T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKINSAK KÜME DİZİLERİNİN CEBİRİ

Sibel ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2020
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKINSAK KÜME DİZİLERİNİN CEBİRİ

Sibel ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof. Dr. Harun POLAT

Şubat-2020
MUŞ

TEZ KABUL VE ONAYI

Prof. Dr. Harun POLAT danışmanlığında, Sibel ÖZTÜRK tarafından hazırlanan "Yakınsak Küme Dizilerinin Cebiri " konulu bu çalışma **13/02/ 2020** tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği /~~oy çokluğu~~ ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul/~~red~~ edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Harun POLAT	
Danışman Prof. Dr. Harun POLAT Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	
Üye Dr. Öğr. Üyesi Abdullah AYDIN Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	
Üye Dr. Öğr. Üyesi Ziyattin TAŞ Bingöl Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 17/02/2020 Tarih ve ....6..../..3....... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Sibel ÖZTÜRK

Tarih: 13/02/2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKINSAK KÜME DİZİLERİNİN CEBİRİ

Sibel ÖZTÜRK

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Harun POLAT

2020, 30 Sayfa

Jüri

Danışman: Prof. Dr. Harun POLAT
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Ziyattin TAŞ
Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Abdullah AYDIN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Giriş kısmında tez hakkında genel bilgiler verilmiş olup tezin amacı vurgulanmıştır. İkinci bölümde kaynak araştırılmasına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde bulgular bölümünü aydınlatmak için bazı temel ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümde küme dizilerinin yakınsaklığı incelenmiştir. Küme dizilerinin yakınsaklık çeşitleri olan Kuratowski, Wijsman, Hausdorff, Mosco, Fisher anlamındaki yakınsaklıklar tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde ise yakınsak küme dizilerinin cebiri tanımlanmış ve örneklere yer verilmiştir. Son bölümde bazı sonuçlara ulaşılarak bu konu ile ilgili ileride çalışılabilecek alanlara öneride bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Cebir, Dizi, Küme dizisi, Küme dizilerinin yakınsaklık çeşitleri.

ABSTRACT

MS THESIS

ALGEBRA OF CONVERGENCE SET SEQUENCES

Sibel ÖZTÜRK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE OF
IN MATHEMATICS SCIENCE

Advisor: Prof. Dr. Harun POLAT

2020, 30 Pages

Jury

Advisor	**: Prof. Dr. Harun POLAT**
Jury Member	**: Assist. Prof. Dr. Ziyattin TAŞ**
Jury Member	**:Assist. Prof Dr. Abdullah AYDIN**

This thesis insists of five chapters. The first chapter is reserved for the introduction. The first chapter the aim of the thesis is given by giving general information about the subject of the thesis. In the second chapter, the source research is included. In the third chapter, some basic definitions and theorems are given to illuminate the findings section. In this chapter, the convergence of set sequences is analyzed. The convergences in the sense of Kuratowski, Wijsman, Hausdorff, Mosco, Fisher, being the Convergence Types of Set Sequences are introduced. ın the fourth chapter, Algebra of Convergence Set Sequences is definitions and examples and theorems are given. In the last chapter, some results were reached and suggestions were made about the area that can be studied in the future.

Keywords: Algebra, The Convergence Types of Set Sequences, Set sequence, Sequence,

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitimim boyunca yardımlarını benden esirgemeyen aileme ve bu tez çalışması süresince, danışman hocam Sayın Prof. Dr. Harun POLAT 'a teşekkür ederim.

Sibel ÖZTÜRK
MUŞ-2020

İÇİNDEKİLER

ÖZET .... **iv**

ABSTRACT .... **v**

ÖNSÖZ .... **vi**

İÇİNDEKİLER .... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR .... **viii**

1. GİRİŞ **1**

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **2**

3. MATERYAL VE YÖNTEM **3**

3.1.Temel Tanım ve Teoremler 3

3.2.Küme Dizilerinin Yakınsaklığı 7

3.3.Küme Dizilerinin Yakınsaklık Çeşitleri 8

3.3.1. Kuratowski yakınsaklık 9

3.3.2. Wijsman yakınsaklık 11

3.3.3. Hausdorff yakınsaklık 11

3.3.4. Mosco yakınsaklık 12

3.3.5. Fisher yakınsaklık 12

3.4 Tanımlanan Yakınsaklık Çeşitleri Arasındaki İlişkiler 13

3.5. Monoton Diziler 16

3.6.Kompakt Olan Küme Dizilerinin Yakınsaklığı 16

3.7.Kümelerin Cebiri 17

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA **21**

4.1. Yakınsak Küme Dizilerinin Cebiri 21

5. SONUÇ VE ÖNERİLER **27**

KAYNAKLAR **28**

ÖZGEÇMİŞ **31**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\subset$	:	Altküme
(a_k)	:	a_k dizisi
$F-limA_k$	:	$\{A_k\}$ dizisinin Fisher limiti
$H-\lim A_k$	:	$\{A_k\}$ dizisinin Hausdorff limiti
$K-\lim A_k$	:	$\{A_k\}$ dizisinin Kuratowski limiti
$M-limA_k$	:	$\{A_k\}$ dizisinin Mosco limiti
W$-limA_k$	:	$\{A_k\}$ dizisininWijsman limiti
$\cup$	:	Bileşim
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\forall$	:	Her
$CC(X)$	:	Kapalı konveks küme
$\{A_k\}$	:	Küme dizisi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
σ	:	Sigma
$P(X)$	:	X kümesinin kuvvet kümesi
$d(x,A)$	:	x noktasının A kümesine uzaklığı
(X,ρ)	:	ρ Metrik uzayı

1. GİRİŞ

Dizilerin yakınsaklığı birçok araştırmacı tarafından küme dizilerinin yakınsaklığına genişletilmiştir. İlk olarak Painleve tarafından 1902’ de küme dizilerinin alt ve üst limiti tanımlanmıştır. Fakat bu kavramlar Kuratowski’ nin kitabında yayınlandıktan sonra popüler olmuştur. Bu yakınsaklık literatürde Painlave-Kuratowski anlamında küme dizilerinin yakınsaklığı ya da kapalı küme dizilerinin yakınsaklığı olarak bilinir.

Küme dizileri için yakınsaklık kavramı ise daha çok 1980’ lı yıllarda araştırmalara konu edildi. Effros (1965), Wijsman (1966), Mosco (1969), Salinetti (1979), Beer (1985, 1987, 1994, 2002) , De Blasi ve Myjak (1986), Lucchetti (1985), Baronti ve Papini (1986), Lechicki ve Levi (1987) ve diğer birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Bu çalışmanın amacı, yakınsaklık, küme dizisi, yakınsak küme dizisi çeşitleri ve kümelerin cebiri tanımlarını vererek bunlar arasındaki ilişkileri incelemek ve cebir kavramını genişletmektir.

Tezin ikinci bölümünde kaynak araştırılmasına değinilmiştir. Üçüncü bölümde ise küme dizilerinin yakınsaklığı, küme dizilerinin yakınsaklık çeşitleri, bu yakınsak olan küme dizileri arasındaki ilişkiler ve kümelerin cebiri incelenmiş olup tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Özgün olarak bu tezde bu tanım ve teoremlerden yola çıkılarak yakınsak olan küme dizilerinin cebiri tanımlanmış ve örneklere yer verilmiştir. Son bölümde ise bazı sonuçlara ulaşılmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Küme dizilerinin limiti Kuratowski' nin Topology (1966) adlı kitabında tanımlanmıştır. Daha sonra küme dizilerinin yakınsaklığı birçok matematikçi tarafından ele alınıp genişletilmiştir. Effros (1965) ‘‘Bir Topolojik Uzayda Kapalı Alt Küme Dizilerinin Yakınsaklığı’’ na, Wijsman (1966) ‘‘Konveks Küme Dizilerinin Yakınsaklığı’’na, Mosco (1969) ‘‘Varyasyonel eşitsizliklerin Çözümü ve Konveks Küme Dizilerinin Yakınsaklığı’’na, Salinetti (1979) ‘‘Sonlu Boyutlu Konveks Küme Dizilerinin Yakınsaklığı’’ na, Beer (1985, 1987, 1994, 2002) ‘‘Metrik Uzaylarda Kapalı Küme Dizilerinin Yakınsaklığı’’ na, De Blasi ve Myjak (1985) ‘‘Banach Uzaylarında Konveks Küme Dizilerinin Zayıf, Yakınsaklığı’’na, Baronti ve Papini (1986) ‘‘Küme Dizilerinin Yakınsaklığı’’ na, Lechicki ve Levi (1987) ‘‘Bir Metrik Uzayın Hiperuzayında Wijsman Yakınsaklığı’’ na çalışmışlardır.

Daha sonra normlu ve metrik uzayların alt kümeleri olan küme dizilerinin yakınsaklığına çalışılmıştır. Bu çalışmalar doğrultusunda “Kuratowski yakınsaklık (K)”, “Wijsman yakınsaklık (W)”, “Hausdorff yakınsaklık (H)”, “Mosco yakınsaklık (M)” ve “Fisher yakınsaklık (F)” çeşitlerine çalışılmıştır. Ayrıca bu yakınsaklık çeşitleri arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu yakınsaklık çeşitlerinden Kuratowski ve Wijsman yakınsaklıkları arasındaki ilişkiyi Beer çalıştı. Küme dizilerinin Wijsman anlamında yakınsaklığı için, Wijsman ‘‘Konveks Küme Dizilerinin Yakınsaklığı’’ (1963) na ve Beer ‘‘Wijsman Yakınsaklığı’’ (1994) na çalışmışlardır. Ayrıca küme dizileri için Wijsman anlamında yakınsaklık kavramı ise 1986 yılında Baronti ve Papini tarafından da çalışılmıştır. Ayrıca küme dizileri için Kuratowski, Hausdorff ve Wijsman yakınsaklık arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

Son olarak Nuray ve Rhoades (2012) tarafından yapılan ‘‘Küme Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı’’ çalışmasında küme dizileri için Wijsman istatistiksel yakınsaklık, Kuratowski istatistiksel yakınsaklık ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanmıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde çalışmamız boyunca kullandığımız bazı temel tanım ve teoremler verildi.

3.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1. Tanım kümesi $\mathbb{N} = \{1,2,\dots,n,\dots\}$ doğal sayılar kümesinden ibaret olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümelerine çeşitli adlar alırlar. Mesela bir dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ($\mathbb{R}$) ise diziye reel terimli dizi, rasyonel sayılar kümesi ($\mathbb{Q}$) ise rasyonel terimli dizi, karmaşık sayılar kümesi ($\mathbb{C}$) ise kompleks terimli dizi denir. Mesela reel terimli dizi $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gibi bir fonksiyondur. Genel terimi x_n olan bir dizi $(x_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ile gösterilir (Balcı, 2008).

Tanım 3.2. (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x \epsilon \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - x| < \epsilon$ olacak şekilde ϵ a bağlı bir $n_{0_{(\varepsilon)}} \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x e yakınsaktır denir. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ya da $x_n \to x$ şeklinde gösterilir (Balcı,2008).

Tanım 3.3. Her $n > 0$ doğal sayısı için $|x_n| \leq k$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine sınırlı dizi denir (Balcı, 2008).

Teorem 3.4. Bir (x_n) dizisi yakınsak ise sınırlıdır (Balcı, 2008).

Tanım 3.5. (x_n) bir reel sayı dizisi olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir (Balcı, 2008).

Tanım 3.6. X boş olmayan bir küme, $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için;

M1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2. $d(x,y) = d(y,x)$

M3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartlarını sağlayan d ya X de bir metrik ve (X,d) da bir metrik uzay denir (Bayraktar, 1987).

Tanım 3.7. $X = (X,d)$ bir metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy dizisi, bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise, (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir (Maddox, 1970).

Tanım 3.8. V boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+: V \times V \to F$ ve $.: F \times V \to V$ ile tanımlanan adi toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki şartları sağlıyorsa V ye F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A. $V, +$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani, her $x, y, z \in V$ için

G1. $x + y \in V$ dir.

G2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ dir.

G3. $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $\theta \in V$ vardır.

G4. $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde her $x \in V$ için bir ve yalnız bir $-x \in V$ vardır.

G5. $x + y = y + x$ dir.

B. $x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

V1. $\alpha . x \in V$ dir.

V2. $\alpha(x + y) = \alpha . x + \alpha . y$ dir.

V3. $(\alpha + \beta). x = \alpha . x + \beta . x$ dir.

V4. $(\alpha . \beta). x = \alpha .(\beta . x)$

V5. $1. x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır). $F = \mathbb{R}$ ise V ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise V ye kompleks lineer uzay denir (Pugachev ve Sinitsyn, 1999).

Tanım 3.9. (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ve X in boş olmayan herhangi bir A altkümesi için, x in A ya olan uzaklığı $d(x, A) = \inf \rho(x, a)$ olarak tanımlanır (Nuray ve Rhoades, 2012).

Tanım 3.10. $X \neq \emptyset$ ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere $f: \mathbb{N} \to P(X)$ şeklinde tanımlı her fonksiyon $\forall k \in \mathbb{N}$ için $P(X)$' de bir $f(k) = A_k \in P(X)$ kümesi belirler. Bu f fonksiyonunun görüntü kümesini oluşturan $A_1, A_2, \dots$ kümelerinin oluşturduğu $\{A_k\} = \{A_1, A_2, \dots\}$ dizisine küme dizisi denir.

Tanım 3.11. $\{A_k\}$,(X, ρ) metrik uzayında bir küme dizisi olsun. $\{A_k\}$ küme dizisinin alt limiti,

$$\liminf A_k = \{x \in X \ : \ \exists (a_k) \subset (A_k), a_k \to x\}$$

ve üst limiti

$$\limsup A_k = \{x \in X_i \ : \ \exists (k_i) \exists (a_{k_i}) \subset (A_{k_i}), a_{k_i} \to x\}$$

ile tanımlanır (Nuray ve Rhoades, 2012). Burada k_i doğal sayıların artan bir dizisi ve bir alt dizi için indeks kümesini temsil eder.

Tanım 3.12. X bir F cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$$\|.\|: X \to R^+, \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in F$ için

N1. $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

N2. $\|ax\| = |a| \|x\|$;

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği) özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|$ dönüşümü X üzerinde bir norm adını alır ve bu durumda $(X,\|.\|)$ ikilisine bir normlu lineer uzay denir (Musayev ve Alp., 2000).

Tanım 3.13. L normlu lineer uzay olsun. L, $d(x,y) = \|x-y\|, (x,y \in L)$ norm metriğine göre tam ise, L ye Banach uzayı denir. L nin Reel ya da Kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı da Reel veya Kompleks Banach uzayı olarak isimlendirilir (Curtain ve Pritchard, 1977).

Tanım 3.14. A kümesinin elemanlarından oluşan alt kümelerinin herhangi bir kümesine A nın alt kümelerinin bir sınıfı denir (Balcı, 2012).

Tanım 3.15. Bir X kümesinin elemanlarından oluşan tüm alt kümelerinin kümesine X in kuvvet kümesi denir. $P(X)$ ile gösterilir (Bayraktar, 1994).

Tanım 3.16. X bir küme $\{A_n\}$ de X in altkümelerinin bir dizisi olsun. Bu dizinin üst ve alt limitleri sırasıyla;

$$\limsup_{n} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right)$$

ve

$$\liminf_{n} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right)$$

kümelerine sırası ile $\{A_n\}$ küme dizisinin üst limiti ve alt limiti denir.

Eğer $\limsup_{n} \{A_n\} = \liminf_{n} \{A_n\} = A$ ise $\{A_n\}$ küme dizisi yakınsak ve $\{A_n\}$ küme dizisinin limiti A dır denir (Balcı, 2012).

Tanım 3.17. Eğer $\liminf A_k = \limsup A_k = \lim A_k = A$ ise X in bir A alt kümesine $\{A_k\}$ küme dizisinin limit kümesi veya kısaca limiti denir (Nuray ve Rhoades, 2012).

Tanım 3.18. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset A_{n+1}$ ise $\{A_n\}$ küme dizisine artan ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \supset A_{n+1}$ ise $\{A_n\}$ küme dizisine azalan küme dizisi denir. $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ise $\{A_n\}$ dizisine ayrık dizi denir (Balcı, 2012).

Tanım 3.19. V bir lineer uzay ve $A \subseteq V$ olsun. Her $x, y \in A$ için $(B = \{z \in V: z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A)$ olduğunda A kümesine konveks küme denir (Brown ve Page, 1970). Yani sezgisel olarak bir kümenin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası kümenin içinde kalıyorsa kümeye konveks küme denir.

Tanım 3.20. (X,d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve S, X in bir alt kümesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\{B(x;\varepsilon) \setminus \{x\}\} \cap S \neq \emptyset$ oluyorsa $x \in X$ noktasına S nin bir yığılma noktası denir (Soykan, 2012).

Tanım 3.21. (X, d) bir metrik uzay ve S, X in bir alt kümesi olsun. Eğer S nin bütün noktaları yığılma noktası ise S kümesi kapalıdır denir (Soykan, 2012).

Tanım 3.22. (X, d) bir metrik uzay ve G, X in bir alt kümesi olsun. Her $x \in G$ için x merkezli r yarıçaplı $B(x, r_x)$ komşuluğu G nin içinde kalıyorsa G ye bir açık küme denir (Soykan, 2012).

Tanım 3.23. X boştan farklı bir küme ve τ da X in elemanlarından oluşan alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

T1. $\emptyset, X \in \tau$ dır.

T2. $G_{k_1}, G_{k_2}, \dots, G_{k_n} \in \tau$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} G_{k_i} \in \tau.$ yani τ sınıfı sonlu arakesite göre kapalıdır.

T3. Her $i \in \mathbb{N}$ için $G_{k_i} \in \tau$, yani τ sınıfı $\bigcup_{i \in I} G_{k_i} \in \tau$, yani τ sınıfı keyfi birleşime göre kapalıdır (Mucuk, 2010).

Tanım 3.24. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $\mathcal{G} = \{G_i | i \in I\}$ de X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer $\mathcal{G}$ deki her bir G_i kümesi açık ise $\mathcal{G}$ ye açık örtü denir. $\mathcal{G}$ sınıfının A yı örten sonlu adette kümesi varsa yani, $A \subseteq G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$ olacak şekilde $G_{i_1}, \dots, G_{i_n} \in \mathcal{G}$ varsa $\mathcal{G}' = \{G_{i_1}, \dots, G_{i_n}\}$ sınıfına $\mathcal{G}$ nn sonlu bir alt örtüsü denir (Mucuk, 2010).

Tanım 3.25. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya bir kompakt küme denir. X in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına bir kompakt uzay denir (Mucuk, 2010).

Tanım 3.26. (X, τ) bir topolojik uzayı verilmiş olsun. d metriğine göre açık kümelerin ailesi τ olacak şekilde X de bir d metriği tarif edilebilirse (X, τ) uzayına metriklenebilir denir (Bayraktar, 1994).

Tanım 3.27. (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

a) $D_r(x_0) = D(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ (Açık yuvar)

b) $\overline{D}_r(x_0) = \overline{D}(x_0; r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ (Kapalı yuvar)

Burada x_0 merkezli r yarıçaplı açık bir yuvar, merkeze olan uzaklığı r den daha küçük olan X e ait noktaların kümesidir (Bayraktar, 1994).

Tanım 3.28. (X, ρ) bir metrik uzay ve A_k, X in boş olmayan kapalı herhangi altkümeleri olsun. Eğer her $x \in X$ için $sup_k\, d(x, A_k) < \infty$ oluyorsa A_k dizisi sınırlıdır denir ve $A_k \in \ell_\infty$ şeklinde yazılır (Nuray ve Rhoades, 2012).

3.2. Küme Dizilerinin Yakınsaklığı

Sayı dizilerindeki kavramdan biraz farklı olarak küme dizilerinin limitini tanımlayacağız. Kümelerde büyüklük, küçüklük gibi kavramlar tanımlı olmadığı için alt küme kavramı kullanılır. $\{A_n\}$ küme dizisini kapsayan birçok alt küme bulunabilir. O halde $\{A_n\}$ küme dizisini kapsayan alt kümelerden her biri $\{A_n\}$ dizisi için bir üst sınır olarak alınabilir. Benzer şekilde $\{A_n\}$ küme dizisi için alt sınırlar da yazılabilir.

$\{x_n\}$,reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \sup \{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \sup_{n\geq k}\{x_n\} = \inf_{n} \sup_{n\geq k}\{x_n\}.$$

Çünkü $y_k = \sup_{n\geq k}\{x_n\}$ dizisi alttan sınırlanmış ve artmayan bir dizidir. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \inf \{x_n\} = \lim_{n\to\infty} \inf_{n\geq k}\{x_n\} = \sup_{n} \inf_{n\geq k}\{x_n\} \text{ dir.}$$

Çünkü $y_k = \inf_{n\geq k}\{x_n\}$ üstten sınırlanmış ve azalmayan bir dizidir.

Herhangi bir $\{A_n\}$ küme dizisi için $\sup\{A_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{A_n\}$ ve $\inf\{A_n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{A_n\}$ ise sırasıyla;

$$\lim_{n\to\infty} \sup \{A_n\} = \inf \{\sup\{A_n\}_{n=k}^{\infty}\}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \inf \{A_n\} = \sup \{\inf \{A_n\}_{n=k}^{\infty}\}$$

olur (Taylor, 2006).

Teorem 3.29. $\{A_n\}$ küme dizisi artan ve $\{B_n\}$ küme dizisi azalan bir küme dizisi olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ ve } \lim_{n} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

olur (Balcı, 2012).

İspat. $\lim\sup A_n = \lim\inf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\lim\sup_{n} A_n &= \bigcap_{m=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\Big)\\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty}(A_m \cup A_{m+1} \cup A_{m+2} \ldots)\\ &= \{A_1\} \cap \{A_1 \cup A_2\} \cap \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim\inf_{n} A_n &= \bigcup_{m=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\Big)\\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1} \cap A_{m+2} \ldots) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_m\end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde;

$$\lim_{n\to\infty} \sup B_n = \lim_{n\to\infty} \inf B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

olduğunu göstermeliyiz. $\{B_n\}$ küme dizisi azalan olduğundan ;

$$\lim_n \sup B_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$$

$$\lim_n \inf B_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_n$$

olur.

Örnek 3.30. Aşağıda genel terimleri verilen küme dizilerinin yakınsaklığını inceleyelim (Balcı, 2012).

a) $\{A_n\} = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$

b) $\{B_n\} = \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$

Çözüm a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ olduğundan $\{A_n\}$ küme dizisi azalan bir dizidir. O halde $\lim_n A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ dir.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$

$$= [-1,1] \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \dots \cap \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \cap \dots$$

$$= \{0\} \quad \text{olup} \quad \lim_n A_n = \{0\}$$

olur.

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \subset B_{n+1}$ olduğundan $\{B_n\}$ küme dizisi artan bir dizidir. Öyleyse $\lim_n B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ dir. $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{-1,0,1\} \cup \{-2,-1,0,1,2\} \cup \dots = \mathbb{Z}$ olur.

Dolayısıyla $\lim_n B_n = \mathbb{Z}$ dir.

3.3. Küme Dizilerinin Yakınsaklık Çeşitleri

Çalışmamızda şu kısaltmalar kullanıldı. X i bir metrik uzay ve 2^X deki yalnız yakınsak olan küme dizilerini dikkate alacağız. Dizilerin terimleri ve limiti mevcut olduğunda boş olmayan kapalı küme olarak kabul edildi. Bir A kümesinin kapanışını $\bar{A}$ ile göstereceğiz. $x \in X$ ve $r > 0$ için $B(x,r) = \{y \in X; d(x,y) \leq r\}$ ve $S(x,r) = \{y \in X; d(x,y) < r\}$ sırası ile x merkezli ve r yarıçaplı kapalı ve açık yuvarları göstereceğiz. Ayrıca $\emptyset \neq A \subset X$ ve $d(x,\emptyset) = \infty$ ise $d(x,A) = \inf \{d(x,y); y \in A\}$ ile x in A kümesine olan uzaklığını göstereceğiz. Bir $\{A_n\}$ küme dizisinin limitini $\lim_n$ ile gösterildi. Ayrıca bir dizinin limit infimumu ile limit supremumunu sırasıyla $\underline{\lim}$ ve $\overline{\lim}$ şeklinde gösteririz.

3.3.1 Kuratowski yakınsaklık

(X, d) bir metrik uzay ve $\{A_n\}$ küme dizisi bu metrik uzayda boş olmayan bir küme dizisi olsun. $\underline{\lim}_n A_n = \overline{\lim}_n A_n = A$ olduğunda $\{A_n\}$ küme dizisi A kümesine Kuratowski yakınsaktır denir. $A_n \xrightarrow{K} A$ ya da $K - \lim A_n = A$ ile gösterilir (Kuratowski, 1966)

$$\underline{\lim}_n A_n = \{x \in X: \exists (x_n), x_n \in A_n, \lim_n x_n = x\}$$

$$\overline{\lim}_n A_n = \{x \in X: \exists \left(A_{n_k}\right) \subset (A_n),\ \left(x_{n_k}\right) \text{ bir dizi },\ \left(x_{n_k}\right) \in \left(A_{n_k}\right),$$
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_k x_{n_k} = x\}.$$

(X, d) bir metrik uzay ve $CL(X)$, X metrik uzayının boş olmayan kapalı alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Her $C \in CL(X)$ için C nin uzaklık fonksiyonu $d(.\ , C) : X \to [0, \infty)$ ile tanımlanır.

Açıkça lim inf $C_n \subset$ lim sup C_n dir. Burada hem lim inf C_n hem de lim sup C_n kapalı kümelerdir. Eğer lim inf $C_n =$ lim sup $C_n = C$ denkse $\{C_n\}$ küme dizisinin kapalı C kümesine Kuratowski anlamında yakınsak olduğunu söyleriz. Kabul edelim ki $\{C, C_1, C_2, \ldots\} \subset CL(X)$ ve {d(. , C_n)} $d(.\ , C)$ ye noktasal yakınsak olsun. Her $x \in C$ için $\lim_{n \to \infty} d(x, C_n) = 0$ dir. Bundan kastedilen $x \in$ lim inf C_n dir.

Böylece $C \subset$ lim inf C_n dir. Diğer taraftan $x \in$ lim sup C_n ise x e yakınsak bir $\{x_k\}$ dizisi vardır. Her k için $x_k \in C_{n_k}$ olacak şekilde $\{n_k\}$ tamsayılarının artan bir dizisi vardır. Öyleyse $\lim_{k \to \infty} d\left(x, C_{n_k}\right) = 0$ dır. Öyleyse lim sup $C_n \subset C$ dir.

Böylece {d(. , C_n), $d(.\ , C)$ ye noktasal yakınsaktır. Bu da $C_n \xrightarrow{K} C$ olmasını gerektirir (Beer, 1985).

Teorem 3.31. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $\{C_n\}$ küme dizisi $CL(X)$ de boş olmayan kapalı bir C kümesine Kuratowski anlamında yakınsak olduğunda $\{d(.\ , C_n\}$, $d(.\ , C)$ ye noktasal yakınsaktır.

(2) X de her p için, $\{x_n\}$ X de bir dizi fakat bir limit noktası değilse, her $x \in X$ için $d(p, x) \leq$ lim inf $d(p, x_n)$ dir (Beer, 1985).

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2). Kabul edelim ki (2) yanlış olsun. $\{x_n\}$ X kümesinde bir dizi ve $x, p \in X$ noktalarını seçelim ki bu durumda lim inf $d(p, x_n) < d(p, x)$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için ve her $\varepsilon > 0$ için $d(p, x_n) < d(p, x) - \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Her n için $C_n = \{x, x_n\}$ olsun. Açıkça lim inf C_n = lim sup $C_n = \{x\}$ dir. Fakat $C = \{x\}$,

$$\begin{aligned} \text{Lim sup } d\,(p, C_n) &= \text{lim sup } d(p, x_n) \\ &\leq d(p, x) - \varepsilon \\ &= d(p, C) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Böylece $d(.\ , C_n)$ nin $d(.\ , C)$ ye noktasal yakınsak değildir.

(2) $\Longrightarrow$ (1). $\{C_n\}$, $CL(X)$ de Kuratowski anlamında $(C \neq \emptyset)$ ye yakınsayan bir dizi olsun. $p \in X$ sabit olmak üzere $C \subset$ lim inf C_n dır. X üzerinde lim sup $d(p, C_n) \leq d(p, C)$ olur. $d(p, C) \leq$ lim inf $d(p, C_n)$ i gösterelim. Her n için $d(p, x_n) < d(p, C_n) + \frac{1}{n}$ olacak şekilde $x_n \in C_n$ seçelim. O halde $\lim_{k \to \infty} d(p, x_{n_k}) = \liminf d(p, , C_n)$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Eğer $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi bir x limit noktasına sahipse, $x \in$ lim sup $C_n = C$ ve d nin sürekliliği ile $d(p, C) \leq d(p, x) =$ lim inf $d(p, C_n)$ dır.

Aksine X de her x için, $d(p, x) \leq$ lim inf $d(p, x_n)$ = lim inf $d(p, C_n)$ olur. Özellikle bu C de her x için doğrudur. Dolayısıyla $d(p, C) \leq$ lim inf $d(p, C_n)$ dir.

Örnek 3.32. Genel terimi $A_n = (-\infty, -1 - \left(\frac{1}{n}\right)] \cup [2 + \frac{1}{n}, \infty)$ ile verilen $\{A_n\}$ küme dizisi $A = (-\infty$,-1$] \cup [2, \infty)$ kümesine Kuratowski yakınsaktır.

$$A_1 = (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$$

$$A_2 = \left(-\infty, -\tfrac{3}{2}\right] \cup \left[\tfrac{5}{2}, \infty\right)$$

.

.

.

$$A_n = (-\infty, -1 - \left(\tfrac{1}{n}\right)] \cup [2 + \tfrac{1}{n}, \infty)$$

$\lim_{n} A_n = (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$ olur.

$\overline{\lim_{n}}\ A_n = \underline{\lim_{n}}\ A_n = A$ olduğundan $A = K - \lim A_n$ dir (Uthayakumar, 1999).

Örnek 3.33. $X = \ell^1$ alalım. $C_n = [e_1, e_n]$ olmak üzere $C_n \xrightarrow{K} C = \{e_1\}$ dır.

$\{C_n\}$ küme dizisinin $\{e_1\}$ kümesine Kuratowski anlamında yakınsak olduğu görülür (Baronti ve Papini, 1986).

3.3.2.Wijsman yakınsaklık

(X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X in boş olmayan iki kapalı alt kümesi olsun. Eğer herbir $x \in X$ için $\lim_k d(x, A_k) = d(x, A)$ ise $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman yakınsaktır denir. $A_k \xrightarrow{W} A$ veya $W - \lim A_k = A$ ile gösterilir (Baronti ve Papini, 1986).

Örnek 3.34. Genel terimi ile verilen $A_k = \{(x,y): x^2 + y^2 + 2kx = 0\}$, $k \to \infty$ iken $\{A_k\}$ küme dizisi $A = \{(x,y): x = 0\}$ kümesine Wijsman yakınsaktır. Yani

$A = K - \lim A_k$ dır.

Burada $A_1 = \{(x,y): x^2 + y^2 + 2x = 0\}$,

$A_2 = \{(x,y): x^2 + y^2 + 4x = 0\}, \ldots A_n = \{(x,y): x^2 + y^2 + 2kx = 0\}$ dir. Bu küme dizisi merkezi $(-k, 0)$ olan çemberlerdir.

Bu dizi $k \to \infty$ iken y eksenine yani

$A = \{(x,y): x = 0\}$ kümesine Wijsman yakınsaktır (Uthayakumar, 1999).

3.3.3. Hausdorff yakınsaklık

$A_n \xrightarrow{H} A$ ile gösterilen,

$$\lim_n h(A_n, A) = 0$$

olan $\{A_n\}$ küme dizisi A kümesine Hausdorff anlamında yakınsaktır denir. Burada,

$$h(A,B) = \max(\delta(A,B), \delta(B,A)) \qquad (\leq +\infty)$$

ve

$\delta(A,B) = \sup_{x \in A} d(x,B)$ eğer $A \neq \emptyset$; $\delta(\emptyset, B) = 0$ dır (Baronti ve Papini,1986).

Örnek 3.35. $\{A_n\}$, $\mathbb{R}^2$ de azalan bir küme dizisi olmak üzere genel terimi $A_n = \{(x,y); 0 \leq x \leq 1$ ve $y = 0$ veya $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ ve $0 \leq y \leq 1\}$ ile verilen $\{A_n\}$ küme dizisi $A = \{(x,y);\ 0 \leq x \leq 1$ ve $y = 0$ veya $0 \leq y \leq 1$ ve $x = 0\}$ kümesine Hausdorff anlamında yakınsaktır. Yani $A_n \xrightarrow{H} A$ dir (Baronti ve Papini, 1986).

Herhangi bir metrik uzayda, Hausdorff yakınsak ise Wijsman yakınsaktır. Wijsman yakınsak ise Kuratowski yakınsak olduğu kolayca görülür.

3.3.4. Mosco yakınsaklık

Eğer $\underline{\lim}_{n} A_n = W - \overline{\lim}_{n} A_n = A$ ise $\{A_n\}$ küme dizisi A kümesine Mosco anlamında yakınsaktır.

$W - \overline{\lim}_{n} A_n = \{x \in X \mid k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} \to x$ olacak şekilde $x_{n_k} \in A_{n_k}$ dizisi ve $\{A_{n_k}\}$ alt dizisi vardır $\}$ (Baronti ve Papini, 1986).

Örnek 3.36. Genel terimi $A_n = \{(x,y): y = x/n \ , x \in \mathbb{R}\}$ ile verilen $\{A_n\}$ küme dizisi $A = \{(x,0): x \in \mathbb{R}\}$ kümesine Mosco anlamında yakınsaktır (Uthayakumar, 1999).

Yani $A = M - \lim_{n} A_n$ dir.

Örnek 3.37. $X = \ell^1$ alalım. $C_{2n} = [e_1, e_{n+1}]$; $C_{2n+1} = [e_1, e_{n+1/2}]$ olsun. $C_n \xrightarrow{M} \{e_1\}$ dir.

$C_2 = [e_1, e_2]$

$C_4 = [e_1, e_3]$

$C_6 = [e_1, e_4]$

.

.

.

$C_{2n} = [e_1, e_{n+1}]$ olduğundan $C_n \xrightarrow{M} \{e_1\}$ dir (Baronti ve Papini, 1986).

3.3.5. Fisher yakınsaklık

Aşağıdaki şartları sağlayan $\{A_n\}$ küme dizisi A kümesine Fisher anlamında yakınsaktır. $A_n \xrightarrow{F} A$ ile gösterilir.

(i) Her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n > n_\varepsilon$ için $\delta(A_n, A) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_ε sayısı vardır.

(ii) $\varepsilon > 0$ ve $x \in A$ için $d(x, A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n > n_{(\varepsilon,x)}$ olduğunda bir $n_{(\varepsilon,x)}$ sayısı vardır.

$\lim_{n} \left[\sup_{a \in A} d(a, A) \right] = 0$ dır (Baronti ve Papini, 1986).

Örnek 3.38. Genel terimi $C_n = [-n, n\,]$ ile verilen $\{C_n\}$ küme dizisi $\mathbb{R}$ ye Fisher anlamında yakınsaktır. Çünkü,

$C_1 = [-1,1]$, $C_2 = [-2,2], \ldots, C_n = [-n, n]$ olduğundan $C_n = C_n \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ dir (Uthayakumar, 1999).

Örnek 3.39. $X = \ell^2$ olsun. $A_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olacak şekilde bir $\{A_n\}$ küme dizisi A ya Fisher anlamında yakınsaktır. Çünkü,

$A_1 = \{e_1\}$

$A_2 = \{e_1, e_2\}$

$A_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$

.

.

.

$A_n \xrightarrow{F} A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ dır (Baronti ve Papini, 1986).

3.4. Tanımlanan Yakınsaklık Çeşitleri Arasındaki İlişkiler

Bundan sonraki çalışmalarımızda A_n ve A kümelerini sınırlı, boş olmayan ya da konveks kümeler olarak alındı.

$A_n \xrightarrow{K} A$ olduğunda limit tektir. Kapalı olmayan küme dizileri için $\overline{A_n} \to \bar{A}$, $A_n \to A$ ile aynı anlamdadır.

Mosco anlamında yakınsaklığa Mosco, Tsukada özellikle konveks kümelerde çalışmışlardır. Wijsman anlamında yakınsaklığa ise Wijsman, Lechicki ve Levi, Holmes özellikle metriklenebilme problemlerinde çalışmışlardır.

1. Burada $x \in \underline{\lim}_n A_n$ in anlamı; $\lim_n d(x, A_n) = 0$ olmasıdır.

$x \in \overline{\lim}_n A_n$ ise $\underline{\lim}_n d(x, A_n) = 0$ dır.

Ayrıca

$$h(A, A_n) = \sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, A_n)|$$

olur.

2. Fisher yakınsaklığın tanımındaki (ii) şartından $\{A_n\}$ küme dizisinin A kümesine yakınsamasının anlamı her $x \in A$ için $\lim_n d(x, A_n) = 0$ olmasıdır. Yani $A \subset \underline{\lim}_n A_n$ dir.

Ayrıca Fisher yakınsaklıktaki (i) şartından $\overline{\lim_n} A_n \subset A$ dir. Aslında $x \in \overline{\lim_n} A_n$ ve $x_{n_k} \in A_{n_k}$ ise $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$ dir. Bir alt diziye geçecek olursak $A_{n_k} \subset A^{1/k}$ ise

$x \in A^{1/k} = A$ olur. Açıklama (1) den (i) şartı geçerli olduğunda $A_n \xrightarrow{F} A$ nın $A_n \xrightarrow{K} A$ ya denk olduğunu söyleriz.

A herhangi bir küme ve $\varepsilon > 0$ için, $A^{\mathcal{E}} = \{x \in X; d(x, A) < \varepsilon\}$ olmak üzere

$$A^{\mathcal{E}} = \bigcup_{x \in A} S(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon) \subset \{x \in X; d(x, A) \leq \varepsilon\} = A'^{\mathcal{E}}$$

dır.

Eğer A konveks ise $A^{\mathcal{E}}$ da konvekstir. Ayrıca

$$A = \bigcap_{\mathcal{E}>0} A^{\mathcal{E}} = \bigcap_{\mathcal{E}>0} A'^{\mathcal{E}} = \bigcap_{\mathcal{E}>0} \overline{A^{\mathcal{E}}} = (\bigcap_{\mathcal{E}>0} A^{\mathcal{E}})^{-}$$

dır. Herhangi bir $B \subset X$ için

$$\delta(B, A) = \inf\{\varepsilon > 0; B \subset A^{\mathcal{E}}\} = \inf\{\varepsilon > 0; B \subset A'^{\mathcal{E}}\}$$

olur. Açıkça $A_n \xrightarrow{H} A$, Fisher yakınsaklığın (i) ve j (herhangi $\varepsilon > 0$ için $n > n_{\mathcal{E}}$ için $\delta(A, A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_{\mathcal{E}}$ vardır) şartlarına denktir.

Önerme 3.40. Daima (H) $\Longrightarrow$ (F) $\Longrightarrow$ (W) $\Longrightarrow$ (K) dır. Ayrıca herhangi bir normlu uzayda bir küme dizisi Mosco anlamında yakınsak ise Kuratowski anlamında yakınsaktır (Baronti ve Papini, 1986).

İspat. (H) $\Longrightarrow$ (F): Bunun ispatı için Fisher yakınsaklığın ($\varepsilon > 0$ ve $x \in A$ için $d(x, A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n > n_{(\mathcal{E},x)}$ olduğunda bir $n_{(\mathcal{E},x)}$ sayısı vardır) şartını ve (j) şartını göz önüne alalım .

(F) $\Longrightarrow$ (W): $A_n \xrightarrow{F} A$ olsun. $A = \emptyset$ ise bütün yeterli derecede büyük n için doğrudur. Şimdi $A \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım ve $\varepsilon > 0$ alalım.$x \in X$ için $d(x, A) = d$ kümesi verilsin. Bütün $n > n_{\mathcal{E}}$ için $A_n \subset A^{\mathcal{E}}$ dir. Böylece $d(x, A_n) \geq d(x, A^{\mathcal{E}})$ dir. Herhangi bir A kümesi, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $d(x, A^{\mathcal{E}}) = \max\ (0,\ d(x, A) - \varepsilon)$ dır. Dolayısıyla $n > n_{\mathcal{E}}$ için $d \leq d(x, A_n) + \varepsilon$ dur. Burada kastedilen $d \leq \underline{\lim_n}\, d(x, A_n)$dir. Eşitsizliğin tersini gösterelim. $y \in A$; $d(x, y) < d + \varepsilon$ olsun. $d(y, A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n > \bar{n}$ için bir $\bar{n}$ vardır. Böylece $d(x, A_n) \leq d(x, y) + d(y, A_n) < d + 2\varepsilon$ dır. Burada $\overline{\lim_n}\, d(x, A_n) \leq d + 2\varepsilon$ dır. Böylece keyfi seçilen ε dan $\overline{\lim_n}\, d(x, A_n) \leq d$ dir. Öyleyse $\lim_n d(x, A) = d$ olduğu gösterilmiş olur ve ispat tamamlanır.

(W) $\Longrightarrow$ (K): $A_n \xrightarrow{W} A$ olsun. $\overline{\lim_n} d(x, A_n) = \emptyset$ den kastedilen herhangi bir x için $A = \emptyset$ ise $\lim_n d(x, A_n) = \infty$ dur. Dolayısıyla $A_n \xrightarrow{K} A$ dır. $A \neq \emptyset$ ve x$\in A$ alalım. Dolayısıyla $d(x, A) = \lim_n d(x, A_n) = 0$ olur. Böylece $x \in \underline{\lim_n} A_n$olur. Dolayısıyla$A \in \underline{\lim_n} A_n$ dir. Şimdi $x \in \overline{\lim_n} A_n$ olsun. (1) şartından $\overline{\lim_n} d(x, A_n) = 0$ olur. $A_n \xrightarrow{W} A$ olduğundan $x \in A$ için $d(x, A) = \underline{\lim_n} d(x, A_n) = 0$ olur. $\overline{\lim_n} A_n \subset A \subset \underline{\lim_n} A_n$ den $A_n \xrightarrow{K} A$ elde edilir.

X normlu bir uzay ise (M) $\Longrightarrow$ (K) olduğunu gösterelim.

$$\underline{\lim_n} A_n \subset \overline{\lim_n} A_n \subset W - \overline{\lim_n} A_n = A = \underline{\lim_n} A_n$$

ise (M) $\Longrightarrow$ (K) olur (Baronti ve Papini, 1986).

X uzayına bazı özellikler ekleyerek küme dizilerinin yakınsaklık çeşitleri arasındaki ilişkileri incelendi.

Önerme 3.41. $\{C_n\}$ normlu bir X uzayının konveks altkümelerinin bir dizisi olsun. $C_n \xrightarrow{K} C$ ve Fisher anlamında yakınsaklığın (i) şartından $C_n \xrightarrow{M} C$ dir. Özellikle (F)$\Rightarrow$ (M) dir (Baronti ve Papini, 1986).

İspat. $C_n \xrightarrow{K} C$ olsun. Dolayısıyla $\underline{\lim_n} C_n = C$ olur. $x \in w - \overline{\lim_n} C_n$ olsun. $k \in \mathbb{N}$ için C_{n_k} altküme dizisinin $x_{n_k} \longrightarrow x$ olacak şekilde C_{n_k} altküme dizisinin x_{n_k} alt dizisini alabiliriz. $\varepsilon > 0$ ve yeterli derecede büyük k lar için $x_{n_k} \in \overline{C^{\varepsilon}}$ dır. Böylece Fisher anlamında yakınsaklığın (i) şartı geçerlidir. Fakat $\overline{C^{\varepsilon}}$ kapalı ve konvekstir. Böylece $x \in \overline{C^{\varepsilon}}$ (bütün $\varepsilon > 0$ için) dir. Dolayısıyla $x \in \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{C^{\varepsilon}} = 0$ olur. Buradan $w - \overline{\lim_n} C_n \subset C = \underline{\lim_n} C_n$ olduğundan $C_n \xrightarrow{M} C$ dır.

Sonuç.$\{C_n\}$ normlu bir X uzayının konveks kümelerinin bir dizisi olsun.(F) yakınsaklıkla ilgili (i) şartının bir C kümesi için sağlandığını kabul edelim. O zaman C kümesine yakınsaması mümkün olan yakınsaklıklarla ilgili olarak (F)$\Leftrightarrow$(K) $\Leftrightarrow$ (M) $\Leftrightarrow$ (W) dir. Bu bağlamda (H) yakınsaklık diğerlerinden ayrıdır.

3.5. Monoton Diziler

$\{A_n\}$ bir küme dizisi olmak üzere $A_n \supset A_{n+1}$ ise $\{A_n\}$ monoton azalan bir küme dizisidir. O halde $A_n \xrightarrow{K} A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ dir.

$A_n \subset A_{n+1}$ ise $\{A_n\}$ küme dizisi monoton artan bir küme dizisidir.

Önerme 3.42. Eğer X normlu bir uzay ve $\{A_n\}$ de konveks kümelerin artan bir dizisi ise

$A_n \xrightarrow{M} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dir (Baronti ve Papini, 1986).

Önerme 3.43. X normlu bir uzay ve $\{A_n\}$ de konveks kümelerin azalan bir dizisi ise

$A_n \xrightarrow{M} A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ dir (Baronti ve Papini, 1986).

X sonlu boyutlu ve normlu bir uzay olmak üzere aşağıdaki özellikler takip edilir.

(p) Boş olmayan, sınırlı ve konveks kümelerin herhangi bir azalan $\{C_n\}$ küme dizisi için

$C_n \xrightarrow{W} C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ dır.

(s) boy $(X) = \infty$ ise $n \in \mathbb{N}$, öyleki bütün n ve m ler için $\| x_n \| = 1 = \| x_n - x_m \|$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisi seçebiliriz.

(s_1) Bir Banach Uzayının dönüşlü olması için gerek ve yeter şart X in kapalı konveks ve sınırlı alt kümelerinin kesişimi boş olmayan bir küme dizisinin olmasıdır.

3.6. Kompakt Olan Küme Dizilerinin Yakınsaklığı

Önerme 3.44. A kompakt ve $\{A_n\}$ küme dizisi Fisher anlamında $(A_n \xrightarrow{F} A)$ A kümesine yakınsak ise $\{A_n\}$ küme dizisi Hausdorff anlamında $(A_n \xrightarrow{H} A)$ A kümesine yakınsaktır dir. Eğer $\{A_n\}$ küme dizisi Kuratowski anlamında $(A_n \xrightarrow{K} A)$ A kümesine yakınsak ve Fisher yakınsaklığın **(i)** **(**her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n > n_\varepsilon$ için $\delta(A_n, A) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_ε sayısı vardır) koşulu geçerli ve A kompakt olduğunda $A_n \xrightarrow{M} A$ dir (Baronti ve Papini, 1986).

İspat. $\varepsilon > 0$ alalım. Fisher anlamında yakınsaklığın (i) koşulundan kastedilen bütün yeterli büyüklükte n ler için $\delta(A_n, A) < \varepsilon$ olmasıdır. Şimdi kabul edelim ki sonsuz çokluktaki $n \in \mathbb{N}$ için $A \not\subset (A_n)^{\varepsilon}$ olsun. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, A_n) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $x_n \in A$ seçebiliriz. Bir alt diziye geçersek $x \in A$ için $x_{n_k} \to x$ i elde ederiz. Yeterli derecede büyük k lar için $d(x, A_{n_k}) > \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Bütün yeterli büyüklükte n ler için

$A \subset \{A_n\}^{\varepsilon}$ olması (ii) ($\varepsilon > 0$ ve $x \in A$ için $d(x, A_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n > n_{(\varepsilon,x)}$ olduğunda bir $n_{(\varepsilon,x)}$ sayısı vardır) koşuluyla çelişir. Bu da $A_n \xrightarrow{H} A$ olur.

Şimdi $x_{n_k} \in A_{n_k}$ olduğunu kabul edelim. Yeterli derecede büyük n ve $\varepsilon > 0$ için $A_{n_k} \subset \{A_n\}^{\varepsilon}$ olduğundan, $\|x_{n_k} - a_{n_k}\| \to 0$ olacak şekilde $a_{n_k} \in A$ seçebiliriz. Eğer a, a_{n_k} nın bir yığılma noktası ise x_{n_k} nın da bir yığılma noktasıdır. Böylece $W - \overline{\lim_{n}} A_n \subset \overline{\lim_{n}} A_n = A$ dır. Dolayısıyla $A_n \xrightarrow{M} A$ olur.

Önerme 3.45. $\{A_n\}$ küme dizisi Kuratowski anlamında yakınsak **(** $A_n \xrightarrow{K} A$) olsun. (β) B kompakt ve yeterli derecede büyük n için $A_n \subset B$ dır. O halde $A_n \xrightarrow{H} A$ dır (Baronti ve Papini, 1986).

İspat. $A_n \xrightarrow{K} \emptyset$ ise o halde yeterli büyüklükte n için $A_n = \emptyset$ dir. Aslında (β) dan kastedilen bütün $k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} \in A_{n_k}$ olacak şekilde K da tanımlı bir $\{x_{n_k}\}$ dizisinin varlığıdır. Fakat $\overline{\lim_{n}} A_n = \emptyset$ de olması gereken bir $x \in K$ limit noktası vardır. Dolayısıyla bu bir çelişki $A_n \xrightarrow{H} A$ yı gerektirir.

Şimdi $A \neq \emptyset$ ve (β) K kompakt ve yeterli büyüklükte n için $A_n \subset B$ olduğunu kabul edelim. Kapalı olan B kompakttır. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ olacak şekilde A da sonlu bir $\{x_1, x_2 \dots, x_n\}$ altkümesi alalım. $x_i \in A$ ve $(i = 1,2, \dots, n)$ için $x \in \overline{\lim_{n}} A_n$, $\underline{\lim_{n}}\, d(x, A_n) = 0$ iken $\lim_{n} d(x, A_n) = 0$ dır.

Ayrıca $h(A, A_n) = \sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, A_n)|$ den $\lim_{n} d(x_i, A_n) = 0$ dır

Bu nedenle Her i ve $n > \bar{n}$ için $d(x_i, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\bar{n}$ vardır. Dolayısıyla herhangi bir $y \in A$ ve $n > \bar{n}$ için $d(y, A_n) < \varepsilon$ olduğunu ve yeterli büyüklükte n için $A \subset (A^n)^{\varepsilon}$ i elde ederiz. Şimdi varsayalım ki bazı $\varepsilon > 0$ için $A_n \subset A^{\varepsilon}$ u içeren sonsuz sayıda n indisleri ihlal edilmiştir.$d(x_n, A) \geq \varepsilon$ olacak şekilde herhangi bir $x_n \in A_n$ alalım.$\{x_n\}$ den çıkarılan x e yakınsak bir alt dizi vardır. Dolayısıyla $x \in A$, $d(x, A) \geq \varepsilon$ a karşı $A_n \xrightarrow{H} A$ nın kanıtlanması bir çelişkidir.

3.7. Kümelerin Cebiri

Tanım 3.46. X bir küme olsun X in elemanlarından oluşan bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki şartları sağlayan $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir.

$X \in \mathcal{A}$,

Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$

$k = 1,2,3, \dots, n$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer $k \in \mathbb{N}$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$ şartı sağlanırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir $\sigma -$ cebiri adı verilir. Eğer $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ cebiri ise yukarıdaki özelliklerden

$\emptyset \in \mathcal{A}$

$k = 1,2,3, \dots, n$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

$k \in \mathbb{N}$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$

Her $A, B \in \mathcal{A}$ için $A \setminus B \in \mathcal{A}$ ($A \setminus B = A \cap B^t$) dır (Balcı, 2012).

Cebirler, elemanları kümeler olan sınıflar olmak üzere birleşim, kesişim ve tümleyen işlemlerinin sonlu kez uygulanmasına göre kapalıdırlar. Bir $\sigma -$ cebiri birleşim, kesişim ve tümleyrn işlemlerinin sonsuz kez uygulanmasına göre kapalıdır. Her $\sigma -$ cebiri bir cebirdir ancak tersi doğru değildir. X sonlu sayıda elemana sahip olduğunda her cebir aynı zamanda bir $\sigma -$ cebirdir.

Teorem 3.47. X bir küme ve $\mathcal{A}$ sınıfı da X üzerinde bir cebir olsun. Eğer aşağıdaki iki şarttan biri sağlanırsa $\mathcal{A}$ cebiri X üzerinde bir $\sigma -$ cebiridir (Balcı, 2012).

(a) $\mathcal{A}$ cebiri artan dizilerin birleşimi altında kapalıdır.

(b) $\mathcal{A}$ cebiri azalan dizilerin kesişimi altında kapalıdır.

İspat. $\mathcal{A}$ cebiri artan dizilerin birleşimi altında kapalı olsun. $\mathcal{A}$ bir cebir olduğundan $\mathcal{A}$ ya ait sayılabilir çokluktaki kümelerin birleşimlerinin $\mathcal{A}$ ya ait olduğunu göstermemiz yeterlidir.(E_k), $\mathcal{A}$ ya ait kümelerin herhangi bir dizisi olsun. Her bir n için $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ diyelim.(B_n) artan bir dizidir. $\mathcal{A}$ bir cebir olduğundan herbir n için $B_n \in \mathcal{A}$ dır. Hipotezden $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$ dır. Diğer taraftan $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ olacağından $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ dır.

(b) doğru olsun.(A_k), $\mathcal{A}$ daki elemanların bir artan dizisi olsun. Bu takdirde (A_k^c), $\mathcal{A}$ daki kümelerin bir azalan dizisidir.(b) sağlanacağından $(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c) \in \mathcal{A}$ dır. $\mathcal{A}$ bir cebir olduğundan $(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c)^c \in \mathcal{A}$ olur. Diğer taraftan $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = (\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c)^c$ olduğundan $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ olur. Şu halde (a) gerçeklenir. Dolayısıyla $\mathcal{A}$ bir $\sigma -$ cebiridir.

Teorem 3.48. X üzerindeki $\sigma -$ cebirlerinin herhangi adetteki kesişimleri yine bir $\sigma -$ cebiridir.

Örnek 3.49. $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,3,5, \dots ,2n-1, \dots\}, \{2,4,6, \dots ,2n, \dots\}, \mathbb{N}\}$ alınırsa $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ cebiridir (Balcı, 2012).

$X \in \mathcal{A}$

$\forall E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$

$k = 1,2,3, \dots , n$ için $E^k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$ dır.

Örnek 3.50. X bir sonsuz küme ve $\mathcal{A}$ sınıfı da X in tüm sonlu alt kümelerinin bir sınıfı olsun.$\mathcal{A}$ sınıfı için X üzerinde bir $\sigma -$ cebiri midir? (Balcı, 2012).

Çözüm: $\mathcal{A} = \{B \in P(X) : B \text{ sonlu}\}$ $X \notin \mathcal{A}$ olduğundan $\mathcal{A}$ sınıfı $\sigma -$ cebiri değildir.

Örnek 3.51. X sayılamayan bir küme $\mathcal{A}_1 = \{A \subset X : A \text{ sayılabilir}\}$ olmak üzere $\mathcal{A}$ sınıfı için X üzerinde bir $\sigma -$ cebiri midir? (Balcı, 2012).

Çözüm : $X \notin \mathcal{A}_1$ olduğundan $\mathcal{A}_1$ sınıfı X üzerinde $\sigma -$ cebiri değildir.

Örnek 3.52. X kümesi üzerindeki $\sigma -$ cebirlerinin birleşimi de X üzerinde $\sigma -$ cebiri midir? (Balcı, 2012).

Çözüm : $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{2n : n \in \mathbb{N}\}, \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}\}$ ve $\mathcal{B} = \{\emptyset,\ \mathbb{N},\ A = \{3n : n \in \mathbb{N}\}\ B = \{3n+1 : n \in \mathbb{N}\},\ C = \{3n+2 : n \in \mathbb{N}\}, A \cup B,\ A \cup C, B \cup C\}$

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ sınıfları $\mathbb{N}$ üzerinde $\sigma -$ cebiridir.

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{2n : n \in \mathbb{N}\}, \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}, A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C\}$

olur.$\{2n : n \in \mathbb{N}\} \cup A \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ olduğundan $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ sınıfı $\mathbb{N}$ üzerinde bir $\sigma -$ cebiri değildir.

Örnek 3.53. $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{B}$ sınıfı da Y üzerinde $\sigma -$ cebiri olsun (Balcı, 2012).

$\mathcal{A} := \{A \subset X : f(A) \in \mathcal{B}\}$ sınıfı X üzerinde $\sigma -$ cebiri midir?

Çözüm: **(i)** $X \in \mathcal{A}$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer f fonksiyonu örten ise $f(X) = Y \in \mathcal{B}$ olup $X \in \mathcal{A}$ dır.

(ii) Keyfi $A \in \mathcal{A}$ için $A^t \in \mathcal{A}$ olduğunu göstermeliyiz.f fonksiyonu birebir ve örten ise

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A} &\Leftrightarrow f(A) \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow [f(A)]^t \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow f(A)^t \in \mathcal{B} \\ &\Rightarrow A^t \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{A}$ olsun.$\mathcal{B}$ nin Y üzerinde $\sigma -$ cebir olduğu kullan ılırsa

$$A_n \in \mathcal{A} \Leftrightarrow f(A_n) \in \mathcal{B}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n) \in \mathcal{B}$$

$$\Rightarrow f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathcal{B}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{bulunur.}$$

Sonuç olarak f fonksiyonu 1-1 ve örten ise $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerinde $\sigma -$ cebirdir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1.Yakınsak Küme Dizilerinin Cebiri

Bu bölümde yakınsak olan küme dizilerinin cebiri incelendi.

Tanım 4.1. $\{A_n\}$ bir küme dizisi olsun. $\{A_n\}$ küme dizisinin elemanlarından oluşan bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki şartları sağlayan $\mathcal{A}$ sınıfına $\{A_n\}$ küme dizisi üzerinde bir küme dizisi cebiri denir.

1. $X = \{A_n\}$ evrensel küme olarak alınırsa, $\{A_n\} \in \mathcal{A}$ dir.

2. $\forall E_k \in \mathcal{A}$ için $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ dir.

3. $\forall E \in \mathcal{A}$ için $E^c = A_n \setminus E \in \mathcal{A}$ dir.

$\{A_n\}$ küme dizisi $\mathcal{A} = \{X, \emptyset, \bigcup_{k=1}^{n} E_k, E_k{}', (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)'\}$ sınıfı üzerinde bir cebir oluşturur.

Bu şartları artan bir küme dizisi üzerinde gösterelim. $\{A_n\}$ artan bir küme dizisi olsun. Yani $\{A_n\} \subset \{A_{n+1}\}$ dir. Artan bir küme dizisi için cebir şartlarını inceleyelim.

1. $X = \{A_n\}$ evrensel küme olarak alınırsa, $\{A_n\} \in \mathcal{A}$ olmalıdır.

2. $\forall E_k \in \mathcal{A}$ için $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ dir. Buradan birleşimlerinin de $\mathcal{A}$ sınıfında bulunduğunu göstermeliyiz. $\{A_n\}$ küme dizisi artan olduğundan;

$A_1 \cup A_2 = A_2 \in \mathcal{A}$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_3 \in \mathcal{A}$ … $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A_n \in \mathcal{A}$ dir.

$A_1{}' \cup A_2{}' = A_1{}'$,

$A_2{}' \cup A_3{}' = A_2{}'$,

$A_4{}' \cup A_5{}' = A_4{}' \ldots$

$\{A_n\} \cup \emptyset = \{A_n\}$, $A_1 \cup A_1{}' = \{A_n\}$, $A_2 \cup A_2{}' = \{A_n\}, \ldots,$

Şeklindeki bütün birleşimler de $\mathcal{A}$ sınıfında bulunmalıdır.

3. $\forall E \in \mathcal{A}$ için $E^c = A_n \setminus E \in \mathcal{A}$ dir. Tümleyenlerin de $\mathcal{A}$ sınıfında bulunduğunu göstermeliyiz.

$(A_1 \cup A_2)' = A_n \setminus A_2 = A_2{}' \in \mathcal{A}$, $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)' = A_n \setminus A_3 = A_3{}' \in \mathcal{A}$,…,

$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)' = A_n \setminus A_n = A_n{}' \in \mathcal{A} = \emptyset \in \mathcal{A}$ dir

Tümleyenlerin limitini inceleyelim. Artan bir küme dizisinde $\lim\limits_{n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dir.

Burada, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_n$ olduğundan A_n i evrensel küme olarak aldık.

$$\lim_{n} \{A_n\}^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^c$$

$$\lim_{n} {A_n}^c = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c$$

$$= {A_1}^c \cap \ {A_2}^c \cap {A_3}^c \cap \dots \cap \ {A_n}^c$$

$$= {A_n}^c = \emptyset \text{ dir.}$$

Bu şartları azalan bir küme dizisi üzerinde gösterelim. $\{B_n\}$ azalan bir küme dizisi olsun. Yani $\{B_n\} \supset \{B_{n+1}\}$ dir. Yani, $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots \supset B_n$ olduğundan evrensel kümemiz B_1 dir. Azalan bir küme dizisi için cebir şartlarını inceleyelim.

1. $X = \{B_n\}$ olarak alınırsa, $\{B_n\} \in \mathcal{A}$ olmalıdır.

2. $\forall E_k \in \mathcal{A}$ için $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ dir. Buradan birleşimlerinin de $\mathcal{A}$ sınıfında bulunduğunu göstermeliyiz. $\{B_n\}$ küme dizisi azalan olduğundan;

$B_1 \cup B_2 = B_1 \in \mathcal{A}$

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = B_1, \dots,\ B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = B_1$ dir.

${B_1}' \cup {B_2}' = {B_2}'$,

${B_2}' \cup {B_3}' = {B_3}'$, ${B_3}' \cup {B_4}' = {B_4}' \dots$

Şeklindeki bütün birleşimler de $\mathcal{A}$ sınıfında bulunmalıdır.

3. $\forall E \in \mathcal{A}$ için $E^c = B_n \setminus E \in \mathcal{A}$ dir. Tümleyenlerin de $\mathcal{A}$ sınıfında bulunduğunu göstermeliyiz.

${B_1}', {B_2}', {B_3}', {B_4}' \dots {B_n}' \in \mathcal{A}$ olmalıdır.

Azalan bir küme dizisi için tümleyenlerin limitini B_1 evrensel küme olduğundan;

${B_1}' = B_1 \setminus B_1 = \emptyset$

${B_2}' = B_1 \setminus B_2$

${B_3}' = B_1 \setminus B_3$

.

.

.

$B_n' = B_1 \setminus \lim_{n} B_n = B_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ dir.

Örnek 4.2. $\{Z_n\} = \{-n, \dots, -1, ,0,1, \dots, n\}$ küme dizisi artan bir küme dizisi olup $\lim_{n\to\infty} Z_n = \bigcup Z_n = Z$ dir.

$\{Z_n\}$ küme dizisi $\mathcal{A} = \{\{-n, \dots, -1, ,0,1, \dots, n\}, \emptyset, \bigcup_{k=1}^{n} E_k, E_k', (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)'\}$ sınıfı üzerinde bir cebir oluşturur. Çünkü $\{Z_n\}$ küme dizisi;

1. $X = \{Z_n\}$ olarak alınırsa, $\{Z_n\} \in \mathcal{A}$ dir.

2. $\forall E_k \in \mathcal{A}$ için $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ dir.

$\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ için;

$E_1 = \{-1,0,1\} = Z_1$,

$E_1 \cup E_2 = \{-1,0,1\} \cup \{-2,-1,0,1,2\} = Z_1 \cup Z_2, \dots, Z_n = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = Z_n$ dir.

3. $\forall E \in \mathcal{A}$ için $E^c = Z_n \setminus E \in \mathcal{A}$ dir.

$\{Z_n \setminus Z_1\} = \{-n, \dots, -1, ,0,1, \dots, n\} \setminus \{-1,0,1\}$

$\{Z_n \setminus Z_2\} = \{-n, \dots, -1, ,0,1, \dots, n\} \setminus \{-2,-1,0,1,2\}$

$\{Z_n \setminus Z_3\} = \{-n, \dots, -1, ,0,1, \dots, n\} \setminus \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

.

.

.

$\{Z_n \setminus Z_n\} = \{-n, \dots, -1, ,0,1, \dots, n\} \setminus \{-n, \dots, -1, ,0,1, \dots, n\} = \emptyset$ dir.

$\lim_{n\to\infty} \{Z_n\}' = Z_1' \cap Z_2' \cap Z_3' \cap \dots = \emptyset$ dir. Böylece cebir olma şartları sağlanmış olur.

Örnek 4.3 $\{A_n\} = \{1,2,3, \dots, n\}$ küme dizisi artan bir dizi küme dizisi olup $A_n \to \mathbb{N}$ dir. A_n küme dizisi $\mathcal{A} = \{\{1,2,3, \dots, n\}, \emptyset, \bigcup_{k=1}^{n} E_k, E_k', (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)'\}$ sınıfı üzerinde bir cebir oluşturur. Çünkü; $\{A_n\}$ küme dizisi için

1. $X = (A_n)$ olarak alınırsa, $(A_n) \in \mathcal{A}$ dir.

2. $\forall E_k \in \mathcal{A}$ için $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ dir.

3. $\forall E \in \mathcal{A}$ için $E^c = A_n \setminus E \in \mathcal{A}$ dir.

Burada, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,2,3\}$, …, $\{A_n\} = \{1,2,3, \dots, n\}$ dir.

$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \implies B_1 = E_1,\ B_2 = E_1 \cup E_2, \dots,\ B_n = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = E_n$ dir.

Tümleyenlerin birleşimlerini incelersek;

$(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2' = A_2'$,… dir.

$(A_1 \cup A_2 \cup A_3)' =, A_1' \cap A_2' \cap A_3' = A_3'$ ...

$\{A_n\}$ küme dizisinin tümleyenini inceleyelim. Artan bir küme dizisinde;

$\lim\limits_{n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dir. Bu örnekte $\lim\limits_{n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$ dir.

$(\lim A_n)' = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)' = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)' = A_n' = \mathbb{N}' = \emptyset$ dir.

$A_1 = \{1\}$

$A_2 = \{1,2\}$,

$A_3 = \{1,2,3\} \dots,\ A_n = \{1,2,3, \dots, n\}$ olduğundan;

$A_1' = \{2,3,4, \dots, n\}$,

$A_2' = \{3,4, \dots, n\}$

.

.

.

$A_n' = \emptyset$ dir.

olduğundan cebir olma şartları sağlanır.

Örnek 4.4. $\{A_n\} = [\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}]$ küme dizisi azalan bir küme dizisi olduğundan

$\lim\limits_{n \to \infty} A_n = \bigcap A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = 0$ dir.

(A_n) küme dizisi $\mathcal{A} = \{[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}], \emptyset, \bigcup_{k=1}^{n} E_k, E_k', (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)'\}$ sınıfı üzerinde bir cebir oluşturur. Çünkü;

(A_n) küme dizisinin $\mathcal{A}$ sınıfı üzerinde cebir olabilmesi için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır;

1. $X = (A_n)$ olarak alınırsa, $(A_n) \in \mathcal{A}$ dır.

2. $\forall E_k \in \mathcal{A}$ için $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ dır.

3. $\forall E \in \mathcal{A}$ için $E^c = A_n \setminus E \in \mathcal{A}$ dır.

$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \implies B_1 = E_1$

$B_2 = E_1 \cup E_2 = [-1,1] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = A_1,$

$B_3 = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = [-1,1] \cup \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right] = A_1$

.

.

.

$B_n = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n = A_1$ dir. Birleşimlerin de tümleyenini incelersek;

$(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2' = \emptyset$,

$A_1' \cap A_2' \cap A_3' = \emptyset$

3 teki (A_n) küme dizisinin tümleyenini inceleyelim.

$A_1 = [-1,1] = E_1$

$A_2 = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] = E_2$

$A_3 = \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right] = E_3, \ldots, A_n = \left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right] = E_n$ dir.

A_1 i evrensel küme olarak alırsak $A_1' = \emptyset$ dir.

$A_2' = [-1,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1]$

$A_3' = [-1,\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3},1]$

$A_4' = [-1,\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4},1]$

.

.

.

$A_k' = [-1,\frac{1}{k}) \cup (\frac{1}{k},1]$

Azalan bir küme dizisinde $\lim_{n} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ dir.

$$\lim_{n\to\infty} (A_n)' = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)'$$

$$= (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)'$$

$$= [-1,1] \cap \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \cap \ldots \cap \left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$$

$$=\{0\}' = [-1,1] \setminus \{0\} \text{ dır.}$$

O halde $\{A_n\}$ küme dizisi üzerinde oluşturulan ;

$\mathcal{A} = \{[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}], \emptyset, B_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k, E_k', (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)'\}$ sınıfı bir cebirdir.

Sonuç 4.5. Monoton azalan küme dizilerinde tümleyenlerin limiti $A_1 \setminus$ küme dizisinin limiti dir. Başka bir deyişle; Evrensel küme $\setminus$ küme dizisinin limitidir.

Sonuç 4.6. Monoton artan küme dizilerinde tümleyenlerin limiti $\emptyset$ dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yakınsak küme dizileri tanıtıldı. Küme dizilerinin yakınsaklık çeşitleri olan Kuratowski, Wijsman, Hausdorff, Mosco ve Fisher anlamındaki yakınsaklıklar incelendi. Yakınsak olan küme dizilerinin cebiri tanımlandı ve örneklendirildi.

Bu tanımlardan yola çıkılarak küme dizilerinin ölçümü üzerine çalışabilir.

KAYNAKLAR

Balcı, M.,2008. Analiz-I. *Balcı Yayınları*, Ankara, 77-99.

Balcı, M., 2012. Reel Analiz. *Sürat Yayınları*, Ankara, 1-22.

Baronti, M., Papini, P.L., 1986, Convergence of sequence of sets., Methods of Functional Analysis in Approximation Theory (Bombay, 1985), *İnternational Schriftenreihe Numeration Mathematics*, Birkhauser-Verlag Basel. 76, 135-155.

Bayraktar, M., 1987. Fonksiyonel Analiz. *Atatürk Üniversitesi Yayınları*, Erzurum, 16-20

Bayraktar, M.,1994. Fonksiyonel Analiz. *Atatürk Üniversitesi Yayınları*, Erzurum, 4-44.

Beer, G. 1985. On convergence of closed sets in a metric space and distance functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*., 31: 421-432.

Brown, A.L. ve Page, A.,1970. Elements of functional analysis, *Van NostrandReinhold*, London 4-22.

Curtain, R.F. ve Pritchard, A.J., 1977. Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, *Academic Press*, London, 18-19.

Holmes, R.B., 1966. Approximating best approximations. *Nieuw Arcief Wiskunde*. 14, 106-113.

Kuratowski, K., 1966. Topology, Vol. I. *Academic Pres*, New York, 1-10.

Lechicki, R., 1985. Convergence of sets and of projections. *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*. (6) 4-C, 477-483.

Maddox, I.J., 1970. Elements of functional analysis. *Cambridge University Press*, New York, 24-26.

Michael, E.T., 2006. Measure Theory and Integration, Vol 76. *American Mathematical Society*, USA, 150-161.

Mosco, U., 1969. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. *Advances in Mathematics*, 3, 510-585.

Mucuk, O., 2010.Topoloji ve Kategori. *Nobel Yayınları*, Ankara, 45-260.

Musayev, B. ve Alp, M., 2000. Fonksiyonel analiz, Mustafa Balcı, *Ankara*, Kütahya, 63-85.

Nuray, F. ve Rhoades, B. E. 2012. Statistical convergence of sequences of sets. *Fasciculi Mathematici*, 49: 87-99

Pugachev, V.S. ve Sinitsyn, I.N., 1999. Lectures on Functional Analysis and Applications, *World Scientific Publishing Company*, Singapore, 591-644.

Soykan,Y., 2012.Metrik Uzaylar ve Topolojisi. *Nobel Yayınları*, Ankara, 178-214.

Tsukada, M., 1984. Convergence of best approximations in a smooth Banach space. *Journal Approximation Theory,* 40, 301-309.

Uthayakumar, R., 1999, Study on convergence of optimization problems. *The Gandhigram Rural Institute Departmen of Mathematics*, 19-23.

Wijsman, R. A., 1966. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 123(1), 32–45.

EKLER

EK-1

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?		
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?		
Denklem yazımları uygun mu?		
İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?		
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?		
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?		
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?		
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?		
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)		
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?		

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

	Unvanı Adı SOYADI	İmza
Öğrenci :	Sibel ÖZTÜRK	…………………...
Danışman :	Prof. Dr. Harun POLAT	……………………

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum**.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı
Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI	Tarih	İmza
……………………………….	……………	……………..

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Sibel ÖZTÜRK
Uyruğu	:	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Muş/Merkez-19/07/1991
Telefon	:	534 480 37 86
Faks	:	
e-mail	:	sibelozturk91@windowslive.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Muş Anadolu Öğretmen Lisesi, Muş	2009
Üniversite	:	Muş Alparslan Üniversitesi	2013
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2013-2016	Erentepe Yatılı Bölge Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2016-2019	Yavuz Selim Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2019- 2020	M.E.V Fatih Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİLLER
İngilizce, Yökdil Puan: 66