



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**$\alpha$ . DERECEDEDEN CESARO ve İSTATİSTİKSEL TÜREV**

**Ayşenur Güneş ARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Ekim-2022**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**



**T.C.**  
**MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**$\alpha$ . DERECEDEDEN CESARO ve İSTATİSTİKSEL TÜREV**

**Ayşenur Güneş ARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR**

**Ekim-2022**  
**MUŞ**  
**Her Hakkı Saklıdır**

## TEZ KABUL ve ONAYI

Ayşenur Güneş ARI tarafından hazırlanan “**a. Dereceden Cesaro ve İstatistiksel Türev**” adlı tez çalışması 08/09/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### İmza

Başkan

Prof. Dr. Mikail ET

Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü

.....

Danışman

Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

.....

Üye

Doç. Dr. Abdullah AYDIN

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü

.....

Yukarıdaki sonuç;  
Enstitü Yönetim Kurulu ...../...../..... tarih ve ...../..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI

FBE Müdürü

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

## **DECLARATION PAGE**

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Ayşenur Güneş ARI

Tarih : ../.../2022

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### $\alpha$ . DERECEDEN CESARO ve İSTATİSTİKSEL TÜREV

Ayşenur Güneş ARI

Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

**Danışman: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR**

İstatistiksel yakınsaklık Toplanabilme Teorisi'nde ve Fonksiyonel Analiz'de büyük öneme sahiptir. Literatürde istatistiksel yakınsaklık kavramlarının üzerine yakın tarihte Cesaro türevi ve istatistiksel türev kavramları kazandırılmıştır. Bu çalışmada ise  $\alpha$ . dereceden Cesaro ve istatistiksel türev kavramı tanımlanarak bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu kısımlar verilmeden önce ise istatistiksel yakınsaklık ve Cesaro türevi ile ilgili kavram ve teoremler ifade edilecektir.

**2022, 27 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler :** Cesaro Türevi, İstatistiksel türev,  $\alpha$ . dereceden istatistiksel türev, türev,  $\alpha$ . dereceden Cesaro türevi

## **ABSTRACT**

### **MS THESIS**

#### **$\alpha$ . DEGREES CESARO and STATISTICAL DERIVATIVE**

**Ayşenur Güneş ARI**

**Mus Alparslan University Institute of Science and Technology  
Department of Mathematics**

**Advisor: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR**

Statistical convergence is of great importance in Summability Theory and Functional Analysis. On top of the statistical convergence concepts in the literature, Cesaro Derivative and statistical derivative concepts have been introduced recently. In this study,  $\alpha$ . Grade Cesaro Derivative and statistical derivative concepts are defined and some results are discussed. Before these parts are given, the concepts are given, the concepts and theorems related to statistical convergence and Cesaro derivative will be expressed.

**2022, 27 Page**

**Keywords :** Cesaro derivative , statistical derivative ,  $\alpha$ . Cesaro derivative ,derivative,  $\alpha$ . statistical derivative

## ÖNSÖZ

Tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisiyle aydınlandığım, her türlü çalışmamda desteğini esirgemeyen, ilgili çalışmalarında sorularımı sabırla ve güler yüzlü bir şekilde yanıtlayan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Muhammed ÇINAR'a teşekkür etmeyi borç bilir, ayrıca desteklerini bir an olsun benden esirgemeyen eşim Yunus Emre Arı, babam Ceyhan Arkcı ve annem Nejla Arkcı'ya da çok teşekkür ederim.

Ayşenur Güneş ARI

MUŞ-2022



## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	viii
1.GİRİŞ .....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM .....	4
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	16
4.1. $\alpha$ . Dereceden Cesaro Türev .....	16
4.2. $\alpha$ . Dereceden İstatistiksel Türev .....	17
4.3. $\lambda$ – İstatistiksel Türev.....	21
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	25
5.1. SONUÇLAR.....	25
5.2.ÖNERİLER.....	25
KAYNAKÇA .....	26

## SİMGELER ve KISALTMALAR

### Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks vektör uzayı
$\delta(K)$	: $K$ 'nın doğal yoğunluğu
$S$	: İstatistiksel yakınsak diziler kümesi
$S_0$	: İstatistiksel sıfır dizilerin kümesi
$st_\lambda$	: $\lambda$ – istatistiksel yakınsak diziler kümesi
$\omega_p$	: Kuvvetli $p$ – Cesaro toplanabilir diziler kümesi
$\omega_d$	: Cesaro türevine sahip fonksiyonlar kümesi
$S_d$	: İstatistiksel türevine sahip fonksiyonlar kümesi
$S_d^a$	: $a$ . Dereceden istatistiksel türev fonksiyonlar kümesi
$\omega_{dp}^a$	: $a$ . Dereceden Cesaro türev fonksiyonlar kümesi
$(V, \lambda)$	: $\lambda$ – İstatistiksel türev

## 1.GİRİŞ

Analiz ve Fonksiyonel Analiz alanının temel kavramları limit, yakınsaklık ve süreklilik kavramlarıdır. Yakınsaklık kavramına genel bir bakış açısı kazandıran kavram istatistiksel yakınsaklıktır. Pozitif tam sayıların doğal yoğunluğu adı altında istatistiksel yakınsaklık Toplanabilme Teorisi'nde ve Fonksiyonel Analiz'de büyük öneme sahiptir. Bu kavram, yaklaşık elli yıldan önce çalışmaya başlanmış olup, şunda birçok akademik çalışmada aktif bir araştırma konusudur. İlk oluşumu Zygmund (1979) tarafından Warsaw'da monografisinin ilk baskısında verilmiştir. Wrocław Üniversitesi'ndeki bir söyleşisinde Steinhaus (1949) dile getirip sonrasında Fast (1951) ile yapmış olduğu çalışmalar sonucunda resmen tanıtılmıştır.

Schoenberg (1959) reel ve kompleks diziler için, bunu takiben herhangi lokal konveks topolojik vektör uzayları için Maddox (1988) tarafından çalışılmıştır. Uzun akademik yıllar içerisinde çalışılmıştır (Schoenberg, 1959, Fridy, 1985, Šalát, 1980, Connor, 1988, Maddox, 1988). Bu çalışmaların Fourier analiz teorisinde, sayılar teorisinde, ölçüm teorisinde, operatör teoride ve Banach Uzayları gibi birçok alanda uygulanabilirliği bulunmaktadır.

Derece kavramı dahil edilerek, bir dizinin  $\alpha$ . dereceden istatistiksel yakınsaklığı Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından verildi. Bunun üzerine  $\alpha$ . dereceden kuvvetli p-Cesaro toplanabilirliği Çolak (2010) tarafından tanımlandı.

Dizisel türev tanımından faydalanarak yakın tarihte Nuray (2020) tarafından Cesaro Türevi ve istatistiksel türev kavramları literatüre kazandırılmıştır.

Bu tez çalışmasında ise  $\alpha$ . dereceden Cesaro ve istatistiksel türev kavramı tanımlanarak bazı sonuçlar ele alınmıştır.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Doğal yoğunluk kavramını Powell (1972) ve Shah (1972) çalışmalarında  $K$ ,  $\mathbb{N}$  nin bir alt cümlesi ve  $K_n = \{k \leq n: k \in K\}$  olmak üzere  $\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n}$  limiti mevcut ise  $\delta(K)$  sayısına  $K$  cümlesinin doğal yoğunluğu tanımlamasını yapmıştır. Fridy (1985)  $\mathbb{N}$  doğal sayılar cümlesinin herhangi bir sonlu alt cümlesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğunu açık olduğunu belirtmiştir ve  $K^c = \mathbb{N} - K$  olmak üzere  $\delta(K^c) = 1 - \delta(K)$  olduğunu göstermiştir. Doğal yoğunluk Montgomery ve Mastrangelo (1991) tarafından daha kolay bir yolla  $(k_n)$  pozitif tam sayıların artan bir dizisi ve  $K = \{k_n: n \in \mathbb{N}\}$  olmak üzere  $K \subset \mathbb{N}$  alt cümlesinin doğal yoğunluğu mevcut ise  $\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{k_n}$  şeklinde tanımlanmıştır.

Buck (1953) bir  $x = (x_n)$  dizinin her  $\varepsilon > 0$  için  $n \geq N$  olduğunda  $|x_n - L| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N \in \mathbb{N}$  varsa, hemen hemen her  $n$  için  $L$ 'ye yakınsak olduğunu söylemiştir. Bir dizi hemen hemen her  $n$  için  $L$ 'ye yakınsak ise o zaman dizi  $L$ 'ye istatistiksel yakınsaktır tanımlamasını yapmıştır.

Literatürde istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli p-Cesaro toplanabiliriliğinin tanımları birbirinden bağımsız şekilde yapıp daha sonraki yapılan araştırmalarda bu iki kavramın birbiriyle ilişkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Connor (1988) kuvvetli p-Cesaro toplanabilirliğin tanımını verip bir dizinin  $L$ 'ye kuvvetli p-Cesaro toplanabilirse o zaman bu dizi  $L$ 'ye istatistiksel yakınsak olduğunu göstermiştir. Eğer sınırlı bir dizi  $L$ 'ye istatistiksel yakınsak ise o zaman bu dizi  $L$ 'ye kuvvetli p-Cesaro toplanabilirdir şeklinde tanımlamalarını yapmıştır.

Dereceli istatistiksel yakınsaklık kavramını ilk olarak Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından verilmiştir. Çolak (2010) tarafından  $\alpha$ . derceden yoğunluk,  $\alpha$ . derceden istatistiksel yakınsaklık kavramını ve bunu takiben  $\alpha$ . derceden kuvvetli p-Cesaro toplanabilirlik tanımını literatürlere katılmıştır. Sonraki yıl yine  $\alpha$ . derceden  $\lambda$  –istatistiksel yakınsaklık Çolak ve Bektaş (2011) tarafından tanımlanmıştır.

Yakınsaklık çalışmalarının üzerine Pedersen ve Sjoberg (2021) çalışmasında literatüre dizisel türev tanımlarını yapmıştır.

Günümüzde bu çalışmalara ek olarak Nuray (2021) Cesaro türevi ve kuvvetli Cesaro türevinin tanımlarını yapıp bu kavramı istatistiksel türevle ilişkilendirip literatüre kazandırmıştır.



### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

**Tanım 3.1**  $X$  boş olmayan bir cümle ve  $K$  reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa  $X$  cümlesine  $K$  cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir. Her  $x, y, z \in X$  ve her  $a, b \in K$  için

$$1) x + y = y + x$$

$$2) (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$3) \forall x \in X \text{ için } x + \theta = x \text{ eşitliğini sağlayan bir tek } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$4) \forall x \in X \text{ için } x + (-x) = \theta \text{ eşitliğini sağlayan bir tek } -x \in X \text{ vardır.}$$

$$5) 1 \cdot x = x$$

$$6) a(x + y) = ax + ay$$

$$7) (a + b)x = ax + bx$$

$$8) a(bx) = (ab)x$$

dir (Maddox, 1988).

Bu uzayın elemanlarına da vektör ya da nokta adı verilir.  $K = \mathbb{R}$  alınırsa  $X$ 'e bir reel vektör uzayı,  $K = \mathbb{C}$  alınırsa  $X$ 'e kompleks vektör uzayı adı verilir(Maddox, 1988).

**Tanım 3.2**  $X$  bir  $K$  cismi üzerinde vektör uzayı ve  $M \subset X$  olmak üzere; her  $x, y \in M$  ve her  $c \in K$  için;  $x + y \in M, c \cdot x \in M$

oluyorsa  $X$ ' in bir  $M$  alt cümlesine alt vektör uzayı denir (Maddox, 1988).

**Tanım 3.3**  $X$  boş olmayan bir cümle olsun. Her  $x, y, z \in X$  için

$$M1) d(x, x) = 0$$

$$\mathbf{M2)} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\mathbf{M3)} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\mathbf{M4)} \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

özelliklerine sahip  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna metrik ve  $(X, d)$  ikilisine de metrik uzay denir. M1, M3, M4 şartlarını sağlayan  $d$  fonksiyonuna bir yarı metrik ve  $(X, d)$  ikilisine de yarı metrik uzay denir (Maddox, 1988).

**Tanım 3.4**  $X, K$  cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa  $X$  üzerinde bir norm ve  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisine de bir normlu uzay denir. Her  $x, y \in X$  ve her  $\alpha \in K$  için;

$$\mathbf{N1)} \quad \|x\| \geq 0$$

$$\mathbf{N2)} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\mathbf{N3)} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\mathbf{N4)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir.

Eğer N2 yerine  $x = \theta \Rightarrow \|x\| = 0$  şartı alınırsa yarı norm elde edilir (Kreyszig, 1978).

**Tanım 3.5** Tanım cümlesi  $N$  doğal sayılar cümlesi olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer cümlelerine göre çeşitli isimler alırlar. Eğer dizinin değer cümlesi  $\mathbb{R}$  reel sayılar cümlesi ise diziyeye reel terimli dizi,  $\mathbb{Q}$  rasyonel sayılar cümlesi ise rasyonel terimli dizi adı verilir (Balcı, 1997).

**Tanım 3.6**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve  $x = (x_n)$ ,  $X$  uzayında bir dizi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için her  $m, n > n_0$  iken  $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  sayısı varsa  $x = (x_n)$  dizisine bir Cauchy dizisi denir (Maddox, 1988).

**Tanım 3.7**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve  $x = (x_n)$ ,  $X$  uzayında bir dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\forall n > n_0$  iken  $\|x_m - x\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  sayısı varsa  $x = (x_n)$  dizisi  $x$ 'e yakınsaktır denir.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  veya  $(n \rightarrow \infty) x_n \rightarrow x$  şeklinde yazılır (Kreyszig, 1978).

**Tanım 3.8**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayında her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir (Kreyszig, 1978).

**Teorem 3.1** Bir  $X$  Banach uzayının bir  $Y$  alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart;  $Y$  uzayının  $X$  uzayında kapalı olmasıdır (Kreyszig, 1978).

**Tanım 3.9**  $w$ , bütün reel ve kompleks terimli  $x = (x_n)$  dizilerin uzayı olsun. Bu uzaydaki metrik

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

şeklinde tanımlanır (Kreyszig, 1978).

**Tanım 3.10**  $\ell_{\infty}$  ile bütün  $x = (x_n)$  sınırlı dizilerinin uzayı gösterilir. Yani

$$\ell_{\infty} = \left\{ x = (x_n) : \sup_n |x_n| < \infty \right\}$$

dir. Bu uzaydaki metrik  $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$  şeklindedir (Maddox, 1988).

**Tanım 3.11**  $c$  ile bütün  $x = (x_n)$  yakınsak dizilerinin uzayı gösterilir. Yani

$$c = \left\{ x = (x_n) : \exists \ell \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \ell| = 0 \right\}$$

dir.  $c$  dizi uzayı  $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$  metriği ile birlikte bir metrik uzaydır (Maddox, 1988).

**Tanım 3.12**  $c_0$  uzayı, sıfıra yakınsak dizilerin uzayıdır. Yani  $c_0 = \{x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$  dir. Bu uzaydaki metrik  $d(x, y) = \max|x_n - y_n|$  şeklinde alınabilir. Çünkü sıfıra yakınsak her dizinin bir maksimum elemanı vardır (Maddox, 1988).

**Tanım 3.13**  $p = (p_n)$  pozitif sayıların sınırlı bir dizisi ve  $0 < p_n \leq \sup p_n = H < \infty$  olmak üzere  $\ell(p)$  uzayı

$$\ell(p) = \left\{ x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_n} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaydaki metrik  $M = \text{Max}\{1, H\}$  olmak üzere

$$d(x, y) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}}$$

şeklinde dir (Maddox, 1988).

**Teorem 3.2**  $\ell_{\infty}, c$  ve  $c_0$  uzayları;  $\|x\|_{\infty} = \sup_n |x_n|$  normu ile ve  $\ell_p$  uzayı  $p \geq 1$  için  $\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$  normu ile bir Banach uzayıdır (Kreyszig, 1978).

**Tanım 3.14**  $A, B \subset R, f: A \rightarrow B$  olmak üzere her  $x \in A$  için  $|f(x)| \leq K$  olacak şekilde bir  $K$  pozitif reel sayısı varsa  $f$  fonksiyonuna sınırlıdır denir (Balcı, 1997).

**Tanım 3.15**  $(X, d)$  metrik uzayında,  $x_0$  noktası ve pozitif bir  $r$  sayısı için;

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

kümelerine, sırasıyla  $x_0$  merkezli  $r$  yarıçaplı açık yuvar ve kapalı yuvar denir (Musayev ve Alp, 2000).

**Tanım 3.16** Bir topolojik uzayın her açık örtüsü bir sonlu alt örtüye sahip ise bu uzaya kompakt uzay denir. Bir metrik uzaydaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi mevcut ise bu metrik uzaya, dizisel kompakttır denir (Maddox, 1988).

**Tanım 3.17**  $L, F$  cisim üzerinde bir vektör uzayı ve  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de  $L$  nin sonlu bir alt kümesi olsun.  $a_i \in F$  olmak üzere  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$  olması her  $i$  için  $a_i = 0$  olmasını gerektiriyor ise  $S$  cümlesine veya  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vektörlerine  $F$  cisim üzerinde lineer bağımsızdır denir. Lineer bağımsız olmayan kümeye lineer bağımlı küme denir (Bayraktar, 2006).

**Tanım 3.18**  $L, F$  cisim üzerinde bir vektör uzayı ve  $B, L$  kümesinin bir alt kümesi olsun.  $B$  lineer bağımsız ve  $B \subseteq L$  yi geriyorsa, yani  $\langle B \rangle = L$  ise  $B$ 'ye  $F$  üzerinde  $L$  nin bir bazı (tabanı) denir (Bayraktar, 2006).

**Tanım 3.19**  $A \subset R, f: A \rightarrow R$  bir fonksiyon ve  $a \in A$  olsun.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  ise  $f$  fonksiyonu  $a$  noktasında süreklidir denir. Eğer  $f$  fonksiyonu  $A$  kümesinin her noktasında sürekli ise  $A$  üzerinde süreklidir denir (Balcı, 1997).

**Tanım 3.20**  $A \subset R, f: A \rightarrow R$  bir fonksiyon ve  $a \in A$  olsun.

$f$  fonksiyonu  $a$  noktasında süreklidir  $\Leftrightarrow$  Her  $\varepsilon > 0$  için en az bir  $\delta > 0$  vardır öyleki  $|x - a| < \delta$  bağıntısını sağlayan her  $x \in A$  için  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  dir (Balcı, 1997).

Örneğin  $f: R \rightarrow R, f(x) = c$  şeklinde tanımlanan sabit bir fonksiyon  $R$  de süreklidir.

**Tanım 3.21**  $A \subset R, a \in A$  ve  $f$  de  $A$  da tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  limiti veya  $x = a + h$  yazarak elde edilen  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  limiti varsa  $f$  fonksiyonu  $a$  noktasında türevlenebilirdir denir (Balcı, 1997).

**Teorem 3.3**  $A \subset R, a \in A$  ve  $f$  de  $A$  da tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer  $f, a$  noktasında türevli ise aynı noktada süreklidir. Bu teoremin tersi doğru değildir (Balcı, 1997).

Örneğin  $f(x) = |x|$  fonksiyonun  $x = 0$  noktasında sürekli olduğu halde türevi yoktur.

**Tanım 3.22**  $\mathbb{N}$  doğal sayılar cümlesinin bir  $A$  alt cümlesinin doğal yoğunluğu  $|\{k \leq n: k \in A\}|$  ifadesi  $n$  den büyük olmayan  $A \subseteq \mathbb{N}$  cümlesinin elemanlarının sayısını göstermek üzere

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: k \in A\}|$$

ile tanımlanır.  $\mathbb{N}$  doğal sayılar cümlesinin herhangi bir sonlu alt cümlesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu açıktır ve  $A^c = \mathbb{N} - A$  olmak üzere  $\delta(A^c) = 1 - \delta(A)$  dır.

Bir cümleinin doğal yoğunluğu daha kolay bir yolla şu şekilde bulunabilir.  $(a_n)$  pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun:  $A = \{a_n: n \in \mathbb{N}\}$  olmak üzere  $A \subset \mathbb{N}$  alt cümlesinin doğal yoğunluğu mevcut ise  $\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n}$  dir (Fridy, 1985).

**Tanım 3.23**  $x = (x_k)$  kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani hemen hemen her  $k$  için  $|x_k - L| < \varepsilon$  ise  $x = (x_k)$  dizisi  $L$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir (Fridy, 1985). Burada küme sembolü dışındaki dik çizgiler kümenin eleman sayısını gösterir.

Bu takdirde  $st - \lim x = L$  veya  $x_k \rightarrow L(S)$  yazılır. Eğer  $L = 0$  ise yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $x = (x_k)$  dizisi istatistiksel sıfır dizisidir denir.

Tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi  $S$  ile ve tüm istatistiksel sıfır dizilerin cümlesi  $S_0$  ile gösterilir.

**Örnek**  $x_k = \begin{cases} k, & k = n^3, n = 1, 2, 3 \dots \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

dizisini göz önüne alalım bu durumda

$x_k = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8, \dots\}$  olup,

$$K_\varepsilon = \{k: |x_k - 1| \geq \varepsilon\} = \{k: k = n^3\}$$

$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3} = 0$  olduğundan  $st - \lim x = 1$  elde edilir.

Ayrıca (Buck, 1953) bir dizinin hemen hemen her  $n$  için yakınsak olması kavramını aşağıdaki gibi verdi:

Eğer  $\varepsilon > 0$  için  $n \geq N$ ,  $n \notin A$  olduğunda  $|x_k - L| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N \in \mathbb{N}$  var olmak üzere  $\delta(A) = 0$  şartını sağlayan bir  $A \subseteq \mathbb{N}$ , cümlesi varsa hemen hemen her  $n$  için  $x = (x_n)$  dizisi  $L$ 'ye yakınsaktır denir. Eğer bir dizi hemen hemen her  $n$  için  $L$ 'ye yakınsak ise o zaman dizi  $L$ 'ye istatistiksel yakınsaktır.

**Tanım 3.24** Eğer  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani hemen hemen her  $k$  için  $|x_k - x_N| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N = N(\varepsilon)$  doğal sayısı varsa  $x = (x_k)$  dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Rath ve Tripathy, 1994).

**Teorem 3.4** Aşağıdaki ifadeler denktir.

- i)  $x = (x_k)$  istatistiksel yakınsak dizidir,
- ii)  $x = (x_k)$  istatistiksel Cauchy dizisidir,
- iii) h.h.k. için  $(x_k) = (y_k)$  olacak şekilde bir  $y = (y_k)$  dizisi vardır (Tabib, 2012).

Bir dizinin istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli p-Cesaro toplanabilirliğinin tanımları literatürde birbirinden bağımsız olarak verilmiş ve onların ilk ifadelerinden beri birbirinden farklı gelişme yolu izlemiştir. Fakat yapılan araştırmalarda iki kavramın birbiriyle ilişkili olduğu ve sınırlı diziler içinde bu kavramların denk olduğu sonucu ortaya çıktı.

**Tanım 3.25**  $x = (x_k)$  kompleks sayıların bir dizi ve  $0 < p < \infty$  olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir  $L$  sayısı varsa  $x = (x_k)$  dizisi  $L$ 'ye kuvvetli p – Cesaro toplanabilir denir. Bu durumda  $\omega_p - \lim x = L$  yazılır (Connor, 1988).

**Teorem 3.5**  $p \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$  olsun. Eğer bir dizi  $L$ 'ye kuvvetli p-Cesaro toplanabilirse o zaman bu dizi  $L$ 'ye istatistiksel yakınsaktır (Connor, 1988).

**Teorem 3.6**  $p \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$  olsun. Eğer sınırlı bir dizi  $L$ 'ye istatistiksel yakınsak ise o zaman bu dizi  $L$ 'ye kuvvetli p-Cesaro toplanabilir (Connor, 1988).

**Sonuç 3.1**  $p, q \in \mathbb{R}, 0 \leq p < \infty$  olsun. O zaman  $\omega_p \supseteq \omega_q$  ve  $\omega_p \cap \ell_\infty = \omega_q \cap \ell_\infty$  dir (Connor, 1988).

**Tanım 3.26**  $0 < \alpha \leq 1$  olacak şekilde herhangi bir reel sayı  $\alpha$  ve  $p$  pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell|^p = 0$$

olacak şekilde kompleks bir  $\ell$  sayısı varsa,  $x = (x_k)$  dizisine  $a$  . dereceden kuvvetli  $p$  –Cesaro toplanabilir denir(Çolak, 2010).

**Tanım 3.27**  $\lambda = (\lambda_n)$  pozitif sayıların,  $\infty$  a giden ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \lambda_1 = 1$$

şartlarına sahip bir dizi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için  $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $x = (x_k)$  dizisi  $L$ 'ye  $\lambda$  –istatistiksel yakınsaklık denir.  $s_\lambda - \lim x = L$  ya da  $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$  ile gösterilir. Tüm  $\lambda$  –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi  $st_\lambda$  dir (Mursaleen,2000).

Yukardaki şartları sağlayan  $\lambda$  dizilerinin kümesini  $\Lambda$  ile göstereceğiz.

**Tanım 3.28**  $0 < a \leq 1$  verilsin. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir  $L$  sayısı varsa  $(x_k)$  dizisine  $a$  dereceden istatistiksel yakınsak denir (Çolak, 2010).

**Tanım 3.29**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $x$ ,  $D$  kümesinin reel değerli bir elemanı olsun.  $h_n \neq 0$  olacak şekilde bir dizi ki  $h_n \rightarrow 0$ ,  $x + h_n \in D$  ve

$$Df(x, h_n) := \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$$

ise  $f$ 'nin  $x \in \bar{\mathbb{R}}$  deki dizisel sekant türevi  $L$ 'dir.

Eğer  $h_n > 0$  ise  $f$  nin  $x$  teki sağ taraftan dizisel sekant türevi,  $h_n < 0$  sol taraftan dizisel sekant türevi denir.  $h_n > 0$  ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $h_n \rightarrow 0$  ise bu durumu kısaca  $h_n \searrow 0$  ile göstereceğiz (Pedersen ve Sjoberg, 2021).

**Tanım 3.30**  $x + h_n, x - k_n \in D, h_n > 0, k_n > 0$  ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $h_n, k_n \rightarrow 0$  olmak üzere

$$\frac{f(x + h_n) - f(x - k_n)}{h_n + k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

ise  $f$  nin  $x$  noktasındaki kord türevi  $L \in \overline{\mathbb{R}}$  denir (Pedersen ve Sjöberg, 2021).

**Teorem 3.6**  $f, x$  de sürekli ise o zaman  $f$  nin  $x$  teki sekant türevleri kümesi,  $f$  nin  $x$  teki kord türevleri kümesinin bir alt kümesidir.

Örneğin Weirstrass fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon her yerde sürekli olup reel değeri olan; fakat hiçbir yerde türevlenemeyen bir fonksiyon örneğidir. Weierstrass fonksiyonu,  $\pm\infty$  nin herhangi bir  $x$  noktasında  $W$  nin kordon türevleridir.  $W$  nin kordon türevlerinin kümesini tahmini  $\overline{\mathbb{R}}$  eşittir (Pedersen ve Sjöberg, 2021).

$x_n > 0$  dizisi kullanılarak çok temel sonlu fark formülleri  $f'(x)$  türevine yaklaşır öyle ki  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyon bir  $x_0$  noktasındaki iki temel türev formülü aşağıdaki şekildedir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + x_n) - f(x_0)}{x_n} = f'(x_0)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + x_n) - f(x_0 - x_n)}{2x_n} = f'(x_0)$$

$x_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  dizisi kullanılarak çok temel sonlu fark formülleri ile  $f'(x)$  türevine yaklaşılır.

İlk formül Newton fark bölümüdür ve  $f$ 'nin sekant grafiğinin eğimini belirler. İkinci formül simetrik fark katsayısıdır ve  $f$ 'nin grafiğinin bir kordonun eğimini belirler. Benzer yaklaşımla şimdi Cesaro türevini tanımlayacağız.

**Tanım 3.31**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon,  $x_n > 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} = \omega$$

ise  $f$  fonksiyonun  $x_0$  noktasındaki Cesaro türevi  $\omega$ 'dır denir (Nuray, 2021).

Tanım 3.31'e eşdeğer tanım aşağıdaki gibidir.

**Tanım 3.32**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon,  $x_n > 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0 - x_k)}{2x_k} = \omega$$

ise  $f$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasındaki Cesaro türevi  $\omega$ 'dır (Nuray, 2021). Cesaro türevine sahip tüm  $f$  fonksiyonlarının kümesi  $\omega_d$  ile gösterilir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu her bir  $(x_n) \rightarrow 0$  için  $(C, 1) - \lim f(x_0 + x_n) = f(x_0)$  oluyorsa  $x_0$  noktasında Cesaro süreklidir denir (Nuray, 2021).

**Teorem 3.7**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $x_0 \in \mathbb{R}$  noktasında Cesaro türevli ve türevi  $\omega \in \mathbb{R}$  ise,  $f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında Cesaro sürekli fonksiyonudur (Nuray, 2021).

**İspat :**  $\lim x_n = 0$ . Açık her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$f(x_0 + x_n) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + x_n) - f(x_0)}{x_n} x_n$$

$\lim x_n = 0$ ,  $(C, 1) - \lim x_n = 0$  anlamına geldiğinden

$$(C, 1) - \lim (f(x_0 + x_n) - f(x_0)) = (C, 1) - \lim \frac{f(x_0 + x_n) - f(x_0)}{x_n} (C, 1) - \lim x_n$$

yazabiliriz. Dolayısıyla sahip olduğumuz varsayımdan

$$(C, 1) - \lim f(x_0 + x_n) = f(x_0)$$

$f$ ,  $x_0$  noktasında Cesaro süreklidir.

**Tanım 3.33**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon, için  $x_n > 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - \omega \right| = 0$$

limiti mevcut ise  $f$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasındaki kuvvetli Cesaro türevi  $\omega$ 'dır.

Tanım 3.33'e eşdeğer olan bir tanım aşağıdaki gibidir (Nuray, 2021).

**Tanım 3.34**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon,  $x_n > 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0 - x_k)}{2x_k} - \omega \right| = 0$$

limiti mevcut ise bu limite  $f$  fonksiyonunun kuvvetli Cesaro türevi denir (Nuray, 2021). Cesaro türevi ve kuvvetli Cesaro türevlerinin tanımlarından anlaşılır ki bir fonksiyonun  $x_0$  noktasında kuvvetli Cesaro türevi varsa, bu noktada Cesaro türevi vardır.

**Tanım 3.35**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon,  $x_n > 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - \omega \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

limiti mevcut ise  $\omega$ 'ya  $f$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasında istatistiksel türevi denir. İstatistiksel türevi sahip tüm  $f$  fonksiyonlarının kümesi  $S_d$  ile göstereceğiz (Nuray, 2021). Tanım 3.35'e eşdeğer bir tanım aşağıdaki şekildedir.

**Tanım 3.36**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyon olsun  $x_n > 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0 - x_k)}{2x_k} - \omega \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

limiti mevcut ise  $\omega$ 'ya  $f$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasında istatistiksel türevi denir (Nuray, 2021).

Bir fonksiyonun türevi varsa, istatistiksel türevi de vardır. Ancak tersi doğru olmayabilir.

### **Teorem 3.7**

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonun  $x_0 \in \mathbb{R}$  noktasında kuvvetli Cesaro türevi varsa, o zaman  $x_0$  noktasında istatistiksel türevi vardır.

b) Eğer  $\left( \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} \right)$  her  $k \in \mathbb{N}$  için sınırlı ve  $f$ 'nin  $x_0 \in \mathbb{R}$  noktasında istatistiksel türevi varsa  $f$ ,  $x_0$  noktasında kuvvetli Cesaro türevine sahiptir.

**İspat:** Kolaylık için  $\frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k}$  yerine  $y_k$  yazalım.

a)  $f$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  noktasında kuvvetli Cesaro türevine sahip olsun. Keyfi  $\varepsilon > 0$  için

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y_k - \omega| = \left( \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ |y_k - \omega| \geq \varepsilon}}^n |y_k - \omega| + \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ |y_k - \omega| < \varepsilon}}^n |y_k - \omega| \right)$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ |y_k - \omega| \geq \varepsilon}}^n |y_k - \omega| \\ &\geq \frac{1}{n} |\{1 \leq k \leq n: |y_k - \omega| \geq \varepsilon\}| \varepsilon \end{aligned}$$

yazabiliriz, dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{1 \leq k \leq n: |y_k - \omega| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani  $f$ ,  $x_0$  noktasında istatistiksel türeve sahiptir.

**b)**  $f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında istatistiksel türevli ve sınırlı olsun.  $k \in \mathbb{N}$  için

$|y_k - \omega| \leq K$  dır.  $\varepsilon > 0$  için

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y_k - \omega| = \frac{1}{n} \left( \sum_{\substack{k=1 \\ |y_k - \omega| \geq \varepsilon}}^n |y_k - \omega| + \sum_{\substack{k=1 \\ |y_k - \omega| < \varepsilon}}^n |y_k - \omega| \right)$$

$$\leq \frac{1}{n} \left( K \sum_{\substack{k=1 \\ |y_k - \omega| \geq \varepsilon}}^n 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ |y_k - \omega| < \varepsilon}}^n |y_k - \omega| \right)$$

$$\leq K \frac{1}{n} |\{1 \leq k \leq n: |y_k - \omega| \geq \varepsilon\}| + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon$$

yazabiliriz. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y_k - \omega| = 0$$

elde ederiz. Yani  $f$ ,  $x_0$  noktasında kuvvetli Cesaro türevine sahiptir (Nuray, 2021).

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

### 4.1. $\alpha$ . Dereceden Cesaro Türev

**Tanım 4.1**  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunda  $x_0 \in \mathbb{R}$  noktasında  $x_n > 0$ ,  $\alpha \in (0,1]$  ve

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  şartları altında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} = \omega$$

ise  $f$ 'nin  $\alpha$ . dereceden Cesaro türevi  $\omega \in \mathbb{R}$ 'dir.  $\alpha$ . dereceden Cesaro türevine sahip tüm  $f$  fonksiyonlarının kümesi  $\omega_d^\alpha$  ile gösterelim.

Tanım 4.1'e eşdeğer tanım aşağıdaki gibidir.

**Tanım 4.2**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunda  $x_0 \in \mathbb{R}$  noktasında  $x_n > 0$ ,  $\alpha \in (0,1]$  ve

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  şartları altında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0 - x_k)}{2x_k} = \omega$$

ise  $f$ 'nin  $\alpha$ . dereceden Cesaro türevi  $\omega \in \mathbb{R}$ 'dir.

**Tanım 4.3**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için  $x_n > 0$ ,  $\alpha \in (0,1]$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - \omega \right| = 0$$

limiti mevcut ise  $f$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasındaki  $\alpha$ . dereceden kuvvetli Cesaro türevi denir.

Tanım 4.3'e eşdeğer olan bir tanım aşağıdaki gibidir.

**Tanım 4.4**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu olsun.  $x_n > 0$ ,  $\alpha \in (0,1]$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0 - x_k)}{2x_k} - \omega \right| = 0$$

limiti mevcut ise  $\alpha$ . dereceden kuvvetli bir Cesaro türevi denir.

$\alpha$ . dereceden Cesaro türev tanımından ve  $\alpha$ . dereceden kuvvetli Cesaro türev tanımlarından anlaşılır ki bir fonksiyonun  $x_0$  noktasında  $\alpha$ . dereceden kuvvetli türevi varsa, bu noktada  $\alpha$ . dereceden Cesaro türevi vardır.

#### 4.2. $\alpha$ . Dereceden İstatistiksel Türev

**Tanım 4.5**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon  $x_n > 0$ ,  $\alpha \in (0,1]$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left\{ k \leq n: \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - \omega \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

limiti mevcut ise  $\omega$ 'ya  $f$  fonksiyonunun  $x_0$  noktasında  $\alpha$ . dereceden istatistiksel türevi denir.

Tanım 4.5'e eşdeğer bir tanımla devam edelim.

**Tanım 4.6**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon  $x_n > 0$ ,  $\alpha \in (0,1]$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left\{ k \leq n: \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0 - x_k)}{2x_k} - \omega \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

limiti mevcut ise  $\omega$ 'ya  $x_0$  noktasında  $\alpha$ . dereceden istatistiksel türevi denir.  $\alpha$ . dereceden istatistiksel türevine sahip tüm  $f$  fonksiyonlarının kümesi  $S_d^\alpha$  ile gösterelim.

**Teorem 4.1**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon  $\alpha \in (0,1]$  olmak üzere  $x_0 \in \mathbb{R}$  noktasında  $\alpha$ . dereceden kuvvetli Cesaro türevi varsa, o zaman  $x_0$  noktasında  $\alpha$ . dereceden istatistiksel türevi vardır.

**İspat**  $\frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k}$  yerine  $y_k$  yazalım.

$\alpha \in (0,1]$  olmak üzere  $f$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  noktasında  $\alpha$ . dereceden kuvvetli Cesaro türevine sahip olsun.  $\varepsilon > 0$  için

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n |y_k - \omega| = \left( \frac{1}{n^\alpha} \sum_{\substack{k=1 \\ |y_k - \omega| \geq \varepsilon}}^n |y_k - \omega| + \frac{1}{n^\alpha} \sum_{\substack{k=1 \\ |y_k - \omega| < \varepsilon}}^n |y_k - \omega| \right)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{\substack{k=1 \\ |y_k - \omega| \geq \varepsilon}}^n |y_k - \omega| \\
&\geq \frac{1}{n^\alpha} |\{1 \leq k \leq n: |y_k - \omega| \geq \varepsilon\}| \varepsilon
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{1 \leq k \leq n: |y_k - \omega| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani  $f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında  $\alpha$ . dereceden istatistiksel türevlidir.

**Tanım 4.7**  $0 < \alpha \leq 1$  ve  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  iki reel değerli fonksiyon olsun.  $x_n > 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olmak üzere

(i) Eğer  $S_d^\alpha - \lim f = L$  ve  $c \in \mathbb{R}$  için  $S_d^\alpha - \lim cf = cL$ .

(ii) Eğer  $S_d^\alpha - \lim f = L_1$  ve  $S_d^\alpha - \lim g = L_2$  ise  $S_d^\alpha - \lim(f + g) = L_1 + L_2$  dir.

**İspat**

(i)  $c=0$  için ispat açıktır.  $c \neq 0$  ve  $S_d^\alpha - \lim f = L$  olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left\{ k \leq n: \left| c \left( \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - cL \right) \geq \varepsilon \right\} \right\} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left\{ k \leq n: \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - L \right| \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\}
\end{aligned}$$

dir.

(ii)  $S_d^\alpha - \lim f = L_1$  ve  $S_d^\alpha - \lim g = L_2$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left\{ k \leq n: \left| \frac{(f + g)(x_0 + x_k) - (f + g)(x_0)}{x_k} - (L_1 + L_2) \right| \geq \varepsilon \right\} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left\{ k \leq n: \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0) + g(x_0 + x_k) - g(x_0)}{x_k} - L_1 - L_2 \right| \geq \varepsilon \right\} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left\{ k \leq n: \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - L_1 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\
&+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left\{ k \leq n: \left| \frac{g(x_0 + x_k) - g(x_0)}{x_k} - L_2 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}
\end{aligned}$$

dir

**Teorem 4.2**  $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$  olsun ve  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon  $x_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olsun. Bu takdirde  $S_d^\alpha \subseteq S_d^\beta$  ve  $\alpha < \beta$  için bu kapsama kesindir.

**İspat:** Eğer  $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$  için

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} \left\{ k \leq n: \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \left\{ k \leq n: \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ispatı tamamlar.

**Sonuç 4.1** Bir fonksiyonun  $\alpha$ . dereceden istatistiksel türevi varsa  $0 < \alpha \leq 1$  için  $S_d^\alpha \subseteq S_d$  dir. Teorem 4.2'den aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

**Sonuç 4.2**

(i)  $S_d^\alpha = S_d^\beta$  olması için gerek ve yeter şart  $\alpha = \beta$

(ii)  $S_d^\alpha = S_d$  olması için gerek ve yeter şart  $\alpha = 1$

**Teorem 4.3**  $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$  ve  $p$  pozitif reel sayı olsun.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon ve  $x_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olsun. Bu takdirde  $\omega_{dp}^\alpha \subseteq \omega_{dp}^\beta$  dir.

**İspat:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $\omega_d^\alpha - \lim f = L$  olsun.  $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$  olacak şekilde  $\alpha, \beta$  ve  $p$  pozitif reel sayıları için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - L \right|^p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - L \right|^p$$

yazabiliriz. Buradan  $w_{dp}^\alpha \subseteq w_{dp}^\beta$  elde ederiz.

Aşağıdaki sonuç Teorem 4.2.8'den kolayca elde edilir

**Sonuç 4.3**  $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$  ve  $p$  pozitif reel sayı olsun.  $x_n > 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olsun. Bu takdirde

(i)  $w_{dp}^\alpha - \lim f = w_{dp}^\beta - \lim f$  olması için gerek ve yeter şart  $\alpha = \beta$

(ii)  $w_{dp}^\alpha - \lim f \subseteq w_{dp}^\beta - \lim f$  (her  $\alpha \in (0,1]$  ve  $0 < p < \infty$  için) olmasıdır.

**Teorem 4.4**  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon,  $x_n > 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olsun. Eğer  $0 < p < q < \infty$  ise  $w_{dq}^a \subset w_{dp}^a$  dir.

**Teorem 4.5**  $\alpha, \beta$   $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$  eşitsizliği sağlanacak şekilde iki reel sayı ve  $0 < p < \infty$  olacak şekilde sabit bir reel sayı,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon  $x_n > 0$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olsun. Eğer bir  $f$  fonksiyonun  $\alpha$ . dereceden kuvvetli Cesaro türevi varsa o zaman  $\beta$ . dereceden istatistiksel türeve sahiptir.

**İspat**  $\omega_d^a - \lim f = L$  olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - L \right|^p \geq \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - L \right|^p \geq \varepsilon \right\} \right| \varepsilon^p$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - L \right|^p \\ & \geq \frac{1}{n^\alpha} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - L \right|^p \geq \varepsilon \right\} \right| \cdot \varepsilon^p \\ & \geq \frac{1}{n^\beta} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - L \right|^p \geq \varepsilon \right\} \right| \cdot \varepsilon^p \end{aligned}$$

elde ederiz. Bundan şu sonuç çıkar ki eğer  $f$  fonksiyonu  $\alpha$ . dereceden kuvvetli  $p$ -Cesaro türevine sahip ise  $\beta$ . dereceden istatistiksel türeve de sahiptir.

Teorem 4.5'de  $\alpha = \beta$  alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

**Sonuç 4.4**  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon ve  $x_n > 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  olsun.  $0 < p < \infty$  sabit bir reel sayı için eğer bir  $f$  fonksiyonu  $\alpha$ . dereceden kuvvetli  $p$ -Cesaro türevi varsa aynı zamanda  $\alpha$ . dereceden istatistiksel türeve sahiptir.

### 4.3. $\lambda$ – İstatistiksel Türev

Bu bölümde  $\lambda$  – istatistiksel türev  $(V, \lambda)$  türev tanımları verilmiş ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler, kapsama bağıntıları incelenmiştir.

**Tanım 4.8**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon  $x_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  olsun.

Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} \right| = L$$

ise  $f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında kuvvetli  $(V, \lambda)$  türevlenebilirdir denir. Bu durumu  $[V, \lambda]_d - \lim f(x) = L$  ile göstereceğiz.

**Tanım 4.9**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon  $x_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  olsun.

Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left\{ k \in I_n : \left| \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\}$$

ise  $f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında  $\lambda$  – istatistiksel türevlidir denir. Bu durumu  $S_d^\lambda - \lim f(x) = L$  ile göstereceğiz.

#### **Teorem 4.6**

i)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon  $x_0$  noktasında  $[V, \lambda]_d$  türevlenebilir ise  $\lambda$  – istatistiksel türevlidir.

ii)  $\left( \frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k} \right)$  her  $k$  için sınırlı ve  $f$  fonksiyonu  $\lambda$  – istatistiksel türevlenebilir ise  $[V, \lambda]_d$  türevlenebilirdir.

#### **İspat:**

i)  $\frac{f(x_0 + x_k) - f(x_0)}{x_k}$  yerine  $y_k$  yazalım.  $f$ ,  $x_0$  noktasında  $[V, \lambda]_d$  türevlenebilir olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |y_k - L| &= \frac{1}{\lambda_n} \left( \sum_{\substack{k \in I_n \\ |y_k - L| \geq \varepsilon}} |y_k - L| + \sum_{\substack{k \in I_n \\ |y_k - L| < \varepsilon}} |y_k - L| \right) \\ &\geq \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ |y_k - L| \geq \varepsilon}} |y_k - L| \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| \cdot \varepsilon$$

yazabiliriz. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde ederiz. Yani  $f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında  $\lambda$  – istatistiksel türevlidir.

ii)  $f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında  $\lambda$  – istatistiksel türevlenebilir ve sınırlı bir fonksiyon

olsun.  $\frac{f(x_0+x_k)-f(x_0)}{x_k} = y_k$  her  $k \in \mathbb{N}$  için sınırlı olduğundan  $|y_k - \omega| < K$  olacak

şekilde bir  $K > 0$  sayısı vardır. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |y_k - L| &= \frac{1}{\lambda_n} \left( \sum_{\substack{k \in I_n \\ |y_k - L| \geq \varepsilon}} |y_k - L| + \sum_{\substack{k \in I_n \\ |y_k - L| < \varepsilon}} |y_k - L| \right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n} \left( K \sum_{\substack{k \in I_n \\ |y_k - L| \geq \varepsilon}} |y_k - L| + \sum_{\substack{k \in I_n \\ |y_k - L| < \varepsilon}} 1 \right) \\ &\leq \frac{K}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \varepsilon \end{aligned}$$

yazabiliriz.  $f$  fonksiyonu  $\lambda$  – istatistiksel türevlenebilir olduğundan

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |y_k - L| = 0$$

elde ederiz.

**Teorem 4.7**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  reel değerli bir fonksiyon  $x_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  olsun.  $f$

fonksiyonu istatistiksel türevlenebilir ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{\lambda_n}{n} > 0$  ise  $\lambda$  – istatistiksel türevlenebilirdir.

**İspat**  $\frac{f(x_0+x_k)-f(x_0)}{x_k}$  yerine  $y_k$  yazalım. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\{k \leq n : |y_k - L| \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{1}{n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$\geq \frac{\lambda_n}{n} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz.  $f$  fonksiyonu istatistiksel türevlenebilir olduğundan  $\lambda$  – istatistiksel türevlenebilir olduğu elde edilir.

**Teorem 4.8**  $\lambda_n$  ve  $\mu_n$   $\wedge$ 'da iki dizi ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\lambda_n \leq \mu_n$  olsun.

$$\text{i) } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} > 0 \quad (1)$$

ise  $S_d^\mu \subset S_d^\lambda$  dir.

$$\text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1 \quad (2)$$

ise  $S_d^\lambda \subset S_d^\mu$  dir.

### İspat

i) Her  $n \in \mathbb{N}$   $\lambda_n \leq \mu_n$  olmak üzere (1) şartını sağlasın.  $I_n \subseteq J_n$  olduğundan  $\varepsilon > 0$  olmak üzere

$$|\{k \in J_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazabiliriz. Böylece her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{1}{\mu_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$\geq \frac{\lambda_n}{\mu_n} \cdot \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

elde ederiz. Son eşitsizlikte  $n \rightarrow \infty$  için limit alınırsa  $S_\mu^d \subseteq S_\lambda^d$  elde ederiz.

ii)  $S_\lambda^d - \lim f(x) = L$  olsun. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $I_n \subseteq J_n$  olduğundan

$$\frac{1}{\mu_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| = \frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n - I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\mu_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
& \leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n} + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}| \\
& \left(1 - \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right) + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |y_k - L| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

yazabiliriz.  $S_\lambda^d - \lim f(x) = 0$  ve (2) eşitsizliğinden dolayı  $n \rightarrow \infty$  için limit alınırsa  $S_\mu^d - \lim f(x) = L$  elde edilir.



## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

### 5.1. SONUÇLAR

Bu tezde, istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli  $p$  –Cesaro toplanabilme,  $a$ . dereceden istatistiksel yakınsaklık ve  $a$ . dereceden kuvvetli  $p$  –Cesaro toplanabilme kavramları verilmiştir. Nuray (2021) tarafından tanımlanan istatistiksel türev ve Cesaro türevi ile  $a$ . dereceden Cesaro türevi ve  $a$ . dereceden istatistiksel türev tanımları yapılmıştır ve bunlar arasındaki bağlantılar ve ilişkiler incelenmiştir.

### 5.2.ÖNERİLER

Bu tanımlar genelleştirilerek lacunary istatistiksel yakınsaklık ve  $n$  – normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık üzerine istatistiksel türev, Cesaro türev çalışılabilir.

**KAYNAKÇA**

- Balcı, M., 1997, Matematik analiz: cilt 1, *Balcı yayınları*,
- Bayraktar, M., BttlUmü, F.M. 2006. Fonksiyonel analiz, Gaz Kıtapev, Ankara, 320s.
- Buck, R.C. 1953. Generalized asymptotic density, *American journal of mathematics*, 75 (2), 335-346.
- Connor, J. 1988. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, *Analysis*, 8 (1-2), 47-64.
- Çolak, R. 2010. Statistical convergence of order  $\alpha$ , *Modern Methods in Analysis and Its Applications*, New Delhi, India: Anamaya Pub, 121-129.
- Çolak, R., Altın, Y., Mursaleen, M. 2010. On some sets of difference sequences of fuzzy numbers, *Soft Computing*, 15 (4), 787-793.
- Çolak, R., Bektaş, Ç. 2011.  $\lambda$ -statistical convergence of order  $\alpha$ , *Acta Mathematica Scientia*, 31 (3), 953-959.
- Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, *Colloquium mathematicae*, 241-244.
- Fridy, J.A. 1985. On statistical convergence, *Analysis*, 5 (4), 301-314.
- Gadjiev, A., Orhan, C. 2002. Some approximation theorems via statistical convergence, *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 129-138.
- Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, by John Wiley and Sons Inc., 1978, N. Subramanian and P. Thirunavakarasu Department of Mathematics, SASTRA University, Thanjavur-613, 401.
- Maddox, I.J., 1988, *Elements of functional analysis*, *CUP Archive*,
- Montgomery, D.C., Mastrangelo, C.M. 1991. Some statistical process control methods for autocorrelated data, *Journal of Quality Technology*, 23 (3), 179-193.
- Mursaleen, M., 2000.  $\lambda$ -statistical convergence, *Math. Slovaca*, 50 (1), 111-115.
- Musayev, B., Alp, M. 2000. Fonksiyonel analiz, *Balcı Yayınları*, Kütahya, 72.
- Nuray, F. 2021. Cesaro And Statistical Derivative, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 1393-1398.
- Nuray, F. 2020. Strongly deferred invariant convergence and deferred invariant statistical convergence, *J. Comput. Sci. Comput. Math*, 10 (1), 1-6.
- Pedersen, S., Sjøberg, J.P. 2021. Sequential derivatives, *Real Analysis Exchange*, 46 (1), 191-206.
- Powell, T. 1972. A mathematical model for calcium homeostasis, *The Bulletin of mathematical biophysics*, 34 (4), 483-502.
- Rath, D., Tripathy, B. 1994. On statistically convergent and statistically Cauchy sequences, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 25, 381-381.
- Šalát, T. 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica slovacica*, 30 (2), 139-150.
- Schoenberg, I. 1959. The integrability of certain functions and related summability methods, *The American mathematical monthly*, 66 (5), 361-775.

Shah, S. 1972. Analytic functions with univalent derivatives and entire functions of exponential type, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 78 (2), 154-171.

Steinhaus, E.A. 1949. Principles of insect pathology, *Principles of insect pathology*.

Tabib, K.K., 2012, The topology of statistical convergence, *The University of Texas at El Paso*,

Zygmund, A., 1979, Trigonometric series, *Cambridge university press*,

