. Her yerde sonsuz seri yazalım, zira öz fonksiyon sayısı sınırlı olduğunda, toplam da sınırlı olur ve bunun için yakınsaklığın ispatı gerekmiyor.

Böylece,  $f(t) \in L_2[a, b]$  ve  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) ise  $K(t, s)$ 'in  $\varphi_i(t)$  ortonormlu öz fonksiyonları cinsinden Fourier açılımının katsayıları olsun. Yani:

$$f_i = \int_a^b f(t) \varphi_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Aşağıdaki seriyi ele alalım:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(t)$$

Bu serinin mutlak ve düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. Serinin aşağıdaki kısmını ele alalım:

$$\sum_{i=n}^{n+p} \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(t) = \sum_{i=n}^{n+p} f_i \int_a^b K(t, s) \varphi_i(s) ds$$

Burada  $P$  istenilen pozitif sayıdır.

Buna Cauchy eşitsizliğini uygulayalım:

$$\left( \sum_{i=n}^{n+p} \left| \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(t) \right| \right)^2 \leq \sum_{i=n}^{n+p} f_i^2 \sum_{i=n}^{n+p} \left( \int_a^b K(t,s) \varphi_i(s) ds \right)^2$$

Burada  $\int_a^b K(t,s) \varphi_i(s) ds$  büyüklüklerine  $K(t,s)$  çekirdeğinin Fourier serisine açılım katsayıları olarak bakılabilir. Bu katsayılar Bessel<sup>1</sup> eşitsizliğini uygularsak

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_a^b K(t,s) \varphi_i(s) ds \right)^2 \leq \int_a^b K^2(t,s) ds \leq A$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt$$

sonucuna varırız.

Böylece

$$\left( \sum_{i=n}^{n+p} \left| \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(t) \right| \right)^2 \leq A \sum_{i=n}^{n+p} f_i^2 \leq A \sum_{i=n}^{\infty} f_i^2 \quad \forall t \in [a, b]$$

yazılabilir. Zira  $f(t) \in L_2 [a, b]$ 'de  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2$  sayısal serisi yakınsaktır. Bu nedenle  $n - yi$  yeterince büyük sayı kabul ederek sonuncu eşitliğin sağ tarafı,  $p$ 'den asıl olmayarak önceden verilmiş pozitif  $\varepsilon$  değerinden küçük yapılabilir. Böylece, istenilen  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $N(\varepsilon)$  numarası vardır ki, tüm  $n > N$  ve istenilen  $p > 0$  için değeri için

$$\sum_{i=n}^{n+p} \left| \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(t) \right| < \varepsilon \quad \forall t \in [a, b]$$

eşitsizliği sağlanır. Cauchy koşuluna göre yukarıdaki eşitlik  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(t)$  serisinin mutlak ve düzenli yakınsak olduğunu gösterir.

(3.41) formülündeki toplam ise bu seriyi  $\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda}$  çarparsak bulunur:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda} \frac{f_i}{\lambda_i} \varphi_i(t)$$

$\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda}$  – çarpanları belirli  $i$  – den sonra artı işaretli ve  $i$ 'nin artmasıyla  $\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda} \rightarrow 1$  yaklaştığı için (3.41) ifadesindeki seri mutlak ve düzenli olarak yakınsaktır. (3.41) ifadesi aşağıdaki gibi değişik bir şekilde

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(s) \varphi_i(s) ds}{\lambda_i - \lambda}$$

veya

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t, s; \lambda) f(s) ds$$

yazılabilir. Burada

$$R(t, s; \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t) \varphi_i(s)}{\lambda_i - \lambda}$$

fonksiyonu çözülebilir çekirdektir<sup>2</sup>.

$$R(t, s; \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t) \varphi_i(s)}{\lambda_i - \lambda}$$

biçimindeki açılım simetrik  $L_2$  çekirdeği rezolventinin sadece basit kutuplarının olduğunu gösterir. Bu kutuplar çekirdeğin karakteristik değerleridir.

### 3.3. Green Fonksiyonunun Sınır Değer Problemlerinin İntegral Denklemlere İndirgenmesi

#### 3.3.1. Adi Diferansiyel Denklemler İçin Sınır Değer Problemlerinin Green Fonksiyonu

$$L_x \equiv \frac{d^2x}{dt^2} + q(t)x(t) = h(t) \quad (3.43)$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Burada  $q(t)$  ve  $h(t)$  fonksiyonları  $[a, b]$  aralığında sürekli fonksiyonlardır.

$$x(a) = x(b) = 0 \quad (3.44)$$

---

sınır değerlerini sağlayan  $x(t)$  fonksiyonu aranmaktadır.

**Tanım 3.5** Sınır değer probleminin Green fonksiyonu  $a \leq t, s \leq b$  bölgesinde tanımlanmış ve aşağıdaki özelliklere sahip iki değişkenli bir fonksiyondur:

1)  $L_t G(t, s) = 0$   $t < s$  ve  $t > s$  için, yani  $G(t, s)$  fonksiyonu  $t$  ve  $s$ 'nin gösterilen denklemini sağlar.

2)  $G(t, s)$  fonksiyonu sınır koşullarını sağlıyor

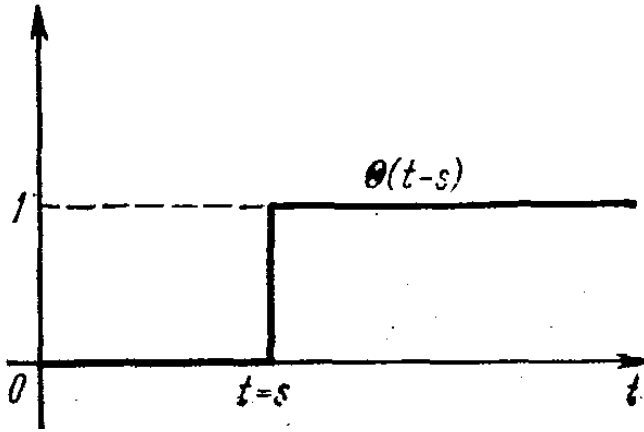
$$G(a, s) = 0, \quad G(b, s) = 0 \quad a < s < b$$

$t = s$  olduğunda  $G(t, s)$  fonksiyonu süreklidir:

$$G(s + 0, s) = G(s - 0, s)$$

$t = s$  noktasında  $\frac{\partial G}{\partial t}$  türevinin kırılma noktası vardır ve

$$\frac{\partial G(s + 0, s)}{\partial t} - \frac{\partial G(s - 0, s)}{\partial t} = 1$$



Şekil 3. 2 Basamak Fonksiyonu

Bu birim kırılmayı ve Şekil 3.2'de gösterilen  $\theta(t - s)$  fonksiyonunun türev kuralını da göz önüne alırsak

$$\frac{d^2}{dt^2} G(t, s) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} G(t, s) \right) = \delta(t - s) + \frac{d^2 G}{dt^2}$$

yazabiliriz. Burada  $\delta(t - s)$  - delta fonksiyonu,  $\frac{d^2 G}{dt^2}$  - ise Green fonksiyonunun  $t$ 'ye göre klasik ikinci türevidir. Bu nedenle (1) - (4) koşulları

$$L_t G(t, s) = \delta(t - s) \quad (3.45)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, Green fonksiyonunun basit bir fiziksel yorumu vardır: bu fonksiyon

$$h(t) = \delta(t - s)$$

noktasal birim kaynak probleminin çözümüdür.

Şimdi, artık (1) – (2) sınır değer probleminin çözümü Green fonksiyonu aracılığı ile yazılabilir. (1) – (2) problemin çözümü

$$x(t) = \int_a^b G(t, s)h(s)ds \quad (3.46)$$

ile verilir. Gerçekten Green fonksiyonu için 2) koşuluna göre belirlenen  $x(t)$  fonksiyonu (2) sınır koşullarını sağlar. Böylece:

$$\begin{aligned} Lx(t) &= L_t \left\{ \int_a^b G(t, s)h(s)ds \right\} = \int_a^b L_t G(t, s)h(s)ds \\ &= \int_a^b \delta(t - s)h(s)ds = h(t) \end{aligned}$$

yazılabilir.

### Problem 3.1

$$Lx \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2} - x(t) = h(t) \quad (3.47)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

(43) – (44) sınır değer problemi için Green fonksiyonunu oluşturalım. (3.47) denkleminin homojen kısmının

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - x(t) = 0$$

genel çözümü

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

fonksiyonudur.

$G(t, s)$  green fonksiyonu  $t < s$  ve  $t > s$  için söz konusu homojen denklemin çözümü olduğu için onu aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\left. \begin{aligned} G(t, s) &= a_1(s)e^t + a_2(s)e^{-t} & 0 \leq t \leq s \\ G(t, s) &= b_1(s)e^t + b_2(s)e^{-t} & s \leq t \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

2) özelliğine göre

$$G(0, s) = 0 \quad G(1, s) = 0$$

olacaktır. Buradan da

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0 \\ b_1 e + b_2 e^{-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

cebri denklemi bulunur.  $t = s$  noktasına 3) özelliğine göre

$$b_1 e^s + b_2 e^{-s} = a_1 e^s + a_2 e^{-s} \quad (3.50)$$

eşitliği yazılabilir. 4) özelliğinden ise

$$b_1 e^s - b_2 e^{-s} - [a_1 e^s - a_2 e^{-s}] = 1$$

(3.48) – (3.50) eşitliklerinden  $a_1, a_2, b_1$  ve  $b_2$  sabitleri bulunur. Böylece Green fonksiyonu için

$$G(t, s) \begin{cases} \frac{\text{sh } t \text{ sh}(s-1)}{\text{sh } 1}, & 0 \leq t \leq s \\ \frac{\text{sh } s \text{ sh}(t-1)}{\text{sh } 1}, & s \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (3.51)$$

ifadesi elde edilir. Kolayca  $G(t, s) = G(s, t)$  olduğu yani Green fonksiyonunun simetrik olduğu görülmektedir. Bu, genel bir husustan: “eğer (1) – (2) sınır değer problemi öz eşlenik ise, o zaman, bu problemin Green fonksiyonu simetriktir” hükmünden görülmektedir.

Bu sonucun fiziksel anlamı karşılıklı ilişkidir, yani  $s$  – deki birim değişmeye  $t$  noktasındaki tepkiyle,  $t$  noktasındaki birim değişmeye  $s$ 'in tepkisi aynıdır.

### 3.3.2. Delta Fonksiyonu ve Özellikleri

Adını Paul Dirac'tan alan Dirac delta fonksiyonu tek boyutta

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu gösterime uyacak bütün matematik temsillerine delta fonksiyonu veya delta fonksiyonunun temsili denir. Delta fonksiyonu  $n$  boyuta genelleştirilebilir. Gösterimi ise  $\delta^n(\vec{x} - \vec{x}_0)$  şeklinde olur. Burada  $x$  ve  $x_0$   $n$  boyutlu vektörlerdir. Diğer

taftan  $n$  boyutta delta fonksiyonu her bir boyuttaki delta fonksiyonlarının çarpımı şeklinde de yazılabilir. Örneğin 3 boyutta  $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$

Dirac-Delta fonksiyonu basamak fonksiyonunun türevidir.  $\delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$

Delta fonksiyonunun bazı özellikleri:

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$
- $\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x)$
- $(x - x_0) \cdot f(x) = \delta(x - x_0)f(x_0)$
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos ax \cdot dx = \delta(a)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$
- $\delta(u(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|u'(x_i)|}$  burada  $x_i$ ,  $u(x)$  fonksiyonunun kökleridir.

### 3.3.3. Sınır Değer Problemlerinin İntegral Denklemlere İndirgenmesi

Basit bir durumla yetinelim.

$$Lx \equiv \frac{d^2x}{dt^2} + (-1 + \lambda q(t))x(t) = h(t) \quad (3.52)$$

$$x(0) = x(1) = 0 \quad (3.53)$$

Denkleminin  $x(t)$  çözümünün arandığını düşünelim. Burada  $\lambda$  – sayısal parametredir. (3.52) denklemini

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x(t) = h(t) - \lambda q(t)x(t) \quad (3.54)$$

Biçiminde yazalım. Bu denklemin sağ tarafını bilinen fonksiyon olarak kabul edelim. Bu durumda (3.52) denklemi için (3.53) sınır değer problemine özdeş olan aşağıdaki integral denklemi yazılabilir

$$x(t) = -\lambda \int_0^1 G(t,s)q(s)x(s)ds + h_1(t) \quad (3.55)$$

Burada

$$h_1(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)ds,$$

$G(t,s)$  – ise (3.53) sınır koşullarını sağlayan aşağıdaki denklemin çözümüdür

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x(t) = 0$$

## 4. PARÇACIKLARIN ESNEK SAÇILMASI

### 4.1. Esnek Saçılmanın Klasik Teorisi

#### 4.1.1. Parçacıkların Esnek Çarpışması

Parçacıkların çarpışmasında onların iç durumları değişmez ise bu olaya *esnek çarpışma* denir. Bu nedenle böyle olayları incelerken enerjinin korunum kanunları bu çarpışmalara uygulandığında onların iç enerjileri göz önüne alınmaz.

Bu olayı parçacıkların eylemsizlik merkezlerinin durgun olduğu koordinat sisteminde (KM sisteminde) incelemek daha kolaydır. Bu sistemdeki büyüklüklerin indislerini sıfır (0) ile göstereceğiz. Parçacıkların çarpışmadan önce KM sistemindeki hızları ile laboratuvar koordinat sistemindeki ( L sistemindeki) hızları arasındaki ifade;

$$\vec{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{v}, \quad \vec{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{v}, \quad \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

şeklindedir. Burada  $v_1$  ve  $v_2$  birinci ve ikinci parçacığın L sistemindeki hızlarıdır.

Momentumun korunum kanunu nedeni ile parçacıkların momentumlarının değerleri çarpışmadan sonra aynı olup yönleri ise birbirine zıttır. Enerjinin korunum kanununa göre ise onların mutlak değerleri de değişmemektedir. Böylece; KM sistemindeki bir çarpışma olayında parçacıkların hızlarının yönleri zıt olarak kalır, (çarpışmadan önce parçacıklar birbirine yaklaşır, çarpışmadan sonra ise uzaklaşırlar) fakat buldukları doğrultu ise döner.  $\vec{n}_0$  birim vektör olarak kütlesi  $m_1$  olan parçacığın çarpışmadan sonraki hız yönünü kabul edersek, her iki parçacığın çarpışmadan sonraki hızları için;

$$\vec{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1+m_2} v \vec{n}_0, \quad \vec{v}_{20} = -\frac{m_2}{m_1+m_2} v \vec{n}_0 \quad (4.1)$$

ifadeleri bulunur.

Laboratuvar sistemine geçmek için bu ifadelere kütle merkezinin  $\vec{V}$  hızını ilave etmek gerekir. Böylece L sisteminde çarpışmadan sonraki hızlar için;

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V}'_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v\vec{n}_0 + \frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} \quad (4.2)$$

formülleri elde edilir.

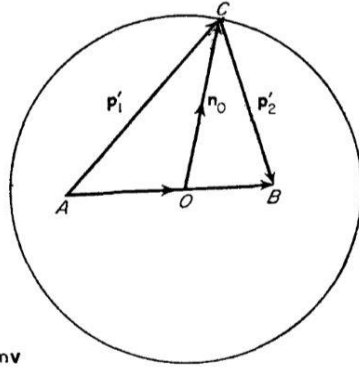
Böylece enerjinin ve momentumun korunum kanunlarından yararlanarak elde ettiğimiz bağıntılar bu kadardır.  $\vec{n}_0$  vektörünün yönü ise o parçacıkların etkileşme kanuna ve çarpışma esnasında parçacıkların konumuna bağlıdır.

Bulunan sonuçları geometrik olarak incelemek mümkündür. Bu durumda hızlar yerine momentumları kullanmak daha uygundur. Bu nedenle (4.2) eşitliklerini uygun olarak  $m_1$  ve  $m_2$  ile çarptığımızda aşağıdaki formülleri;

$$\vec{p}'_1 = mv\vec{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \quad (4.3)$$

$$\vec{p}_2 = -mv\vec{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

elde ederiz. Burada  $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$  indirgenmiş küttedir. Şekil 3.1' de gösterildiği gibi yarıçapı  $mv$  olan bir çember çizelim. Eğer birim vektör  $\vec{n}_0$ ,  $\vec{OC}$  doğrultusunda ise bu durumda  $\vec{AC}$  ve  $\vec{CB}$  vektörleri uygun olarak  $\vec{p}'_1$  ve  $\vec{p}'_2$  vektörlerine karşılık gelmektedir. Verilen  $\vec{p}_1$  ve  $\vec{p}_2$  değerleri için çemberin yarıçapı, A ve B noktalarının konumu değişmez kalmaktadır. Fakat C noktası ise çember üzerinde istenilen noktada bulunabilir.



$$\begin{aligned} \vec{OC} &= mv \\ \vec{AO} &= \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \\ \vec{OB} &= \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \end{aligned}$$

Şekil 4. 1 Çarpışmadan Sonraki Momentumların Diyagramı

Şimdi özel bir durumu ( $m_2$  parçacığının çarpışmadan önce durgun olduğu durumu) daha ayrıntılı inceleyelim. Bu durumda  $OB = \frac{m_2}{m_1+m_2}p_1 = mv$  parçası çemberin yarıçapıdır ve B noktası çember üzerindedir. AB vektörü ise birinci parçacığın çarpışmadan önceki  $\vec{p}_1$  momentumuna eşit olur. Bu durumda A noktası ya çemberin

içinde ( $m_1 < m_2$ ), ya da çemberin dışında ( $m_1 > m_2$ ) olduğunda olur. Buna karşılık gelen diyagramlar şekil 4.1'de gösterilmiştir.  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  açıları parçacıkların çarpışmadan sonraki yönleri ile vuruş yönü ( $\vec{p}_1$ ) arasındaki açılardır.  $\vec{n}_0$  vektörünün yönünü belirten  $\chi$  merkez açısı ise birinci parçacığın KM sistemindeki dönme açısıdır. Şekilde görüldüğü gibi  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  açıları  $\chi$  açısı ile aşağıdaki gibi;

$$\tan\theta_1 = \frac{m_1 \sin\chi}{m_1 + m_2 \cos\chi} \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \quad (4.4)$$

ifade edilir. Parçacıkların çarpışmadan sonraki hız değerlerinin  $\chi$  açısına bağlılığı;

$$v'_1 = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\chi}}{m_1 + m_2} v, \quad v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\chi}{2} \quad (4.5)$$

formülleriyle verilir.

$\theta_1 + \theta_2$  parçacıkların çarpışmadan sonraki hareket yönleri arasındaki açıdır. Gerçekten;  $m_1 < m_2$  olduğunda  $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$  olur,  $m_1 > m_2$  olduğunda ise

$\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$  olur.

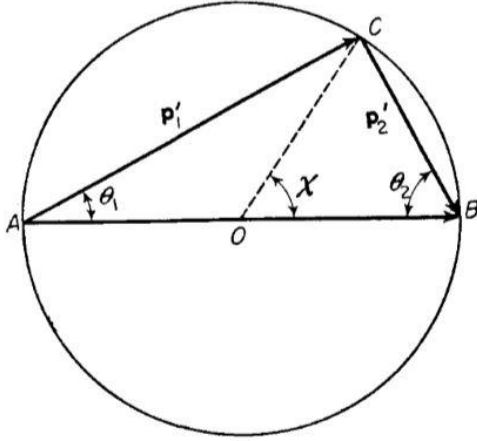
Çarpışmadan sonra parçacıklar aynı doğrultuda hareket ederse  $\chi = \pi$  olur yani, C noktası çemberin çapı üzerinde olup ya A noktasının solunda bulunur, ya da A ve O noktaları arasındadır. Bu durumda parçacıkların çarpışma sonrası hızları;

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \quad \vec{v}'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v$$

olur. Görüldüğü gibi bu  $\vec{v}'_2$ 'nin alabileceği en büyük değerdir. Çarpışma öncesi hareketsiz olan parçacığın çarpışma sonrası sahip olabileceği en büyük enerji ise;

$$E'_{2\max} = \frac{m_2 v_{2\max}^2}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1 \quad (4.6)$$

formülü ile verilir. Burada  $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$  gelen parçacığın ilk enerjisidir.



$$m_1 < m_2 \quad \overrightarrow{AB} = \vec{p}_1; \quad \frac{AO}{OB} = \frac{m_1}{m_2}$$

Şekil 4. 2 Çarpışmadan Sonraki Hızların Diyagramı

$m_1 < m_2$  olduğunda çarpışma sonrası birinci parçacığın hızı istenilen yönde olabilir.

#### 4.1.2. Parçacıkların Esnek Saçılması

Bundan önceki kesimde belirtildiği gibi çarpışma olayını tam açıklamak için ( $\chi$  açısını bulmak için) parçacıklar arasındaki etkileşmeyi göz önüne alarak hareket denklemini çözmek gerekir.

Bir kural olarak önce, söz konusu olaya özdeş olan  $m$  kütleli cismin merkezi (kütle merkezinde yerleşen) durgun olan  $U(r)$  merkezci potansiyelinden saçılması problemi ele alınacaktır.

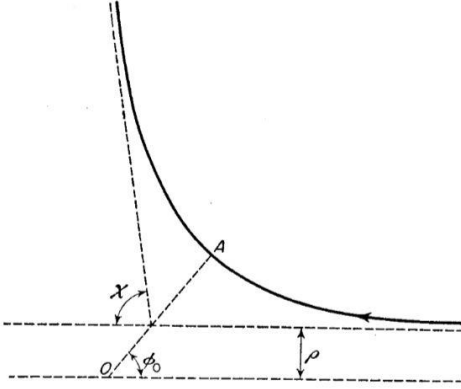
Parçacığın yörüngesi, merkezle ona en yakın (yörünge üzerinde bulunan) olan noktayı birleştiren doğruya (OA doğrusu) göre simetriktir, (bkz. Şekil 4.2). bu nedenle yörüngenin her iki asimptotu söz konusu doğruyu aynı açı altında keser. Bu açıyı  $\varphi_0$  ile gösterirsek, parçacığın merkezi geçen  $\chi$  sapma açısı aşağıdaki gibi;

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0| \quad (4.7)$$

yazılabilir.  $\varphi_0$  açısı ise

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} \quad (4.8)$$

bağıntısından hesaplanmaktadır. Burada;  $r_{\min}$  (4.8) ifadesindeki karekökün içindeki fonksiyonun köküdür.



Şekil 4.3 Saçılma Olayının Geometrik Görünüşü

Sınırsız hareketlerde E ve M büyüklükleri yerine parçacığın sonsuzdaki hızı  $v_\infty$  ve **vuruş paramatresi**  $\rho$ 'dan yararlanmak daha faydalıdır. Burada  $\rho$  gelen parçacığın sonsuza giden doğrultusu ile merkez arasındaki uzaklıktır, diğer deyimle kuvvet alanı olmadığında parçacıkla merkez arasındaki en yakın uzaklıktır, (bkz. Şekil 4.3). Parçacığın enerjisi ve açısal momentumu bu büyüklükler cinsinden aşağıdaki gibi;

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2} M = m, \rho v_\infty \quad (4.9)$$

ifadeleri elde edilir. (4.8) formülü ise;

$$\Phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}} \quad (4.10)$$

gibi yazılabilir.

Fiziksel uygulamalarda, yalnız bir parçacığın sapması ile değil de, saçılma merkezine doğru eşit  $V_\infty$  hızı ile gelen aynı parçacıklar demetinin saçılması olayı ile karşılaşmaktayız. Bu demette bulunan parçacıklar demetinin uzaklıkları farklı olduğundan onlar farklıχ açıları ile saçılacaktır. Birim zamanda  $\chi, \chi + d_\chi$  açıları arasında saçılan parçacıkların sayısını  $dN$  ile göstereyim. Buradaki  $dN$  sayısı gelen parçacıkların yoğunluğuna bağlı olduğundan, saçılma olayını açıklamak için kullanmak uygun değildir. Bu nedenle aşağıdaki fiziksel büyüklük;

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \quad (4.11)$$

Kullanılır. Burada  $n$  birim zamanda demetin birim kesitinden geçen parçacık sayısıdır.

(Burada demetteki parçacık yoğunluğu homojen kabul edilmiştir).  $d\sigma$  büyüklüğü alan biriminde olduğundan buna **saçılma etkin tesir kesiti** denir. Bu büyüklük saçılma olayının en önemli büyüklüğüdür ve saçılma alanının biçimine bağlıdır.

$\chi$  ve  $p'$  nun birbirine bağlılığının bir değerli olduğunu kabul edelim. Bu durum saçılma açısının,  $\chi'$  in  $p'$  ya göre tekdüze azaldığı durumlarda olabilir. Bu durumda  $\chi, \chi + d\chi$  açısı aralığında saçılan parçacıkların sahip olduğu vuruş uzaklıkları  $\rho(\chi)$ ,  $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$  aralığında olabilir. Bu parçacıkların sayısı yarıçapları  $\rho(\chi)$  ve  $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$  olan çemberler arasındaki alanın  $n$  ile çarpımına eşittir, yani  $dN=2\pi\rho d\rho n$ 'dir. Bu nedenle etkin tesir kesiti;

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho \quad (4.12)$$

gibi yazılabilir.

Tesir kesitinin saçılma açısına bağlılığını bulmak için (4.12) formülünün;

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \quad (4.13)$$

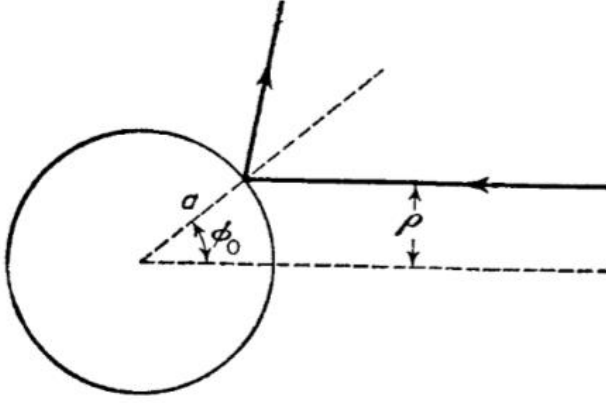
Şeklinde yazılması yeterlidir.  $d\rho/d\chi$  eksi değer de alabildiğinden bu ifadede mutlak değer kullanılmıştır, (eğer  $\rho(\chi)$  çok değerliyse yukarıdaki ifadede  $\rho'$  ların toplamını yazmak gerekir). Genellikle saçılma teorisinde  $d\sigma/d\chi$  değil  $d\sigma/d\Omega$  büyüklüğü kullanılır. Burada  $d\Omega = 2\pi\sin\chi d\chi'$  dir. Bunu göz önüne aldığımızda (4.13) ifadesi;

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\Omega \quad (4.14)$$

biçiminde olur.

Bundan sonra parçacık demetinin herhangi bir hareketsiz kuvvet merkezinden değil de, durgun parçacıktan saçılma olayına bakalım. Bu durumda, daha önce verilen (4.13) formülü, KM sisteminde tesir kesitinin saçılma açısına bağlılığını gösterir. Tesir kesitini L sistemindeki saçılma açısı  $\theta'$  nin bir fonksiyonu olarak bulmak için ise (4.14) formülünü kullanarak  $\chi'$  yi  $\theta$  cinsinden göstermek yeterlidir. Bu durumda hem gelen parçacıkların tesir kesiti için ( $\chi$  açısı  $\theta_1$  ile ifade dilirse), hem de önce durgun olan parçacığın saçılma tesir kesiti için ( $\chi$  açısı  $\theta_2$  ile ifade edilirse) bir ifade bulunur.

Örnek olarak nötronunu  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$  çekirdeğinden esnek saçılma olayını ele alacağımız için, bunun klasik analogu, bir parçacığın kütlesi kendi kütlesinden 40 defa büyük olan bir mutlak katı küresel cisimden (yani  $r < a$  için  $U = \infty$  ve  $r > a$  için ise  $U = 0$ ) saçılma olayını ele alalım.



Şekil 4. 4 Bir Mutlak Sert Parçacığın Kendisinden Çok Ağır Mutlak Sert Cisimden Saçılması Diyagramı  
Küre dışında parçacık serbest olduğundan ve küre içine de giremediğinden saçılan parçacığın yörüngesi küre ile parçacığın dokunma noktasından geçen yarıçapa göre simetrik olan iki doğrudan oluşacaktır. Bu, Şekil 4.4'te gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi:

$$\rho = a \cdot \sin(\varphi_0) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi - \chi}{2}\right) = a \cdot \cos\left(\frac{\chi}{2}\right)$$

Bağıntısı vardır. Böyle bir saçılmanın KM sistemindeki tesir kesiti

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin\chi d\chi = \frac{a^2}{4} d\Omega \quad (4.15)$$

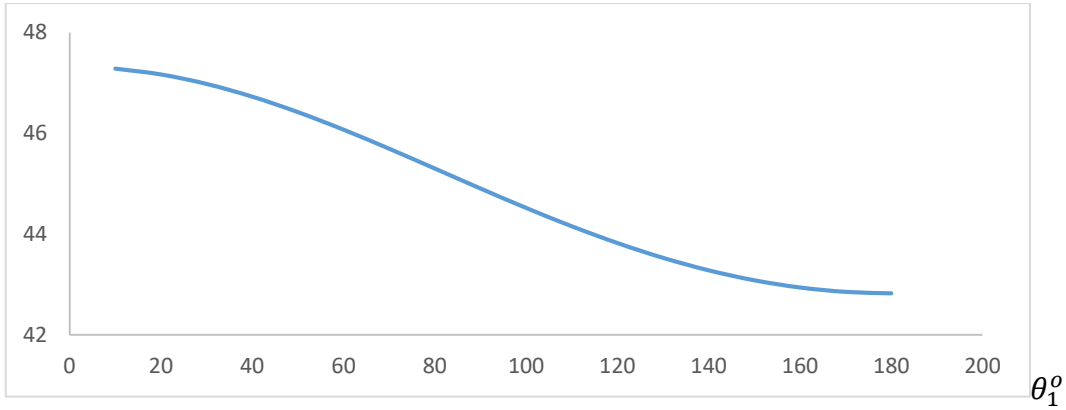
biçimindedir. Görüldüğü gibi KM sisteminde saçılma tesir kesiti izotropdur, yani saçılma açısına bağlı değildir.

Söz konusu saçılmanın tesir kesitinin ‘L’ sistemindeki ifadesi ise;

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4} \left[ 2 \frac{m_1}{m_2} \cos\theta_1 + \frac{1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cos 2\theta_1}{\sqrt{1 - \frac{m_1^2 \sin^2 \theta_1}{m_2^2}}} \right] d\Omega_1 \quad (4.16)$$

Biçimindedir.  $m_2 = 40m_1$ ;  $a = R_c = r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$ ;  $r_0 = 1,24$ ;  $A = 40$  değerleri için  $\frac{d\sigma_1}{d\Omega_1}$  eğrisi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1}, \text{ mb}$$



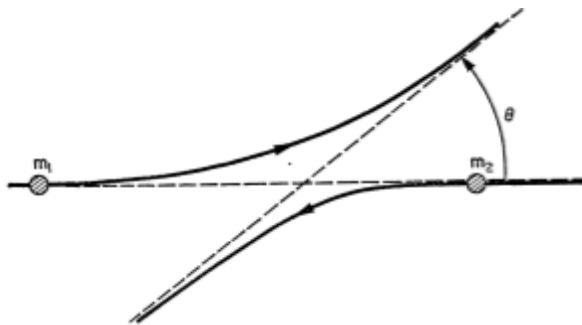
Şekil 4. 5 Klasik teoriye göre esnek saçılmanın diferansiyel tesir kesitinin saçılma açısına bağlılık grafiği

Ele alınan saçılmanın KM sisteminde izotrop olmasına rağmen Laboratuvar sisteminde izotrop olmadığı şekilden açıkça görülmektedir. Bu anizotropluk çarpışan parçacıkların kütle oranına bağlıdır. Kütle oranı sıfıra yaklaştıkça saçılmanın anizotropluğu da kayıp olur. Yani  $\lim_{\frac{m_1}{m_2} \rightarrow \infty} \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega_1} \right]^L = \frac{a^2}{4}$  dir.

## 4.2. Esnek Saçılmanın Kuantum Teorisi

### 4.2.1. Spinsiz Parçacıkların Esnek Saçılması

Kütlesi  $m_1$  olan bir parçacığın kütlesi  $m_2$  ve hareketsiz olan diğer parçacıkla çarpışma olayını inceleyelim. L laboratuvar sisteminde birinci parçacığın koordinatı  $\vec{r}_1$ , ikinci parçacığın koordinatı  $\vec{r}_2$  olsun. Bu iki parçacık arasında etkileşme  $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$  biçiminde gösterilir. Bu iki cisim problemidir ve bilindiği gibi bu tür problemler kütle merkezi (KM) sisteminde  $\mu$  kütleli bir parçacığın diğer parçacığın oluşturduğu potansiyel alanından saçılma problemine indirgenir. Parçacıkların kütle merkezindeki saçılma yörüngeleri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir:



Şekil 4. 6 KM Sisteminde Esnek Saçılma Şeması

$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$  parçacıkların indirgenmiş kütlesi,  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  parçacıklar arasındaki uzaklık ve  $\theta$  ise KM sisteminde saçılma açısıdır.

Saçılma iki türdür: Esnek ve esnek olmayan saçılma. Bu tezde sadece esnek saçılma süreci ele alınacaktır. Tanıma göre esnek saçılma durumunda parçacıkların iç enerjileri değişmez kalır. Böyle saçılmalarda gelen parçacığın saçılmadan önceki  $\vec{p}_a$  momentumunun değeri saçılmadan sonraki  $\vec{p}_b$  momentumun değerine eşit olur:

$$|\vec{p}_a| = |\vec{p}_b| = p$$

Parçacığın  $V(r)$  potansiyel alanından saçılması için Schrödinger denklemi aşağıdaki biçimde yazılır:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(r) = \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2}\psi(r) \quad (4.17)$$

Burada

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \quad (4.18)$$

parçacığın bağlı hareketinin dalga vektörüdür.  $\psi(r)$  Schrödinger denkleminin çözümü-parçacığın dalga fonksiyonudur.  $\nabla^2$  ise Laplace operatörünün radyal kısmıdır:

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \quad (4.19)$$

Sadece  $|\vec{r}| \leq d$  bölgesinde  $V(r)$  potansiyelinin sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Genelde uzayın bu kısmı etki alanı olarak adlandırılır. Etki alanının dışında parçacık serbest olarak hareket eder. Serbest harekette bulunan parçacığın Schrödinger denklemi

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi(r) = 0 \quad (4.20)$$

Biçimindedir. Onun dalga fonksiyonu ise

$$\varphi_a(r) = \exp(ik_a r) \quad (4.21)$$

şeklinde düzlem bir dalgadır(gelen dalga). Söz konusu fonksiyon (4.17) denkleminin homojen kısmının çözümüdür.

Buradaki amac (4.17) denkleminin (4.19) ile verilen düzlem dalga ile potansiyel merkezinden saçılan dalgaların superpozisyonundan oluşan çözümünün bulunmasıdır. Bu tür problemleri Green fonksiyonu aracılığıyla çözmek daha kolaydır. Serbest hareket

operatörünün  $G(\vec{r}/\vec{r}')$  Green fonksiyonu aşağıdaki noktasal kaynak denkleminin çözümüdür:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}/\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.22)$$

Burada  $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$  Dirak delta fonksiyonudur. (4.22) denkleminin çözümü belli ise (yani Green fonksiyonu belli ise) aşağıdaki denklemin:

$$(\nabla^2 + k^2)\Phi(\vec{r}) = A(\vec{r}) \quad (4.23)$$

genel çözümü her zaman:

$$\Phi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + \int G(\vec{r}/\vec{r}') A(\vec{r}') d^3(\vec{r}') \quad (4.24)$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $\varphi(\vec{r})$  fonksiyonu (4.22) denkleminin homojen kısmının çözümüdür:

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi(\vec{r}) = 0 \quad (4.25)$$

Bilindiği gibi saçılan dalgalara karşılık gelen Green fonksiyonu

$$G_{(+)}(\vec{r}/\vec{r}') = -\frac{\exp(ik|\vec{r}-\vec{r}'|)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (4.26)$$

biçimindedir. (4.22)-(4.25) denklemleri aracılığı ile diferansiyel denklemi aşağıdaki integral denklemine indirgenir:

$$\psi(\vec{r})_a(\vec{r}) = \varphi_a(\vec{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{\exp(ik|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}')\psi(\vec{r})_a(\vec{r}') d^3 r' \quad (4.27)$$

Elde edilen bu integral denklemin çözümü saçılma probleminin  $\Psi_a(\vec{r})$  tam dalga fonksiyonudur.

Etki alanından büyük uzaklıklarda ( $r \gg d$ )  $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx kr - \vec{k}_b \vec{r}'$ , burada  $\vec{k}_b = k \frac{\vec{r}}{r}$  olduğu için bu uzaklıklarda  $\psi(\vec{r})_a(\vec{r})$  fonksiyonunun asimptotik değeri

$$\psi(r)_a(\vec{r}) = \varphi_a(\vec{r}) + A_{ba} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r > d \quad (4.28)$$

biçiminde yazılabilir. Burada:

$$A_{ba} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{k}_b \vec{r}'} V(\vec{r}') \psi(r)_a(\vec{r}') d^3 r' \quad (13)$$

veya Dirak parantezleri ile işaretlenirse

$$A_{ba} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \varphi_b | V | \psi(r)_a \rangle \quad (4.29)$$

esnek saçılmanın genliği olarak adlandırılır. Saçılmanın diferansiyel tesir kesiti ile saçılma genliği arasında aşağıdaki bağıntı vardır:

$$d\sigma = \frac{k}{k_a} |A_{ba}|^2 d\Omega \quad (4.30)$$

Burada  $\sigma$  saçılmanın tesir kesiti  $\Omega$  ise katı açıdır.

Böylece saçılmanın tesir kesiti bir değerli olarak saçılma genliği ile belirlendiği görülmektedir. Saçılma genliğinin hesaplanması için ise (4.27) integral denkleminin çözülmesi gerekir.  $V(\vec{r})$  potansiyel enerjisi küçük olduğu durumlarda eşitlik aşağıdaki Born Serisi olarak bilinen bir dizi ardışık ve tekrarlamalı yöntemlerle yaklaşık olarak çözülebilmektedir. Bu durumda çözüm aşağıdaki biçimdedir

$$\psi(r)_a(\vec{r}) = \varphi_a(\vec{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{\exp(ik|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \varphi_a(\vec{r}') d^3 r' + \dots \quad (4.31)$$

Bu denklem (4.29)'de yerine yazıldığında saçılma genliği için aşağıdaki formül bulunur:

$$A_{ab} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \varphi_b | V | \varphi_a \rangle + \left( \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \int \varphi_b^* \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}) \varphi_a(\vec{r}') d^3 r d^3 r' + \dots \quad (4.32)$$

Eğer bu seri yakınsak ise ve bu seride N. terimle yetinirsek böyle bir yaklaşıma N. Born yaklaşımı denir. Örneğin 1. Born yaklaşımında saçılma genliği;

$$A_{ba}^{(B)} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \varphi_b | V | \varphi_a \rangle \quad (4.33)$$

biçiminde yazılır. 1. Born yaklaşımında saçılmanın diferansiyel tesir kesiti

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |\langle \varphi_b | V | \varphi_a \rangle|^2 \quad (4.34)$$

#### 4.2.2 Esnek Saçılmada Born Yaklaşımı

Bu başlıkta esnek saçılma süreci 1. Born yaklaşımında ele alınacaktır. Bunun için 4.2.1 bölümünde saçılma genliği için elde edilen (4.33) formülünü integral şeklinde yazalım.

$$A_{ba}^{(B)} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k}_a - \vec{k}_b)\vec{r}} V(\vec{r}') d^3r \quad (4.35)$$

Burada  $\vec{k}_a$  gelen,  $\vec{k}_b$  ise saçılan parçacıkların dalga vektörüdür. Saçılma zamanı aktarılan momentumu

$$\hbar\vec{q} = \hbar(\vec{k}_a - \vec{k}_b) \quad (4.36)$$

ile gösterelim ve  $|\vec{q}|$ 'nu hesaplayalım:

$$q^2 = k_a^2 + k_b^2 - 2k_a k_b \cos\chi \quad (4.37)$$

Esnek saçılmada  $k_a = k_b = k$  olduğu için

$$q = 2k \sin\left(\frac{\chi}{2}\right) \quad (4.38)$$

ifadesi bulunur. (4.35)-(4.37) formülleri 4.2.1 bölümündeki (4.34) formülünde göz önüne alarak  $\theta$  ve  $\varphi$  açılarına göre integral işlemleri yapılırsa esnek saçılmanın diferansiyel tesir kesiti için aşağıdaki ifade bulunur:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \left| \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty V(r) \cdot r \cdot \sin(qr) \cdot dr \right|^2 \quad (4.39)$$

## 5. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

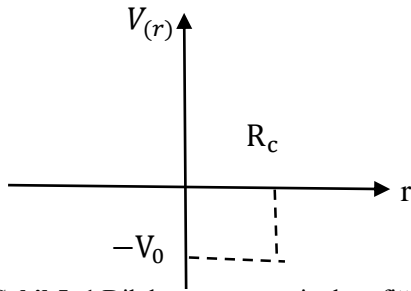
### 5.1. Nötronların Çekirdeklerden Saçılması

Bu bölümde nötronların çekirdekten saçılması olayı ele alınacaktır. Önceki bölümlerde anlatıldığı gibi bu durumda nötron çekirdeğin etrafında oluşturduğu bir  $V(r)$  potansiyelinden saçılacaktır.  $V(r)$  olarak ise Gauss, Dikdörtgen, Saxon-Woods ve diğer potansiyeller kabul edilebilir. Bu potansiyeller içerisinde en gerçekçi olanı Saxon-Woods potansiyelidir. İlk olarak dikdörtgen potansiyelinden saçılma olayı için saçılma tesir kesitini hesaplayalım

#### 5.1.1. Dikdörtgen Potansiyelinden Saçılma

Dikdörtgen potansiyeli aşağıda verilmiş biçimdedir

$$V = \begin{cases} -V_0 & r \leq R_0 \\ 0 & r > R_0 \end{cases} \quad (5.1)$$



Şekil 5. 1 Dikdörtgen potansiyel grafiği

Burada iki serbest parametre vardır. Bunlardan biri  $V_0$  potansiyel kuyunun derinliği, diğeri ise  $R_0$  kuyunun enidir.

$$\begin{aligned} I &= \frac{4\pi}{q} \int_0^{\infty} V(r) \cdot r \cdot \sin(qr) \cdot dr = \left[ \frac{4\pi}{q} [-V_0 \int_0^{R_0} r \cdot \sin(qr) \cdot dr] \right] \\ &= -\frac{4\pi V_0}{q} \int_0^{R_0} r \cdot \sin(qr) \cdot dr \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sonuç olarak aşağıdaki ifade bulunur:

$$I = \frac{4\pi V_0}{q^2} \left[ R_0 \cos(qR_0) - \frac{\cos(qR_0)}{q} \right] \quad (5.3)$$

Diferansiyel tesir kesiti için ise

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \left| \frac{4\pi V_0}{q^2} \left[ R_0 \cos(qR_0) - \frac{\cos(qR_0)}{q} \right] \right|^2 \quad (5.4)$$

ifadesi elde edilir

### 5.1.2. Saxon -Woods Potansiyelinden Saçılma

Herhangi bir çekirdek için Saxon-Woods potansiyeli

$$V(r) = -V_0 \cdot f(r); \quad f(r) = \frac{1}{1+e^{-\frac{r-R_0}{a_0}}} \quad (5.5)$$

biçiminde yazılır. Burada  $f(r)$ - Fermi dağılım fonksiyonu,  $V_0$ -potansiyel kuyusunun derinliği,  $R_0$ - çekirdeğin yarıçapı,  $a_0$ - ise çekirdek sınırının yaygınlık parametresidir. Genelde (1) potansiyeli ile 4.2.2 paragrafında gösterilen formüldeki integral sayısal olarak hesaplanır. Bu çalışmada ise söz konusu integral Saxon-Woods potansiyeli binomial fonksiyonlar cinsinden seriye açılarak analitik olarak çözülecektir.

Bilindiği gibi Fermi dağılım fonksiyonunun binomial fonksiyonlar cinsinden açılımıdır. (H'useyin Koç, Erhan Eser and Cevad Selam, Analytical solution of the Coulomb potential for spherical nuclei, Modern Physics Letters A Vol. 34 (2019) 1950237 (11))

$$\frac{1}{1+e^{-\frac{r-R_0}{a_0}}} = \begin{cases} 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m e^{-\frac{m(r-R_0)}{a_0}}, & r < R_0 \\ \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{-\frac{(m+1)(r-R_0)}{a_0}}, & r > R_0 \end{cases} \quad (5.6)$$

biçimindedir. (5.5) açılımı 4.2.2. paragrafındaki formülde yerine yazılırsa integral kolayca çözülür. Uzun fakat basit matematiksel hesaplamalar sonucunda esnek saçılmanın genliği için aşağıdaki analitik ifade bulunur:

$$A_{ba}^{(B)} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \left( [A_{ba}^{(B)}]_0 + [A_{ba}^{(B)}]_{R_0} + [A_{ba}^{(B)}]_{\infty} \right) \quad (5.7)$$

(5.7) ifadesindeki birinci terim dikdörtgen potansiyelinden saçılma genliğine karşılık gelir (çekirdeğin ana hacminden saçılma genliği):

$$[A_{ba}^{(B)}]_0 = I = \frac{4\pi V_0}{q^2} \left[ R_0 \cos(qR_0) - \frac{\sin(qR_0)}{q} \right] \quad (5.8)$$

(5.7) ifadesindeki ikinci terim çekirdeğin kabuk kısmından saçılma genliğidir ve aşağıdaki analitik formülle belirlenir:

$$[A_{ba}^{(B)}]_{R_0} = -\frac{4\pi V_0}{q} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \int_0^{R_0} r \cdot \sin(qr) e^{\alpha_m(r-R_0)} dr$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4\pi V_0}{q} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(\alpha_m^2 + q^2)^2} \{ \sin(qR_0) [R_0 \alpha_m (\alpha_m^2 + q^2) + q^2 - \alpha_m^2] + \\
&\quad + q \cdot \cos(qR_0) [2\alpha_m - R_0 (\alpha_m^2 + q^2)] - 2\alpha_m e^{-\alpha_m R_0} \} \quad (5.9)
\end{aligned}$$

(5.7) ifadesindeki sonuncu terim ise çekirdeğin “kuyruğundan” saçılma genliğidir ve aşağıdaki analitik formülle ifade edilir:

$$\begin{aligned}
[A_{ba}^{(B)}]_{\infty} &= -\frac{4\pi V_0}{q} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \int_{R_0}^{\infty} r \cdot \sin(qr) e^{-\alpha_m(r-R_0)} dr \\
&= -\frac{4\pi V_0}{q} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{(\alpha_m^2 + q^2)^2} \{ \sin(qR_0) [R_0 \alpha_m (\alpha_m^2 + q^2) - q^2 + \alpha_m^2] + \\
&\quad + q \cdot \cos(qR_0) [R_0 (\alpha_m^2 + q^2)] + 2\alpha_m \} \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Burada  $\alpha_m = \frac{m}{a_0}$  olarak kabul edilmiştir.

Böylece (5.7)-(5.9) formüllerinden 4.2.2'deki formülü ile verilen tesir kesiti analitik olarak hesaplanır

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A_{ba}^{(B)}|^2 \quad (5.11)$$

### 5.1.3. Farklı Enerjiye Sahip Nötronların ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ Çekirdeğinden Saçılması

Bu bölümde kütlesi  $m_n$  olan nötronun  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$  çekirdeğinden esnek saçılma tesir kesitinin farklı saçılma açıları için (5.11) formülü ile hesaplanmış değerleri tablo biçiminde gösterilecektir. Hesaplamalar yapılırken Saxon-Woods potansiyelinin içerdiği parametreleri için Chepurnov (Soloviev V.G. Theory of Complex Nuclei, NAUKA FİZ-MAT, Moscow, 1971) parametrizasyonuna dayanarak aşağıdaki değerler kullanılmıştır:

$$V_0 = 53.3 \text{ MeV}, \quad r_0 = 1.26 \text{ fm}, \quad \alpha_0 = 0.63 \text{ fm}^{-1}$$

Sayısal hesaplamalar FORTRAN-77 programı ile gerçekleştirilmiştir. Program “EK-2”te gösterilmiştir.

Farklı enerjilere sahip nötronların  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$  çekirdeğinden esnek saçılma tesir kesitinin farklı saçılma açılarındaki değerleri aşağıdaki tablolarda gösterilmiştir.

Tabloların birinci sütununda saçılma açıları (derecelerle), ikinci sütununda diferansiyel tesir kesitinin sistematik ve istatistik hataları ile birlikte deneysel değerleri, üçüncü sütunda tesir kesitinin bu çalışmada elde edilen normalize edilmemiş değerleri, dördüncü

sütunda teorik değerlerle (üçüncü sütun) deneysel değerlerin oranı, beşinci sütunda oranların ortalama değerine normalize edilmiş teorik değerler ve sonuncu sütunda ise oranların ortalama değeri gösterilmiştir. Karşılaştırılacak teorik ve deneysel değerler koyu renkte gösterilmiştir.

**Çizelge 5.1** Nötronun  $^{40}_{20}\text{Ca}$  çekirdeğinden esnek saçılma diferansiyel tesir kesitinin saçılma açısına bağlılık grafiği.

$^{40}_{20}\text{Ca}$					
E = 65 MeV					
$\theta^\circ$	J. H. Osborne, et al., PRC70, 054613 (2004) $d\sigma/d\Omega, (mb/sr)$	Bu çalışma (normalize edilmemiş)	Oran	Bu çalışma (normalize edilmiş)	Oranların Ortalaması
7.2	<b>4660±1090±410</b>	90552.47	19.43	<b>6139.15</b>	14.75
9.2	<b>4780±180±340</b>	73646.09	15.41	<b>4992.96</b>	
11.3	<b>3940±180±310</b>	56026.35	14.22	<b>3798.39</b>	
13.3	<b>2600±120±260</b>	40846.05	15.71	<b>2769.22</b>	
15.4	<b>1890±110±210</b>	27571.62	14.59	<b>1869.26</b>	
17.5	<b>1210±50±170</b>	17405.48	14.38	<b>1180.03</b>	
19.5	<b>768±22±142</b>	10492.01	13.66	<b>711.32</b>	
21.6	<b>537±38±127</b>	5689.69	10.59	<b>385.74</b>	

$^{40}_{20}\text{Ca}$					
E = 75 MeV					
$\theta^\circ$	PHYSICAL REVIEW C 70, 054613 (2004) $d\sigma/d\Omega (mb/sr)$	Bu çalışma (normalize edilmemiş)	Oran	Bu çalışma (normalize edilmiş)	Oranların Ortalaması
7.2	<b>4380±1070±440</b>	80438.78	18.37	<b>6497.48*</b>	12.38
9.2	<b>4970±270±380</b>	63258.40	12.73	<b>5109.73</b>	
11.3	<b>2780±170±280</b>	46000.43	16.55	<b>3715.71*</b>	
13.4	<b>2620±150±260</b>	31162.33	11.89	<b>2517.15</b>	
15.4	<b>2200±60±240</b>	20052.48	9.11	<b>1169.48*</b>	
17.5	<b>1130±70±170</b>	11653.79	10.31	<b>941.34</b>	
19.5	<b>632±18±131</b>	6384.73	10.10	<b>515.72</b>	
21.6	<b>307±24±102</b>	3062.01	9.97	<b>247.33</b>	

$^{40}_{20}\text{Ca}$					
E = 85 MeV					
$\theta^\circ$	PHYSICAL REVIEW C 70, 054613 (2004) $d\sigma/d\Omega (mb/sr)$	Bu çalışma (normalize edilmemiş)	Oran	Bu çalışma (normalize edilmiş)	Oranların Ortalaması
7.2	<b>4940±1100±300</b>	71371.69	14.45	<b>6084.54</b>	11.73
9.2	<b>3770±240±220</b>	54233.03	14.39	<b>4623.44*</b>	
11.3	<b>3140±170±200</b>	37651.42	11.99	<b>3209.84</b>	
13.4	<b>2020±130±160</b>	24067.22	11.91	<b>2051.76</b>	
15.4	<b>1450±90±130</b>	14469.77	9.98	<b>1233.57</b>	
17.5	<b>700±41±92</b>	7706.32	11.01	<b>656.97</b>	
19.5	<b>313±41±62</b>	3812.27	12.18	<b>325.00</b>	
21.6	<b>201±29±56</b>	1602.04	7.97	<b>136.57</b>	

$^{40}_{20}\text{Ca}$					
E = 95 MeV					
$\theta^\circ$	PHYSICAL REVIEW C 70, 054613 (2004) $d\sigma/d\Omega$ (mb/sr)	Bu çalışma (normalize edilmemiş)	Oran	Bu çalışma (normalize edilmiş)	Oranların Ortalaması
7.2	3780±900±270	63258.75	16.74	5240.99*	12.07
9.2	3360±210±210	46405.55	13.81	3844.70*	
11.3	2650±170±180	30714.63	11.59	2544.71	
13.4	1600±100±150	18484.41	11.55	1531.43	
15.4	909±54±110	10350.24	11.39	857.52	
17.5	407±56±68	5026.78	12.35	416.47	
19.5	245±46±49	2231.89	9.11	184.91	
21.6	82±28±44	819.14	9.99	67.87	

Esnek saçılma diferansiyel tesir kesitlerinin teorik değerleri deneysel değerlerle karşılaştırıldığında ele alınan bütün enerjilerde teorik değerlerin hemen hemen bütünü (yıldızla gösterilen değerler hariç) deneysel değerleri hataları içerisinde olduğu görülmektedir

## 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

### 6.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında ilk defa olarak Saxon-Woods potansiyeli içeren integral söz konusu potansiyel binomial fonksiyonlar cinsinden seriye açılarak analitik olarak hesaplanmıştır. Diferansiyel tesir kesiti için elde edilen sonuçların hemen hemen bütünü (32 değerden sadece altısı deney hatası dışındadır) deneysel değerlerin hatası içerisinde olduğu görülmüştür. Benzer problemlerdeki integrallerin sayısal hesaplamalarında gereken süre, sunulan tezde elde edilen analitik formül hesaplamaları ile bir hayli azalmaktadır.

Nötronların çekirdeklerden esnek saçılması için bu tezde elde edilen analitik ifadelerin diğer parçacıkların esnek saçılma problemlerinde, esnek saçılmanın optik modelinde ve esnek olmayan saçılma problemlerinde de kullanılabilir olduğu düşüncesindeyim.

**KAYNAKLAR**

- Davidov, A.S. 1967. “*Kvantovaya Mekanika*”, FM Yayıncılık, Moskova.
- Holmqvist, B., Johansson, S.G., Kiss, A., Lodin, G., and Wiedling, T. Neutron Elastic Scattering Cross Sections of Iron and Zinc in the Energy Region 2.5 to 8.1 MeV, AE-337.
- Koç, H., Eser, E., and Selam, C. 2019. Analytical solution of the Coulomb potential for spherical nuclei, *Modern Physics Letters A*, 34 (11), 195-237.
- Krasnoselski, M.A. 1962, *Positive Solutions of Operator Equations*, “Fizmatgiz”.
- Krasnov, M. L. 1971, *Integral Equations (Integralniye Urovneniya)* “Nauka” Moscow.
- Lalesco, T. 1912, *Introduction a la theorie des equations, integrales*, Paris.
- Landau, L.D., and Lifshitz, E.M. 2000, “*Kuantum Mekaniği*”, Bilim Yayıncılık, Ankara.
- Mikhlin, S.G. 1947, *Applications of Integral Equations to Certain Problems of Mechanics*, Mathematical Physics and Engineering “Gostekhizdat”.
- Mikhlin, S.G. 1959, *Lectures on linear Integral Equations*, “Fizmatgiz”.
- Osborne, J., Brady, P., Romero, J., Ullmann, J., Sorenson, D., Ling, A., King, N., Haight, R., Rapaport, J., Finlay, R., Bauge, E., Delaroche, J. 2004. Measurement of neutron elastic scattering cross sections for  $^{12}\text{C}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ , and  $^{208}\text{Pb}$  at energies from 65 to 225 MeV. *Physical Review C - PHYS REV C*. 70. 10.1103/PhysRevC.70.054613.
- Privalov, I.I. 1937, *II. Integral Equations*, “Gostekhizdat”.
- Petrovsky, I.G. 1965, *Lectures on Theory of Integral Equations*, “Nauka”.
- Rezaur Rahman, A.K.M. 2012, Neutron cross-sections for  $^{55}\text{Mn}$  in the energy range from 0.2 to 22 MeV, *Turkish Journal of Physics*, 36, 343 – 351. c TÜBİTAK doi:10.3906/fiz-1107-3.
- Sobolev, S.A. 1966, *Equations of Mathematical Physics*, “Nauka”.
- Soloviov, V.G. 1971 *Theory of Complex Nuclei*, NAUKA FİZ-MAT, Moscow.
- Uryson, P.S. 1951, On the Uniqueness of Solution of Linear Volterra Integral Equations. *Transactions in Topology and Other Fields of Mathematics*, vol.1, pp.78-84, “Gostekhizdat”.

**EK 1****EK-1: RORTRAN-77 PROGRAMI**

C BU PROGRAM PARÇACIKLARIN ESNEK SACILMASINI HESAPLAR

(08.08.2019)13:28

DIMENSION

SIGV(500),SIGWV(500),SIGWY(500),SIGVSO(500),SIGWSO(500)

DIMENSION SIMP(1000),VINT(1000)

OPEN(23,FILE='ESSACIL',STATUS='OLD')

WRITE(\*,\*)'N,VH,RVV,AVV,E,A GIRINIZ'

READ(\*,\*)N,VH,RVV,AVV,E,A

WRITE(23,\*)'HACIM PARAMETRELERI',VH,RVV,AVV,E,A

WRITE(\*,\*)'VY,RVY,AVY-YUZEY DEGERLERINI GIRINIZ'

READ(\*,\*)VY,RVY,AVY

WRITE(23,\*)'YUZEY PARAMETRELERI',VY,RVY,AVY

$RVV=RVV*A**(1./3.)$

$RVY=RVY*A**(1./3.)$

$AMN=939.565378*A/(A+1)$

$AMP=938.272029*A/(A+1)$

$HX=197.327$

$SABIT=(AMN/6.283/HX/HX)**2$

$AK=SQRT(2.*AMN*E/(HX**2))$

WRITE(\*,\*) SABIT,AK

$BET=2.*AK*SIN(TET/2)$

SIMP(1)=1.

SIMP(400)=1.

DO 2 I=2,399

FAZ=(-1.)\*\*I

DS=4.

IF(FAZ.LT.0.)DS=2

SIMP(I)=DS

2 CONTINUE

DTET=0.05

DO 6 ITET=1,N

TET=ITET\*DTET

BET=2.\*AK\*SIN(TET/2.)

SUM=0.

SUMY=0.

DH=0.1

C BURADAN DOĞRUDAN INTEGRAL HESABI BAŞLAR

DO 4 I=1,400

RX=I\*DH

FER=1./(1.+EXP((RX-RVV)/AVV))

FERY=1./(1.+EXP((RX-RVY)/AVY))

VINT(I)=FER\*RX\*SIN(BET\*RX)

VINTY=FERY\*(BET\*RX\*COS(BET\*RX)+SIN(BET\*RX))

SUM=SUM+VINT(I)\*SIMP(I)

SUMY=SUMY+VINTY\*SIMP(I)

4 CONTINUE

SUM=SUM\*DH/3.

VHBET=- (4.\*3.1415\*VH/BET)\*SUM

SUMY=SUMY\*DH/3.

VHBETY=(4.\*3.1415\*VY\*AVY/BET)\*SUMY

VHBETDD=(4.\*3.1415\*VH/BET\*\*3)\*(BET\*RVV\*COS(BET\*RVV)-  
SIN(BET\*RVV))

TKINT=SABIT\*VHBET\*VHBET

TKINTVY=SABIT\*(VHBET+VHBETY)\*\*2

TKDD=SABIT\*VHBETDD\*\*2

C BURADAN HÜSEYİN YÖNTEMİ BAŞLAR

TKT=0.

TKTY=0.

DO 8 KK=1,200

ALF=KK/AVV

TKT=TKT+(-1.)\*\*KK\*(EFH(RVV,ALF,BET,RVV)+EFH(RVV,-  
ALF,BET,RVV)-

\*EFH(0.,ALF,BET,RVV))

ALFY=KK/AVY

```

      TKTY=TKTY+(-1.)**KK*(FIY(RVY,ALFY,BET,RVY)+FIY(RVY,-
ALFY,BET,RVY)

```

```

      *-FIY(0.,ALFY,BET,RVY))

```

```

8 CONTINUE

```

```

      TK=(4.*3.1415*VH/BET)*(TKT+(SIN(BET*RVV)-
      *BET*RVV*COS(BET*RVV))/BET**2)

```

```

      TKY=4.*3.1415*VY*AVY*(TKTY+RVY*SIN(BET*RVY))/BET

```

```

      TKV=SABIT*TK**2

```

```

      TKY=SABIT*(TKY-TK)**2

```

```

WRITE(23,10)TET,TKINT*10.,TKINTVY*10.,TKV*10.,TKY*10

```

```

10 FORMAT(5(2X,F15.5))

```

```

C PAUSE

```

```

6 CONTINUE

```

```

      STOP

```

```

      END

```

```

      FUNCTION EFH(R,A,B,RC)

```

```

      A2B2A=A*A+B*B

```

```

      A2B2E=A*A-B*B

```

```

      FH=EXP((R-RC)*A)*(A*R-A2B2E/A2B2A*SIN(B*R)-
      *(B*R-2.*A*B/A2B2A)*COS(B*R))

```

```

      EFH=FH/A2B2A

```

```

      RETURN

```

```

      END

```

```

      FUNCTION FIY(R,A,B,RC)

```

```

      A2B2A=A*A+B*B

```

```

      A2B2E=A*A-B*B

```

```

      FH=A*SIN(B*R)-B*COS(B*R)+B*((A*R-A2B2E/A2B2A)*COS(B*R)+
      *(B*R-2.*A*B/A2B2A)*SIN(B*R))

```

```

      FIY=FH*EXP((R-RC)*A)/A2B2A

```

```

      RETURN

```

```

      END

```

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Hasret CİNAKLI  
**Uyruğu** : T.C  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Genç 01/09/1990  
**Telefon** : 5344614310  
**Faks** :  
**e-mail** : hsrtcikli.21@gmail.com

### EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Ziya Gökalp Yda Ağırlıklı Süper Lise	2006
Üniversite	: Muş Alparslan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2015
Yüksek Lisans	: Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik (YL) (Tezli)	2019
Doktora	:	

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2016-2020	Özel Malabadi Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

### YABANCI DİLLER

İngilizce