



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İSTATİSTİKSEL KOMPAKT OPERATÖRLER**

**Ramazan SELEN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Haziran-2023**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İSTATİSTİKSEL KOMPAKT OPERATÖRLER**

**Ramazan SELEN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Abdullah AYDIN**

**Haziran-2023**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL ve ONAYI

Ramazan SELEN tarafından hazırlanan “İstatistiksel Kompakt Operatörler” adlı tez çalışması 26/05/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

#### Başkan

Prof. Dr. Muhammed ÇINAR  
Muş Alparslan Üniversitesi, Matematik Bölümü

.....

#### Danışman

Doç. Dr. Abdullah AYDIN  
Muş Alparslan Üniversitesi, Matematik Bölümü

.....

#### Üye

Dr. Öğr. Üyesi Mahir DEMİR  
Giresun Üniversitesi, Matematik Bölümü

.....

Yukarıdaki sonuç;  
Enstitü Yönetim Kurulu ...../...../..... Tarih ve ...../..... nolu kararı  
ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI  
FBE Müdürü

Bu tez çalışması TÜBİTAK tarafından 2210-A Yurt içi Genel Yüksek Lisans Burs Programı ile desteklenmiştir.

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İMZA

Ramazan SELEN

Tarih:26/05/2023

# ÖZET

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

### İSTATİSTİKSEL KOMPAKT OPERATÖRLER

**Ramazan SELEN**

**Muş Alparslan Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Abdullah AYDIN**

Riesz uzayları üzerinde istatistiksel sıra sınırlı ve istatistiksel sıra süreklilik operatör kavramları daha önce çalışılmıştır. Bu çalışmada, istatistiksel sıra yakınsaklık kavramı kullanarak istatistiksel kompakt operatörler kavramını tanımlayıp, temel sonuçlar verilmektedir.

**2023, 25 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Kompakt Operatör, Riesz Uzay, Sıra Sınırlı, Sıra Süreklilik, Sıra Yakınsaklık.

**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**STATISTICAL COMPACT OPERATORS**

**Ramazan SELEN**

**Muş Alparslan University  
Natural and Applied Science  
Department of Mathematics**

**Advisor: Assoc. Prof. Dr. Abdullah AYDIN**

The concepts of statistical order bounded and statistical order continuous operators on Riesz spaces have been studied recently. In this study, we introduce the concept of statistical compact operators and some basic results by using the concepts of statistical order convergence.

**2023, 25 Pages**

**Keywords:** Compact Operator, Order Bounded, Order Continuity, Order Convergence, Riesz Space.

## TEŐEKKÖR

Bu alıőmanın yazımında desteğini ve rehberliğini eksik etmeyen kıymetli hocam Sayın Do. Dr. Abdullah AYDIN' a, ‘‘TÖBİTAK 2210-A Yurt ii Genel YÖksek Lisans Burs’’ desteğinden dolayı TÖBİTAK kurumuna ve varlığını her daim yanımda hissettiğim eőim Aytöl SELEN'e ve biricik kızlarıma teőekkÖr ediyorum.

Ramazan SELEN  
MUŞ-2023



## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ .....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	3
3. TEMEL KAVRAMLAR .....	5
3.1 Riesz Uzayları.....	5
3.1. İstatistiksel Yakınsaklık.....	9
4. İSTATİSTİKSEL SÜREKLİ OPERATÖRLER.....	13
5. İSTATİSTİKSEL KOMPAKT OPERATÖRLER.....	15
KAYNAKLAR .....	23

## SİMGELER ve KISALTMALAR

### Simgeler

$A^d$	: $A$ 'nın dik tümleyeni.
$\delta(A)$	: $A$ kümesinin doğal yoğunluğu.
$ A $	: $A$ kümesinin eleman sayısı(kardinaliesi).
$e$	: $E$ 'nin birimi.
$\theta$	: $E$ 'nin null elemanı.
$E^+$	: $E$ 'nin pozitif kısmı.
$L(E, F)$	: $E$ 'den $F$ 'e tüm operatörlerin uzayı.
$L_b(E, F)$	: $E$ 'den $F$ 'e tüm sıra sınırlı operatörlerin uzayı.
$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi.
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi.
$x = x_n$	: Reel sayılarda bir dizi.
$x \vee y$	: $x$ ve $y$ 'nin supremumu.
$x \wedge y$	: $x$ ve $y$ 'nin infumumu.
$x^+$	: $x$ ve $0$ 'ın (vektör uzayının sıfırı) supremumu.
$x^-$	: $x$ ve $0$ 'ın infumumu.
$ x $	: $x$ ve $-x$ 'nin supremumu.
$x \perp y$	: $ x $ ve $ y $ 'nin infumumu sıfırdır.
$x_n \downarrow x$	: $(x_n)$ aşağı yönlendirilmiş bir dizi olup infumumu $x$ 'dir.
$x_n \uparrow x$	: $(x_n)$ yukarı yönlendirilmiş bir dizi olup supremumu $x$ 'dir.
$st_0$ -kompakt	: İstatistiksel sıra kompakt.
$st_0$ -sınırlı	: İstatistiksel sıra sınırlı.
$st_0$ -sürekli	: İstatistiksel sıra süreklilik.

## 1. GİRİŞ

Riesz uzaylarında yapılan çalışmaların ilki 1928 yılında Bologna'da yapılan bir kongrede Frigyes Riesz'in lineer fonksiyonların ayrışımı isimli makalesi kabul edilir. Riesz uzaylar, kısmi sıralı vektör uzayların özelleştirilmesi olan kafes yapısını içeren vektör uzaylardır. Analizde kullanılan birçok uzay aslında Riesz uzaydır. Bu alanda temel çalışmalar 1930'lu yıllarda Kantorovich (1937) ve Freudenthal (1936) tarafından yapılmıştır. Riesz uzaylar, matematiksel analiz ve çalışmaların sonucunda ölçüm teorisi ve ekonomi gibi alanlarda uygulama alanı bulmuştur (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003).

Bir  $E$  kümesi üzerinde tanımlanan  $\leq$  bağıntısı; yansıma, ters simetri ve geçişken özelliklerini sağlarsa  $E$  kümesine *sıralı küme* denir. Bir  $E$  vektör uzayı üzerinde bir  $\leq$  sıralama bağıntısı tanımlanmış olsun. Her  $x, y \in E$  için;

$$(i) \quad x \leq y \text{ iken her } z \in E \text{ için } x + z \leq y + z,$$

$$(ii) \quad x \leq y \text{ iken } \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \alpha x \leq \alpha y,$$

şartları sağlanırsa  $E$  uzayına *sıralı vektör uzay* denir.

$E$  sıralı bir küme olsun. Eğer  $E$  üzerindeki sıralamaya göre her  $x, y$  elemanı supremum ve infimuma sahip ve bu elemanlar kümeye ait ise  $E$  kümesine bir *kafes* denir.  $E$  bir sıralı vektör uzayı ise  $E'$ 'ye *Riesz uzayı* veya *kafes uzayı* adı verilir.

$E$  ve  $F$  iki sıralı vektör uzayı olmak üzere bir  $T: E \rightarrow F$  doğrusal dönüşümü kısaca  $E$ 'den  $F$ 'e bir *operatör* olarak adlandırılır. Ayrıca her bir  $x \in E_+$  için,  $0 \leq T(x)$  şartı sağlanırsa  $T$  operatörüne *pozitif operatör* denir ve  $0 \leq T$  şeklinde gösterilir. Bu çalışmamızda ele alacağımız tüm operatörler doğrusallık şartını sağlamaktadır.

Dizilerde klasik yakınsaklıktan farklı olarak istatistiksel yakınsaklık, limit noktasının komşuluğunun dışında kalan terimlerin indis kümesinin yoğunluklarının sıfır olmasıdır. Bu durumda yakınsak bir dizi aynı zamanda istatistiksel olarak yakınsak olur. Ancak tersi doğru olmak zorunda değildir. Fonksiyonel analizde önemli bir yer tutan istatistiksel yakınsaklık birçok matematikçi tarafından aktif olarak çalışılmaktadır.

Bir  $E$  Riesz uzayında  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi verilsin. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $|x_n - x| \leq p_n$  olacak şekilde  $p_n \downarrow \theta$  olan bir  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi mevcut ise  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $x \in E$  noktasına *sıra yakınsaktır* denir ve  $x_n \xrightarrow{o} x$  sembolüyle gösterilir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı ise  $\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesinin yoğunluğuna bağlıdır.  $\mathbb{N}$ 'nin bir  $K$  alt kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\{k \in K: k \leq n\}|$$

ile tanımlanır. Burada  $|\{k \in K: k \leq n\}|$  ifadesi,  $n$ 'i aşmayan  $K$ 'nin elemanların sayısını göstermektedir. Eğer;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| > \varepsilon\}| = 0$$

limiti her  $\varepsilon > 0$  sayısı için sağlanırsa  $(x_n)$  dizisi  $L$  sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve  $S - \lim x_k = L$  ile gösterilir.

$E$  ve  $F$  normlu uzayları arasında tanımlanan bir  $T$  operatörü altında, birim yuvarın görüntüsü relatively kompakt ise bu operatöre *kompakt operatör* denir. Eşdeğer olarak, her normlu dizi bir alt dizeye sahiptir ve dizinin  $T$  altındaki görüntüsü yakınsaktır. Biz buradan faydalanarak Riesz uzaylar arasında istatistiksel sıra yakınsamaya göre kompakt operatörlerin tanımını vereceğiz.

Bu çalışmanın üçüncü bölümü olan temel kavramlar kısmında Riesz uzayları ve istatistiksel sıra yakınsaklık ile alakalı temel kavramlar verilecektir. Dördüncü bölümde istatistiksel sıra yakınsaklık kavramını kullanarak Riesz uzaylar üzerindeki sıra yakınsaklık tanımından yola çıkıp, istatistiksel sıra süreklilik kavramını ifade edeceğiz. Beşinci bölümde ise istatistiksel kompakt operatörler tanımlanarak sonuç ve teoremler tanımlanacaktır. Çalışmamız “Statistical Order Continuous Operators On Riesz Spaces” (Aydın ve ark., 2023) isimli makale referans alınarak ve makalenin temel tanım, teoremleri kullanılarak oluşturulmuştur.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Riesz uzayları sıralı vektör uzayının tarihini, F. Riesz' in 1928' deki Bologna'da yayınlanan Uluslararası Matematik Kongresi'ndeki çalışmasına dayandırıldığını giriş kısmında da ifade etmiştik (Riesz, 1928). Devamında ise L.V. Kantorovich (1937) ve H. Freudenthal (1936) tarafından ilk çalışmaları yapılan Riesz uzayları teorisi, günümüze kadar çeşitli araştırmalara konu olmuştur. Daha sonra bu alana ilgi artmış ve Yosida (1938), Nakano (1948), Ogasawara (1957) ve Vulikh (1967) gibi matematikçiler çeşitli çalışmalar yapmıştır. Riesz uzayları; fonksiyon cebirleri, diferansiyel denklemler, fuzzy uzayları, optimizasyon, ölçü ve operatör teorileri gibi matematiğin farklı alanlarında ve ekonomi uygulamalarında (Aliprantis ve Burkinshaw, 2003) çalışma alanı edinmiştir.

Fonksiyonel analiz teorisinde istatistiksel yakınsaklık büyük bir öneme sahiptir. İstatistiksel yakınsaklık fikri ilk olarak Zygmund'un (1935) monografisinde ortaya atılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık kavramının temelleri Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından bağımsız olarak verilmiştir. Buck (1953) ve Schoenberg (1959) tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramı reel ve karmaşık diziler için araştırılmıştır. Fridy (1985) istatistiksel Cauchy dizisi kavramını tanıttı ve bunun istatistiksel yakınsamaya eş değer olduğunu gösterdi. Fridy (1985) istatistiksel monotonluk kavramına girmiş ancak istatistiksel yakınsaklık için monoton yakınsaklık teoremi Tripaty (1998) tarafından verilmiştir. Pehlivan ve Mamedov (2000) tarafından  $\mathbb{R}^n$ 'de istatistiksel yakınsaklık incelenmiştir. Ercan (2009) Riesz uzayları üzerinde ilk defa istatistiksel yakınsaklığın bir karakterizasyonunu tanıttı. Şençimen ve Pehlivan (2012) Riesz uzayları üzerinde istatistiksel monoton yakınsaklık ve istatistiksel sıra yakınsaklık kavramını verdi. Son dönemlerde Aydın ve ark., (2018) kafes normlu uzaylar üzerinde kompakt operatörleri, sınırsız sıra yakınsaklık kavramından faydalanarak incelemiştir. Aydın (2019) katı Riesz uzaylarında filtre yoluyla yakınsamayı çalışmıştır. Daha sonra Aydın ve ark., (2019) kafes normlu vektör kafeslerinde sınırsız  $p$ -yakınsamayı çalışmıştır. Aydın (2020) yerel olarak katı Riesz uzaylarında istatistiksel olarak sınırsız  $\tau$ -yakınsaklığını çalışmıştır. Daha sonra Aydın ve ark., (2021) Riesz uzaylarında  $\lambda$ -istatistiksel yakınsaklık kavramını incelemiştir. Aydın ve ark., (2021) Riesz uzaylarında tam kafes yakınsaklık kavramını çalışmıştır. Aydın (2022) Riesz uzaylar üzerinde istatistiksel sınırsız sıra yakınsama kavramını çalışmıştır. Temizsu ve Aydın (2022) tarafından yerel olarak katı Riesz uzaylarında ağların istatistiksel yakınsaması çalışılmıştır. Aydın (2022) kafes normlu Riesz uzaylarda istatistiksel sınırsız  $p$ -yakınsamayı çalıştılar.

Aydın ve ark., (2023) Riesz uzayları üzerinde istatistiksel sıra yakınsak operatörleri çalıştılar.



### 3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar ile birlikte bazı teorem ve önermelere yer verilmiştir. Bunun yanında ifade edeceğimiz çeşitli tanım, teorem, sembol ve notasyonlar Riesz uzaylarının temel argümanlarıdır. Bu argümanlar (Vulikh, 1967; Luxemburg ve Zaanen, 1971; Zaanen, 1983; Huijsmans, 1991; Răbiger, 1991; Gutman, 1996; Wickstead, 2001; Abramovich ve Aliprantis, 2002; Aliprantis ve Burkinshaw, 2003; Aliprantis ve Burkinshaw, 2006; Şençimen ve Pehlivan, 2012; Albayrak ve Pehlivan, 2012; Aydın, 2021; Aydın ve ark., 2021) çalışmalarından alınmıştır.

#### 3.1 Riesz Uzayları

**Tanım 3.1**  $E$  boştan farklı bir küme ve  $\leq E$ 'de bir bağıntı olsun. Eğer;

- 1) Her  $x \in E$  için  $x \leq x$ ,
- 2) Her  $x, y \in E$  için  $x \leq y$  ve  $y \leq x$  iken  $x = y$ ,
- 3) Her  $x, y, z \in E$  için  $x \leq y$  ve  $y \leq z$  iken  $x \leq z$ ,

şartları sağlanırsa  $E$ 'ye *kısmi sıralı küme* denir ve  $(E, \leq)$  şeklinde gösterilir.

Eğer kısmi sıralanmış bir kümede her eleman, tanımlanan bağıntıya göre birbirleriyle karşılaştırılabilirse bu kümeye *tam sıralı küme* denir.

**Tanım 3.2**  $E$  gerçel vektör uzayı ve  $\leq E$ 'de bir sıralama bağıntısı olsun. Eğer;

- 1) Her  $x, y, z \in E$  için  $x \leq y$  iken  $x + z \leq y + z$ ,
- 2) Her  $x, y \in E$ ,  $0 \leq \lambda \in R$  için  $x \leq y$  iken  $\lambda x \leq \lambda y$ ,

şartları sağlanıyorsa  $(E, \leq)$  uzayına *sıralı vektör uzay* denir.

**Tanım 3.3**  $E$  sıralı vektör uzayı ve  $V \subseteq E$  alt vektör uzayı olmak üzere  $E$ 'den gelen sıralama ile  $V$  bir sıralı vektör uzayıdır. Bu durumda  $V$ 'e *sıralı alt vektör uzayı* denir.

**Tanım 3.4**  $E$  bir sıralı vektör uzayı,  $A$  ise bu uzayın herhangi bir alt uzayı olsun. Eğer;

- 1) Her  $x \in A$  için  $x \leq z$ ,
- 2) Her  $x \in A$  için  $x \leq y$  olacak şekilde ki her  $y \in E$  için  $z \leq y$ ,

koşullarını sağlayan bir  $z \in E$  bulunabiliyorsa  $z$  elemanına  $A$  kümesinin *supremumu* denir ve  $\sup(A) = z$  ile gösterilir. Benzer olarak eğer;

- 1) Her  $x \in A$  için  $z \leq x$ ,
- 2) Her  $x \in A$  için  $y \leq x$  olacak şekildeki her  $y \in E$  için  $y \leq z$ ,

koşullarını sağlayan bir  $z \in E$  bulunabiliyorsa  $z$  elemanına  $A$  kümesinin *infimumu* denir ve  $\inf(A) = z$  ile gösterilir.

**Tanım 3.5**  $E$  sıralı vektör uzayı ve  $\theta$ ,  $E$ 'nin sıfır vektörü olsun.  $\theta \leq x$  şartını sağlayan  $E$ 'nin  $x$  elemanına *pozitif eleman* denir.  $E$ 'nin bütün pozitif elemanlarının kümesi;

$$E_+ = \{ x \in E : \theta \leq x \}$$

şeklinde ifade edilir.

**Tanım 3.6**  $E$  sıralı bir küme olsun. Eğer  $E$  üzerindeki sıralamaya göre her  $x, y$  elemanı supremum ve infimuma sahip ve bu elemanlar  $E$ 'e ait ise  $E$  kümesine bir *kafes* denir. Eğer  $E$  bir vektör uzay ise  $E$ 'e *Riesz uzayı* veya *vektör kafes* adı verilir.

Aşağıda bazı Riesz uzay örnekleri verilmiştir.

### Örnek 3.1

- 1)  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ve  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere;

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

şeklinde tanımlanan  $\leq$  koordinatsal sıralamasıyla birlikte  $\mathbb{R}^n$  Öklid uzayı bir Riesz uzayıdır.

- 2)  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ve  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere;

$$x \leq y \Leftrightarrow x_1 < y_1 \text{ veya } x_1 = y_1$$

ve

$$x_2 < y_2 \text{ veya } x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{n-1} = y_{n-1}, x_n \leq y_n$$

şeklinde tanımlanan  $\leq$  lexicographic sıralamasıyla birlikte  $\mathbb{R}^n$  Öklid uzayı tam sıralı bir Riesz uzayıdır.

- 3)  $\mathbb{R}^X$  bir  $X$  kümesi üzerinde tanımlı tüm reel değerli fonksiyonların ailesini belirsin.  $f, g \in \mathbb{R}^X$  olmak üzere;

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } f(x) \leq g(x)$$

ile tanımlı olan  $\leq$  noktasal sıralamasıyla birlikte  $\mathbb{R}^X$  bir Riesz uzayıdır.

- 4)  $(\Omega, \tau)$  bir topolojik uzay olmak üzere, tüm  $x \in \Omega$  elemanları için  $C(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ sürekli fonksiyon}\}$  kümesinde alınan her  $f, g \in C(\Omega)$  için  $f \leq g$  ancak ve ancak  $f(x) \leq g(x)$  sağlanır. Tanımlanan  $C(\Omega)$  uzayı noktasal sıralama ile bir Riesz uzayıdır.

**Tanım 3.7**  $E$  Riesz uzayı ve  $G$ ,  $E$ 'nin bir alt vektör uzayı olsun. Eğer her  $x, y \in G$  için  $x \vee y \in G$  veya  $x \wedge y \in G$  ise  $G$ 'e  $E$ 'nin *Riesz alt uzayı* denir.

**Tanım 3.8**  $(E, \leq)$  bir Riesz uzayı olsun. Eğer  $E$ 'nin en küçük elemanı varsa buna *sıfır eleman* denir ve  $\theta$  ile gösterilir. Eğer  $E$ 'nin en büyük elemanı varsa buna *birim eleman* denir ve  $e$  ile gösterilir.

**Tanım 3.9**  $E$  bir Riesz uzayı ve  $0 < e \in E$  olsun. Eğer  $I_e = E$  sağlanır ise  $e$ 'e *güçlü birim* denir.  $B_e = E$  ise  $e$ 'e *zayıf birim* denir.

**Teorem 3.1**  $E$  Riesz uzayı ve  $A \subseteq E$  boştan farklı bir küme olsun. Eğer  $\sup A$  varsa her  $x \in E$  için  $\sup(x \wedge A)$  vardır ve  $\sup(x \wedge A) = x \wedge \sup A$ 'dır. Benzer şekilde eğer  $\inf A$  varsa her  $x \in E$  için  $\inf(x \vee A)$  vardır ve  $\inf(x \vee A) = x \vee \inf A$ 'dır.

**Tanım 3.10**  $(E, \leq)$  bir Riesz uzayı olsun. Eğer her  $x, y, z \in E$  için;

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

eşitliği sağlanıyorsa  $E$ 'e *dağılmalı kafes* denir.

**Teorem 3.2**  $E$  bir Riesz uzayı ve her  $x, y, z \in E$  için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i)  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$  ve  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ .
- (ii)  $x \vee y = y \vee x$  ve  $x \wedge y = y \wedge x$ .
- (iii)  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$  ve  $x \vee (y \vee z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ .
- (iv)  $x \leq y \Rightarrow x \vee (x \wedge z) \leq y \wedge (x \vee z)$ .
- (v)  $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$  ve  $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ .
- (vi)  $x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ .

**Teorem 3.3**  $E$  bir Riesz uzayı ve  $x, y, z \in E$  olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

- (i)  $x \vee y = - [(-x) \wedge (-y)]$ .
- (ii)  $x \wedge y = - [(-x) \vee (-y)]$ .
- (iii)  $x + y = x \vee y + x \wedge y$ .
- (iv)  $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ .
- (v)  $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$ .
- (vi)  $a \in \mathbb{R}$  için  $a \cdot (x \vee y) = a \cdot x \vee a \cdot y$  ve  $a \cdot (x \wedge y) = a \cdot x \wedge a \cdot y$ .
- (vii)  $x = x^+ + x^-$ .
- (viii)  $|x| = x^+ + x^-$ .
- (ix)  $x^+ \wedge x^- = 0$ .
- (x)  $x = (x - y)^+ + x \wedge y$ .
- (xi)  $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$ .

**Teorem 3.4**  $E$  Riesz uzayı ve her  $x, y, z \in E$  olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler sağlanır.

- (i)  $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$  ve  $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$ .
- (ii) Eğer  $x, y, z \geq 0$  ise  $x \wedge (y + z) \leq x \wedge y + x \wedge z$ .

**Teorem 3.5**  $E$  sıralı vektör uzayı için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i)  $E$  bir Riesz uzayıdır.

- (ii) Her  $x \in E$  için  $x^+ \in E$ 'dir.
- (iii) Her  $x \in E$  için  $x^- \in E$ 'dir.
- (iv) Her  $x \in E$  için  $|x| \in E$ 'dir.

**Tanım 3.11**  $E$  Riesz uzayı ve  $A, B \subseteq E$  boştan farklı iki küme olsun. Aşağıdaki tanımlamalar yapılır.

- 1)  $A^+ = \{a^+ : a \in A\}$ .
- 2)  $A^- = \{a^- : a \in A\}$ .
- 3)  $|A| = \{|a| : a \in A\}$ .

**Tanım 3.12**  $E$  bir Riesz uzayı ve  $x \in E$  olsun.  $x \vee 0$  elemanına  $x$ 'in pozitifli denir ve  $x^+$  ile gösterilir.  $(-x) \vee 0$  elemanına  $x$ 'in negatifli denir ve  $x^-$  ile gösterilir.  $(-x) \vee x$  elemanına  $x$ 'in modülü (mutlak değeri) denir ve  $|x|$  ile gösterilir.

Her  $x, y \in E$  için  $x \wedge y = 0$  ise  $x$  ile  $y$  elemanları birbirine diktir denir ve  $x \perp y$  ile gösterilir.

**Tanım 3.13**  $A$ ,  $E$ 'nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere,  $\{x \in E : \text{her } y \in A \text{ için } x \perp y\}$  kümesine  $A$  kümesinin diklik tümleyeni denir ve  $A^d$  ile gösterilir.  $A, B \subseteq E$  olmak üzere her  $x \in E$  ve her  $y \in E$  için  $x \perp y$  oluyorsa  $A$  ile  $B$  kümelerine birbirine diktir denir ve  $A \perp B$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 3.14**  $E$  bir Riesz uzayı olsun. Herhangi  $a, b \in E$  iki eleman için  $a \leq b$  olmak üzere  $\{x \in E : a \leq x \leq b\}$  kümesine  $E$ 'de bir sıralı aralık denir ve  $[a, b]$  ile gösterilir. Bir  $A \subseteq E$  alt kümesi için  $A \subseteq [a, b]$  olacak şekilde  $a, b \in E$  varsa  $A$ 'a  $E$ 'de sıra sınırlı küme denir.

**Tanım 3.15**  $E$  sıralı vektör uzayı ve  $A \subseteq E$  olsun.

- 1) Eğer her  $x, y \in A$  için  $x \leq z$  ve  $y \leq z$  olacak şekilde bir  $z \in A$  varsa  $A$ 'a yukarı yönlendirilmiş küme denir ve  $A \uparrow$  biçiminde gösterilir.  $A$  yukarı yönlendirilmiş küme ve  $E$  içinde  $\sup(A) = a$  varsa  $A \uparrow a$  biçiminde gösterilir.
- 2) Eğer her  $x, y \in A$  için  $z \leq x$  ve  $z \leq y$  olacak şekilde bir  $z \in A$  varsa  $A$ 'a aşağı yönlendirilmiş küme denir ve  $A \downarrow$  biçiminde gösterilir.  $A$  aşağı yönlendirilmiş küme ve  $E$  içinde  $\inf(A) = a$  varsa  $A \downarrow a$  biçiminde gösterilir.

**Tanım 3.16**  $E$  Riesz uzayında her  $x \in E_+$  için  $n \in \mathbb{N}_+$  olmak üzere  $n^{-1} \cdot x \downarrow 0$  şartı sağlanırsa  $E$ 'e Archimedean Riesz uzayı denir.

**Örnek 3.2**  $\mathbb{R}^2$  üzerinde,  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  için;

$$x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \text{ ve } x_2 \leq y_2$$

sıralamasına göre Archimedean Riesz uzayıdır.

**Tanım 3.17**  $E$  bir Riesz uzayı olsun.  $E$ 'nin boştan farklı ve üstten sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir alt kümesinin) supremumu ya da alttan sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir alt kümesinin) infimumu varsa  $E$  Riesz uzayına *Dedekind tam* ( $\sigma$ -Dedekind tam) Riesz uzayı denir.

**Tanım 3.18**  $E$  bir Riesz uzayı ve  $A \subseteq E$  olsun. Her  $y \in E$  ve  $x \in A$  için  $y \leq x$  iken  $y \in A$  oluyor ise  $A$  kümesine *katı küme* denir. Aynı zamanda katı alt uzaya *ideal* denir.

$A$ ,  $E$ 'nin katı alt uzayı ise  $A$ 'a  $E$  içinde *ideal* denir.  $A \subseteq E$  boştan farklı kümesi için  $A$ 'ı kapsayan en küçük ideale  $A$ 'nın ürettiği *ideal* denir ve  $I_A$  ile gösterilir. Her ideal bir Riesz alt uzayıdır.

**Tanım 3.19** İki vektör uzayı arasında tanımlanan doğrusal fonksiyona *operatör* denir. Yani  $E$  ve  $F$  iki vektör uzayı olsun. Eğer  $T: E \rightarrow F$  fonksiyonu için  $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$  şartı tüm  $x, y \in E$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  elemanlarında sağlarsa  $T$  fonksiyonuna *linear operatör* denir. Çalışmanın geri kalan kısmında  $T(x)$  yerine  $Tx$  ifadesi kullanılacaktır.

**Tanım 3.20** Bir  $T$  operatörü  $T: E \rightarrow F$  olacak şekilde tanımlansın. Eğer her  $x \in E_+$  için  $T(x) \in F_+$  şartı sağlanırsa  $T$  operatörüne *pozitif operatör* denir.

### 3.1. İstatistiksel Yakınsaklık *monoton artandır*

**Tanım 3.21** Bir  $E$  Riesz uzayında  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi verilsin. Eğer her  $n \in \mathbb{N}$  için  $|x_n - x| \leq y_n$  olacak şekilde  $y_n \downarrow \theta$  olan bir  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi mevcut ise  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $x \in E$  noktasına *sıra yakınsaktır* denir ve  $x_n \xrightarrow{o} x$  sembolüyle gösterilir.

**Tanım 3.22**  $E$  ve  $F$  iki Riesz uzayı ve  $T: E \rightarrow F$  bir operatör olsun.

- 1)  $T$  operatörü sıra sınırlı kümeleri sıra sınırlı kümelere taşırsa  $T$  operatörüne *sıra sınırlı operatör* denir.
- 2) Eğer  $x_\alpha \xrightarrow{o} x$  yakınsaması  $E$ 'de sağlanırken,  $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$  yakınsaması  $F$ 'de de sağlanırsa  $T$ 'e *sıra süreklili operatör* denir.
- 3) Eğer  $x_n \xrightarrow{o} x$  yakınsaması  $E$ 'de sağlanırken,  $Tx_n \xrightarrow{o} Tx$  yakınsaması  $F$ 'de de sağlanırsa  $T$ 'e  $\sigma$ -*sıra süreklili operatör* denir.

$L_b(E, F)$  uzayı,  $E$  ve  $F$  Riesz uzayları arasındaki bütün sıra sınırlı operatörleri gösterebilir. Bu durumda  $L_b(E, F)$  bir vektör uzayıdır. Teorem 1.18 (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006) göz önünde bulundurulursa,  $F$ 'nin bir Dedekind tam Riesz uzayı olması durumunda  $L_b(E, F)$ 'nin de bir Dedekind tam Riesz uzayı olduğu görülür. Bu

durumda  $E$  ve  $F$  Riesz uzayları arasındaki bütün  $\sigma$ -sıra sürekli operatörleri gösteren  $L_c(E, F)$  uzayı,  $L_b(E, F)$  uzayı içinde bir banttır. Her sıra sürekli ve sıra sınırlı olan bir operatör  $\sigma$ -sıra sürekli (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006). Ama tersi doğru değildir. Örnek 1.55 (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006) buna örnek olarak verilebilir.

Şimdi istatistiksel yakınsama ile ilgili kavramların bazı temel özelliklerini hatırlatalım.

**Tanım 3.23** Pozitif tamsayıların bir  $K$  alt kümesi verilsin.  $K_n = \{k \leq n: k \in K\}$  ve  $|K| = \text{card}(K)$  ( $K$  kümesinin kaardinalitesi) olmak üzere;

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n}$$

ve

$$\bar{\delta}(K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n}$$

limitlerine sırasıyla  $K$  kümesinin *alt ve üst yoğunluğu* denir.  $\bar{\delta}(K) = \underline{\delta}(K)$  ise  $\left(\frac{|K_n|}{n}\right)$  dizisinin limiti mevcuttur.  $K \subseteq \mathbb{N}$  kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: k \in K\}|$$

ile gösterilir (Niven ve ark., 1991).  $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([2^{2n}, 2^{2n+1}] \cap \mathbb{N})$  kümesi için  $\delta(K)$ 'nın olmadığı kolayca görülebilir. Kümelerin doğal yoğunluğu ile ilgili detaylı açıklama (Freedman ve Semmer, 1981) ve (Et ve ark., 2021)' de mevcuttur. Şimdi doğal yoğunluk ile ilgili bazı özellik ve örnekleri verelim.

- 1)  $K \subseteq \mathbb{N}$  sonlu ise  $\delta(K) = 0$ .
- 2)  $K = \mathbb{N}$  ise  $\delta(k) = \frac{n}{n} = 1$ .
- 3)  $K = \{2n + 1: n \in \mathbb{N}\} = T$  ise  $\delta(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ .
- 4)  $K = \{2n: n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{C}$  ise  $\delta(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ .
- 5)  $K = \{n^2: n \in \mathbb{N}\}$  ise  $\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$ .
- 6)  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$  ise  $\delta(K_1 \cup K_2) - \delta(K_1 \cap K_2) = \delta(K_1) + \delta(K_2)$ .
- 7)  $K_1 \subseteq K_2$  ise  $\delta(K_1) \leq \delta(K_2)$
- 8)  $\delta(K) = 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus K)$

**Tanım 3.24** Bir  $E$  Riesz uzayında  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi verilsin. Her  $\varepsilon > 0$  için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| > \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde  $L$  noktasına yakınsar ise  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisine *istatistiksel yakınsak dizi* denir ve  $S - \lim x_k = L$  ile gösterilir. Burada  $L = 0$  alınırsa  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi *istatistiksel sıfır dizi* olur.

**Örnek 3.3** Reel sayılarda bir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi alalım. Dizinin terimlerini  $n = k^2$  olarak yazılabilirse  $x_n = 1$ , diğer durumlarda  $x_n = 0$  olarak tanımlayalım. Bu durumda dizinin terimleri  $x_k = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots\}$  şeklinde olacaktır. O halde,

$$K_\varepsilon = \{k: |x_k - 1| \geq \varepsilon\} = \{k: |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{k: k = n^2\},$$

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

ifadesi sağlanır. Böylece  $st - \lim x_n = 0$  elde edilir.

Kolaylıkla görülebilir ki yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat bu önermenin tersi her zaman doğru olmayabilir. Yani istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir.

**Tanım 3.25**  $x = (x_n)$  reel sayısı dizisi için;

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: |x_n| > A\}) = 0$$

olacak şekilde en az bir sonlu  $A > 0$  reel sayısı varsa  $x = (x_n)$  dizisi *istatistiksel sınırlıdır* denir (Fridy ve Orhan, 1997).

**Tanım 3.26** Bir  $x = (x_k)$  dizisini ele alalım. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için;

$$\delta(\{k: |x_k - x_N| > \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir  $\mathbb{N} = \mathbb{N}(\varepsilon)$  varsa  $x = (x_k)$  dizisine *istatistiksel Cauchy dizisi* denir (Fridy, 1985).

**Tanım 3.27** Bir  $E$  Riesz uzayında  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi verilsin. Eğer her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_n \leq x_{n+1}$  sağlanır ise  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisine *monoton artandır* denir ve  $x_n \uparrow$  sembolüyle gösterilir. Benzer olarak her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x_{n+1} \leq x_n$  ifadesi sağlanırsa  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisine *monoton azalandır* denir ve  $x_n \downarrow$  ile gösterilir.

**Tanım 3.28** Bir  $E$  Riesz uzayında  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi verilsin. Eğer  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi monoton artan,  $\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$  kümesinin supremumu var ve bir  $x \in E$  elemanına eşit ise bu durum  $x_n \uparrow x$  sembolüyle gösterilir. Benzer olarak  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi monoton azalan,  $\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$  kümesinin infimumu var ve bir  $x \in E$  elemanına eşit ise bu durum  $x_n \downarrow x$  şeklinde ifade edilir. Eğer  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi için  $x_n \uparrow x$  veya  $x_n \downarrow x$  ifadelerinden biri sağlanıyorsa  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  *$x$  noktasında monoton yakınsaktır* denir.

**Tanım 3.29**  $x = (x_n)$  dizisi verilsin.  $(x_{n_k})$  monoton artan ve  $\delta(K) = 1$  olacak şekilde;

$$K = \{k_1 < k_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$$

bir alt kümesi varsa  $(x_n)$  reel sayısı dizisine *istatistiksel monoton artandır* denir. Benzer şekilde monoton azalma da tanımlanabilir (Tripathy, 1997).

**Tanım 3.30**  $(x_n)$  bir  $E$  Riesz uzayında dizi olsun.  $\delta(K) = 1$  olacak şekilde bir  $K = \{n_1 < n_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$  indis kümesi,  $(x_{k_n})_{k_n \in K}$  azalan ve  $\inf_{k_n \in K} (x_{k_n}) = 0$  sağlansın. Bu durumda  $(x_n)$  dizisine *istatistiksel olarak azalarak sıfıra yakınsar* denir. Bu durumda bu yakınsama  $x_n \downarrow^{st_0} 0$  ile gösterilir.

**Tanım 3.31**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $E$  Riesz uzayında bir dizi ve  $x \in E$  olsun.  $q_n \downarrow^{st_0} 0$  olacak şekilde bir  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi ve  $K = \{n_1 < n_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$  kümesi için  $\delta(K) = 1$  alalım. Her  $n \in K$  için  $|x_n - x| \leq q_n$  ifadesi sağlanırsa  $(x_n)$  dizisi  $x$  noktasına *istatistiksel sıra yakınsaktır* denir ve  $x_n \xrightarrow{st_0} x$  ile gösterilir.



#### 4. İSTATİSTİKSEL SÜREKLİ OPERATÖRLER

Bu bölümde istatistiksel sıra sınırlı ve istatistiksel olarak  $\sigma$ -sıra sürekli operatörler kavramlarını tanıttığımız. Bu bölümde ifade edeceğimiz çeşitli tanım, teorem, sembol ve notasyonlar kafes uzaylarının temel argümanlarıdır ve bu argümanlar (Aydın ve ark., 2023) çalışmasından alınmıştır.

**Tanım 4.1**  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bir  $E$  Riesz uzayında bir dizi olsun. Eğer bir pozitif  $e \in E$  vektörü ve  $\delta(K) = 1$  şartını sağlayan bir  $K = \{n_1 < n_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$  indis kümesi mevcut ve  $|x_{n_k}| \leq e$  eşitsizliği her  $n_k \in K$  için sağlanır ise  $(x_n)$  dizisine *istatistiksel olarak sıra sınırlı* denir ve kısaca *st<sub>o</sub>-sınırlı* şeklinde ifade edilir.

Her sınırlı dizinin *st<sub>o</sub>-sınırlı* olduğu ve ayrıca istatistiksel olarak sıra yakınsak bir dizinin de *st<sub>o</sub>-sınırlı* olduğu açıktır. Ancak tersinin genel olarak doğru olması gerekmez. Bunu görmek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

**Örnek 4.1** Tüm sıfıra yakınsak gerçekte dizilerin uzayı olan  $c_0$  Riesz uzayını düşünelim.  $c_0$  için de bir  $(x_n)$  dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$x_n := \begin{cases} e_n, & \text{eğer } n = m^3 \text{ bazı } m \in \mathbb{N} \\ \theta, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ifadesine göre  $(x_n)$  *st<sub>o</sub>-sınırlı* fakat sıra sınırlı değildir.

**Tanım 4.2**  $E$  ve  $F$  iki Riesz uzayı ve  $T: E \rightarrow F$  bir operatör olsun.

- 1) Eğer  $x_n \xrightarrow{st_o} x$  yakınsaması  $E$ 'de sağlanırken  $Tx_n \xrightarrow{st_o} Tx$  yakınsaması  $F$ 'de sağlanır ise  $T$  *istatistiksel  $\sigma$ -sıra sürekli operatör* olarak adlandırılır.
- 2) Eğer  $T$  operatörü istatistiksel sıra sınırlı dizileri istatistiksel sıra sınırlı dizilere taşırsa  $T$ 'e *istatistiksel sıra sınırlı operatör* denir.

**Teorem 4.1** Her sıra sınırlı operatör istatistiksel sıra sınırlıdır.

*İspat:*  $E$  ve  $F$  iki Riesz uzayı ve  $T: E \rightarrow F$  bir sıra sınırlı operatör olsun.  $(x_n)$ ,  $E$  'de *st<sub>o</sub>-sınırlı* bir dizi olsun. Bu durumda pozitif bir  $w \in E$  vektörü ve her  $k_n \in K$  için  $|x_{k_n}| \leq w$  olacak şekilde bir  $\delta(K) = 1$  indisi vardır. Buradan  $(Tx_{k_n})$   $F$  'de sıra sınırlı bir dizi olur. Çünkü  $T$  sıra sınırlı operatördür. Sonuç olarak  $(Tx_n)$ ,  $F$ 'de istatistiksel sıra sınırlı bir dizi olur.

Bu teoremin tersinin genel olarak doğru olması gerekmez. Her sıra sürekli operatörün sıra sınırlı olduğunu biliyoruz (bkz. örneğin Lemma 1.54 (Zaanen,1971)). Bu ise her sıra sürekli operatörün istatistiksel olarak sıra sınırlı olduğu anlamına gelir.

**Teorem 4.2** Her  $\sigma$ -sıra sürekli operatör istatistiksel  $\sigma$ - sıra sürekli dir.

*İspat:*  $E$  ve  $F$  iki Riesz uzayı,  $T: E \rightarrow F$  bir  $\sigma$ -sıra sürekli operatör ve  $x_n \xrightarrow{st_0} x$   $E$ 'de bir dizi olsun. Her  $k_n \in K$  için  $|x_{k_n} - x| \leq q_{k_n}$  olacak şekilde  $\delta(K) = 1$  şartını sağlayan  $q_n \downarrow^{st_0} \theta$  dizisi vardır. Buradan  $T$ 'nin  $\sigma$ -sıra sürekliliğini kullanarak  $F$ 'de  $Tx_{k_n} \xrightarrow{o} Tx$  yakınsaklığı elde edilir. Daha sonra  $Tx_n \xrightarrow{st_0} Tx$  bulunur. Çünkü sıra yakınsak her dizi istatistiksel sıra yakınsaktır.

Bu teoremin tersinin sağlanmasına gerek yoktur. İstatistiksel sıra yakınsaklık sıra yakınsaklığı gerektirmez (bkz. Örnek 3 (Abramovich ve Sirotkin, 2005)).

**Teorem 4.3**  $E$  ve  $F$  Riesz uzayları olsun. O halde,  $E$ 'den  $F$ 'e tüm istatistiksel  $\sigma$ -sıra sürekli operatörlerin kümesi olan  $St_c(E, F)$  bir vektör uzayıdır.

**Teorem 4.6**  $T: E \rightarrow \mathbb{R}$  bir sıra sınırlı fonksiyonel olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i)  $T$  istatistiksel  $\sigma$ -süreklidir.
- (ii)  $T^+$  istatistiksel  $\sigma$ -süreklidir.
- (iii)  $T^-$  istatistiksel  $\sigma$ -süreklidir.
- (iv)  $|T|$  istatistiksel  $\sigma$ -süreklidir.

## 5. İSTATİSTİKSEL KOMPAKT OPERATÖRLER

**Tanım 5.1**  $T \in L(E, F)$  olsun. Eğer  $E$ 'de alınan her bir istatistiksel sıra sınırlı  $(x_n)$  dizisi için  $T(x_{j_n}) \xrightarrow{st_0} z$  olacak şekilde  $(x_{j_n})$  alt dizisi ve  $z \in F$  elemanı varsa  $T$  operatörüne *istatistiksel sıra kompakt operatör* denir ve kısaca *st<sub>0</sub>-kompakt* olarak ifade edilir.

Burada  $T$ 'nin *st<sub>0</sub>-kompakt* olması için gerek ve yeter şart  $T(x_{j_{n_k}}) \xrightarrow{o} z$  olacak şekilde  $(x_{j_n})$  dizisinin  $(x_{j_{n_k}})$  şeklinde bir alt dizisinin bulunmasıdır. Bu çalışmada  $L_{st_0}(E, F)$  ailesi  $E$ 'den  $F$ 'e tanımlanan bütün *st<sub>0</sub>-kompakt* operatörleri belirtmektedir.

**Hatırlatma 5.1** Kolayca elde edilebilir ki dizisel sıra kompakt operatörler istatistiksel sıra kompakttır. Çünkü sıra yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel sıra yakınsaktır.

İstatistiksel sıra yakınsak bir dizi genellikle sıra yakınsak değildir (Şençimen ve Pehlivan, 2012). Yani [Hatırlatma 5.1]'in tersi geçerli değildir.

**Önerme 5.1**  $L_{st_0}(E, F)$  kümesi bir vektör uzaydır.

*İspat:* Varsayalım ki  $S, T \in L_{st_0}(E, F)$  ve  $(x_n)$ ,  $E$ 'de bir *st<sub>0</sub>-sınırlı* dizi olsun.  $(x_n)$ 'nin  $(x_i)_{i \in I}$  ve  $(x_j)_{j \in J}$  olacak şekilde alt dizileri vardır ve  $I, J$  indis kümeleri için  $\delta(I) = \delta(J) = 1$  sağlanır. Böylece  $T(x_i) \xrightarrow{st_0} y$  ve  $S(x_j) \xrightarrow{st_0} z$  olacak şekilde  $y, z \in F$  elemanları vardır.  $M := I \cap J$  kümesi üzerinde  $\delta(M) = 1$  sağlandığında  $(T + S)(x_m) \xrightarrow{st_0} y + z$  ifadesi elde edilir (bknz. Teorem 6(Şençimen ve Pehlivan, 2012)). Buradan da  $T + S$ 'nin *st<sub>0</sub>-kompaktlığı* bulunur. Benzer şekilde bir skaler ile çarpım durumu da bulunabilir.

**Önerme 5.2**  $R, S \in L(E)$  ve  $T \in L_{st_0}(E)$  olacak şekilde üç operatör verilsin.

- (i)  $S$  istatistiksel  $\sigma$ -sıra sürekli operatör ise  $SoT \in L_{st_0}(E)$ 'dir.
- (ii)  $P$  *st<sub>0</sub>-sınırlı* operatör ise  $ToP \in L_{st_0}(E)$ 'dir.

*İspat:* (i) Kabul edelim  $S$  istatistiksel  $\sigma$ -sıra sürekli operatör ve  $(x_n)$  dizisi *st<sub>0</sub>-sınırlı* olsun. O zaman  $T$ 'nin *st<sub>0</sub>-kompaktlığından*  $(x_n)$  dizisi için  $\delta(K) = 1$  indis kümesi ile  $T(x_k) \xrightarrow{st_0} y$  olacak şekilde  $(x_k)$  alt dizisi ve  $y \in E$  elemanı vardır. Buradan  $S$ 'nin *st<sub>0</sub>-sürekliliğini* kullanarak  $S(T(x_k)) \xrightarrow{st_0} S(y)$  ve  $(SoT)(x_k) \xrightarrow{st_0} S(y)$  ifadeleri yazılır. Bu ise istenen sonucu verir.

(ii) Varsayalım  $P$  bir *st<sub>0</sub>-sınırlı* operatör ve  $(x_n)$  *st<sub>0</sub>-sınırlı* bir dizi olsun. O zaman  $(Px_n)$  de *st<sub>0</sub>-sınırlı* bir dizi olur. Buradan  $(Px_n)$  dizisinin  $T(Px_k) \xrightarrow{st_0} y$  olacak şekilde

$\delta(K) = 1$  indis kümesi ile  $(Px_k)$  alt dizisi ve  $y \in E$  vardır. Çünkü  $T$   $st_o$ -kompakt operatördür. Dolayısıyla  $TOP$   $st_o$ -kompakt operatör olur.

**Önerme 5.3**  $F$  bir atomik  $KB$ -uzayı olsun. Böylece her  $T \in L(E, F)$   $st_o$ -sınırlı operatörü  $st_o$ -kompakt olur.

*İspat:*  $E$ 'de bir  $st_o$ -sınırlı  $(x_n)$  dizi alalım.  $T$ 'nin  $st_o$ -sınırlılığında  $F$  içinde  $st_o$ -sınırlı olan bir  $T(x_n)$  dizisi bulunur. Bir  $K$  kümesinin indis kümesi ve  $\delta(K) = 1$  olup bütün  $k \in K$  için  $|T(x_k)| \leq u$  olacak şekilde  $u \in F_+$  vardır. Yani  $T(x_n)$ ,  $\delta(K) = 1$  ile  $(T(x_k))_{k \in K}$  olacak şekilde bir sıra sınırlı alt diziyeye sahiptir. [Hatırlatma 6] ele alındığında  $(T(x_k))_{k \in K}$  dizisinin  $(T(x_m))_{m \in M}$  olacak şekilde bir alt dizisi daha vardır ve  $y \in F$  aynı vektörü için  $T(x_m) \xrightarrow{o} y$  sağlanır (Aydın ve ark., 2018). Kabulümüzden ise  $\delta(M) = 1$  olup  $T \in L(E, F)$  elde edilir.

**Teorem 5.1** Her istatistiksel sıra kompakt operatör istatistiksel sıra sınırlıdır.

*İspat:* Kabul edelim ki  $T \in L_{st_o}(E, F)$  olsun. Ancak  $T$   $st_o$ -sınırlı olmasın. Buradan  $E$  içinde bir  $st_o$ -sınırlı olan bir  $(x_n)$  dizisi bulunabilir.  $F$  içinde  $T(x_n)$  dizisi  $st_o$ -sınırlı değildir. Böylece  $T(x_n)$  sıra sınırlı olmaz. Çünkü her sıra sınırlı dizi  $st_o$ -sınırlıdır. Bu nedenle  $F_+ := \{x \in F: \theta \leq x\}$  içindeki  $w$  bütün pozitif elemanları için  $n_w \in \mathbb{N}$  şeklinde bazı indisleri vardır. Öyle ki,  $|T(x_{n_w})| \not\leq w$  bulunur. Diğer taraftan  $T$ 'nin  $st_o$ -kompaktlığından  $(x_n)$  dizisinin  $T(x_k) \xrightarrow{st_o} z$  olacak şekilde  $(x_k)_{k \in K}$  alt dizisi ve  $z \in F$  vardır. Çünkü  $(x_n)$  dizisi  $E$  içinde  $st_o$ -sınırlı dizidir. Buradan  $F$  içinde  $q_k \downarrow^{st_o} \theta$  dizisi ve  $J \subset K$  indis alt kümesi için  $\delta(J) = 1$  vardır. Her bir  $j \in J$  için  $|Tx_j - z| \leq q_j$  ifadesi sağlanır. Böylece  $T(x_j)$  dizisi  $F$ 'de sıra sınırlı bir dizi olur. Çünkü  $J$  üzerinde  $q_j \downarrow \theta$  sağlanır. Yani bazı  $u \in F_+$  ve her  $j \in J$  için  $|Tx_j| \leq u$  ifadesi bazı  $j_u \in J$  için  $|T(x_{j_u})| \not\leq u$  ifadesiyle çelişki oluşturur.

Genel olarak [Teorem 5.1]'in tersi sağlamayabilir. Aşağıdaki örnek  $st_o$ -sınırlı ve istatistiksel  $\sigma$ -sıra sürekli operatörlerin her ikisi içinde geçerlidir.

**Örnek 5.1**  $E = L_1[0,1]$  Riesz uzayını ele alalım.  $E$  Riesz uzayı üzerinde  $I$  özdeşlik operatörü hem  $\sigma$ -sıra sürekli ve hem de istatistiksel sıra sınırlı bir operatördür. Ama  $I$  istatistiksel sıra kompakt bir operatör değildir. Şimdi  $t \in [0,1]$  ve her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $[0,1]$  aralığı üzerinde  $r_n(t) := \text{sgn}(\sin(2^n \pi t))$  ile tanımlanan reel değerli Rademacher fonksiyonlarının  $(r_n)$  dizisini alalım. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $|r_n| = 1$  olduğundan  $(r_n)$  istatistiksel sıra sınırlı bir dizi olur. Kabulümüzden  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $r_k \xrightarrow{st_o} f$  olacak şekilde bir  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  alt dizisi ve  $f \in L_1[0,1]$  fonksiyonu vardır. Yani  $r_j \xrightarrow{o} f$  ve  $\delta(J) = 1$

olan  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisinin  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$  alt dizisi daha vardır. Keyfi bir  $j_0 \in J$  indisini ele alalım. O zaman her bir  $j \geq j_0$  için  $\int_0^1 r_{j_0} r_j d\mu = 0$  ifadesi yazılır. Buradan takiple  $r_{j_0} r_j \xrightarrow{o} r_{j_0} r$  yakınsaklığından;

$$\int_0^1 r_j r d\mu \rightarrow \int_0^1 r r d\mu = \int_0^1 r^2 d\mu$$

elde edilir. Daha sonra integralin sıra sürekliliğini kullanarak  $\int_0^1 r_j r d\mu = 0$  bulunur ve  $\int_0^1 r^2 d\mu = 0$  ifadesi elde edilir. Ancak bu  $|r| = 1$  ile çelişki oluşturur. Sonuç olarak  $(r_n)$  dizisinin herhangi bir  $st_o$ -yakınsak alt diziyeye sahip olmadığı görülür. Böylece  $I$   $st_o$ -kompakt değildir.

**Örnek 5.2** Her istatistiksel sıra kompakt operatör sıra sınırlı olmak zorunda değildir. Dizisel sıra kompaktlık için Örnek 6 (Azaouzi ve Amor, 2021) ele alınabilir. Dolayısıyla [Hatırlatma 5.1] uygulandığında operatör istatistiksel kompakt olur. Ama sıra sınırlı operatör olmaz.

Aşağıdaki ifade için Örnek 4.2 (Maslyuchenko, 2009)'i ele alalım.

**Örnek 5.3** Herhangi istatistiksel sıra kompakt operatör istatistiksel  $\sigma$ -sıra sürekli olmak zorunda değildir.  $[0,1]$  kümesinin Borel altkümelerinden oluşan  $B$  Boolean cebri için  $B$ 'deki ölçümünü sıfır yapan herhangi bir  $U$  ultra filtresini alalım.  $L_\infty[0,1]$ 'den  $\mathbb{R}$ 'e tanımlanan aşağıdaki  $T_U$  operatörü;

$$T_U(S) := \lim_{A \in U} \frac{1}{\mu(A)} \int_A S d\mu$$

istatistiksel  $\sigma$ -sıra sürekli değil, fakat istatistiksel sıra kompakt operatördür.

Normlu bir Riesz uzay üzerinde  $|x| \leq |y|$  eşitsizliğini sağlayan bütün elemanlar  $\|x\| \leq \|y\|$  eşitsizliğini de sağlarsa bu normlu Riesz uzayına *kafes normu* denir.

### **Teorem 5.2**

- (i)  $E$  bir kafes norm uzayı ve  $F$  bir Banach kafes olduğunda bir  $T \in L(E, F)$  kompakt operatörü  $st_o$ -kompakt olur.
- (ii) Eğer  $E$  güçlü birim normu olan bir  $AM$ -uzayı ( $x \wedge y = 0$  için  $\|x \wedge y\| = \|x\| \vee \|y\|$  sağlanır) ve  $F$  sıra sürekli kafes normlu uzayı ise her  $T \in L_{st_o}(E, F)$  operatörü kompakttır.

*İspat:* (i)  $(x_n)$ ,  $E$  içinde bir  $st_o$ -sınırlı dizi olsun. O zaman  $\delta(K) = 1$  olacak şekilde bir indis kümesi ve  $u \in E_+$  pozitif elemanı vardır. O halde her  $k \in K$  için  $|x_k| \leq u$  elemanı sağlanır. Yani  $(x_k)_{k \in K}$  dizisi sıra sınırlıdır. Buradan, bütün  $k \in K$  için;

$$\|x_k\| \leq \|u\|$$

olur. Çünkü  $E$  bir kafes normudur. Bu yüzden  $E$  içinde  $(x_k)_{k \in K}$  dizisi bir norm sınırlı dizidir.  $T$ 'nin kompaktlığından  $y \in F$  ve  $(x_k)_{k \in K}$  dizisinin bazı  $(x_m)_{m \in M}$  alt dizileri için  $T(x_m) \xrightarrow{\|\cdot\|} y$  yazılır. Şimdi Teorem VII.2.1 (Vulikh, 1967) ele alındığında  $(x_m)_{m \in M}$  dizisinin  $(x_i)_{i \in I}$  alt dizisi daha vardır öyle ki  $T(x_i) \xrightarrow{o} y$  yazılabilir. Çünkü  $F$  Banach kafestir. Sonuç olarak  $(x_k)_{k \in K}$  dizisi sıra sınırlı olduğunda ve  $(x_k)_{k \in K}$  dizisinin  $(x_i)_{i \in I}$  alt dizisinden hareketle  $T(x_i) \xrightarrow{o} y$  sağlanır.  $\delta(K) = 1$  elde edilir ve  $T$  operatörü  $st_o$ -kompakt olur.

(ii)  $E$ 'de rastgele norm sıralı bir  $(x_n)$  dizisi alalım. Güçlü bir birim norma sahip  $AM$ -uzayını göz önünde bulundurarak,  $(x_n)$  dizisinin sıra sınırlı olduğu [Zaanan, 1983 s. 490]'da ki bilgilerden takip edilebilir. O halde  $(x_n)$  dizisi  $st_o$ -sınırlı dizi olur.

Buradan  $T$ 'nin  $st_o$ -kompaktlığını kullanarak  $(x_n)$  dizisinin  $\delta(K) = 1$  ile  $Tx_k \xrightarrow{st_o} y$  olacak şekilde  $(x_k)_{k \in K}$  alt dizisi ve  $y \in F$  vardır. Bunun anlamı  $(x_k)_{k \in K}$  dizisinin  $\delta(M) = 1$  dizin kümesiyle birlikte  $Tx_m \xrightarrow{o} y$  olacak şekilde  $(x_m)_{m \in M}$  bir alt dizisi daha var demektir. O halde  $Tx_m \xrightarrow{\|\cdot\|} y$  yakınsaklığı sıra sürekli kafes normundan elde edilebilir. Bu nedenle  $T$  kompakt bir yapıya sahiptir.

$u \in F$  sabit bir vektör ve  $E$  üzerinde bazı sıra sınırlı lineer fonksiyonlar ile  $x \in E$  için  $T(x) := f(x)u$  olacak şekilde bir  $T$  operatörü tanımlayalım. O zaman  $T \in \mathcal{L}_b(E, F)$  elde edilir ve *rank-one operatör* olarak adlandırılır (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

**Teorem 5.3** Her  $st_o$ -sınırlı sonlu dereceli rank operatörü  $st_o$ -kompakttır.

*İspat:* Sabit  $u \in F$  elemanı ve  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$   $st_o$ -sınırlı fonksiyonu ile  $T$  operatörü, varsayalım bütün  $x \in E$  için  $T(x) := f(x)u$  şeklinde tanımlansın.  $E$ 'de rastgele bir  $st_o$ -sınırlı  $(x_n)$  dizisi için  $f(x_n)$ ,  $\mathbb{R}$ 'de  $st_o$ -sınırlıdır. Çünkü  $f$   $st_o$ -sınırlı fonksiyondur. Böylece  $(x_n)$ 'nin  $(x_k)_{k \in K}$  alt dizisi vardır ve  $f(x_k)$ ,  $\delta(K) = 1$  ile  $\mathbb{R}$ 'de sınırlıdır. Buradan Bolzano Weierstrass teoremi uygulanırsa  $(x_k)_{k \in K}$  dizisinin  $(x_m)_{m \in M}$  bir alt dizisi daha elde edilir ve  $\delta(M) = 1$  olduğunda bazı  $\alpha \in \mathbb{R}$  için  $f(x_m) \rightarrow \alpha$  bulunur. Eşitsizliğin takibi ile;

$$|T(x_m) - \alpha u| = |f(x_m)u - \alpha u| = |f(x_m) - \alpha||u| \rightarrow 0$$

ifadesi  $F$ 'nin Archimedean olma özelliğinden ve  $|f(x_m) - \alpha| \rightarrow 0$  yakınsaklığından elde edilir. Sonuç olarak  $T$ 'nin  $st_o$ -kompaktlığı bulunur.

**Örnek 5.4**  $\mathcal{L}_{st_o}(E, F)$  uzayının sıra kapalı olmasına gerek yoktur. [Örnek 5.1]'de ki Rademacher fonksiyonu  $r_n$  ve  $L_1$ 'deki standart bazı  $e_n$  için  $\ell_1$ 'den  $L_1$ 'ye  $T(e_n) = (r_n)^+$

ile tanımlanan bir  $T$  operatörü ile bir  $\pi_n$  izdüşümü ve bir  $(S_n)$  dizisi alalım. Tüm  $x \in \ell_1$  için  $S_n(x) := (T \circ \pi_n)(x) = \sum_{k=1}^n x_k r_k^+$  tanımlansın. Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $(S_n)$ 'in sonlu dereceli bir operatör olduğu açıktır. [Teorem 5.3]'ü uygularsak,  $(S_n)$ 'nin  $\mathcal{L}_{st_0}(\ell_1, L_1)$  içinde bir dizi olduğunu elde ederiz. Diğer yandan  $S_n \xrightarrow{o} T$  olduğu görülebilir. [Örnek 5.1]'den anlaşılacağı üzere  $(r_n)$ 'nin herhangi bir  $st_0$ -yakınsak alt dizisinin olmadığı açıktır. Bu nedenle  $T$  operatörü  $st_0$ -kompakt değildir.

Bir  $T$  operatörü  $\mathcal{L}(E, F)$  içinde  $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$  özelliğini sağlarsa,  $T$  operatörü *kafes homomorfizması* olarak adlandırılır.

**Önerme 5.4**  $F$  bir sıra tamamlayan Riesz uzayı olmak üzere bir  $T$  operatörü  $\mathcal{L}_{st_0}(E, F)$  uzayında kafes homomorfizması olsun. Eğer bazı  $S \in \mathcal{L}(E, F)$  operatörü için  $\theta \leq S \leq T$  sağlanırsa  $S$  operatörü  $st_0$ -kompattır.

*İspat:* Varsayalım  $(x_n)$  dizisi  $E$ 'de  $st_0$ -sınırlı bir dizi olsun. Bir alt diziden hareketle,  $(x_n)$  dizisinin  $\delta(K) = 1$  ile  $(x_{k_n})_{k_n \in K}$  alt dizisi ve bazı  $y \in F$  elemanları için  $(Tx_k) \xrightarrow{st_0} y$  olduğunu kabul edelim. Daha sonra, Teorem 18.2 (Luxemburg ve Zaanen, 1971) kullanılarak her  $k_n \in K$  için;

$$|Sx_{k_n} - Sx_{k_m}| \leq S(|x_{k_n} - x_{k_m}|) \leq T(|x_{k_n} - x_{k_m}|) = |Tx_{k_n} - Tx_{k_m}|$$

eşitsizliği elde edilir. Çünkü  $T$  bir kafes homomorfizması ve  $S$  bir pozitif operatördür.

Şimdi  $(Tx_{k_n} - Tx_{k_m}) \xrightarrow{st_0} \theta$  olduğundan ve son eşitsizlikten  $(Sx_{k_n})_{k_n \in K}$  dizisinin bir istatistiksel sıra Cauchy dizisi olduğu anlaşılır.  $F$ 'nin sıra kompaktlığından bazı  $z \in F$  elemanları için  $Sx_{k_n} \xrightarrow{o} z$  elde edilir. Böylece sayfa 7'deki (Şençimen ve Pehlivan, 2012) özellik uygulanırsa  $\delta(K) = 1$  eşitliğinden  $Sx_{k_n} \xrightarrow{st_0} z$  yakınsaklığı elde edilir. Sonuç olarak  $S$  bir  $st_0$ -kompakt operatördür.

**Teorem 5.4**  $E$  bir Dedekind tam Riesz uzayı ve  $T, E$  üzerinde bir pozitif, istatistiksel  $\sigma$ -sıra sürekli ve  $st_0$ -kompakt operatör olsun. O halde  $E$  üzerinde bazı  $S$  operatörü için  $S_n \xrightarrow{st_0} S$  ile  $E$  üzerinde azalan operatörler istatistiksel  $\sigma$ -sıra sürekli operatörlerin herhangi  $(S_n)$  dizisi için  $T \circ S_n \xrightarrow{st_0} T \circ S$  ifadesi sağlanır.

*İspat:*  $T$  ve  $(S_n)$  için teoremin koşullarının yerine getirildiğini kabul edelim. Ardından her  $n$  için  $S$  ve  $T$ 'nin istatistiksel  $\sigma$ -sıra sürekliliğinden takiple,  $T \circ S_n$  istatistik  $\sigma$ -sıra sürekli operatör olduğu bulunur. Diğer taraftan  $E$  üzerinde bazı  $S$  operatörleri için

$S_n \xrightarrow{st_o} S$  sağladığı zaman  $(S_n)$  dizisinin  $\delta(K) = 1$  ile  $S_k \xrightarrow{o} S$  olacak şekilde  $(S_k)_{k \in K}$  bir alt dizisi vardır. Bu nedenle Teorem VIII.2.3 (Vulikh, 1967) göz önünde bulundurulduğunda, tüm  $x \in E$  vektörleri için  $S_k x \xrightarrow{o} Sx$  bulunur ve her  $x \in E$  için  $S_n x \xrightarrow{st_o} Sx$  elde edilir. Buradan her bir  $x \in E$  için;

$$T(S_n x) \xrightarrow{st_o} T(Sx) \text{ veya } (T \circ S_n)(x) \xrightarrow{st_o} (T \circ S)(x)$$

ifadesi sağlanır. Çünkü  $T$  istatistiksel  $\sigma$ -sıra sürekli bir operatördür. Diğer yandan,  $(S_n)$  azalan ve  $T$  pozitif olduğu zaman  $(T \circ S_k)$  azalan bir dizi olur. Bu nedenle Teorem VII.2.4 (Vulikh, 1967) uygulanarak  $T \circ S_k \xrightarrow{st_o} T \circ S$  elde edilir. Yani  $T \circ S_n \xrightarrow{st_o} T \circ S$  ifadesi bulunur.

**Teorem 5.5**  $(T_j)$  dizisi  $F$  Dedekind tam olduğunda  $\mathcal{L}_b(E, F)$  uzayında  $st_o$ -kompakt operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer  $(T_j)$ ,  $T \in \mathcal{L}_b(E, F)$  için  $st_o$ -yakınsak ise  $T \in \mathcal{L}_{st_o}(E, F)$  sağlanır.

*İspat:* Varsayalım  $E$  içinde bir  $(x_n)$  dizisi  $st_o$ -sınırlı olsun. Dolayısıyla  $\delta(I) = 1$  olacak şekilde bir indis kümesi ve  $E$  içinde  $u \geq 0$  bir pozitif elemanı ile her bir  $i \in I$  için  $|x_i| \leq u$  ifadesi sağlanır. Diğer taraftan standart diagonal argümanı kullanarak  $(x_n)$  dizisinin her  $j \in \mathbb{N}$  ve bazı  $y_j \in Y$  elemanları için  $\delta(M) = 1$  ile  $m \rightarrow \infty$  giderken  $T_j x_m \xrightarrow{st_o} y_j$  olacak şekilde bir  $(x_m)_{m \in M}$  alt dizisi bulunabilir. Çünkü herhangi  $j$  elemanı için  $T_j$   $st_o$ -kompakt operatördür. Daha sonra  $(T_j)$ ,  $T$  için  $st_o$ -yakınsak operatörü olduğu zaman  $(T_j)$ 'nin  $\delta(K) = 1$  olan indis kümesi ile  $j_k \rightarrow \infty$  giderken  $T_{j_k} \xrightarrow{o} T$  olacak şekilde bir  $(T_{j_k})_{j_k \in K}$  alt dizisi vardır. Buradan da  $m \rightarrow \infty$  giderken her bir  $j_k \in K$  için  $T_{j_k} x_m \xrightarrow{o} y_{j_k}$  olduğu görülebilir.

Şimdi  $(y_{j_k})_{j_k \in K}$  dizisinin  $F$  içinde bir sıra Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

İlk olarak her  $j_n, j_k \in K$  için;

$$\begin{aligned} |y_{j_n} - y_{j_k}| &= |y_{j_n} - T_{j_n} x_m + T_{j_n} x_m - T_{j_k} x_m + T_{j_k} x_m - y_{j_k}| \\ &\leq |y_{j_n} - T_{j_n} x_m| + |T_{j_n} x_m - T_{j_k} x_m| + |T_{j_k} x_m - y_{j_k}| \quad (*) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ardından  $j_n \rightarrow \infty$  ve  $j_k \rightarrow \infty$  giderken sırasıyla son eşitsizlikteki sıfıra sıra yakınsaklığı hem birinci hem de üçüncü terim için elde ederiz.  $F$ 'nin Dedekind tamlığını kullanarak Teorem 1.18 (Aliprantis ve Burkinshaw 2006) uygulanabilir. Buradan da her  $m \in I$  için;

$$|T_{j_n}x_m - T_{j_k}x_m| \leq |T_{j_n} - T_{j_k}|(|x_m|) \leq |T_{j_n} - T_{j_k}|(u)$$

ifadesi elde edilir. Öte yandan Teorem VIII.2.3 (Vulikh, 1967) dikkate alındığında  $L_b(E, F)$  içindeki  $T_{j_k} \xrightarrow{o} T$  yakınsaklığından  $j_k \rightarrow \infty$  için  $F$  içinde  $|T_{j_n} - T_{j_k}|(u) \xrightarrow{o} 0$  ifadesi bulunur. Buradan, (\*) eşitsizliğinden  $j_n, j_k \rightarrow \infty$  giderken  $F$  içinde  $|y_{j_n} - y_{j_k}| \xrightarrow{o} 0$  yakınsaklığı bulunur. Daha sonra  $(y_{j_k})$  dizisi  $F$  içinde bir sıra Cauchy dizisi olur. Hatırlatma 7.2 (Pagter, 1981) kullanılarak Dedekind tamlik sıra tamlığı gerektirir. Bu nedenle  $F$  sıra tam olur. Böylece  $(y_{j_k})$  dizisi  $j_k \rightarrow \infty$  giderken  $F$  içindeki bazı  $y$  elemanları için sıra yakınsak bulunur. Buradan Teorem.1.14 (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006) kullanılarak;

$$\begin{aligned} |Tx_m - y| &\leq |Tx_m - T_{j_k}x_m + T_{j_k}x_m - y_{j_k} + y_{j_k} - y| \\ &\leq |T_{j_k} - T|(|x_m|) + |T_{j_k}x_m - y_{j_k}| + |y_{j_k} - y| \\ &\leq |T_{j_k} - T|(u) + |T_{j_k}x_m - y_{j_k}| + |y_{j_k} - y| \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan  $m \rightarrow \infty$  alınarak;

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} |Tx_m - y| \leq |T_{j_k} - T|(u) + |y_{j_k} - y|$$

bulunur. Ancak  $j_k$  keyfidir. Bu yüzden  $\limsup_{m \rightarrow \infty} |Tx_m - y| = 0$  olur. Öyleyse  $|Tx_m - y| \xrightarrow{o} 0$  yani  $Tx_n \xrightarrow{st_o} y$  bulunur. Sonuç olarak  $T$  operatörü istenildiği gibi  $st_o$ -kompakt olur.

**Teorem 5.6**  $T \in \mathcal{L}_{st_o}(E, F)$  ve  $S \in \mathcal{L}(E, F)$  bir Riesz homomorfizması olsun. Eğer  $F$  sıra sürekli Banach kafesi ise  $S \circ T \in \mathcal{L}_{s_o}(E, F)$  bulunur.

*İspat:* Varsayalım  $(x_n)$  dizisi  $E$ 'de  $st_o$ -sınırlı dizi olsun. Öyleyse  $(x_n)$  dizisinin

$\delta(K) = 1$  indis kümesi ile  $T(x_k) \xrightarrow{st_o} y$  olacak şekilde bir  $(x_k)_{k \in K}$  alt dizisi ve bazı  $y \in F$  elemanları vardır.  $M$  kümesi için  $\delta(M) = 1$  indis kümesi olduğunda her  $m \in M$  için,  $|T(x_m) - y| \leq q_m$  olacak şekilde  $F$  içinde  $q_k \downarrow^{sto} \theta$  dizisi daha vardır ve  $q_m \downarrow 0$  sağladığında ve  $F$  sıra sürekli kafes norma sahip olduğunda  $\|q_m\| \downarrow 0$  yazılır. Diğer taraftan Teorem.4.3 (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006) kullanılırsa her Riesz homomorfizması bir pozitif operatör olduğundan  $\|S(q_m)\| \downarrow$  yazılır. Şimdi Teorem VII.2.1 (Vulikh, 1967) kullanılarak kabulümüzden  $\delta(J) = 1$  olduğunda  $S$ 'nin pozitifliğinden  $(q_m)_{m \in M}$  dizisinin  $S(q_j) \xrightarrow{o} 0$  yani  $S(q_j) \downarrow 0$  olacak şekilde bir  $(q_j)_{j \in J}$  alt dizisi vardır. Teorem 2.14 (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006) düşünülürse her  $j \in J$  için;

$$|(S \circ T)(x_j) - S(y)| = S(|T(x_j) - y|) \leq S(q_j)$$

eşitsizliği bulunur. Buradan  $(S \circ T)(x_j) \xrightarrow{o} S(y)$  yani  $(S \circ T)(x_n) \xrightarrow{st_o} S(y)$  elde edilir. Bu ise  $S \circ T$ 'nin  $st_o$ -kompaktlığı sonucuna ulaştırır.

**Önerme 5.5**  $E$  bir Banach kafes uzayı ve  $F$  bir  $\sigma$ -sıra sürekli Banach kafes uzayı olsun.  $E$ ' den  $F$ 'e tanımlanan  $st_o$ -kompakt operatör norm sınırlıdır.

*İspat:* Varsayalım  $T$  norm sınırlı olmasın. O zaman  $E$ 'de norm sınırlı bir  $(x_n)$  dizisi için  $\|x_n\| \leq \frac{1}{3^n}$  vardır ve  $(Tx_n)$   $F$ 'de norm sınırlı değildir. Açıkça görülür ki  $(x_n)$   $st_o$ -sınırlı dizidir.  $T$ 'nin  $st_o$ -kompaktlığından  $\delta(K) = 1$  ile  $(x_n)$  dizisinin  $Tx_k \xrightarrow{st_o} y$  olacak şekilde  $(x_k)_{k \in K}$  alt dizisi vardır ve bazı  $y \in F$  elemanları vardır. Benzer olarak  $(x_k)_{k \in K}$  dizisinin  $\delta(M) = 1$  ve  $Tx_m \xrightarrow{o} y$  şartlarını sağlayacak şekilde bir  $(x_m)_{m \in M}$  alt dizisi vardır. Buradan takiple  $F$  üzerindeki  $\sigma$ -sıra norm süreklilikten  $Tx_k \xrightarrow{\|\cdot\|} y$  yakınsaması  $\|Tx_n\| \rightarrow \infty$  ile çelişki oluşturur. Böylece  $T$  norm sınırlı olur.

**Önerme 5.6**  $T \in \mathcal{L}_{st_o}(E, F)$  ve  $G, F$ 'nin majorizing ve sıra tam alt kafesi olsun. Eğer  $T(E)$   $G$ 'nin alt uzayı ise  $T: E \rightarrow G$  operatörü  $st_o$ -kompakttır.

*İspat:* Varsayalım  $(x_n)$ ,  $E$ 'de  $st_o$ -sınırlı bir dizi olsun.  $T \in \mathcal{L}_{st_o}(E, F)$  olduğundan  $(x_n)$  dizisinin  $\delta(K) = 1$  ile  $T(x_k) \xrightarrow{st_o} y$  olacak şekilde  $(x_k)_{k \in K}$  alt dizisi ve bazı  $y \in F$  vardır. [Teorem 5.1]'den takiple  $T: E \rightarrow F$  bir  $st_o$ -sınırlı operatördür. Bu nedenle  $(x_n)$  dizisi  $E$ 'de  $st_o$ -sınırlı dizi olduğunda  $(Tx_n)$   $F$ 'de bir  $st_o$ -sınırlı dizi olur. Buradan  $(x_n)$  dizisinin  $\delta(M) = 1$  ile  $(Tx_m)$  olacak şekilde  $(x_m)_{m \in M}$  alt dizisi daha vardır ve  $(Tx_m)$   $F$  içinde sıra sınırlıdır.  $(Tx_m)$  dizisi  $G$  içinde de sıra sınırlıdır. Çünkü  $G$  majorizing ve  $T(E)$ ,  $G$ 'nin bir alt uzayıdır. Açıklama 27 (Azouzi ve Amor, 2021) kullanılarak  $G$  içinde  $Tx_m \xrightarrow{o} y$  yani  $Tx_n \xrightarrow{st_o} y$  elde edilir. Bu ise istenen sonuçtur.

**KAYNAKLAR**

- Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D. 2002. An invitation to operator theory, 50, American Mathematical Society, *Rhoda Island*.
- Abramovich, Y.A., ve Sirotkin G. 2005. On order convergence of nets, *Positivity*, 9(3), 287–292.
- Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O. 2003. Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics, second Edition, Mathematical Surveys and Monographs Centrum, *Indianapolis*, 105, 344.
- Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 2006, Positive operators, Springer Science & Business Media, 119.
- Albayrak, H., Pehlivan, S. 2012. Statistical convergence and statistical continuity on locally solid Riesz spaces, *Topology and its Applications*, 159(7), 1887-1893.
- Aydın, A., Emelyanov, E.Y., Özcan, N.E., and Marabeh, M.A. 2018. Compact-like operators in lattice-normed spaces, *Indagationes Mathematicae*, 29(2), 633-656.
- Aydın, A. 2019. Convergence via filter in locally solid Riesz spaces, *International Journal of Science and Research*, 8(9), 351–353.
- Aydın, A., Emelyanov, E., Erkurşun, Ö.N., Marabeh, M. 2019. Unbounded p-convergence in lattice-normed vector lattices, *Siberian Advances in Mathematics*, 29(3), 164-182.
- Aydın, A. 2020. The statistically unbounded  $\tau$ -convergence on locally solid Riesz spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 44(3), 949-956.
- Aydın, A., Emelyanov, E., Gorokhova, S. 2021. Full lattice convergence on Riesz spaces, *Indagationes Mathematicae*, 32(3), 658-690.
- Aydın, A., Çınar, M., Et, M. 2021. The  $\lambda$ -Statistical Convergence in Riesz Spaces, *Lobachevski Journal of Mathematics*, 42(13), 3098-3104.
- Aydın, A. 2022. Statistical unbounded order convergence in Riesz spaces, *Mathematics and Informatics*, 37(3), 585-593.
- Aydın, A., Emelyanov, E., and Gorokhova, S. 2022. Multiplicative order continuous operators on Riesz algebras, *arXiv preprint arXiv:2201.12095*.
- Aydın, A., Gorokhova, S., Selen, R., and Solak, S. 2023. Statistically order continuous operators on Riesz spaces, *Maejo International Journal of Science and Technology*, 17(1), 1–9.
- Azouzi, Y., and Amor, M.A.B. 2021. On compact operators between lattice normed spaces, *In Positivity and its Applications*, 21-29.
- Buck, R.C. 1953. Generalized asymptotic density, *American journal of mathematics*, 75(2), 335-346.
- De Pagter, B. 1981. f-Algebras and Orthomorphisms, *Rijksuniversiteit te Leiden*.
- Ercan, Z. 2009. A characterization of u-uniformly completeness of Riesz spaces in terms of statistical u-uniformly pre-completeness, *Demonstratio Mathematica*, 42(2), 381-386.

- Et, M., Baliarsingh, P., Kandemir, H. Ş., and Küçükaslan, M. 2021. Deferred statistical convergence and strongly deferred summable functions, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 115(1), 1-14.
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique, *Colloquium Mathematicum*, 2, 241-244.
- Freedman, A.R., Sember, J.J. 1981. Densities and summability, *Pacif. J. Math*, 95(2), 293-305.
- Freudenthal, H. 1936. Teilweise geordnete moduln, *Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappij*, 39, 641-651.
- Fridy, J.A.. 1985. On statistical convergence, *Analysis*, 5(4), 301-314.
- Fridy, J., Orhan, C. 1997. Statistical limit superior and limit inferior, *Proceedings of the American mathematical society*, 125(12), 3625-3631.
- Gutman, A. 1996. Disjointness preserving operators, *Springer*, 359-454.
- Huijsmans, C.B. 1991. "Lattice-ordered algebras and f-algebras: a survey, Positive operators, Riesz spaces, and economics (Pasadena, CA, 1990)", *Springer, Berlin*, 151-169.
- Kantorovitch, L. 1937. Lineare halbgeordnete Raume, *Математический сборник*, 2(1), 121-168.
- Luxemburg, W. A. J., and Zaanen, A.C. 1971. The linear modulus of an order bounded linear transformation, *Indagationes Mathematicae*, 74, 422-434.
- Maslyuchenko, O.V., Mykhaylyuk, V.V., and Popov, M.M. 2009. A lattice approach to narrow operators, *Positivity*, 13(3), 459-495.
- Nakano, H. 1948. Ergodic theorems in semi-ordered linear spaces, *Ann. of Math*, 49(2), 538-556.
- Niven, R.W., Speer, M., and Schreier, H. 1991. Nebulization of liposomes, II. The effects of size and modeling of solute release profiles, *Pharmaceutical research*, 8(2), 217-221.
- Pehlivan, S., Mamedov, M.A. 2000. Statistical cluster points and turnpike, *Optimization*, 48(1), 91-106.
- Räbiger, F. 1991. Lower and upper 2-estimates for order bounded sequences and Dunford-Pettis operators between certain classes of Banach lattices, *Springer*, 159-170.
- Riesz, F. 1928. Sur la decomposition des operations fonctionelles lineaires, *Internazionale dei Matematici*, 3, 143-148.
- Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloquium Mathematicum*, 2, 73-74.
- Shidei, T., & Ogasawara, K. 1957. Studies on the cuttings of forest trees (IV) Influence of amount of needle, hormone treatment and their interaction on the rooting behavior of cuttings of *Metasequoia glyptostroboides* Hu et Cheng, *Journal Of The Japanese Forestry Society*, 39(6), 221-224.
- Şençimen, C., Pehlivan, S. 2012. Statistical order convergence in Riesz spaces, *Mathematica Slovaca*, 62(2), 257-270.

- Temizsu, F., Aydın, A. 2022. Statistical convergence of nets on locally solid Riesz spaces, *The Journal of Analysis*, 30, 845–857.
- Tripathy, B. 1997. On statistically convergent and statistically bounded sequences, *Bull. Malays. Math. Soc*, 20(1), 31-33.
- Schoenberg, I.J. 1959. The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, *American Mathematical Monthly*, 66, 361-375.
- Wickstead, A. 2001. Kusraev, A.G., Dominated operators, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 44(3), 665-666.
- Vulikh, B. 1967. Introduction to the theory of partially ordered spaces, Walters-Noordoff Sci, Publication, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 15, 387.
- Yosida, K. 1938. Mean ergodic theorem in Banach spaces, *Proceedings of the Imperial Academy*, 14(8), 292-294.
- Zaanen, A.C., 1983, Riesz spaces II, *The Netherlands: North-Holland Publishing*, Amsterdam, 30.
- Zygmund, A. 1935. Trigonometric Series, *Monografie Matematyczne*, 5, 331.