



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİBRİT MANYETİK EĞRİLER İÇİN
YİNELEME OPERATÖRÜ

Ece SAYAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2024
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİBRİT MANYETİK EĞRİLER İÇİN
YİNELEME OPERATÖRÜ

Ece SAYAN

YÜKSEK LİSANS SEMİNERİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Ahmet SAZAK

Haziran 2024
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

Ece SAYAN tarafından hazırlanan ‘‘Hibrit Manyetik Eğriler için Yineleme Operatörü’’ adlı tez çalışması 25/06/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU
Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü

.....

Danışman

Prof. Dr. Talat KÖRPINAR
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü

.....

Üye

Dr. Öğretim Üyesi Ahmet SAZAK
Muş Alparslan Üniversitesi, Varto MYO,
Tıbbi Hizmetler ve Teknikler

.....

Prof. Dr. Selçuk SAĐIR

FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Ece SAYAN

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HİBRİT MANYETİK EĞRİLER İÇİN YİNELEME OPERATÖRÜ

Ece SAYAN

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR

Bir Küresel uzay üzerindeki manyetik eğriler, F manyetik alanının etkisi altında hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Bu tez öncelikle 3 boyutlu Öklid uzayındaki Killing manyetik alanlara karşılık gelen bu eğriler için bazı özellikleri incelemeyi amaçlamaktadır. T -manyetik ve e -manyetik eğriler olarak adlandırılan manyetik alanlarda bu eğrilerin bazı karakterizasyonlarını ve yineleme operatörleri verilip, yörüngeleri araştırılacaktır. Ayrıca uzayda yarı-manyetik eğriler gösterilip bu eğrilerin yineleme operatörleri bulunarak enerjileri hesaplanacaktır.

2024, 69 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Enerji, Küresel Uzay, Lorentz Kuvveti, Manyetik Alan, Manyetik Eğri, Yarı Çatı, Yineleme Operatörü

ABSTRACT

MS THESIS

RECURSION OPERATOR FOR HYBRID MAGNETIC CURVES

Ece SAYAN

**Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics**

Advisor: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

The magnetic curves on a Spherical space are trajectories of charged particles moving on M under the action of a magnetic field F . This paper aims at studying some properties for these curves which corresponding to the Killing magnetic fields in the 3-dimensional Euclidean space. We investigate the trajectories of the magnetic fields called **T**-magnetic and **e**-magnetic curves, also we give some characterizations of these curves and recursion operator. Additionally, quasi-magnetic curves are shown in space and we calculate their energies by finding the recursion operator sof these curves.

2024, 69 Pages

Keywords: Energy, Lorentz Force, Magnetic Field, Magnetic Curves, Quasi Frame, Recursion Operator, Spherical Space

TEŐEKKÜR

Bu çalıőmanın hazırlanması sürecinde bana daima bilgisiyle ışık tutan, desteğini her zaman yanımda hissettiğim, bana kıymetli zamanını ayıran sayın danışman hocam Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR'a, çalıőmalarım sırasında bilgi ve deneyimlerimden yararlandığıım, desteğini esirgemeyen çok değerli hocam Doç. Dr. Muhsin İNCESU'ya teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman maddi ve manevi yanımda olan yanımda olan anlayıő ve desteklerini esirgemeyen aileme teőekkür ederim.

Ece SAYAN
MUŞ-2024



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER	4
3. KÜRE ÜZERİNDE BAZI MANYETİK EĞRİLER	9
3.1. <i>T</i> -Manyetik Eğriler	9
3.2. <i>e</i> -Manyetik Eğriler	11
4. BAZI MANYETİK EĞRİLERDE YİNELEME OPERATÖRLERİ.....	13
4.1. <i>T</i> -Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörü.....	13
4.2. <i>e</i> -Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörü	16
5. UZAYDA YARI MANYETİK EĞRİLER.....	19
5.1. Uzayda Yarı-Hızlı Manyetik Eğriler	19
5.2. Uzayda Yarı-Normal Manyetik Eğriler.....	21
5.3. Uzayda Yarı-Binormal Manyetik Eğriler.....	23
6. YARI MANYETİK EĞRİLERDE NORMALLEŞTİRME OPERATÖRÜ.....	27
6.1. Yarı-Hızlı Manyetik Eğrilerde Normalleştirme Operatörü.....	27
6.2. Yarı-Normal Manyetik Eğrilerde Normalleştirme Operatörü.....	28
6.3. Yarı-Binormal Manyetik Eğrilerde Normalleştirme Operatörü.....	29
7. YARI MANYETİK EĞRİLERDE YİNELEME OPERATÖRÜ.....	30
7.1. Yarı-Hızlı Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörü.....	30
7.2. Yarı-Normal Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörü.....	31
7.3. Yarı-Binormal Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörü.....	33
8. YARI MANYETİK EĞRİLERİN ENERJİSİ.....	36
8.1. Yarı-Hızlı Manyetik Eğrilerin Enerjisi.....	38
8.2. Yarı-Normal Manyetik Eğrilerin Enerjisi.....	39
8.3. Yarı-Binormal Manyetik Eğrilerin Enerjisi.....	41
8.1.1. Yarı-Hızlı Manyetik Eğrilerde Normalleştirme Operatörünün Enerjisi.....	43
8.2.1. Yarı-Normal Manyetik Eğrilerde Normalleştirme Operatörünün Enerjisi.....	44

8.3.1. Yarı-Binormal Manyetik Eğrilerde Normalleştirme Operatörünün Enerjisi.....	46
8.1.2. Yarı-Hızlı Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörünün Enerjisi.....	47
8.2.2. Yarı-Normal Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörünün Enerjisi.....	50
8.3.2. Yarı-Binormal Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörünün Enerjisi.....	53
SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	57
KAYNAKLAR.....	58



SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

- $C^\infty(M, R)$: Diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi
 ∇ : Levi - Civita koneksiyonu
 $\phi(X)$: Lorentz kuvveti fonksiyonu
 $F(X, Y)$: Manyetik vektör alanı fonksiyonu
 $g(X, Y)$: Metrik
 (M, g) : Riemann Manifoldu

Kısaltmalar

- F : Manyetik Alan
 R : Reel uzay
 E : Öklid uzay
 V : Manyetik vektör alanı
 \mathcal{R} : Yineleme operatörü
 \mathcal{N} : Normalleştirme operatörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

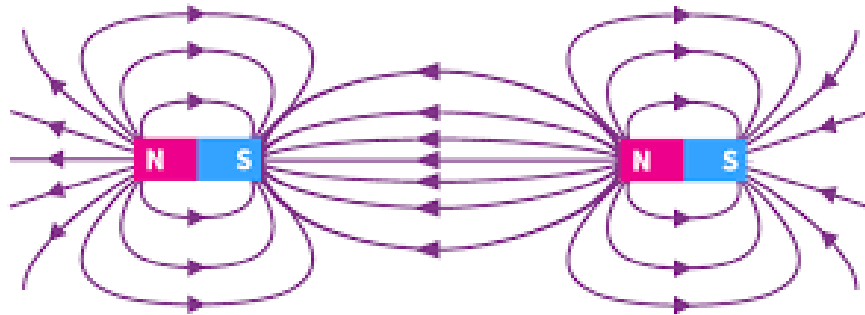
Şekil 1. Manyetik alan çizgileri	1
Şekil 2. Lorentz Kuvveti.....	2



1. GİRİŞ

Manyetik bir malzemenin veya hareketli bir yüklü parçacığın etrafındaki manyetizma kuvvetinin etki ettiği bölge, manyetik alan olarak bilinir. Spin dediğimiz temel bir kuantum özelliği ile bağlantılı temel parçacıkların hareket eden temel elektrik yükleri ve içsel manyetik momentleri bu alanı üretir. Manyetik alan vektörel bir büyüklüktür. Yönü ve şiddeti vardır. Mıknatıslar da oluşturdukları manyetik alanlar vasıtasıyla birbirlerine kuvvet ve tork uygularlar. Doğaları gereği iki kutupludurlar yani hem kuzey hem de güney manyetik kutbu vardır. Manyetik alan çizgilerinin yönü kuzeyden (N) güneye (S) doğrudur.

Manyetik alanlar, kuzey kutuplardan çıkıp ve güney kutuplara giren sürekli kuvvet çizgileri ile temsil edilebilir. Çizgilerin yoğunluğu alanın büyüklüğünü gösterir, kutuplarda daha fazla yoğunlaşır kutuplardan uzaklaştıkça genişler ve zayıflar. Manyetik alan çizgileri aerodinamik ve sürekli olmaları bakımından sıvı akışına benzer.

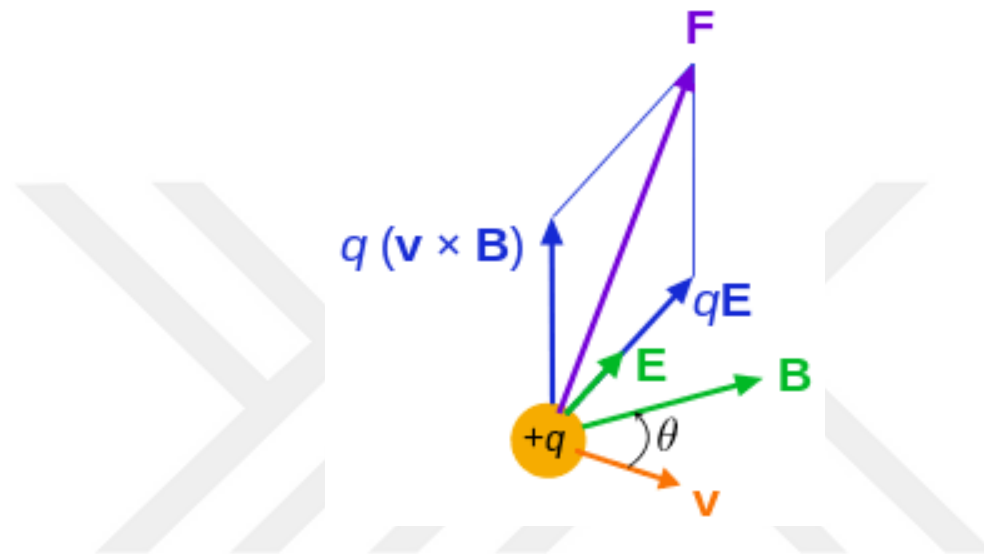


Şekil 1. Manyetik alan çizgileri (Bal, 1998)

Matematiksel olarak bir manyetik alan, hareketli bir yüke uyguladığı kuvvet miktarı cinsinden tanımlanır. Bu kuvvetin ölçümü $\mathbf{F} = q \times \mathbf{B}$ şeklinde ifade edilebilen Lorentz Kuvvet Yasası ile tutarlıdır; Burada \mathbf{F} manyetik kuvvet, q yük, \mathbf{v} hız ve manyetik alan \mathbf{B} 'dir. Bu ilişki \mathbf{F} 'nin diğer tüm değerlere dik olduğu bir vektör çarpımıdır. Lorentz kuvveti yüklü bir parçacığı elektromanyetik bir alana koyduğumuzda nasıl hareket edeceğini açıklar. q ve \mathbf{B} arasındaki vektörel (çapraz) çarpımdan dolayı, parçacık manyetik alana paralel hareket ederse, etkiyen manyetik kuvvet sıfır olur. İki vektör birbirine dik olduğu zaman Lorentz kuvveti en büyük değerini alır. Manyetik kuvvet

parçacığın hızına daima dik olduğundan manyetik kuvvetin hızı; parçacığın büyüklüğünü değiştirmez, sadece yönünü değiştirir. O yüzden yüklü bir parçacık manyetik alanda dairesel hareketler yapar (Synge, 1960).

Elektriksel alan bir elektrik yükünün başka bir elektrik yükü üzerinde oluşturduğu çekme ya da itme kuvveti etkisine denir. Elektrik yüklerinin çevresinde elektrik alan çizgileri oluşur. Elektriksel alan E ile gösterilir (Hacıfazlıoğlu, 2013).



Şekil 2. Lorentz Kuvveti (Anonymous, 2012)

Farklı manifoldlar üzerindeki manyetik alanların ve de bunlara karşılık gelen manyetik eğrilerin incelenmesi diferansiyel geometride önemli bir yer tutar. Manyetik alanı yüklü bir parçacığın bu alanda hareket ederken maruz kaldığı kuvvet olarak tanımlamıştık. Bu yüklü parçacık bir V manyetik alanına girdiği zaman bu parçacığın Serret-Frenet vektörleri bu alandan etkilenir ve bu etkiyle Lorentz kuvveti açığa çıkar. Bu kuvvet etkisiyle parçacık manyetik alan içerisinde bir yörünge izler. Manyetik eğriler, manyetik alan altında hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir.

Bir Küresel uzay üzerindeki manyetik eğriler, F manyetik alanın etkisi altında hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Buradan M üzerinde F manyetik alandır, F manyetik alanın Lorentz kuvveti ϕ , herhangi $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için,

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y)$$

eşitliği ile verilen (1,1)-tensör alanıdır. Lorentz kuvveti olarak verilen manyetik alanla ilişkili denklem

$$\phi(T) = V \times T$$

şeklinde tanımlıdır. Lorentz kuvvetinin etkisiyle elde edilen parçacığın hareketini şöyle özetleyebiliriz: Eğer T teğet vektör alanı, V manyetik alanına paralel ise Lorentz kuvveti sıfır olacağından parçacık manyetik alana paralel ilerler. Eğer T teğet vektör alanı V manyetik alanına dik ise Lorentz kuvveti maksimum olup parçacık çember eğrisi şeklinde bir yörünge izler. Eğer T teğet vektör alanı V manyetik alanıyla sabit bir açı yapıyorsa Lorentz kuvvetinin etkisiyle parçacık helis eğrisi şeklinde bir yörünge izler (Barros ve Romeo 2007). F 'nin manyetik yörüngeleri, Lorentz denklemini karşılayan M üzerindeki γ eğrileridir. Manyetik alanın T teğet vektör alanını etkilemesi sonucunda elde edilen yörüngeleri T -manyetik eğriler olarak adlandıracağız. Bu durumda, V manyetik alanın T -manyetik eğrileri aşağıdaki Lorentz eşitliğini sağlayan eğrilerdir.

$$\nabla_{\gamma} \gamma' = \phi(\gamma') = V \times \gamma'$$

Burada ϕ , F 'ye karşılık gelen Lorentz kuvveti ve ∇ , g 'nin Levi Civita bağıntısıdır. Bu eşitlik $\nabla_{\gamma} \gamma' = 0$ olması durumunda M 'nin jeodezikleri tarafından sağlanan denklemi genelleştirir. Bu eşitliğin çözümü analitik kimya, biyokimya, atmosferik bilim, jeokimya, proton ve kanser tedavisi gibi birçok alanda yararlı uygulamalara sahiptir. Ayrıca Lorentz eşitliğinin çözümleri Kirchhoff elastik çubukları verir. Bu ise Hall etkisiyle birlikte fiziksel model ve klasik elastik teori arasında inanılmaz bir bağlantı sağlar (Barros ve Romeo 2007).

Üç boyutta manyetik alanlar, sapma içermeyen vektör alanları kullanılarak tanımlanabilir. Killing vektör alanlarının sıfır sapması olduğu için, Killing manyetik alan adı verilen özel bir manyetik alan sınıfı tanımlanabilir (Bishop, 1975).

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1

$\alpha: I \rightarrow E^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise, α eğrisine *regüler bir eğri* denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.2

Bir

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset R &\rightarrow R^n \\ s &\rightarrow \alpha(s) \end{aligned}$$

eğrisi için, $\|\alpha'(s)\| = 1, \forall s \in I$ ise α eğrisine *birim hızlı eğri* denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine *yay parametresi* adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001; Izumiya ve Takeuchi, 2004).

Tanım 2.3

R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \rightarrow R^3$ eğrisi için,

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle belirlilen $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *birim teğet vektörü* denir. T vektör alanına, α eğrisinin *teğet vektör alanı* adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.4

R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \rightarrow R^3$ eğrisi için, $\kappa: I \rightarrow R$ olmak üzere,

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna α eğrisinin *eğrilik fonksiyonu* denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki *eğriliği* denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.5

R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \rightarrow R^3$ eğrisi için,

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eşitliği ile belirli $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *birinci dik vektörü* (*asli normal*) denir. N vektör alanına, α eğrisinin *birinci dik vektör alanı* (*asli normal vektör*

alanı) adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.6

R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \rightarrow R^3$ eğrisi için,

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

eşitliği ile tanımlı $\mathbf{B}(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *ikinci dik vektörü* (*binormalı*) denir. \mathbf{B} vektör alanına, α eğrisinin *ikinci dik vektör alanı* (*binormal vektör alanı*) adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.7

$\mathbf{B}(s), \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)$ vektörlerine, $\alpha: I \subset R \rightarrow R^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *Serret-Frenet vektörleri* denir. $\{\mathbf{B}(s), \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$ kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *Frenet çatısı* denir ve $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ vektör alanlarına, α eğrisi üzerinde *Frenet vektör alanları* adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.8

R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \subset R \rightarrow R^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ ve $\tau: I \rightarrow R$ olmak üzere,

$$\tau(s) = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki *torsionu* (*burulması*) denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.9

M diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

dönüşümü verilsin.

- i) g simetrik yani her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X, Y) = g(Y, X)$$
- ii) g bilineer yani her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve her $f, h \in C(M, R)$ için

$$g(fX + hY, Z) = fg(X, Z) + hg(Y, Z)$$
- iii) g dönüşümü pozitif tanımlı yani her $X \in \chi(M)$ için

$$g(X, X) \geq 0$$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme M üzerinde *Riemann metriği* veya *Metrik tensör* ve üzerinde Riemann metriği tanımlanmış manifolda *Riemann manifoldu* denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.10

M bir Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde bir Riemann koneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve her $f, h \in C(M, R)$ için

$$\begin{aligned} \nabla & : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) & \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşümü

$$\text{i) } \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\text{ii) } \nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\text{iii) } \nabla_{fX}Y = f \nabla_X Y$$

$$\text{iv) } \nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde tanımlı bir *afin koneksiyon* veya *kovaryant türev* denir (Hacısalıhoğlu ve Ekmekci 2003).

Tanım 2.11

(M, g) Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde tanımlı afin koneksiyon olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\text{i) } \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

$$\text{ii) } Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

koşulları sağlanıyorsa ∇ ya M nin *Levi Civita Koneksiyonu* denir (Hacısalıhoğlu ve Ekmekci 2003).

Tanım 2.12

(M, g) Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde tanımlı Levi Civita Koneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

ile tanımlı R dönüşümü M nin *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır (O' Neil 1996).

Tanım 2.13

$L_X Y$ vektör alanına X in Y yönündeki *Lie türevi* denir. Lie türevi her $p \in M$ noktasında tanımlıdır ve $(L_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} 1/t [(\Theta_{-t})^*(Y_{\Theta_t(p)}) - Y_p]$ olarak tanımlanır. Burada Θ_t , 1-parametrelili grubu X vektör alanının integral eğrisidir (Boothby 1975).

Tanım 2.14

gl bir reel vektör uzayı olsun gl üzerinde bilineer operatör aşağıdaki gibi tanımlansın

$$[,] : gl \times gl \rightarrow gl$$

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y] = [X, Y]$$

Eğer bu operatör,

- i) $[X, Y] = -[Y, X]$
- ii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0$

özelliklerini sağlıyorsa *Braket operatörü*dür ve $(gl, [,])$ ikilisine *Lie cebiri* denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.15

M diferansiyellenebilir bir manifold ve g de M de bir metrik tensör olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için $(L_V g)(X, Y) = 0$ oluyorsa V vektör alanına g metriğinin *Killing vektör alanı* denir (Kobayashi ve Nomizu 1996).

Tanım 2.16

(M, g) , n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. M üzerinde F kapalı 2-formu manyetik alandır ve (M, g) manifoldu üzerindeki F manyetik alanın Lorentz kuvveti ϕ , herhangi $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için,

$$g(\phi(X), Y) = F(X, Y)$$

şeklinde ifade edilir (Kazan ve Karadağ, 2017).

Tanım 2.17

Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki manyetik eğriler, F manyetik alanın etkisi altında M üzerinde hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Yani F nin manyetik yörüngeleri, Lorentz denklemindeki M nin eğrileridir. Buradan

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \phi(\gamma')$$

olur. M nin jeodeziklerinden elde edilen genelleştirilmiş Lorentz denklemi de,

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$$

olur. Not olarak, Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanlarının M üzerindeki vektörel çarpımları;

$$d(X \times Y, Z) = d\mathbf{v}_g(X, Y, Z)$$

dir (Kazan ve Karadağ, 2017).

3. KÜRE ÜZERİNDEKİ BAZI MANYETİK EĞRİLER

3.1. T -Manyetik Eğriler

Bu bölümde, bir küresel uzaydaki T -manyetik eğrileri için bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Tanım 3.1. $\gamma : I \rightarrow S^2 \subset M^3$ küresel uzayında bir küresel eğri ve F, M üzerinde bir manyetik alan olsun. T vektör alanı,

$$\nabla_T T = \phi(T) = V \times T \quad (3.1)$$

Lorentz kuvvet denklemini sağlıyorsa, γ eğrisine bir T -manyetik eğri denir. (Abdel-Aziz, Khalifa Saad ve Ali, 2018).

Önerme 3.1. γ , küresel uzayda Frenet elemanları $\{\gamma, T, e\}$ olan bir T -manyetik eğri olsun. O zaman Frenet Serret formülü

$$\begin{bmatrix} \gamma' \\ T' \\ e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ T \\ e \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

dir. O halde Lorentz kuvveti ve Frenet vektörleri arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \phi(\gamma) \\ \phi(T) \\ \phi(e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \delta \\ -1 & 0 & \kappa \\ -\delta & -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ T \\ e \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

şeklinindedir. Burada δ , $\delta = g(\phi(\gamma), e)$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur.

İspat: γ , küresel uzayda Frenet elemanları $\{\gamma, T, e\}$ ile verilen T -manyetik eğrisi olsun. Manyetik eğrinin tanımından

$$\phi(T) = -\gamma + \kappa e$$

dir. Ayrıca

$\phi(\gamma) \in \text{span}\{\gamma, T, e\}$ olup

$$\phi(\gamma) = \lambda_1 \gamma + \lambda_2 T + \lambda_3 e$$

dir. Buradan

$$\lambda_1 = g(\phi(\gamma), \gamma) = 0$$

$$\lambda_2 = g(\phi(\gamma), T) = -g(\phi(T), \gamma) = -g(-\gamma + \kappa e, \gamma) = g[(\gamma, \gamma) + \kappa(e, \gamma)] = 1$$

$$\lambda_3 = g(\phi(\gamma), e) = g(T + \delta e, e) = g[(T, e) + \delta(e, e)] = \delta$$

olur. Bulunan bu değerler yerine yazıldığında

$$\phi(\gamma) = T + \delta e \quad (3.4)$$

denklemini elde edilir. Diğer yandan

$$\phi(\mathbf{e}) \in \text{span}\{\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{T}, \mathbf{e}\}$$

$$\phi(\mathbf{e}) = \alpha_1 \boldsymbol{\gamma} + \alpha_2 \mathbf{T} + \alpha_3 \mathbf{e}$$

olarak yazılır. Buradan;

$$\alpha_1 = g(\phi(\mathbf{e}), \boldsymbol{\gamma}) = -g(\phi(\boldsymbol{\gamma}), \mathbf{e}) = -g(\mathbf{T} + \delta \mathbf{e}, \mathbf{e}) = -g[(\mathbf{T}, \mathbf{e}) + \delta(\mathbf{e}, \mathbf{e})] = -\delta$$

$$\alpha_2 = g(\phi(\mathbf{e}), \mathbf{T}) = -g(\phi(\mathbf{T}), \mathbf{e}) = -g(-\boldsymbol{\gamma} + \kappa \mathbf{e}, \mathbf{e}) = -g[-(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}) + \kappa(\mathbf{e}, \mathbf{e})] = -\kappa \quad (3.9)$$

$$\alpha_3 = g(\phi(\mathbf{e}), \mathbf{e}) = 0$$

bulunur. Benzer şekilde bulunan değerler yerine yazılırsa

$$\phi(\mathbf{e}) = -\delta \boldsymbol{\gamma} - \kappa \mathbf{T} \quad (3.5)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Önerme 3.2. γ , küresel uzayda küresel bir eğri olsun. γ eğrisi bir V manyetik alanının \mathbf{T} -manyetik yörüngesi, ancak ve ancak γ boyunca V vektör alanı şu şekilde yazılabilirse:

$$V = \kappa \boldsymbol{\gamma} - \delta \mathbf{T} + \mathbf{e} \quad (3.6)$$

İspat: γ , V manyetik alanının birim hızlı \mathbf{T} -manyetik yörüngesi olsun bu durumda

$$V = a \boldsymbol{\gamma} + b \mathbf{T} + c \mathbf{e}$$

yazılır.

$$\phi(V) = V \times V \text{ ve } V \times V = 0 \text{ olmak üzere;}$$

$$\phi(V) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\phi(a \boldsymbol{\gamma} + b \mathbf{T} + c \mathbf{e}) = 0$$

elde edilir. Bu denklem

$$a \phi(\boldsymbol{\gamma}) + b \phi(\mathbf{T}) + c \phi(\mathbf{e}) = 0$$

şeklinde yazılır. Önerme 3.1 eşitlikleri bu denklemde yerine yazılırsa

$$a(\mathbf{T} + \delta \mathbf{e}) + b(-\boldsymbol{\gamma} + \kappa \mathbf{e}) + c(-\delta \boldsymbol{\gamma} - \kappa \mathbf{T}) = 0$$

bulunur ve denklem düzenlenirse

$$\boldsymbol{\gamma}(-b - \delta c) + \mathbf{T}(a - \kappa c) + \mathbf{e}(a \delta + \kappa b) = 0$$

elde edilir. Burada

$$-b - \delta c = 0, \quad a - \kappa c = 0, \quad a \delta + \kappa b = 0$$

olur ve buradan $a = \kappa$, $b = -\delta$ ve $c = 1$ olarak bulunur. Dolayısıyla

$$V = \kappa \boldsymbol{\gamma} - \delta \mathbf{T} + \mathbf{e}$$

elde edilir.

3.2. e –Manyetik Eğriler

Tanım 3.2. $\gamma : I \rightarrow S^2 \subset M^3$ Küresel uzayında küresel bir eğri ve F, M üzerinde bir manyetik alan olsun. e vektör alanı,

$$\nabla_T e = \phi(e) = V \times e$$

Lorentz kuvvet denklemini sağlıyorsa, γ eğrisine bir e -manyetik eğri denir (Abdel-Aziz, Khalifa Saad ve Ali, 2018).

Önerme 3.3. γ , Frenet elemanları $\{\gamma, T, e\}$ olan Küresel uzayda bir e -manyetik eğri olsun. O zaman Frenet Serret formülü

$$\begin{bmatrix} \gamma' \\ T' \\ e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ T \\ e \end{bmatrix}$$

dir. O halde Lorentz kuvveti ve Frenet elemanları arasındaki ilişkiyi şöyle yazabiliriz:

$$\begin{bmatrix} \phi(\gamma) \\ \phi(T) \\ \phi(e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho & 0 \\ -\rho & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ T \\ e \end{bmatrix}$$

Burada $\rho, \rho = g(\phi(\gamma), T)$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur.

İspat: γ , Küresel uzayında Frenet elemanları $\{\gamma, T, e\}$ ile verilen e -manyetik eğrisi olsun. Manyetik eğri tanımından

$$\phi(T) = -\rho\gamma + \kappa e$$

dir. Ayrıca

$$\phi(\gamma) = \mu_1\gamma + \mu_2T + \mu_3e$$

şeklindedir. Buradan

$$\mu_1 = g(\phi(\gamma), \gamma) = 0$$

$$\mu_2 = g(\phi(\gamma), T) = -g(\phi(T), \gamma) = -g(-\rho\gamma + \kappa e, \gamma) = -g[-\rho(\gamma, \gamma) + \kappa(e, \gamma)] = \rho$$

$$\mu_3 = g(\phi(\gamma), e) = -g(\phi(e), \gamma) = -g(-\kappa T, \gamma) = -g[-\kappa(T, \gamma)] = 0$$

olur. Bulunan bu değerler yerine yazıldığında

$$\phi(\gamma) = \rho T \tag{3.7}$$

denklemini elde edilir. Diğer yandan

$$\phi(e) = \beta_1\gamma + \beta_2T + \beta_3e$$

olarak yazılır. Buradan

$$\beta_1 = g(\phi(e), \gamma) = -g(\phi(\gamma), e) = -g(\rho T, e) = -g[\rho(T, e)] = 0$$

$$\beta_2 = g(\phi(\mathbf{e}), \mathbf{T}) = -g(\phi(\mathbf{T}), \mathbf{e}) = -g(-\rho\boldsymbol{\gamma} + \kappa\mathbf{e}, \mathbf{e}) = -g[-\rho(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}) + \kappa(\mathbf{e}, \mathbf{e})] = -\kappa$$

$$\beta_3 = g(\phi(\mathbf{e}), \mathbf{e}) = 0$$

bulunur. Benzer şekilde bulunan değerler yerine yazılırsa

$$\phi(\mathbf{e}) = -\kappa\mathbf{T} \quad (3.8)$$

denklemini elde edilir.

Önerme 3.4. γ , Küresel uzayında küresel bir eğri olsun. γ eğrisi o zaman γ manyetik eğrisinin, V manyetik vektör alanının e -manyetik yörüngesi olabilmesi için gerek ve yeter şart V manyetik vektör alanının γ eğrisi boyunca

$$V = \kappa\boldsymbol{\gamma} + \rho\mathbf{e} \quad (3.9)$$

olmasıdır.

İspat: γ , V manyetik alanının birim hızlı e -manyetik yörüngesi olsun.

$$V = k\boldsymbol{\gamma} + l\mathbf{T} + m\mathbf{e}$$

Olarak yazılır. $\phi(V) = V \times V$ ve $V \times V = 0$ olmak üzere

$$\phi(V) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\phi(k\boldsymbol{\gamma} + l\mathbf{T} + m\mathbf{e}) = 0$$

elde edilir. Bu denklem

$$k\phi(\boldsymbol{\gamma}) + l\phi(\mathbf{T}) + m\phi(\mathbf{e}) = 0$$

şeklinde yazılır. Önerme 3.3 eşitlikleri bu denklemde yerine yazıldığında

$$k(\rho\mathbf{T}) + l(-\rho\boldsymbol{\gamma} + \kappa\mathbf{e}) + m(-\kappa\mathbf{T}) = 0$$

olur. Yani

$$\mathbf{T}(k\rho - \kappa m) + \boldsymbol{\gamma}(-\rho l) + \mathbf{e}(\kappa l) = 0$$

dir. Buradan $k = \kappa$ ve $\rho = m$ bulunur. Buradan

$$V = \kappa\boldsymbol{\gamma} + \rho\mathbf{e}$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur.

4. MANYETİK EĞRİLERDE YİNELEME OPERATÖRÜ

Bu bölümde, bir Küresel uzayda manyetik eğrilerin normalleştirme ve yineleme operatörlerini buluyoruz.

4.1. T –Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörü:

$W = f\mathbf{T} + g\boldsymbol{\gamma} + h\mathbf{e}$ vektör alanını düşünelim. Burada f, g ve h , W üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonlardır, W 'nin türevi alınırsa

$$W' = f'\mathbf{T} + f\mathbf{T}' + g'\boldsymbol{\gamma} + g\boldsymbol{\gamma}' + h'\mathbf{e} + h\mathbf{e}'$$

elde edilir. Serret-Frenet formülleri kullanıldığında

$$W' = f'\mathbf{T} + f(-\boldsymbol{\gamma} + \kappa\mathbf{e}) + g'\boldsymbol{\gamma} + g\mathbf{T} + h'\mathbf{e} - h\kappa\mathbf{T}$$

olur ve burada

$$W' = (f' + g - h\kappa)\mathbf{T} + (-f + g')\boldsymbol{\gamma} + (f\kappa + h')\mathbf{e}$$

bulunur. Buradan W 'nin birim hız parametreleştirmesini sonsuza kadar korumak için

$$f' + g - h\kappa = 0$$

olup

$$f' = h\kappa - g$$

dir. Şimdi her iki tarafın integrali alındığında

$$f = \int (h\kappa - g) \quad (4.1)$$

elde edilir. γ boyunca herhangi bir W vektör alanı için, her zaman bir teğet terim eklenebilir, öyle ki ortaya çıkan vektör alanı yay uzunluğu parametrelendirmesini korur.

Bu amaçla tanıttığımız doğrusal "normalleştirme operatörü";

$$\mathcal{N}W = \left(\int (h\kappa - g) \right) \mathbf{T} + g\boldsymbol{\gamma} + h\mathbf{e} \quad (4.2)$$

dir. (4.1) ve (4.2) eşitlikleri (3.4) denklemi ile birlikte kullanılırsa

$$\mathcal{N}\phi(\boldsymbol{\gamma}) = \left(\int (\delta\kappa - 0) \right) \mathbf{T} + \delta\mathbf{e}$$

olup

$$\mathcal{N}\phi(\boldsymbol{\gamma}) = \left(\int (\delta\kappa) \right) \mathbf{T} + \delta\mathbf{e} \quad (4.3)$$

denklemi elde edilir.

\mathcal{R} yineleme operatörü \mathcal{N} normalleştirme operatörü yardımıyla

$$-\mathcal{N}(\mathbf{T} \times W') = \mathcal{R}W \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanır. (3.4) denklemi (4.4) eşitliğine uygulandığında, öncelikle (3.4) eşitliğininin türevi alınıp

$$\phi'(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{T}' + \delta'\mathbf{e} + \delta\mathbf{e}'$$

bulunur. Serret-Frenet formülleri yerlerine yazıldığında

$$\phi'(\boldsymbol{\gamma}) = -\boldsymbol{\gamma} + \kappa \mathbf{e} + \delta' \mathbf{e} + \delta(-\kappa \mathbf{T})$$

olur ve dolayısıyla

$$\phi'(\boldsymbol{\gamma}) = -(\kappa\delta)\mathbf{T} - \boldsymbol{\gamma} + (\kappa + \delta')\mathbf{e} \quad (4.5)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının T ile vektörel çarpımından

$$T \times \phi'(\boldsymbol{\gamma}) = -(\mathbf{T} \times \boldsymbol{\gamma}) - (\kappa\delta)(\mathbf{T} \times \mathbf{T}) + (\kappa + \delta')(\mathbf{T} \times \mathbf{e})$$

olup

$$T \times \phi'(\boldsymbol{\gamma}) = (\kappa + \delta')\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e} \quad (4.6)$$

bulunur. Bu denklemin normalleştirme operatörünü bulmak için (4.1) eşitliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned} f &= \int (h\kappa - g) \\ &= \int (1 \cdot \kappa - (\kappa + \delta')) \\ &= \int (-\delta') \\ &= -\delta \end{aligned} \quad (4.7)$$

bulunur. (4.6), (4.7) eşitlikleri (4.2) denkleminde uygulandığında

$$\mathcal{N}(T \times \phi'(\boldsymbol{\gamma})) = -\delta \mathbf{T} + (\kappa + \delta')\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{e}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\mathcal{R}\phi(\boldsymbol{\gamma}) = -\mathcal{N}(T \times \phi'(\boldsymbol{\gamma})) = \delta \mathbf{T} - (\kappa + \delta')\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}$$

elde edilir. Diğer yandan Önerme 3.1 de gösterilen $\phi(\mathbf{T})$ eşitliği (4.1) ve (4.2) eşitlikleri ile göz önüne alınırsa

$$\mathcal{N}\phi(\mathbf{T}) = \left(\int (\kappa \cdot \kappa + 1) \right) \mathbf{T} - \boldsymbol{\gamma} + \kappa \mathbf{e}$$

olup

$$\mathcal{N}\phi(\mathbf{T}) = (\int \kappa^2 + 1) \mathbf{T} - \boldsymbol{\gamma} + \kappa \mathbf{e} \quad (4.8)$$

bulunur.

$\phi(\mathbf{T})$ eşitliğinin yineleme operatörünü bulmak için öncelikle eşitliğin türevi alınır

$$\phi'(\mathbf{T}) = -(\boldsymbol{\gamma})' + \kappa' \mathbf{e} + \kappa \mathbf{e}'$$

bulunur. Serret-Frenet formüllerini yerlerine yazıldığında

$$\phi'(\mathbf{T}) = -\mathbf{T} + \kappa' \mathbf{e} + \kappa(-\kappa \mathbf{T})$$

olup

$$\phi'(\mathbf{T}) = -\mathbf{T} + \kappa' \mathbf{e} - \kappa^2 \mathbf{T} \quad (4.9)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının T ile vektörel çarpımından

$$\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{T}) = -(\mathbf{T} \times \mathbf{T}) + \kappa'(\mathbf{T} \times \mathbf{e}) + \kappa^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T})$$

olur ve buradan

$$\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{T}) = \kappa' \boldsymbol{\gamma} \quad (4.10)$$

bulunur. Bu denklemin normalleştirme operatörünü bulmak için (4.1) eşitliği kullanılır ve böylece

$$\begin{aligned} f &= \int (h\kappa - g) \\ &= \int (0 - \kappa') \\ &= \int (-\kappa') \\ &= -\kappa \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.10), (4.11) eşitlikleri (4.2) denkleminde uygulandığında

$$\mathcal{N}(\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{T})) = -\kappa \mathbf{T} + \kappa' \boldsymbol{\gamma}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\mathcal{R}\phi(\mathbf{T}) = \kappa \mathbf{T} - \kappa' \boldsymbol{\gamma}$$

elde edilir.

olarak bulunur. Diğer yandan (4.2) denklemin (3.5) ve (4.1) eşitlikleri kullanılarak yazılırsa

$$\mathcal{N}\phi(\mathbf{e}) = \left(\int (0 + \delta) \right) \mathbf{T} - \delta \boldsymbol{\gamma}$$

olup

$$\mathcal{N}\phi(\mathbf{e}) = \left(\int (\delta) \right) \mathbf{T} - \delta \boldsymbol{\gamma} \quad (4.12)$$

Normalleştirme operatörü elde edilir. (3.5) denklemin (4.4) eşitliğine uygulandığında, öncelikle (3.5) eşitliğinin türevi alınıp

$$\phi'(\mathbf{e}) = -\delta' \boldsymbol{\gamma} - \delta \boldsymbol{\gamma}' - \kappa' \mathbf{T} - \kappa \mathbf{T}'$$

bulunur. Serret-Frenet formüllerini yerlerine yazılırsa

$$\phi'(\mathbf{e}) = -\delta' \boldsymbol{\gamma} - \delta \mathbf{T} - \kappa' \mathbf{T} + \kappa(-\boldsymbol{\gamma} + \kappa \mathbf{e})$$

olup

$$\phi'(\mathbf{e}) = -(\kappa' + \delta) \mathbf{T} - (\delta' + \kappa) \boldsymbol{\gamma} + \kappa^2 \mathbf{e} \quad (4.13)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının \mathbf{T} ile vektörel çarpımından

$$\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{e}) = -(\kappa' + \delta)(\mathbf{T} \times \mathbf{T}) - (\delta' + \kappa)(\mathbf{T} \times \boldsymbol{\gamma}) + \kappa^2(\mathbf{T} \times \mathbf{e})$$

bulunur ve buradan

$$\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{e}) = (-\delta' - \kappa)(-\mathbf{e}) + \kappa^2(\boldsymbol{\gamma})$$

olup

$$\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{e}) = \kappa^2 \boldsymbol{\gamma} + (\delta' + \kappa) \mathbf{e} \quad (4.14)$$

bulunur. Bu denklemin normalleştirme operatörünü bulmak için (4.1) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} f &= \int (h\kappa - g) \\ &= \int ((\delta' + \kappa)\kappa - \kappa^2) \\ &= \int (\delta'\kappa) \end{aligned} \quad (4.15)$$

bulunur. (4.14), (4.15) eşitlikleri (4.2) denkleminde uygulanırsa

$$\mathcal{N}(\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{e})) = \left(\int (\delta'\kappa) \right) \mathbf{T} + \kappa^2 \boldsymbol{\gamma} + (\delta' + \kappa) \mathbf{e}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\mathcal{R}\phi(\mathbf{e}) = -\mathcal{N}(\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{e})) = -\left(\int (\delta'\kappa) \right) \mathbf{T} - \kappa^2 \boldsymbol{\gamma} - (\delta' + \kappa) \mathbf{e}$$

bulunur.

4.2. \mathbf{e} –Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörü

\mathbf{e} -manyetik eğrilerde normalleştirme operatörü yardımıyla yineleme operatörünü bulmak için öncelikle (3.7) denklemini ele alalım. (4.2) denklemini (3.7) ve (4.1) eşitlikleri kullanılarak yazılırsa

$$\mathcal{N}\phi(\boldsymbol{\gamma}) = \left(\int (0 - 0) \right)$$

olur ve

$$\mathcal{N}\phi(\boldsymbol{\gamma}) = 0$$

eşitliği elde edilir.

\mathcal{R} doğrusal "yineleme operatörü"nü bulalım

(3.7) eşitliğinin türevi alınır

$$\phi'(\boldsymbol{\gamma}) = \rho' \mathbf{T} + \rho \mathbf{T}'$$

elde edilir. Serret-Frenet formüllerini yerlerine yazıldığında

$$\phi'(\boldsymbol{\gamma}) = \rho' \mathbf{T} - \rho \boldsymbol{\gamma} + \rho \kappa \mathbf{e}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının \mathbf{T} ile vektörel çarpımından

$$\mathbf{T} \times \phi'(\boldsymbol{\gamma}) = \rho' (\mathbf{T} \times \mathbf{T}) - \rho (\mathbf{T} \times \boldsymbol{\gamma}) + \rho \kappa (\mathbf{T} \times \mathbf{e})$$

olup

$$\mathbf{T} \times \phi'(\boldsymbol{\gamma}) = \rho \kappa \boldsymbol{\gamma} + \rho \mathbf{e} \quad (4.16)$$

bulunur. Bu denklemin normalleştirme operatörünü bulmak için (4.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} f &= \int (h\kappa - g) \\ &= \int (\rho\kappa - \rho\kappa) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

olur. (4.16), (4.17) eşitlikleri (4.2) denkleminde uygulandığında

$$\mathcal{N}(\mathbf{T} \times \phi'(\boldsymbol{\gamma})) = \rho\kappa\boldsymbol{\gamma} + \rho\mathbf{e}$$

elde edilir. Böylece

$$\mathcal{R}\phi(\boldsymbol{\gamma}) - \mathcal{N}(\mathbf{T} \times \phi'(\boldsymbol{\gamma})) = -\rho\kappa\boldsymbol{\gamma} - \rho\mathbf{e}$$

olarak bulunur. Diğer yandan Önerme 3.3 de gösterilen $\phi(\mathbf{T})$ eşitliği (4.1) ve (4.2) eşitlikleri ile göz önüne alındığında

$$\mathcal{N}\phi(\mathbf{T}) = \left(\int (\kappa \cdot \kappa + \rho) \right) \mathbf{T} - \rho\boldsymbol{\gamma} + \kappa\mathbf{e}$$

olup

$$\mathcal{N}\phi(\mathbf{T}) = \left(\int (\kappa^2 + \rho) \right) \mathbf{T} - \rho\boldsymbol{\gamma} + \kappa\mathbf{e} \quad (4.18)$$

denklemini elde edilir.

Şimdi \mathcal{R} doğrusal "yineleme operatörü"nü bulalım.

$\phi(\mathbf{T})$ eşitliğinin türevi alınır

$$\phi'(\mathbf{T}) = -\rho'\boldsymbol{\gamma} - \rho\boldsymbol{\gamma}' + \kappa'\mathbf{T} + \kappa\mathbf{T}'$$

elde edilir. Serret-Frenet formülleri yerlerine yazılırsa

$$\phi'(\mathbf{T}) = (-\rho + \kappa')\mathbf{T} - (\kappa + \rho')\boldsymbol{\gamma} + \kappa^2\mathbf{e}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının \mathbf{T} ile vektörel çarpımından

$$\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{T}) = (-\rho + \kappa')(\mathbf{T} \times \mathbf{T}) - (\kappa + \rho')(\mathbf{T} \times \boldsymbol{\gamma}) + \kappa^2(\mathbf{T} \times \mathbf{e})$$

olup

$$\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{T}) = \kappa^2\boldsymbol{\gamma} + (\kappa + \rho')\mathbf{e} \quad (4.19)$$

bulunur. Bu denklemin normalleştirme operatörünü bulmak için (4.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} f &= \int (h\kappa - g) \\ &= \int (\kappa + \rho')\kappa - \kappa^2 \\ &= \int (\rho'\kappa) \end{aligned} \quad (4.20)$$

bulunur. (4.19), (4.20) eşitlikleri (4.2) denkleminde uygulandığında

$$\mathcal{N}(\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{T})) = \left(\int (\rho'\kappa) \right) \mathbf{T} + \kappa^2\boldsymbol{\gamma} + (\kappa + \rho')\mathbf{e}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\mathcal{R}\phi(\boldsymbol{\gamma}) = -\mathcal{N}(\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{T})) = \left(-\int(\rho'\kappa)\right)\mathbf{T} - \kappa^2\boldsymbol{\gamma} - (\kappa + \rho')\mathbf{e}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.8) eşitliğini alınsın. (4.2) denklemini (3.8) ve (4.1) eşitliklerini kullanılarak yazılırsa

$$\mathcal{N}\phi(\mathbf{e}) = 0$$

denklemini elde ederiz.

\mathcal{R} doğrusal "yineleme operatörü"nü bulmak için (3.8) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\phi'(\mathbf{e}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa\mathbf{T}'$$

elde edilir. Serret-Frenet formülleri yerlerine yazıldığında

$$\phi'(\mathbf{e}) = -\kappa'\mathbf{T} + \kappa\boldsymbol{\gamma} - \kappa^2\mathbf{e}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının \mathbf{T} ile vektörel çarpımından

$$\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{e}) = \kappa'(\mathbf{T} \times \mathbf{T}) + \kappa(\mathbf{T} \times \boldsymbol{\gamma}) - \kappa^2(\mathbf{T} \times \mathbf{e})$$

olup

$$\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{e}) = -\kappa^2\boldsymbol{\gamma} - \kappa\mathbf{e} \quad (4.21)$$

bulunur. Bu denklemin normleştirme operatörünü bulmak için (4.1) eşitliğini kullanılsın, böylece

$$\begin{aligned} f &= \int(h\kappa - g) \\ &= \int(-\kappa \cdot \kappa + \kappa^2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

bulunur. (4.21), (4.22) eşitlikleri (4.2) denklemine uygulandığında

$$\mathcal{N}(\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{e})) = -\kappa^2\boldsymbol{\gamma} - \kappa\mathbf{e}$$

olur ve

$$\mathcal{R}\phi(\boldsymbol{\gamma}) = -\mathcal{N}(\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{e})) = \kappa^2\boldsymbol{\gamma} + \kappa\mathbf{e}$$

elde edilir.

5. UZAYDA YARI MANYETİK EĞRİLER

5.1. Uzayda Yarı-Hızlı Manyetik Eğriler

Tanım 5.1. α yay uzunluğu parametrelili bir eğri ve \mathcal{B} normal uzaydaki bir manyetik alan olsun. Eğrinin yarı-teğet alanı,

$$\phi(\mathbf{T}_q) = \mathcal{B} \times \mathbf{T}_q$$

Lorentz kuvvet denklemini karşılıyorsa eğriye yarı-hızlı manyetik eğri adı verilir. (Körpınar ve Demirkol, 2018)

Önerme 5.1. α uzayda yarı çatı elemanları $\{\mathbf{T}_q, \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_q, e_1, e_2, e_3\}$ ile \mathcal{B} 'nin yay uzunluğu parametrelili yarı-hızlı manyetik eğrisi olsun. Daha sonra yarı çatıda \mathcal{B} manyetik alanının Lorentz kuvveti ϕ aşağıdaki gibi yazılır:

$$\phi(\mathbf{T}_q) = e_1 \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q$$

$$\phi(\mathbf{N}_q) = -e_1 \mathbf{T}_q + c \mathbf{B}_q$$

$$\phi(\mathbf{B}_q) = -e_2 \mathbf{T}_q - c \mathbf{N}_q$$

Burada $c = \phi(\mathbf{N}_q) \cdot \mathbf{B}_q$, α eğrisi ile birlikte düzgün bir fonksiyondur.

İspat: α 'nın normal uzayda yarı çatı elemanları $\{\mathbf{T}_q, \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_q, e_1, e_2, e_3\}$ ile birlikte yay uzunluğu parametrelenmiş yarı-hızlı manyetik eğri olduğunu varsayalım. Bu yarı çatı tanımından açıkça doğrudur ve Lorentz denklemi $\phi(\mathbf{T}_q) = e_1 \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q$. Aynı zamanda kanonik olarak da doğrudur:

$$\phi(\mathbf{N}_q) = a_1 \mathbf{T}_q + a_2 \mathbf{N}_q + a_3 \mathbf{B}_q$$

$\phi(\mathbf{N}_q) \in \text{span}\{\mathbf{T}_q, \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_q\}$ olduğundan. Lorentz kuvvetinin anti-simetri özellikleri kullanılırsa ve normal uzayda tanımlanan metrik dikkate alınırsa buna ulaşılabilir:

$$a_1 = -e_1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = c$$

Burada c , $c = \phi(\mathbf{N}_q) \cdot \mathbf{B}_q$ şartını sağlayacak şekilde manyetik eğri ile birlikte keyfi bir düzgün fonksiyondur. Benzer bir argüman kullanılarak $\phi(\mathbf{B}_q) = -e_2 \mathbf{T}_q + c \mathbf{N}_q$ olduğu da elde edilir.

Yukarıdaki ispat ayrıntılandırılarak yazılsın, öncelikle

$$\phi(\mathbf{N}_q) = a_1 \mathbf{T}_q + a_2 \mathbf{N}_q + a_3 \mathbf{B}_q$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} a_1 &= g(\phi(\mathbf{N}_q), \mathbf{T}_q) = -g(\phi(\mathbf{T}_q), \mathbf{N}_q) = -g(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q, \mathbf{N}_q) \\ &= [e_1(\mathbf{N}_q, \mathbf{N}_q) + e_2(\mathbf{B}_q, \mathbf{N}_q)] = -e_1 \end{aligned}$$

$$a_2 = g(\phi(\mathbf{N}_q), \mathbf{N}_q) = 0$$

$$a_3 = g(\phi(\mathbf{N}_q), \mathbf{B}_q) = c$$

olur. Bulunan bu değerler yerine yazıldığında

$$\phi(\mathbf{N}_q) = -e_1\mathbf{T}_q + c\mathbf{B}_q$$

denklemleri elde edilir. Diğer yandan

$$\phi(\mathbf{B}_q) = b_1\mathbf{T}_q + b_2\mathbf{N}_q + b_3\mathbf{B}_q$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} b_1 &= g(\phi(\mathbf{B}_q), \mathbf{T}_q) = -g(\phi(\mathbf{T}_q), \mathbf{B}_q) = -g(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q, \mathbf{B}_q) \\ &= -[e_1(\mathbf{N}_q, \mathbf{B}_q) + e_2(\mathbf{B}_q, \mathbf{B}_q)] = -e \end{aligned}$$

$$b_2 = g(\phi(\mathbf{B}_q), \mathbf{N}_q) = -g(\phi(\mathbf{N}_q), \mathbf{B}_q) = -c$$

$$b_3 = g(\phi(\mathbf{B}_q), \mathbf{B}_q) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\phi(\mathbf{B}_q) = -e\mathbf{T}_q + c\mathbf{N}_q$$

elde edilir.

Önerme 5.1.1. α ancak ve ancak aşağıdaki durumlarda sıradan uzayda \mathcal{B} manyetik alanının birim hızlı yarı-hızlı manyetik eğrisidir:

$$\phi(\mathcal{B}) = c\mathbf{T}_q - e_2\mathbf{N}_q + e_1\mathbf{B}_q$$

İspat: α, \mathcal{B} manyetik alanının birim hızlı yarı-normal manyetik eğrisi olsun. Burada

$$\phi(\mathcal{B}) = a_1\mathbf{T}_q + a_2\mathbf{N}_q + a_3\mathbf{B}_q$$

olarak seçilir. $\phi(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ ve $\mathcal{B} \times \mathcal{B} = 0$ olmak üzere;

$$\phi(\mathcal{B}) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\phi(\alpha_1 \mathbf{T}_q + \alpha_2 \mathbf{N}_q + \alpha_3 \mathbf{B}_q) = 0$$

elde edilir. Bu denklem

$$a_1 \phi(\mathbf{T}_q) + a_2 \phi(\mathbf{N}_q) + a_3 \phi(\mathbf{B}_q) = 0$$

şeklinde de yazılır. Yukarıda bulunan eşitlikler bu denklemde yerine yazılırsa

$$a_1(e_1 \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q) + a_2(-e_1 \mathbf{T}_q + c \mathbf{B}_q) + a_3(-e_2 \mathbf{T}_q - c \mathbf{N}_q) = 0$$

olur ve elde edilen eşitlik düzenlendiğinde

$$\mathbf{T}_q(-e_1 a_2 - e_2 a_3) + \mathbf{N}_q(e_1 a_1 - a_3 c) + \mathbf{B}_q(e_2 a_1 + a_2 c) = 0$$

denklemini bulunur. Buradan $a_1 = c$, $a_2 = -e_2$ ve $a_3 = e_1$ olur. Bulunan bu değerler yerine yazıldığında

$$\phi(\mathcal{B}) = c \mathbf{T}_q - e_2 \mathbf{N}_q + e_1 \mathbf{B}_q$$

elde edilir.

5.2. Uzayda Yarı-Normal Manyetik Eğriler

Tanım 5.2: α yay uzunluğu parametrelili bir eğri ve \mathcal{B} normal uzaydaki bir manyetik alan olsun. Eğrinin yarı-normal alanı

$$\phi(\mathbf{N}_q) = \mathcal{B} \times \mathbf{N}_q$$

Lorentz Kuvvet denklemini karşılıyorsa eğriye yarı-normal manyetik eğri adı verilir (Körpınar ve Demirkol, 2018).

Önerme 5.2. α uzayda yarı çatı elemanları $\{\mathbf{T}_q, \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_q, e_1, e_2, e_3\}$ ile \mathcal{B} 'nin yay uzunluğu parametrelili yarı-normal manyetik eğri olsun. Daha sonra yarı çatıda \mathcal{B} manyetik alanının Lorentz Kuvveti ϕ aşağıdaki gibi yazılır:

$$\phi(\mathbf{T}_q) = e_1 \mathbf{N}_q + c \mathbf{B}_q$$

$$\phi(\mathbf{N}_q) = -e_1 \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q$$

$$\phi(\mathbf{B}_q) = -c \mathbf{T}_q - e_3 \mathbf{N}_q$$

Burada $c = \phi(\mathbf{T}_q) \cdot \mathbf{B}_q$, α eğrisi ile birlikte düzgün bir fonksiyondur.

İspat: α uzayda yarı çatı elemanları $\{\mathbf{T}_q, \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_q, e_1, e_2, e_3\}$ ile birlikte yay uzunluğu parametrelenmiş yarı-normal manyetik eğri olduğunu varsayalım. Bu yarı çatı tanımından

açıkça doğrudur ve Lorentz denklemi $\phi(N_q) = -e_1 T_q + e_3 B_q$. Aynı zamanda kanonik olarak da doğrudur

$$\phi(T_q) = a_1 T_q + a_2 N_q + a_3 B_q$$

$\phi(T_q) \in \text{span}\{T_q, N_q, B_q\}$ olduğundan. Lorentz kuvvetinin anti-simetri özellikleri kullanıldığında ve normal uzayda tanımlanan metrik dikkate alındığında buna ulaşılabilir:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = e_1, \quad a_3 = c$$

Burada $c, c = \phi(T_q) \cdot B_q$ şartını sağlayacak şekilde manyetik eğri ile birlikte keyfi bir düzgün fonksiyondur. Benzer bir argüman kullanılarak $\phi(B_q) = -c T_q - e_3 N_q$ olduğu da elde edilir.

Yukarıdaki ispatı daha ayrıntılandırarak yazıldığında, öncelikle

$$\phi(T_q) = k_1 T_q + k_2 N_q + k_3 B_q$$

dir. Buradan

$$k_1 = g(\phi(T_q), T_q) = 0$$

$$\begin{aligned} k_2 = g(\phi(T_q), N_q) &= -g(\phi(N_q), T_q) = -g(-e_1 T_q + c B_q, T_q) \\ &= -[e_1(T_q, T_q) + (-c)(B_q, T_q)] = e_1 \end{aligned}$$

$$k_3 = g(\phi(T_q), B_q) = g(\phi(B_q), T_q) = c$$

olur. Bulunan bu değerler yerine yazıldığında

$$\phi(T_q) = e_1 N_q + c B_q$$

denklemleri elde edilir. Diğer yandan

$$\phi(B_q) = m_1 T_q + m_2 N_q + m_3 B_q$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} m_1 = g(\phi(B_q), T_q) &= -g(\phi(T_q), B_q) = -g(e_1 N_q + c B_q, B_q) \\ &= -[e_1(N_q, B_q) + (-c)(B_q, B_q)] = -c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 = g(\phi(T_q), N_q) &= -g(\phi(N_q), T_q) = -g(-e_1 T_q + e B_q, T_q) \\ &= -[e_1(T_q, T_q) + (-e_3)(B_q, T_q)] = -e \end{aligned}$$

$$m_3 = g(\phi(B_q), B_q) = 0$$

bulunur. Bu değerler yerine yazılırsa

$$\phi(\mathbf{B}_q) = -c\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 5.2.1. α ancak ve ancak aşağıdaki durumlarda sıradan uzayda \mathcal{B} manyetik alanının birim hızlı yarı-normal manyetik eğrisidir:

$$\phi(\mathcal{B}) = e_3\mathbf{T}_q - c\mathbf{N}_q + e_1\mathbf{B}_q$$

İspat: α, \mathcal{B} manyetik alanının birim hızlı yarı-normal manyetik eğrisi olsun. Burada

$$\phi(\mathcal{B}) = \beta_1\mathbf{T}_q + \beta_2\mathbf{N}_q + \beta_3\mathbf{B}_q$$

olarak alınır. $\phi(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ ve $\mathcal{B} \times \mathcal{B} = 0$ olmak üzere;

$$\phi(\mathcal{B}) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\phi(\beta_1\mathbf{T}_q + \beta_2\mathbf{N}_q + \beta_3\mathbf{B}_q) = 0$$

elde edilir. Denklem

$$\beta_1\phi(\mathbf{T}_q) + \beta_2\phi(\mathbf{N}_q) + \beta_3\phi(\mathbf{B}_q) = 0$$

şeklinde de yazılabilir. Yukarıda elde ettiğimiz eşitlikler bu denklemde yerine yazıldığında

$$\beta_1(e_1\mathbf{N}_q + c\mathbf{B}_q) + \beta_2(-e_1\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q) + \beta_3(-c\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q) = 0$$

bulunur ve bu eşitlik düzenlendiğinde

$$\mathbf{T}_q(-e_1\beta_2 - \beta_3c) + \mathbf{N}_q(e_1\beta_1 - \beta_3e_3) + \mathbf{B}_q(\beta_1c + \beta_2e_3) = 0$$

elde edilir. Buradan $\beta_1 = e_3$, $\beta_2 = -c$ ve $\beta_3 = e_1$ bulunur. Bulunan bu değerler yerine yazıldığında

$$\phi(\mathcal{B}) = e_3\mathbf{T}_q - c\mathbf{N}_q + e_1\mathbf{B}_q$$

sonucuna varılarak ispat tamamlanmış olur.

5.3. Uzayda Yarı-Binormal Manyetik Eğriler

Tanım 5.3. α bir yay uzunluğu parametrelili eğri olsun ve \mathcal{B} uzaydaki bir manyetik alan olsun. Eğrinin yarı-binormal alanı aşağıdaki

$$\phi(\mathbf{B}_q) = \mathcal{B} \times \mathbf{B}_q$$

Lorentz kuvvet denklemini karşılıyorsa eğriye yarı binormal manyetik eğri adı verilir (Körpınar ve Demirkol, 2018).

Önerme 5.3. α uzayda yarı çatı elemanları $\{\mathbf{T}_q, \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_q, e_1, e_2, e_3\}$ ile \mathcal{B} 'nin yay uzunluğu parametrelili yarı-binormal manyetik eğrisi olsun. Daha sonra yarı çatıda \mathcal{B} manyetik alanının Lorentz kuvveti ϕ aşağıdaki gibi yazılır:

$$\phi(\mathbf{T}_q) = c\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q$$

$$\phi(\mathbf{N}_q) = -c\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q$$

$$\phi(\mathbf{B}_q) = -e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q$$

Burada $c = \phi(\mathbf{T}_q) \cdot \mathbf{N}_q$, α eğrisi ile birlikte düzgün bir fonksiyondur.

İspat: α uzayda yarı çatı elemanları $\{\mathbf{T}_q, \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_q, e_1, e_2, e_3\}$ ile birlikte yay uzunluğu parametrelenmiş yarı-binormal manyetik eğri olduğunu varsayalım. Bu yarı çatı tanımından açıkça doğrudur ve Lorentz denklemi $\phi(\mathbf{B}_q) = -e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q$. Aynı zamanda kanonik olarak da doğrudur.

$$\phi(\mathbf{T}_q) = a_1\mathbf{T}_q + a_2\mathbf{N}_q + a_3\mathbf{B}_q$$

$\phi(\mathbf{T}_q) \in \text{span}\{\mathbf{T}_q, \mathbf{N}_q, \mathbf{B}_q\}$ olduğundan. Lorentz kuvvetinin anti-simetri özellikleri kullanılırsa ve normal uzayda tanımlanan metrik dikkate alınırsa buna ulaşılabilir:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = c, \quad a_3 = e_2$$

Burada c , $c = \phi(\mathbf{T}_q) \cdot \mathbf{N}_q$ şartını sağlayacak şekilde manyetik eğri ile birlikte keyfi bir düzgün fonksiyondur. Benzer bir argüman kullanılarak $\phi(\mathbf{N}_q) = -c\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q$ olduğu da elde edilir.

Yukarıdaki yapılan ispat ayrıntılandırarak yazıldığında, öncelikle

$$\phi(\mathbf{T}_q) = r_1\mathbf{T}_q + r_2\mathbf{N}_q + r_3\mathbf{B}_q$$

şeklinde ifade edilir. Denklemin bilinmeyenleri

$$r_1 = g(\phi(\mathbf{T}_q), \mathbf{T}_q) = 0$$

$$r_2 = g(\phi(\mathbf{T}_q), \mathbf{N}_q) = -g(\phi(\mathbf{N}_q), \mathbf{T}_q) = c$$

$$\begin{aligned} r_3 &= g(\phi(\mathbf{T}_q), \mathbf{B}_q) = -g(\phi(\mathbf{B}_q), \mathbf{T}_q) = -g(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q, \mathbf{T}_q) \\ &= -[-e_2(\mathbf{T}_q, \mathbf{T}_q) - e_3(\mathbf{N}_q, \mathbf{T}_q)] = e_2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa

$$\phi(\mathbf{T}_q) = c\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde

$$\phi(\mathbf{N}_q) = s_1\mathbf{T}_q + s_2\mathbf{N}_q + s_3\mathbf{B}_q$$

olarak ele alınır. Buradan

$$\begin{aligned} s_1 &= g(\phi(\mathbf{N}_q), \mathbf{T}_q) = -g(\phi(\mathbf{T}_q), \mathbf{N}_q) = -g(c\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q, \mathbf{N}_q) \\ &= -[c(\mathbf{N}_q, \mathbf{N}_q) + e_2(\mathbf{B}_q, \mathbf{N}_q)] = -c \end{aligned}$$

$$s_2 = g(\phi(\mathbf{N}_q), \mathbf{N}_q) = 0$$

$$\begin{aligned} s_3 &= g(\phi(\mathbf{N}_q), \mathbf{B}_q) = -g(\phi(\mathbf{B}_q), \mathbf{N}_q) = -g(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q, \mathbf{N}_q) \\ &= -[-e_2(\mathbf{T}_q, \mathbf{N}_q) - e_3(\mathbf{N}_q, \mathbf{N}_q)] = e_3 \end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa

$$\Rightarrow \phi(\mathbf{N}_q) = -c\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q$$

eşitliğine ulaşılır.

Önerme 5.3.1. α ancak ve ancak aşağıdaki durumlarda uzayda \mathcal{B} manyetik alanının birim hızlı yarı-binormal manyetik eğrisidir:

$$\phi(\mathcal{B}) = e_3\mathbf{T}_q - e_2\mathbf{N}_q + c\mathbf{B}_q$$

İspat: α, \mathcal{B} manyetik alanının birim hızlı yarı-normal manyetik eğrisi olsun. Burada

$$\phi(\mathcal{B}) = \gamma_1\mathbf{T}_q + \gamma_2\mathbf{N}_q + \gamma_3\mathbf{B}_q$$

olarak ele alınabilir. $(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ ve $\mathcal{B} \times \mathcal{B} = 0$ olmak üzere;

$$\phi(\mathcal{B}) = 0$$

dir. Dolayısıyla

$$\phi(\gamma_1\mathbf{T}_q + \gamma_2\mathbf{N}_q + \gamma_3\mathbf{B}_q) = 0$$

bulunur. Denklem düzenlendiğinde

$$\gamma_1\phi(\mathbf{T}_q) + \gamma_2\phi(\mathbf{N}_q) + \gamma_3\phi(\mathbf{B}_q) = 0$$

elde edilir. Yukarıda bulduğumuz değerler bu denklemde yerine yazılırsa

$$\gamma_1(c\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) + \gamma_2(-c\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q) + \gamma_3(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q) = 0$$

olur ve

$$\mathbf{T}_q(-\gamma_2c - \gamma_3e_2) + \mathbf{N}_q(\gamma_1c - \gamma_3e_3) + \mathbf{B}_q(\gamma_1e_2 + \gamma_2e_3) = 0$$

elde edilir ve buradan $\gamma_1 = e_3, \gamma_2 = -e_2$ ve $\gamma_3 = c$ bulunur. Bulunan bu değerler yerine yazıldığında

$$\phi(\mathcal{B}) = e_3\mathbf{T}_q - e_2\mathbf{N}_q + c\mathbf{B}_q$$

sonucuna varılır ve ispat tamamlanmış olur.



6. YARI MANYETİK EĞRİLERDE NORMALLEŞTİRME OPERATÖRÜ

6.1. Yarı-Hızlı Manyetik Eğrilerde Normalleştirme Operatörü

$W = f\mathbf{T}_q + g\mathbf{N}_q + h\mathbf{B}_q$ vektör alanını düşünelim. Burada f, g ve h , W üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonlardır, W 'nin türevi alınırsa

$$W' = f'\mathbf{T}_q + f\mathbf{T}'_q + g'\mathbf{N}_q + g\mathbf{N}'_q + h'\mathbf{B}_q + h\mathbf{B}'_q$$

elde edilir. Serret-Frenet formüllerini yerlerine yazıldığında

$$W' = f'\mathbf{T}_q + f(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) + g'\mathbf{N}_q + g(-e_1\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q) + h'\mathbf{B}_q + h(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q)$$

bulunur. Denklem düzenlenirse

$$W' = \mathbf{T}_q(f' - e_1g - e_2h) + \mathbf{N}_q(fe_1 + g' - e_3h) + \mathbf{B}_q(e_2f + e_3g + h')$$

elde edilir. Buradan W 'nin birim hız parametreleştirmesini sonsuza kadar korumak için

$$f' - e_1g - e_2h = 0$$

yani

$$f' = e_1g + e_2h$$

alınması gerektiği gösterilir. Şimdi her iki tarafın integralini alınırsa

$$f = \int (e_1g + e_2h) \quad (6.1)$$

elde edilir. α boyunca herhangi bir W vektör alanı için, her zaman bir teğet terim eklenebilir, öyle ki ortaya çıkan vektör alanı yay uzunluğu parametrelendirmesini korur. Bu amaçla tanıttığımız doğrusal "normalleştirme operatörü";

$$\mathcal{N}W = (\int (e_1g + e_2h))\mathbf{T}_q + g\mathbf{N}_q + h\mathbf{B}_q \quad (6.2)$$

olarak tanımlanır. Formülü $\phi(\mathbf{N}_q)$ Lorentz kuvvetine uygulandığına, öncelikle

$$\phi(\mathbf{N}_q) = -e_1\mathbf{T}_q + c\mathbf{B}_q$$

olduğu daha önce gösterilen denklemdeki değerler (6.1) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f &= \int (0 - e_2c) \\ &= - \int (e_2c) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (6.2) denklemini yukarıda bulduğumuz eşitlikleri kullanarak yazılırsa

$$\mathcal{N}W = \mathcal{N}\phi(\mathbf{N}_q) = \left(-\int (e_2c)\right)\mathbf{T}_q + c\mathbf{B}_q$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\phi(\mathbf{B}_q) = -e_2\mathbf{T}_q + c\mathbf{N}_q$$

eşitliği (6.1) denklemine uygulandığında

$$\begin{aligned} f &= \int (e_1c - 0) \\ &= \int (e_1c) \end{aligned}$$

bulunur. O halde (6.2) denklemini yukarıdaki eşitlikleri eşitliklerini kullanarak yazılırsa

$$\mathcal{N}W = \mathcal{N}\phi(\mathbf{B}_q) = \left(\int (e_1c)\right)\mathbf{T}_q + c\mathbf{N}_q$$

elde edilir.

6.2. Yarı-Normal Manyetik Eğrilerde Normalleştirme Operatörü

Yarı-normal manyetik eğrilerde normalleştirme operatörünü bulmak için öncelikle

$$W = \phi(\mathbf{T}_q) = e_1\mathbf{N}_q + c\mathbf{B}_q$$

vektör alanını ele alalım. Bu denklem (6.1) eşitliğine uygulanırsa

$$f = \int (e_1)^2 - e_2c$$

elde edilir. O halde (6.2) denklemini yukarıda ki eşitlikler kullanılarak yazılırsın, böylece

$$\mathcal{N}W = \mathcal{N}\phi(\mathbf{T}_q) = \left(\int (e_1)^2 - e_2c\right)\mathbf{T}_q + e_1\mathbf{N}_q + c\mathbf{B}_q$$

eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde

$$\phi(\mathbf{B}_q) = -c\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q$$

denklemini (6.1) eşitliğine uygulanırsa

$$f = -\int (e_1e_3)$$

olarak bulunur. Böylece

$$\mathcal{N}W = \mathcal{N}\phi(\mathbf{B}_q) = \left(-\int (e_1 e_3)\right) \mathbf{T}_q - e_3 \mathbf{N}_q$$

eşitliğine ulaşılır.

6.3. Yarı-Binormal Manyetik Eğrilerde Normalleştirme Operatörü

Yarı-binormal manyetik eğrilerde normalleştirme operatörünü bulmak için öncelikle

$$W = \phi(\mathbf{T}_q) = c \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q$$

vektör alanını ele alalım. Bu denklem (6.1) eşitliğine uygulanırsa

$$\mathbf{f} = \int (e_1 c + (e_2)^2)$$

bulunur. O halde (6.2) denklemi yukarıdaki eşitlikler kullanılarak yazıldığında

$$\mathcal{N}W = \mathcal{N}\phi(\mathbf{T}_q) = \left(\int (e_1 c + (e_2)^2)\right) \mathbf{T}_q + c \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q$$

eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde

$$\phi(\mathbf{N}_q) = -c \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q$$

denklemi (6.1) eşitliğine uygulanırsa

$$\mathbf{f} = \int (\mathbf{0} + e_2 e_3)$$

olup

$$\mathbf{f} = \int (e_2 e_3)$$

bulunur. (6.2) denklemi yukarıdaki eşitlikler kullanılarak yazıldığında

$$\mathcal{N}W = \mathcal{N}\phi(\mathbf{N}_q) = \left(\int (e_2 e_3)\right) \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q$$

eşitliğine ulaşılır.

7. YARI MANYETİK EĞRİLERDE YİNELEME OPERATÖRÜ

Bu bölümde, uzayda yarı-manyetik eğrilerin yineleme operatörlerini buluyoruz.

7.1. Yarı-Hızlı Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörü

Öncelikle

$$\phi(N_q) = -e_1 T_q + c B_q$$

olduğu gösterildi. Bu denklemin türevi alınırsa

$$\phi'(N_q) = -(e_1)' T_q - e_1 (T_q)' + c' B_q + c (B_q)'$$

bulunur. Serret-Frenet formülleri yerlerine yazıldığında

$$\phi'(N_q) = -(e_1)' T_q - e_1 (e_1 N_q + e_2 B_q) + c' B_q + c (-e_2 T_q - e_3 N_q)$$

veya

$$\phi'(N_q) = T_q (-(e_1)' - e_2 c) + N_q (-(e_1)^2 - e_3 c) + B_q (-e_1 e_2 + c')$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının T ile vektörel çarpımından

$$\begin{aligned} T_q \times \phi'(N_q) &= (-(e_1)' - e_2 c)(T_q \times T_q) + (-(e_1)^2 - e_3 c)(T_q \times N_q) + (-e_1 e_2 \\ &+ c')(T_q \times B_q) \end{aligned}$$

olup

$$T_q \times \phi'(N_q) = (-e_1 e_2 + c') N_q + (-(e_1)^2 - e_3 c) B_q$$

bulunur. Bu denklemin normalleştirme operatörünü bulmak için (6.1) eşitliğini kullanılsın

$$\begin{aligned} f &= \int (e_1 g + e_2 h) \\ &= \int (e_1 (-e_1 e_2 + c') + e_2 (-(e_1)^2 - e_3 c)) \\ &= \int ((e_1)^2 (-2e_2) + e_1 c' - e_2 e_3 c) \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıda bulunan eşitlikler (7.1) denkleminde uygulandığında

$$-\mathcal{N}(T \times \phi'(N_q)) = \left(\int (2e_1^2 e_2 - e_1 c' + e_2 e_3 c) \right) T_q + (e_1 e_2 - c') N_q + (e_1^2 + e_3 c) B_q$$

sonucuna ulaşılır. Diğer yandan

$$\phi(\mathbf{B}_q) = -e_2\mathbf{T}_q - c\mathbf{N}_q$$

olarak bulunmuştu. Bu denklemin türevi alınır

$$\phi'(\mathbf{B}_q) = -(e_2)'\mathbf{T}_q - e_2(\mathbf{T}_q)' - c'\mathbf{N}_q - c(\mathbf{N}_q)'$$

eşitliğine ulaşılır. Serret-Frenet formülleri yerlerine yazıldığında

$$\phi'(\mathbf{B}_q) = -(e_2)'\mathbf{T}_q - e_2(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) - c'\mathbf{N}_q - c(-e_1\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q)$$

elde edilir. Buradan da

$$\phi'(\mathbf{B}_q) = \mathbf{T}_q(-(e_2)' + ce_1) + \mathbf{N}_q(-e_1e_2 - c') + \mathbf{B}_q(-(e_2)^2 - ce_3)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının \mathbf{T} ile vektörel çarpımından

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_q \times \phi'(\mathbf{B}_q) &= (-(e_2)' + ce_1)(\mathbf{T}_q \times \mathbf{T}_q) + (-e_1e_2 - c')(\mathbf{T}_q \times \mathbf{N}_q) + (-(e_2)^2 \\ &\quad - ce_3)(\mathbf{T}_q \times \mathbf{B}_q) \end{aligned}$$

olup

$$\mathbf{T}_q \times \phi'(\mathbf{B}_q) = -(e_1e_2 + ce_3)\mathbf{N}_q - (e_1^2 + c')\mathbf{B}_q$$

bulunur. Bu denklemin normalleştirme operatörünü bulmak için (6.1) eşitliğini kullanıldığında

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \int (\mathbf{e}_1\mathbf{g} + \mathbf{e}_2\mathbf{h}) \\ &= \int (\mathbf{e}_1(-(e_2)^2 - ce_3) + \mathbf{e}_2(-e_1e_2 - c')) \\ &= - \int (2\mathbf{e}_1e_2^2 + ce_1e_3 + c'e_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu eşitlikler (4.4) denkleminde uygulanırsa

$$\mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q) = \left(\int (2e_1e_2^2 + ce_1e_3 + c'e_2) \right) \mathbf{T}_q + (e_1e_2 + ce_3)\mathbf{N}_q + (e_1^2 + c')\mathbf{B}_q$$

elde edilir.

7.2. Yarı-Normal Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörü

$$\phi(\mathbf{T}_q) = e_1\mathbf{N}_q + c\mathbf{B}_q$$

olarak elde edildi. Bu denklemin türevi alınır

$$\phi'(\mathbf{T}_q) = (e_1)' \mathbf{N}_q + e_1 (\mathbf{N}_q)' + c' \mathbf{B}_q + c (\mathbf{B}_q)'$$

bulunur. Serret-Frenet formülleri yerlerine yazıldığında

$$\phi'(\mathbf{T}_q) = (e_1)' \mathbf{N}_q + e_1 (-e_1 \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q) + c' \mathbf{B}_q + c (-c \mathbf{T}_q - e_3 \mathbf{N}_q)$$

ve buradan

$$\phi'(\mathbf{T}_q) = \mathbf{T}_q (-(e_1)^2 - c^2) + \mathbf{N}_q ((e_1)' - ce_3) + \mathbf{B}_q (e_1 e_3 + c')$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının T ile vektörel çarpımından

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_q \times \phi'(\mathbf{T}_q) &= (-(e_1)^2 - c^2) (\mathbf{T}_q \times \mathbf{T}_q) + ((e_1)' - ce_3) (\mathbf{T}_q \times \mathbf{N}_q) + (e_1 e_3 \\ &+ c') (\mathbf{T}_q \times \mathbf{B}_q) \end{aligned}$$

bulunup

$$\mathbf{T}_q \times \phi'(\mathbf{T}_q) = (e_1 e_3 + c') \mathbf{N}_q + (-ce_3 + e_1') \mathbf{B}_q$$

elde edilir. Bu denklemin normalleştirme operatörünü bulmak için (6.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} f &= \int (e_1 g + e_2 h) \\ &= \int (e_1 (e_1 e_3 + c') + e_2 (e_1' - ce_3)) \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan eşitlikler (4.4) denkleminde uygulandığında

$$\begin{aligned} -\mathcal{N}(\mathbf{T} \times \phi'(\mathbf{T}_q)) &= \mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q) \\ &= \left(- \int (e_1 (e_1 e_3 + c') + e_2 (e_1' - ce_3)) \right) \mathbf{T}_q - (e_1 e_3 + c') \mathbf{N}_q \\ &\quad + (ce_3 - e_1') \mathbf{B}_q \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\phi(\mathbf{B}_q) = -c \mathbf{T}_q - e_3 \mathbf{N}_q$$

olarak bulundu. Bu denklemin türevini alındığında

$$\phi'(\mathbf{B}_q) = -c' \mathbf{T}_q - c (\mathbf{T}_q)' - (e_3)' \mathbf{N}_q - e_3 (\mathbf{N}_q)'$$

elde edilir. Burada Serret-Frenet formülleri yerlerine yazılırsa

$$\phi'(\mathbf{B}_q) = -(c)' \mathbf{T}_q - c (e_1 \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q) - (e_3)' \mathbf{N}_q - e_3 (-e_1 \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q)$$

olarak bulunur ve denklem düzenlendiğinde

$$\phi'(\mathbf{B}_q) = \mathbf{T}_q(-c' + e_1e_3) + \mathbf{N}_q(-ce_1 - (e_3)') + \mathbf{B}_q(-ce_2 - (e_3)^2)$$

eşitliği oluşur. Bu eşitliğin her iki tarafının T ile vektörel çarpımından

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_q \times \phi'(\mathbf{B}_q) &= (-c' + e_1e_3)(\mathbf{T}_q \times \mathbf{T}_q) + (-ce_1 - (e_3)')(\mathbf{T}_q \times \mathbf{N}_q) \\ &\quad + (-ce_2 - (e_3)^2)(\mathbf{T}_q \times \mathbf{B}_q) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{T}_q \times \phi'(\mathbf{B}_q) = (-ce_2 - e_3^2)\mathbf{N}_q + (-ce_1 - e_3')\mathbf{B}_q$$

olur. Bu denklemin normalleştirme operatörünü bulmak için (6.1) eşitliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \int (\mathbf{e}_1\mathbf{g} + \mathbf{e}_2\mathbf{h}) \\ &= - \int (\mathbf{e}_1(ce_2 + (e_3)^2) + \mathbf{e}_2(ce_1 + (e_3)')) \\ &= - \left(\int (2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3') \right) \end{aligned}$$

Bulunur. Yukarıda bulunan eşitlikler (4.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q) = \left(\int (2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3') \right) \mathbf{T}_q + (ce_2 + e_3^2)\mathbf{N}_q + (ce_1 + e_3')\mathbf{B}_q$$

elde edilir.

7.3. Yarı-Binormal Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörü

$$\phi(\mathbf{T}_q) = c\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q$$

olarak elde edildi. Bu denklemin türevi alındığında

$$\phi'(\mathbf{T}_q) = c'\mathbf{N}_q + c(\mathbf{N}_q)' + (e_2)'\mathbf{B}_q + e_2(\mathbf{B}_q)'$$

bulunur. Burada Serret-Frenet formüllerini yerlerine yazılırsa

$$\phi'(\mathbf{T}_q) = (c)'\mathbf{N}_q + c(-e_1\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q) + (e_2)'\mathbf{B}_q + e_2(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q)$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlik düzenlendiğinde

$$\phi'(\mathbf{T}_q) = \mathbf{T}_q(-e_1c - (e_2)^2) + \mathbf{N}_q(c' - e_2e_3) + \mathbf{B}_q(e_3c + (e_2)')$$

olarak bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının T ile vektörel çarpımından

$$\mathbf{T}_q \times \phi'(\mathbf{B}_q) = (-e_1c - (e_2)^2)(\mathbf{T}_q \times \mathbf{T}_q) + (c' - e_2e_3)(\mathbf{T}_q \times \mathbf{N}_q)$$

$$+(e_3c + (e_2)')(\mathbf{T}_q \times \mathbf{B}_q)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{T}_q \times \phi'(\mathbf{B}_q) = (e_3c + e_2')\mathbf{N}_q + (-e_2e_3 + c')\mathbf{B}_q$$

bulunur. Bu denklemin normalleştirme operatörünü bulmak için (6.1) eşitliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned} f &= \int (e_1g + e_2h) \\ &= \left(\int e_1(e_3c + e_2') + e_2(c' - e_2e_3) \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu eşitlikler (4.4) denkleminde uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q) &= -\mathcal{N}(T \times \phi'(\mathbf{T}_q)) \\ &= \left(- \int e_1(e_3c + e_2') + e_2(c' - e_2e_3) \right) \mathbf{T}_q - (e_3c + e_2')\mathbf{N}_q \\ &\quad + (e_2e_3 - c')\mathbf{B}_q \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\phi(\mathbf{N}_q) = -c\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q$$

olduğu gösterildi. Bu eşitliğin türevi alınır

$$\phi'(\mathbf{N}_q) = -(c)'\mathbf{T}_q - c(\mathbf{T}_q)' + (e_3)'\mathbf{B}_q + e_3(\mathbf{B}_q)'$$

elde edilir. Bu denkleminde Serret-Frenet formüllerini yerlerine yazılırsa

$$\phi'(\mathbf{N}_q) = -(c)'\mathbf{T}_q - c(e_1\mathbf{N}_q + e_2'\mathbf{B}_q) + (e_3)'\mathbf{B}_q + e_3(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q)$$

bulunur. Denklem düzenlendiğinde

$$\phi'(\mathbf{N}_q) = \mathbf{T}_q(-c' - e_2e_3) + \mathbf{N}_q(-ce_1 - (e_3)^2) + \mathbf{B}_q(-ce_2 + (e_3)')$$

olarak elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının T ile vektörel çarpımından

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_q \times \phi'(\mathbf{N}_q) &= (-c' - e_2e_3)(\mathbf{T}_q \times \mathbf{T}_q) + (-ce_1 - (e_3)^2)(\mathbf{T}_q \times \mathbf{N}_q) \\ &\quad + (-ce_2 + (e_3)')(\mathbf{T}_q \times \mathbf{B}_q) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\mathbf{T}_q \times \phi'(\mathbf{N}_q) = (-ce_2 + e_3')\mathbf{N}_q - (ce_1 + e_3^2)\mathbf{B}_q$$

bulunur. Bu denklemin normalleştirme operatörünü bulmak için (6.1) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
 f &= \int (e_1 g + e_2 h) \\
 &= \int (e_1(-ce_2 + (e_3)') + e_2((-ce_1 - (e_3)^2)) \\
 &= - \int (2e_1 e_2 c - e_3' e_1 + e_2 e_3^2)
 \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıda bulduğumuz bu eşitlikler (4.4) denklemine uygulanırsa

$$\mathcal{R}\phi(N_q) = \left(\int (2e_1 e_2 c - e_3' e_1 + e_2 e_3^2) \right) \mathbf{T}_q + (ce_2 - e_3') \mathbf{N}_q + (ce_1 + e_3^2) \mathbf{B}_q$$

elde edilir.

8. YARI MANYETİK EĞRİLERİN ENERJİSİ

Bu bölümde sıradan uzayda verilen manyetik alanla ilişkili yarı manyetik eğrilerin enerjisi araştırılacaktır. Manyetik eğrilerin hızları sabit olduğu için kinetik enerjilerinin sabit olduğu da bilinen bir özelliğidir.

Tanım 8: (R, \mathcal{h}) ve (R^*, \mathcal{h}^*) iki Riemann manifoldu olsun. O halde türevlenebilir bir haritanın enerjisi $r: (R, \mathcal{h}) \rightarrow (R^*, \mathcal{h}^*)$ şu şekilde tanımlanabilir:

$$\text{energy}(r): \frac{1}{2} \int_M \sum_{a=1}^n \mathcal{h}^*(df(e_a), df(e_a)) v$$

burada $\{e_a\}$ teğet uzayın yerel tabanıdır ve v , R 'deki kanonik hacim formudur.

Öneri 8: Bağlantı haritası $Q: T(T'M) \rightarrow T'M$ olsun. Daha sonra aşağıdaki iki koşul geçerlidir.

- (i) $coQ = codc$ ve $coQ = co\check{c}$ burada $\check{c}: T(T'M) \rightarrow T'M$ teğet demet projeksiyonudur.
- (ii) $\varrho \in T_x M$ ve $\varsigma: M \rightarrow T'M$ bölümleri için

$$Q(d\varsigma(\varrho)) = \nabla_{\varrho}\varsigma$$

sahibiz. ∇ burada Levi-Civita kovaryant türevidir.

Tanım 8.1: $\sigma_1, \sigma_2 \in T_{\varsigma}(T'M)$ diyelim ve tanımlayalım

$$h_s(\sigma_1, \sigma_2) = dc(\sigma_1).dc(\sigma_2) + Q(\sigma_1).Q(\sigma_2)$$

Bu TM üzerinde bir Riemann metriği verir. Bilindiği gibi $h_s, c: T'M \rightarrow M$ projeksiyonunu aynı zamanda Riemann batması da yapan Sasaki metriği olarak adlandırılmaktadır.

Teorem 8: \mathcal{B}' 'nin sıradan uzaydaki ilişkili manyetik alandaki α birim hızına benzer manyetik eğrilere karşılık gelecek şekilde hareket eden yüklü bir parçacık olduğunu varsayalım.

■ Yarı-hızlı bir manyetik eğri durumunda, bir manyetik vektör alanındaki parçacığın enerjisi

$$\text{energy}(\mathcal{B}_{T_q}) = \frac{1}{2} \int_0^s (1 + (c')^2 + (e_1(c - e_3) - e_2')^2 + (e_2(c - e_3) - e_1')^2) ds$$

Burada $c = \phi(N_q).B_q$ eğrisi boyunca

■ Yarı-normal bir manyetik eğri durumunda, bir manyetik vektör alanındaki parçacığın enerjisi

$$\text{energy}(\mathcal{B}_{N_q}) = \frac{1}{2} \int_0^s (1 + (c')^2 + (e_1(c - e_2) + e_3')^2 + (e_3(-c + e_3) + e_1')^2) ds$$

Burada $c = \phi(\mathbf{T}_q) \cdot \mathbf{B}_q$ eğrisi boyunca

■ Yarı-binormal bir manyetik eğri durumunda, bir manyetik vektör alanındaki parçacığın enerjisi

$$\text{energy}(\mathcal{B}_{B_q}) = \frac{1}{2} \int_0^s (1 + (c')^2 + (-e_2(c - e_1) + e_3')^2 + (e_3(c + e_1) + e_2')^2) ds$$

Burada $c = \phi(\mathbf{T}_q) \cdot \mathbf{N}_q$ eğrisi boyunca

Kanıt: α , sıradan uzaydaki \mathcal{B} manyetik alanın yarı-hızlı bir manyetik eğrisi olsun. Tanım (8) ve Öneri (8)'den şu sonuç elde edilir.

$$\text{energy}(\mathcal{B}_{T_q}) = \frac{1}{2} \int_0^s h_s(d\mathcal{B}(\mathbf{T}_q), d\mathcal{B}(\mathbf{T}_q))$$

Sasaki metriğinin tanımını da kullanılarak, aynı zamanda

$$h_s(d\mathcal{B}(\mathbf{T}_q), d\mathcal{B}(\mathbf{T}_q)) = dc(\mathcal{B}(\mathbf{T}_q)) \cdot dc(\mathcal{B}(\mathbf{T}_q)) + Q(\mathcal{B}(\mathbf{T}_q)) \cdot Q(\mathcal{B}(\mathbf{T}_q))$$

T bir kesit olduğundan, elde edilir.

$$d(c)od(\mathcal{B}) = d(c \circ \mathcal{B}) = d(id_C) = id_{TC}$$

üstelik açıktır ki

$$Q(\mathcal{B}(\mathbf{T}_q)) = \nabla_{T_q} \mathcal{B} = (c')\mathbf{T}_q + (e_1(c - e_3) - e_2')\mathbf{N}_q + (e_2(c - e_3) - e_1')\mathbf{B}_q$$

böylece yarı çatını tanımından aşağıdaki ifadeyi buluyoruz:

$$h_s(d\mathcal{B}(\mathbf{T}_q), d\mathcal{B}(\mathbf{T}_q)) = \mathbf{T}_q \cdot \mathbf{T}_q + \nabla_{T_q} \mathcal{B} \cdot \nabla_{T_q} \mathcal{B} = 1 + (c')^2 + (e_1(c - e_3) - e_2')^2 + (e_2(c - e_3) - e_1')^2 \quad (8.1)$$

Benzer adımlar izlendiğinde ispatın geri kalanı hesaplanır. Öncelikle $\phi(\mathbf{T}_q)$ (8.1) denklemi kullanılarak yazılırsa

$$h_s(d\phi(\mathbf{T}_q), d\phi(\mathbf{T}_q)) = \mathbf{T}_q \cdot \mathbf{T}_q + \nabla_{T_q} \phi(\mathbf{T}_q) \cdot \nabla_{T_q} \phi(\mathbf{T}_q) \quad (8.2)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\phi(\mathbf{N}_q)$ için

$$h_s(d\phi(\mathbf{N}_q), d\phi(\mathbf{N}_q)) = \mathbf{N}_q \cdot \mathbf{N}_q + \nabla_{T_q} \phi(\mathbf{N}_q) \cdot \nabla_{T_q} \phi(\mathbf{N}_q) \quad (8.3)$$

eşitliği yazılır. Son olarak $\phi(B_q)$ yukarıdaki denklem kullanılarak yazılırsa

$$h_s(d\phi(\mathbf{B}_q), d\phi(\mathbf{B}_q)) = \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{B}_q + \nabla_{T_q} \phi(\mathbf{B}_q) \cdot \nabla_{T_q} \phi(\mathbf{B}_q) \quad (8.4)$$

bulunur.

8.1. Yarı-Hızlı Manyetik Eğrilerin Enerjisi

$$\phi(N_q) = -e_1 T_q + c B_q$$

eşitliği önceki bölümlerde gösterildi.

$$\nabla_{T_q} \phi(N_q) = -e_1' T_q - e_1 T_q' + c' B_q + c B_q'$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik

$$\nabla_{T_q} \phi(N_q) = -e_1' T_q - e_1(e_1 N_q + e_2 B_q) + c' B_q + c(-e_2 T_q - e_3 N_q)$$

olarak da yazılır. Denklem düzenlendiğinde

$$\nabla_{T_q} \phi(N_q) = T_q(-e_1' - e_2 c) + N_q(-e_1^2 - e_3 c) + B_q(-e_1 e_2 + c')$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler (8.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$h_s(d\phi(N_q), d\phi(N_q)) = 1 + (e_1' + e_2 c)^2 + (e_1^2 + e_3 c)^2 + (c' - e_1 e_2)^2$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\Rightarrow \text{energy}(\phi(N_q)) = \frac{1}{2} \int_0^s 1 + (e_1' + e_2 c)^2 + (e_1^2 + e_3 c)^2 + (c' - e_1 e_2)^2$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\phi(B_q) = -e_2 T_q - c N_q$$

eşitliği gösterildi.

$$\nabla_{T_q} \phi(B_q) = -e_2' T_q - e_2 T_q' - c' N_q - c N_q'$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik

$$\nabla_{T_q} \phi(B_q) = -e_2' T_q - e_2(e_1 N_q + e_2 B_q) - c' N_q - c(-e_1 T_q + e_3 B_q)$$

olarak da yazılır. Denklem düzenlendiğinde

$$\nabla_{T_q} \phi(B_q) = T_q(-e_2' + c e_1) + N_q(-e_1 e_2 - c') + B_q(-e_2^2 - e_3 c)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler (8.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\nabla_{T_q} \phi(\mathbf{B}_q) = 1 + (-e'_2 + ce_1)^2 + (e_1e_2 + c')^2 + (e_2^2 + e_3c)^2$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$energy(\phi(\mathbf{B}_q)) = \frac{1}{2} \int_0^s 1 + (-e'_2 + ce_1)^2 + (e_1e_2 + c')^2 + (e_2^2 + e_3c)^2$$

olarak elde edilir. Yarı-hızlı bir manyetik eğri durumunda, bir manyetik vektör alanındaki parçacığın enerjisi için öncelikle

$$\mathcal{B}_{T_q} = c\mathbf{T}_q - e_2\mathbf{N}_q + e_1\mathbf{B}_q$$

denklemini daha önce elde edildi. Buradan

$$\nabla_{T_q} \mathcal{B} = c'\mathbf{T}_q + c\mathbf{T}'_q - e'_2\mathbf{N}_q - e_2\mathbf{N}'_q + e'_1\mathbf{B}_q + e_1\mathbf{B}'_q$$

olarak bulunur. Bu denklemde eşitlikler yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \nabla_{T_q} \mathcal{B} = c'\mathbf{T}_q + c(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) - e'_2\mathbf{N}_q - e_2(-e_1\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q) + e'_1\mathbf{B}_q + e_1(-e_2\mathbf{T}_q \\ - e_3\mathbf{N}_q) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$\nabla_{T_q} \mathcal{B} = \mathbf{T}_q(c' + e_1e_2 - e_1e_2) + \mathbf{N}_q(ce_1 - e'_2 - e_1e_3) + \mathbf{B}_q(ce_2 - e_2e_3 + e'_1)$$

bulunur. Biraz daha düzenlenirse

$$\nabla_{T_q} \mathcal{B} = \mathbf{T}_q(c') + \mathbf{N}_q(e_1(c - e_3) - e'_2) + \mathbf{B}_q(e_2(c - e_3) + e'_1)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{T}_q \cdot \mathbf{T}_q + \nabla_{T_q} \mathcal{B} \cdot \nabla_{T_q} \mathcal{B} = 1 + (c')^2 + (e_1(c - e_3) - e'_2)^2 + (e_2(c - e_3) + e'_1)^2$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$energy(\mathcal{B}_{T_q}) = \frac{1}{2} \int_0^s 1 + (c')^2 + (e_1(c - e_3) - e'_2)^2 + (e_2(c - e_3) + e'_1)^2$$

olarak elde edilir.

8.2. Yarı-Normal Manyetik Eğrilerin Enerjisi

$$\phi(\mathbf{T}_q) = e_1\mathbf{N}_q + c\mathbf{B}_q$$

olduğu biliniyor. Buradan

$$\nabla_{T_q} \phi(\mathbf{T}_q) = e'_1\mathbf{N}_q + e_1\mathbf{N}'_q + c'\mathbf{B}_q + c\mathbf{B}'_q$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik

$$\nabla_{T_q} \phi(\mathbf{T} - *_{\mathbf{q}}) = e'_1 \mathbf{N}_q + e_1(-e_1 \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q) + c' \mathbf{B}_q + c(-e_2 \mathbf{T}_q - e_3 \mathbf{N}_q)$$

olarak bulunur. Denklemi düzenlenirse

$$\nabla_{T_q} \phi(\mathbf{T}_q) = \mathbf{T}_q(-e_1^2 - e_2 c) + \mathbf{N}_q(e'_1 - e_3 c) + \mathbf{B}_q(e_1 e_3 + c')$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler (8.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$h_s(d\phi(\mathbf{T}_q), d\phi(\mathbf{T}_q)) = 1 + (e_1^2 + e_2 c)^2 + (e'_1 - e_3 c)^2 + (e_1 e_3 + c')^2$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$energy(\phi(\mathbf{T}_q)) = \frac{1}{2} \int_0^s 1 + (e_1^2 + e_2 c)^2 + (e'_1 - e_3 c)^2 + (e_1 e_3 + c')^2$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde

$$\phi(\mathbf{B}_q) = -c \mathbf{T}_q - e_3 \mathbf{N}_q$$

eşitliği gösterildi.

$$\nabla_{T_q} \phi(\mathbf{B}_q) = -c' \mathbf{T}_q - c \mathbf{T}'_q - e'_3 \mathbf{N}_q - e_3 \mathbf{N}'_q$$

olarak bulunur. Bu eşitlik

$$\nabla_{T_q} \phi(\mathbf{B}_q) = -c' \mathbf{T}_q - c(e_1 \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q) - e'_3 \mathbf{N}_q - e_3(-e_1 \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q)$$

olarak yazılır. Denklemi düzenlenirse

$$\nabla_{T_q} \phi(\mathbf{B}_q) = \mathbf{T}_q(-c' + e_1 e_3) + \mathbf{N}_q(-c e_1 - e'_3) + \mathbf{B}_q(-c e_2 - e_3^2)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler (8.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$h_s(d\phi(\mathbf{B}_q), d\phi(\mathbf{B}_q)) = 1 + (-c' + e_1 e_3)^2 + (c e_1 + e'_3)^2 + (c e_2 + e_3^2)^2$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$energy(\phi(\mathbf{B}_q)) = \frac{1}{2} \int_0^s 1 + (-c' + e_1 e_3)^2 + (c e_1 + e'_3)^2 + (c e_2 + e_3^2)^2$$

olarak bulunur. Yarı-normal bir manyetik eğri durumunda, bir manyetik vektör alanındaki parçacığın enerjisi için öncelikle

$$\mathbf{B}_{N_q} = e_3 \mathbf{T}_q - c \mathbf{N}_q + e_1 \mathbf{B}_q$$

denklemi daha önce elde edildi. Buradan

$$\nabla_{N_q} \mathcal{B} = e'_3 \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{T}'_q - c' \mathbf{N}_q - c \mathbf{N}'_q + e'_1 \mathbf{B}_q + e_1 \mathbf{B}'_q$$

olarak bulunur. Bu denklemde eşitlikler yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \nabla_{N_q} \mathcal{B} = e'_3 \mathbf{T}_q + e_3(e_1 \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q) - c' \mathbf{N}_q - c(-e_1 \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q) + e'_1 \mathbf{B}_q + e_1(-e_2 \mathbf{T}_q \\ - e_3 \mathbf{N}_q) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$\nabla_{N_q} \mathcal{B} = \mathbf{T}_q(e'_3 + ce_1 - e_1 e_2) + \mathbf{N}_q(e_1 e_3 - c' - e_1 e_3) + \mathbf{B}_q(e_2 e_3 - ce_3 + e'_1)$$

bulunur. Biraz daha düzenlenirse

$$\nabla_{N_q} \mathcal{B} = \mathbf{T}_q(e_1(c - e_2) + e'_3) + \mathbf{N}_q(-c') + \mathbf{B}_q(e_3(e_2 - c) + e'_1)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{N}_q \cdot \mathbf{N}_q + \nabla_{N_q} \mathcal{B} \cdot \nabla_{N_q} \mathcal{B} = 1 + (c')^2 + (e_1(c - e_2) + e'_3)^2 + (e_3(e_2 - c) + e'_1)^2$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$energy(\mathcal{B}_{N_q}) = \frac{1}{2} \int_0^s 1 + (c')^2 + (e_1(c - e_2) + e'_3)^2 + (e_3(e_2 - c) + e'_1)^2$$

olarak bulunur.

8.3. Yarı-Binormal Manyetik Eğrilerin Enerjisi

$$\phi(\mathbf{T}_q) = c \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q$$

eşitliği daha önce gösterildi.

$$\nabla_{T_q} \phi(\mathbf{T}_q) = c' \mathbf{N}_q + c \mathbf{N}'_q + e'_2 \mathbf{B}_q + e_2 \mathbf{B}'_q$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik

$$\nabla_{T_q} \phi(\mathbf{T}_q) = c' \mathbf{N}_q + c(-e_1 \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q) + e'_2 \mathbf{B}_q + e_2(-e_2 \mathbf{T}_q - e_3 \mathbf{N}_q)$$

şeklinde de yazılır. Denklem düzenlenirse

$$\nabla_{T_q} \phi(\mathbf{T}_q) = \mathbf{T}_q(-ce_1 - e_2^2) + \mathbf{N}_q(c' - e_2 e_3) + \mathbf{B}_q(ce_3 + e'_2)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler (8.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$h_s(d\phi(\mathbf{T}_q), d\phi(\mathbf{T}_q)) = 1 + (ce_1 + e_2^2) + (c' - e_2 e_3)^2 + (ce_3 + e'_2)^2$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$energy(\phi(\mathbf{T}_q)) = \frac{1}{2} \int_0^s 1 + (ce_1 + e_2^2) + (c' - e_2e_3)^2 + (ce_3 + e_2')^2$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\phi(\mathbf{N}_q) = -c\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q$$

eşitliği önceki bölümlerde gösterildi.

$$\nabla_{\mathbf{T}_q}\phi(\mathbf{N}_q) = -c'\mathbf{T}_q - c\mathbf{T}'_q + e_3'\mathbf{B}_q + e_3\mathbf{B}'_q$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik

$$\nabla_{\mathbf{T}_q}\phi(\mathbf{N}_q) = -c'\mathbf{T}_q - c(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) + e_3'\mathbf{B}_q + e_3(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q)$$

şeklinde de yazılır. Denklem düzenlendiğinde

$$\nabla_{\mathbf{T}_q}\phi(\mathbf{N}_q) = \mathbf{T}_q(-c' - e_2e_3) + \mathbf{N}_q(-ce_1 - e_3^2) + \mathbf{B}_q(e_3' - ce_2)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler (8.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$h_s(d\phi(\mathbf{N}_q), d\phi(\mathbf{N}_q)) = 1 + (c' + e_2e_3)^2 + (ce_1 + e_3^2)^2 + (e_3' - ce_2)^2$$

denklemini bulunur. Buradan

$$energy(\phi(\mathbf{N}_q)) = \frac{1}{2} \int_0^s 1 + (c' + e_2e_3)^2 + (ce_1 + e_3^2)^2 + (e_3' - ce_2)^2$$

olarak elde edilir. Yarı-binormal bir manyetik eğri durumunda, bir manyetik vektör alanındaki parçacığın enerjisi için öncelikle

$$\mathcal{B}_{B_q} = e_3\mathbf{T}_q - e_2\mathbf{N}_q + c\mathbf{B}_q$$

denklemini daha önce elde etmiştik.

$$\nabla_{B_q}\mathcal{B} = e_3'\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{T}'_q - e_2'\mathbf{N}_q - e_2\mathbf{N}'_q + c'\mathbf{B}_q + c\mathbf{B}'_q$$

olarak bulunur. Bu denklemde eşitlikler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_{B_q}\mathcal{B} = e_3'\mathbf{T}_q + e_3(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) - e_2'\mathbf{N}_q - e_2(-e_1\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q) + c'\mathbf{B}_q + c(-e_2\mathbf{T}_q \\ - e_3\mathbf{N}_q) \end{aligned}$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\nabla_{B_q}\mathcal{B} = \mathbf{T}_q(e_2(e_1 - c) + e_3') + \mathbf{N}_q(e_3(e_1 - c) - e_2') + \mathbf{B}_q(c')$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{B}_q \cdot \mathbf{B}_q + \nabla_{\mathcal{B}_q} \mathcal{B} \cdot \nabla_{\mathcal{B}_q} \mathcal{B} = 1 + (c')^2 + (e_2(e_1 - c) + e_3')^2 + (e_3(e_1 - c) - e_2')^2$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\text{energy}(\mathcal{B}_{\mathcal{B}_q}) = \frac{1}{2} \int_0^s 1 + (c')^2 + (e_2(e_1 - c) + e_3')^2 + (e_3(e_1 - c) - e_2')^2$$

olarak bulunur.

8.1.1. Yarı-Hızlı Manyetik Eğrilerde Normalleştirme Operatörünün Enerjisi

$$\mathcal{N}\phi(\mathbf{N}_q) = \mathcal{N}W = \left(\int (e_2 c) \right) \mathbf{T}_q + c \mathbf{B}_q$$

olarak elde edilmiştir. Bu denklemin türevi alınır

$$(\mathcal{N}W)' = (-e_2 c) \mathbf{T}_q - \left(\int (e_2 c) \right) \mathbf{T}'_q + c' \mathbf{B}_q + c \mathbf{B}'_q$$

eşitliği oluşur. Daha önce elde edilen eşitlikler bu denkleme yerine yazılırsa

$$(\mathcal{N}W)' = (-e_2 c) \mathbf{T}_q - \left(\int (e_2 c) \right) (e_1 \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q) + c' \mathbf{B}_q + c (-e_2 \mathbf{T}_q - e_3 \mathbf{N}_q)$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse

$$(\mathcal{N}W)' = \mathbf{T}_q (-2e_2 c) - \mathbf{N}_q \left(\left(\int (e_2 c) \right) e_1 + e_3 c \right) - \mathbf{B}_q \left(\left(\int (e_2 c) \right) e_2 - c' \right)$$

bulunur. Bulunan bu değerler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \mathbf{N}_q \cdot \mathbf{N}_q + \nabla_{\mathcal{T}_q} \mathcal{N}\phi(\mathbf{N}_q) \cdot \nabla_{\mathcal{T}_q} \mathcal{N}\phi(\mathbf{N}_q) \\ &= 1 + (2e^2 c)^2 + \left(\left(\int (e_2 c) \right) e_1 + e_3 c \right)^2 + \left(\left(\int (e_2 c) \right) e_2 - c' \right)^2 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\text{energy}(\mathcal{N}\phi(\mathbf{N}_q)) = \frac{1}{2} \int_0^s \left(1 + (2e^2 c)^2 + \left(\int (e_2 c) \right) e_1 + e_3 c \right)^2 + \left(\int (e_2 c) \right) e_2 - c' \right)^2$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\mathcal{N}\phi(\mathbf{B}_q) = \mathcal{N}W = \left(\int (e_1 c) \right) \mathbf{T}_q + c \mathbf{N}_q$$

olarak elde edildi. Bu denklemin türevini alınır

$$(\mathcal{N}W)' = (e_1c)\mathbf{T}_q + \left(\int (e_1c)\right)\mathbf{T}'_q + c'\mathbf{N}_q + c\mathbf{N}'_q$$

eşitliği oluşur. Daha önce elde edilen eşitlikler bu denklemde yerine yazılırsa

$$(\mathcal{N}W)' = (e_1c)\mathbf{T}_q + \left(\int (e_1c)\right)(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) + c'\mathbf{N}_q + c(-e_1\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q)$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse

$$(\mathcal{N}W)' = \mathbf{T}_q(e_1c - e_1c) + \mathbf{N}_q\left(\left(\int (e_1c)\right)e_1 + c'\right) + \mathbf{B}_q\left(\left(\int (e_1c)\right)e_2 + ce_3\right)$$

bulunur. Bulunan bu degerler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{B}_q \cdot \mathbf{B}_q + \nabla_{\mathbf{T}_q} \mathcal{N}\phi(\mathbf{B}_q) \cdot \nabla_{\mathbf{T}_q} \mathcal{N}\phi(\mathbf{B}_q)$$

$$= 1 + \left(\left(\int (e_1c)\right)e_1 + c'\right)^2 + \left(\left(\int (e_1c)\right)e_2 + ce_3\right)^2$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\text{energy}(\mathcal{N}\phi(\mathbf{B}_q)) = \frac{1}{2} \int_0^s \left(1 + \left(\left(\int (e_1c)\right)e_1 + c'\right)^2 + \left(\left(\int (e_1c)\right)e_2 + ce_3\right)^2\right)$$

olarak elde edilir.

8.2.1. Yarı-Normal Manyetik Eğrilerde Normalleştirme Operatörünün Enerjisi

$$\mathcal{N}\phi(\mathbf{T}_q) = \mathcal{N}W = \left(\int (e_1^2 - e_2c)\right)\mathbf{T}_q + e_1\mathbf{N}_q + c\mathbf{B}_q$$

olarak elde edildi. Bu denklemin türevi alınırsa

$$(\mathcal{N}W)' = (e_1^2 - e_2c)\mathbf{T}_q + \left(\int (e_1^2 - e_2c)\right)\mathbf{T}'_q + e_1'\mathbf{N}_q + e_1\mathbf{N}'_q + c'\mathbf{B}_q + c\mathbf{B}'_q$$

eşitliği oluşur. Daha önce elde edilen eşitlikler bu denklemde yerine yazılırsa

$$(\mathcal{N}W)' = (e_1^2 - e_2c)\mathbf{T}_q + \left(\int (e_1^2 - e_2c)\right)(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) + e_1'\mathbf{N}_q$$

$$+ e_1(-e_1\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q) + c'\mathbf{B}_q + c(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q)$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse

$$(\mathcal{N}W)' = \mathbf{T}_q(e_1^2 - e_2c - e_1^2 - e_2c) + \mathbf{N}_q\left(\left(\int (e_1^2 - e_2c)\right)e_1 + e_1' - ce_3\right)$$

$$+\mathbf{B}_q \left(\left(\int (e_1^2 - e_2 c) \right) e_2 + e_1 e_3 + c' \right)$$

bulunur. Bulunan bu degerler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_q \cdot \mathbf{T}_q + \nabla_{T_q} \mathcal{N} \phi(\mathbf{T}_q) \cdot \nabla_{T_q} \mathcal{N} \phi(\mathbf{T}_q) &= 1 + (2e_2 c)^2 + \left(\left(\int (e_1^2 - e_2 c) \right) e_1 + e_1' - c e_3 \right)^2 \\ &+ \left(\left(\int (e_1^2 - e_2 c) \right) e_2 + e_1 e_3 + c' \right)^2 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \text{energy}(\mathcal{N} \phi(\mathbf{T}_q)) &= \frac{1}{2} \int_0^s \left(1 + (2e_2 c)^2 + \left(\left(\int (e_1^2 - e_2 c) \right) e_1 + e_1' - c e_3 \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\left(\int (e_1^2 - e_2 c) \right) e_2 + e_1 e_3 + c' \right)^2 \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\mathcal{N} \phi(\mathbf{B}_q) = \mathcal{N} W = \left(- \int (e_1 e_3) \right) \mathbf{T}_q - e_3 \mathbf{N}_q$$

olarak elde edildi. Bu denklemin türevi alındığında

$$(\mathcal{N} W)' = (-e_1 e_3) \mathbf{T}_q + \left(- \int (e_1 e_3) \right) \mathbf{T}_q' - e_3' \mathbf{N}_q - e_3 \mathbf{N}_q'$$

eşitliği oluşur. Daha önce elde edilen eşitlikler bu denkleminde yerine yazılırsa

$$(\mathcal{N} W)' = (-e_1 e_3) \mathbf{T}_q - \left(\int (e_1 e_3) \right) (e_1 \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q) - e_3' \mathbf{N}_q - e_3 (-e_1 \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q)$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse

$$(\mathcal{N} W)' = \mathbf{T}_q (e_1 e_3 - e_1 e_3) - \mathbf{N}_q \left(\left(\int (e_1 e_3) \right) e_1 + e_3' \right) - \mathbf{B}_q \left(\left(\int (e_1 e_3) \right) e_2 + e_3^2 \right)$$

bulunur. Bulunan bu degerler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}_q \cdot \mathbf{B}_q + \nabla_{T_q} \mathcal{N} \phi(\mathbf{B}_q) \cdot \nabla_{T_q} \mathcal{N} \phi(\mathbf{B}_q) \\ &= 1 + \left(\left(\int (e_1 e_3) \right) e_1 + e_3' \right)^2 + \left(\left(\int (e_1 e_3) \right) e_2 + e_3^2 \right)^2 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\text{energy}(\mathcal{N}\phi(\mathbf{B}_q)) = \frac{1}{2} \int_0^S \left(1 + \left(\left(\int (e_1 e_3) \right) e_1 + e_3' \right)^2 + \left(\left(\int (e_1 e_3) \right) e_2 + e_3^2 \right)^2 \right)$$

olarak elde edilir.

8.3.1. Yarı-Binormal Manyetik Eğrilerde Normalleştirme Operatörünün Enerjisi

$$\mathcal{N}\phi(\mathbf{T}_q) = \mathcal{N}W = \left(\int (e_1 c + e_2^2) \right) \mathbf{T}_q + c \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q$$

olarak elde edildi. Bu denklemin türevi alındığında

$$(\mathcal{N}W)' = (e_1 c + e_2^2) \mathbf{T}_q + \left(\int (e_1 c + e_2^2) \right) \mathbf{T}_q' + c' \mathbf{N}_q + c \mathbf{N}_q' + e_2' \mathbf{B}_q + e_2 \mathbf{B}_q'$$

eşitliği oluşur. Daha önce elde ettiğimiz eşitlikler bu denklemden yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}W)' &= (e_1 c + e_2^2) \mathbf{T}_q + \left(\int (e_1 c + e_2^2) \right) (e_1 \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q) + c' \mathbf{N}_q \\ &\quad + c(-e_1 \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q) + e_2' \mathbf{B}_q + e_2(-e_2 \mathbf{T}_q - e_3 \mathbf{N}_q) \end{aligned}$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}W)' &= \mathbf{T}_q (e_1 c + e_2^2 - e_1 c - e_2^2) + \mathbf{N}_q \left(\left(\int (e_1 c + e_2^2) \right) e_1 + c' - e_2 e_3 \right) \\ &\quad + \mathbf{B}_q \left(\left(\int (e_1 c + e_2^2) \right) e_2 + c e_3 + e_2' \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}_q \cdot \mathbf{T}_q + \nabla_{\mathbf{T}_q} \mathcal{N}\phi(\mathbf{T}_q) \cdot \nabla_{\mathbf{T}_q} \mathcal{N}\phi(\mathbf{T}_q) \\ &= 1 + \left(\left(\int (e_1 c + e_2^2) \right) e_1 + c' - e_2 e_3 \right)^2 + \left(\left(\int (e_1 c + e_2^2) \right) e_2 + c e_3 + e_2' \right)^2 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\text{energy}(\mathcal{N}\phi(\mathbf{T}_q)) = \frac{1}{2} \int_0^S \left(1 + \left(\left(\int (e_1 c + e_2^2) \right) e_1 + c' - e_2 e_3 \right)^2 + \left(\left(\int (e_1 c + e_2^2) \right) e_2 + c e_3 + e_2' \right)^2 \right)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\mathcal{N}\phi(\mathbf{N}_q) = \mathcal{N}W = \left(\int (e_2 e_3) \right) \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q$$

olarak elde edildi. Bu denklemin türevi alınır

$$(\mathcal{N}W)' = (e_2e_3)\mathbf{T}_q + \left(\int (e_2e_3)\right)\mathbf{T}'_q + e'_3\mathbf{B}_q + e_3\mathbf{B}'_q$$

eşitliği oluşur. Daha önce elde edilen eşitlikler bu denklemde yerine yazılırsa

$$(\mathcal{N}W)' = (e_2e_3)\mathbf{T}_q + \left(\int (e_2e_3)\right)(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) + e'_3\mathbf{B}_q + e_3(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q)$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse

$$(\mathcal{N}W)' = \mathbf{T}_q(e_2e_3 - e_2e_3) + \mathbf{N}_q\left(\left(\int (e_2e_3)\right)e_1 - e_3^2\right) + \mathbf{B}_q\left(\left(\int (e_2e_3)\right)e_2 + e'_3\right)$$

bulunur. Bulunan bu degerler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \mathbf{N}_q \cdot \mathbf{N}_q + \nabla_{T_q} \mathcal{N}\phi(\mathbf{N}_q) \cdot \nabla_{T_q} \mathcal{N}\phi(\mathbf{N}_q) \\ &= 1 + \left(\left(\int (e_2e_3)\right)e_1 - e_3^2\right)^2 + \left(\left(\int (e_2e_3)\right)e_2 + e'_3\right)^2 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\text{energy}(\mathcal{N}\phi(\mathbf{N}_q)) = \frac{1}{2} \int_0^s \left(1 + \left(\left(\int (e_2e_3)\right)e_1 - e_3^2\right)^2 + \left(\left(\int (e_2e_3)\right)e_2 + e'_3\right)^2\right)$$

Olarak bulunur.

8.1.2. Yarı-Hızlı Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörünün Enerjisi

$$\mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q) = \left(\int (2e_1^2e_2 - e_1c' + e_2e_3c)\right)\mathbf{T}_q + (e_1e_2 - c')\mathbf{N}_q + (e_1^2 + e_3c)\mathbf{B}_q$$

olarak elde edildi. Bu denklemin türevini alınırsa

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q))' &= (2e_1^2e_2 - e_1c' + e_2e_3c)\mathbf{T}_q + \left(\int (2e_1^2e_2 - e_1c' + e_2e_3c)\right)\mathbf{T}'_q \\ &+ (e'_1e_2 + e_1e'_2 - c'')\mathbf{N}_q + (e_1e_2 - c')\mathbf{N}'_q + (2e_1e'_1 + e'_3c + e_3c')\mathbf{B}_q \\ &+ (e_1^2 + e_3c)\mathbf{B}'_q \end{aligned}$$

eşitliği oluşur. Daha önce elde edilen eşitlikler bu denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q))' &= (2e_1^2e_2 - e_1c' + e_2e_3c)\mathbf{T}_q \\ &+ \left(\int (2e_1^2e_2 - e_1c' + e_2e_3c)\right)(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) + (e'_1e_2 + e_1e'_2 - c'')\mathbf{N}_q \\ &+ (e_1e_2 - c')(-e_1\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q) + (2e_1e'_1 + e'_3c + e_3c')\mathbf{B}_q \\ &+ (e_1^2 + e_3c)(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q) \end{aligned}$$

denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q))' &= \mathbf{N}_q \left(\left(\int (2e_1^2 e_2 - e_1 c' + e_2 e_3 c) \right) e_1 + (e_1' e_2 + e_1 e_2' - c'') \right. \\
 &\quad \left. - (e_1^2 e_3 + e_3^2 c) \right) \\
 &\quad + \mathbf{B}_q \left(\left(\int (2e_1^2 e_2 - e_1 c' + e_2 e_3 c) \right) e_2 + (2e_1 e_1' + e_3' c + e_3 c') \right. \\
 &\quad \left. + (e_1 e_2 e_3 - c' e_3) \right)
 \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_q \cdot \mathbf{N}_q + \nabla_{T_q} \mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q) \cdot \nabla_{T_q} \mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q) \\
 &= 1 \\
 &\quad + \left(\left(\int (2e_1^2 e_2 - e_1 c' + e_2 e_3 c) \right) e_1 + (e_1' e_2 + e_1 e_2' - c'') \right. \\
 &\quad \left. - (e_1^2 e_3 + e_3^2 c) \right)^2
 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q)) &= \frac{1}{2} \int_0^s \left(1 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\left(\int (2e_1^2 e_2 - e_1 c' + e_2 e_3 c) \right) e_1 + (e_1' e_2 + e_1 e_2' - c'') \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (e_1^2 e_3 + e_3^2 c) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\left(\int (2e_1^2 e_2 - e_1 c' + e_2 e_3 c) \right) e_2 + (2e_1 e_1' + e_3' c + e_3 c') \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (e_1 e_2 e_3 - c' e_3) \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde

$$\mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q) = \left(\int (2e_1 e_2^2 + c e_1 e_3 + c' e_2) \right) \mathbf{T}_q + (e_1 e_2 + c e_3) \mathbf{N}_q + (e_1^2 + c') \mathbf{B}_q$$

olarak elde edildi. Bu denklemin türevi alınır

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q))' &= (2e_1e_2^2 + ce_1e_3 + c'e_2)\mathbf{T}_q + \left(\int (2e_1e_2^2 + ce_1e_3 + c'e_2)\right)\mathbf{T}'_q \\
&\quad + (e'_1e_2 + e_1e'_2 + c'e_3 + ce'_3)\mathbf{N}_q + (e_1e_2 + ce_3)\mathbf{N}'_q + (2e_1e'_1 + c'')\mathbf{B}_q \\
&\quad + (e_1^2 + c')\mathbf{B}'_q
\end{aligned}$$

eşitliği oluşur. Daha önce elde ettiğimiz eşitlikler bu denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q))' &= (2e_1e_2^2 + ce_1e_3 + c'e_2)\mathbf{T}_q \\
&\quad + \left(\int (2e_1e_2^2 + ce_1e_3 + c'e_2)\right)(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) \\
&\quad + (e'_1e_2 + e_1e'_2 + c'e_3 + ce'_3)\mathbf{N}_q + (e_1e_2 + ce_3)(-e_1\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q) \\
&\quad + (2e_1e'_1 + c'')\mathbf{B}_q + (e_1^2 + c')(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q)
\end{aligned}$$

denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q))' &= \mathbf{N}_q \left(\left(\int (2e_1e_2^2 + ce_1e_3 + c'e_2) \right) e_1 + (e'_1e_2 + e_1e'_2 + c'e_3 + ce'_3) \right. \\
&\quad \left. - (e_1^2e_3 + c'e_3) \right) \\
&\quad + \mathbf{B}_q \left(\left(\int (2e_1e_2^2 + ce_1e_3 + c'e_2) \right) e_2 + (2e_1e'_1 + c'') \right. \\
&\quad \left. + (e_1e_2e_3 + ce_3^2) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu degerler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}_q \cdot \mathbf{B}_q + \nabla_{\mathbf{T}_q} \mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q) \cdot \nabla_{\mathbf{T}_q} \mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q) \\
&= 1 \\
&\quad + \left(\left(\int (2e_1e_2^2 + ce_1e_3 + c'e_2) \right) e_1 + (e'_1e_2 + e_1e'_2 + c'e_3 + ce'_3) \right. \\
&\quad \left. - (e_1^2e_3 + c'e_3) \right)^2 \\
&\quad + \left(\left(\int (2e_1e_2^2 + ce_1e_3 + c'e_2) \right) e_2 + (2e_1e'_1 + c'') + (e_1e_2e_3 + ce_3^2) \right)^2
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
& \text{energy}(\mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q)) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^s \left(1 \right. \\
&+ \left(\left(\int (2e_1e_2^2 + ce_1e_3 + c'e_2) \right) e_1 + (e_1'e_2 + e_1e_2' + c'e_3 + ce_3') \right. \\
&- \left. \left. (e_1^2e_3 + c'e_3) \right)^2 \right. \\
&+ \left(\left(\int (2e_1e_2^2 + ce_1e_3 + c'e_2) \right) e_2 + (2e_1e_1' + c'') \right. \\
&+ \left. \left. (e_1e_2e_3 + ce_3^2) \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

8.2.2. Yarı-Normal Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörünün Enerjisi

$$\mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q) = \left(- \int (e_1(e_1e_3 + c') + e_2(e_1' - ce_3)) \right) \mathbf{T}_q - (e_1e_3 + c') \mathbf{N}_q + (ce_3 - e_1') \mathbf{B}_q$$

olarak elde edildi. Bu denklemin türevi alınır

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q))' &= -(e_1(e_1e_3 + c') + e_2(e_1' - ce_3)) \mathbf{T}_q \\
&+ \left(- \int (e_1(e_1e_3 + c') + e_2(e_1' - ce_3)) \right) \mathbf{T}'_q - (e_1'e_3 + e_1e_3' + c'') \mathbf{N}_q \\
&- (e_1e_3 + c') \mathbf{N}'_q + (c'e_3 + ce_3' - e_1'') \mathbf{B}_q + (ce_3 - e_1') \mathbf{B}'_q
\end{aligned}$$

eşitliği oluşur. Daha önce elde edilen eşitlikler bu denkleme yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q))' &= -(e_1(e_1e_3 + c') + e_2(e_1' - ce_3)) \mathbf{T}_q \\
&+ \left(- \int (e_1(e_1e_3 + c') + e_2(e_1' - ce_3)) \right) (e_1 \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q) \\
&- (e_1'e_3 + e_1e_3' + c'') \mathbf{N}_q - (e_1e_3 + c') (-e_1 \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q) \\
&+ (c'e_3 + ce_3' - e_1'') \mathbf{B}_q + (ce_3 - e_1') (-e_2 \mathbf{T}_q - e_3 \mathbf{N}_q)
\end{aligned}$$

denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q))' &= \mathbf{N}_q \left(\left(- \int (e_1(e_1 e_3 + c') + e_2(e_1' - c e_3)) \right) e_1 - (e_1' e_3 + e_1 e_3' + c'') \right. \\
&\quad \left. - (c e_3^2 - e_1' e_3) \right) \\
&\quad + \mathbf{B}_q \left(\left(- \int (e_1(e_1 e_3 + c') + e_2(e_1' - c e_3)) \right) e_2 + (c' e_3 + c e_3' - e_1'') \right. \\
&\quad \left. - (e_1 e_3^2 + c' e_3) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu degerler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_q \cdot \mathbf{T}_q + \nabla_{\mathbf{T}_q} \mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q) \cdot \nabla_{\mathbf{T}_q} \mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q) \\
&= 1 \\
&\quad - \left(\left(\int (e_1(e_1 e_3 + c') + e_2(e_1' - c e_3)) \right) e_1 + (e_1' e_3 + e_1 e_3' + c'') \right. \\
&\quad \left. + (c e_3^2 - e_1' e_3) \right)^2 \\
&\quad - \left(\left(\int (e_1(e_1 e_3 + c') + e_2(e_1' - c e_3)) \right) e_2 - (c' e_3 + c e_3' - e_1'') \right. \\
&\quad \left. + (e_1 e_3^2 + c' e_3) \right)^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\text{energy}(\mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q)) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^s \left(1 \right. \\
&\quad - \left(\left(\int (e_1(e_1 e_3 + c') + e_2(e_1' - c e_3)) \right) e_1 + (e_1' e_3 + e_1 e_3' + c'') \right. \\
&\quad \left. + (c e_3^2 - e_1' e_3) \right)^2 \\
&\quad - \left(\left(\int (e_1(e_1 e_3 + c') + e_2(e_1' - c e_3)) \right) e_2 - (c' e_3 + c e_3' - e_1'') \right. \\
&\quad \left. + (e_1 e_3^2 + c' e_3) \right)^2 \Bigg)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q) = \left(\int (2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3') \right) \mathbf{T}_q + (ce_2 + e_3^2) \mathbf{N}_q + (ce_1 + e_3') \mathbf{B}_q$$

olarak elde edilmişti. Bu denklemin türevi alınır

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q))' &= ((2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3')) \mathbf{T}_q + \left(\int (2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3') \right) \mathbf{T}'_q \\ &\quad + (c'e_2 + ce_2' + 2e_3e_3') \mathbf{N}_q + (ce_2 + e_3^2) \mathbf{N}'_q + (ce_1 + e_3') \\ &\quad + (c'e_1 + e_1' + e_3'') \mathbf{B}_q + (ce_1 + e_3') \mathbf{B}'_q \end{aligned}$$

eşitliği oluşur. Daha önce elde ettiğimiz eşitlikler bu denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q))' &= ((2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3')) \mathbf{T}_q \\ &\quad + \left(\int (2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3') \right) (e_1 \mathbf{N}_q + e_2 \mathbf{B}_q) \\ &\quad + (c'e_2 + ce_2' + 2e_3e_3') \mathbf{N}_q + (ce_2 + e_3^2) (-e_1 \mathbf{T}_q + e_3 \mathbf{B}_q) \\ &\quad + (c'e_1 + ce_1' + e_3'') \mathbf{B}_q + (ce_1 + e_3') (-e_2 \mathbf{T}_q - e_3 \mathbf{N}_q) \end{aligned}$$

denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q))' &= \mathbf{N}_q \left(\left(\int (2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3') \right) e_1 + (c'e_2 + ce_2' + 2e_3e_3') \right. \\ &\quad \left. - (ce_1e_3 + e_3e_3') \right) \\ &\quad + \mathbf{B}_q \left(\left(\int (2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3') \right) e_2 + (c'e_1 + ce_1' + e_3'') \right. \\ &\quad \left. + (ce_2e_3 + e_3^3) \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B}_q \cdot \mathbf{B}_q + \nabla_{T_q} \mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q) \cdot \nabla_{T_q} \mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q) \\
& = 1 \\
& + \left(\left(\int (2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3') \right) e_1 + (c'e_2 + ce_2' + 2e_3e_3') \right. \\
& \left. - (ce_1e_3 + e_3e_3') \right)^2 \\
& + \left(\left(\int (2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3') \right) e_2 + (c'e_1 + ce_1' + e_3'') \right. \\
& \left. + (ce_2e_3 + e_3^3) \right)^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
& \text{energy}(\mathcal{R}\phi(\mathbf{B}_q)) \\
& = \frac{1}{2} \int_0^s \left(1 \right. \\
& \left. + \left(\left(\int (2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3') \right) e_1 + (c'e_2 + ce_2' + 2e_3e_3') \right. \right. \\
& \left. \left. - (ce_1e_3 + e_3e_3') \right)^2 \right. \\
& \left. + \left(\left(\int (2ce_1e_2 + e_3^2e_1 + e_2e_3') \right) e_2 + (c'e_1 + ce_1' + e_3'') \right. \right. \\
& \left. \left. + (ce_2e_3 + e_3^3) \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

8.3.2. Yarı-Binormal Manyetik Eğrilerde Yineleme Operatörünün Enerjisi

$$\mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q) = \left(- \int e_1(e_3c + e_2') + e_2(c' - e_2e_3) \right) \mathbf{T}_q - (e_3c + e_2') \mathbf{N}_q + (e_2e_3 - c') \mathbf{B}_q$$

olarak elde edildi. Bu denklemin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q) \right)' = -(e_1(e_3c + e_2') + e_2(c' - e_2e_3)) \mathbf{T}_q \\
& + \left(- \int e_1(e_3c + e_2') + e_2(c' - e_2e_3) \right) \mathbf{T}'_q - (e_3'c + e_3c' + e_2'') \mathbf{N}_q \\
& - (e_3c + e_2') \mathbf{N}'_q + (e_2'e_3 + e_2e_3' - c'') \mathbf{B}_q + (e_2e_3 - c') \mathbf{B}'_q
\end{aligned}$$

eşitliği oluşur. Daha önce elde ettiğimiz eşitlikler bu denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q))' &= -(e_1(e_3c + e_2') + e_2(c' - e_2e_3))\mathbf{T}_q \\
&\quad + \left(-\int e_1(e_3c + e_2') + e_2(c' - e_2e_3)\right)(e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) \\
&\quad - (e_3'c + e_3c' + e_2'')\mathbf{N}_q - (e_3c + e_2')(-e_1\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q) \\
&\quad + (e_2'e_3 + e_2e_3' - c'')\mathbf{B}_q + (e_2e_3 - c')(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q)
\end{aligned}$$

denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q))' &= \mathbf{N}_q \left(\left(-\int e_1(e_3c + e_2') + e_2(c' - e_2e_3) \right) e_1 - (e_3'c + e_3c' + e_2'') \right. \\
&\quad \left. - (e_2e_3^2 - c'e_3) \right) \\
&\quad + \mathbf{B}_q \left(\left(-\int e_1(e_3c + e_2') + e_2(c' - e_2e_3) \right) e_2 + (e_2'e_3 + e_2e_3' - c'') \right. \\
&\quad \left. - (e_3^2c - e_2'e_3) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu degerler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_q \cdot \mathbf{T}_q + \nabla_{\mathbf{T}_q} \mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q) \cdot \nabla_{\mathbf{T}_q} \mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q) \\
&= 1 \\
&\quad + \left(\left(\int e_1(e_3c + e_2') + e_2(c' - e_2e_3) \right) e_1 + (e_3'c + e_3c' + e_2'') \right. \\
&\quad \left. + (e_2e_3^2 - c'e_3) \right)^2 \\
&\quad - \left(\left(\int e_1(e_3c + e_2') + e_2(c' - e_2e_3) \right) e_2 - (e_2'e_3 + e_2e_3' - c'') \right. \\
&\quad \left. + (e_3^2c - e_2'e_3) \right)^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \text{energy}(\mathcal{R}\phi(\mathbf{T}_q)) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^s \left(1 \right. \\
&+ \left(\left(\int e_1(e_3c + e'_2) + e_2(c' - e_2e_3) \right) e_1 + (e'_3c + e_3c' + e''_2) \right. \\
&+ \left. \left. (e_2e_3^2 - c'e_3) \right)^2 \right. \\
&- \left(\left(\int e_1(e_3c + e'_2) + e_2(c' - e_2e_3) \right) e_2 - (e'_2e_3 + e_2e'_3 - c'') \right. \\
&+ \left. \left. (e_3^2c - e'_2e_3) \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Öte yandan

$$\mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q) = \left(\int (2e_1e_2c - e'_3e_1 + e_2e_3^2) \right) \mathbf{T}_q + (ce_2 - e'_3)\mathbf{N}_q + (ce_1 + e_3^2)\mathbf{B}_q$$

olduğu bulunmuştu. Bu denklemin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q))' &= (2e_1e_2c - e'_3e_1 + e_2e_3^2)\mathbf{T}_q + \left(\int (2e_1e_2c - e'_3e_1 + e_2e_3^2) \right) \mathbf{T}'_q \\
&+ (c'e_2 + ce'_2 - e''_3)\mathbf{N}_q + (ce_2 - e'_3)\mathbf{N}'_q + (2e_3e'_3 + e'_1c + e_1c')\mathbf{B}_q \\
&+ (ce_1 + e_3^2)\mathbf{B}'_q
\end{aligned}$$

eşitliği oluşur. Daha önce elde edilen eşitlikler bu denklemden yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\phi(\mathbf{N}_q))' &= (2e_1e_2c - e'_3e_1 + e_2e_3^2)\mathbf{T}_q \\
&+ \left(\int (2e_1e_2c - e'_3e_1 + e_2e_3^2) \right) (e_1\mathbf{N}_q + e_2\mathbf{B}_q) + (c'e_2 + ce'_2 - e''_3)\mathbf{N}_q \\
&+ (ce_2 - e'_3)(-e_1\mathbf{T}_q + e_3\mathbf{B}_q) + (2e_3e'_3 + e'_1c + e_1c')\mathbf{B}_q \\
&+ (ce_1 + e_3^2)(-e_2\mathbf{T}_q - e_3\mathbf{N}_q)
\end{aligned}$$

olur ve denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\phi(N_q)) &= N_q \left(\left(\int (2e_1e_2c - e'_3e_1 + e_2e_3^2) \right) e_1 + (c'e_2 + ce'_2 - e''_3) \right. \\
&\quad \left. + (ce_1e_3 + e_3^3) \right) \\
&\quad + B_q \left(\left(\int (2e_1e_2c - e'_3e_1 + e_2e_3^2) \right) e_2 + (2e_3e'_3 + e'_1c + e_1c') \right. \\
&\quad \left. + (ce_2e_3 - e_3e'_3) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu degerler (8.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
N_q \cdot N_q + \nabla_{T_q} \mathcal{R}\phi(N_q) \cdot \nabla_{T_q} \mathcal{R}\phi(N_q) \\
&= 1 \\
&\quad + \left(\left(\int (2e_1e_2c - e'_3e_1 + e_2e_3^2) \right) e_1 + (c'e_2 + ce'_2 - e''_3) \right. \\
&\quad \left. + (ce_1e_3 + e_3^3) \right)^2 \\
&\quad + \left(\left(\int (2e_1e_2c - e'_3e_1 + e_2e_3^2) \right) e_2 + (2e_3e'_3 + e'_1c + e_1c') \right. \\
&\quad \left. + (ce_2e_3 - e_3e'_3) \right)^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
energy(\mathcal{R}\phi(N_q)) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^s \left(1 \right. \\
&\quad + \left(\left(\int (2e_1e_2c - e'_3e_1 + e_2e_3^2) \right) e_1 + (c'e_2 + ce'_2 - e''_3) \right. \\
&\quad \left. + (ce_1e_3 + e_3^3) \right)^2 \\
&\quad + \left(\left(\int (2e_1e_2c - e'_3e_1 + e_2e_3^2) \right) e_2 + (2e_3e'_3 + e'_1c + e_1c') \right. \\
&\quad \left. + (ce_2e_3 - e_3e'_3) \right)^2 \Bigg)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız.

SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmasında öncelikle Küresel uzayda bazı manyetik eğriler tanıtılarak bu eğrilerin normalleştirme ve yineleme operatörleri incelendi. Ayrıca yarı-manyetik eğriler gösterilerek normalleştirme ve yineleme operatörleri bulunarak enerjileri hesaplandı. Buradan hareketle farklı manifoldlar üzerinde manyetik eğrilerin ve bunlara karşılık gelen manyetik alanların yineleme operatörü tanımlanabildiği ve enerjilerinin hesaplanabildiği ispatlanmıştır.

5.2 Öneriler

Manyetik eğriler disiplinlerarası bir konu olup bir çok uygulama alanına sahiptir. Bu konuyla ilgili çalışmaların bize bir çok olumlu sonuçları olmuştur. Bu nedenle çalışmalar arttırılmalıdır.

KAYNAKLAR

- Anonymous, 2012, Lorentz Force on a Charged Particle, Wikipedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lorentz_force_particle.svg [Erişim Tarihi:11/09/2012]
- Bal, Ç., 1998, Manyetik Alan, Turkey, http://www.zamandayolculuk.com/html-3/manyetik_alan.html/
- Barros, M., Cabrerizo, L., Fernandez, M., Romeo, A. 2007. Magnetic Vortex Filament Flows, *J Math Phys*, 48, 1-27
- Bishop, R.L. 1975. There is more than one way to frame a curve, *The Amer. Math. Monthly*, 82(3), 246-251.
- Boothby, W.M. 1975. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, *Academic Press*, New York, San Francisco, London.
- Bozkurt, Z., Gök I., Yaylı Y., Ekmekçi F.N. 2014. A New Approach for Magnetic Curves in Riemannian 3D-Manifolds. *J. Math. Phys.* 55, 1-12.
- Hacısalıhoğlu, H.H., Ekmekçi F.N., 2003, Tensör Geometri, *Hacısalıhoğlu Yayınları*, Ankara, 251.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 2000, Diferansiyel Geometri, *Hacısalıhoğlu Yayınları*, Ankara, 340.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 2002, Diferansiyel Geometri, *Fen Fakültesi Yayınları*, Ankara, 269.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1980, Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş, *Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları*, İstanbul, 439.
- H.S. Abdel Aziz, M. K. Saad, H. A. Ali. 2018. Some properties of special magnetic curves. *International Journal of Analysis and Applications*, 16, 193-208
- Kobayashi, S., Nomizu, K., 1996, Foundations of Differential geometry, *Wiley-Interscience Publication*, 348
- Körpınar T, Demirkol R.C., 2018, On the Geometric Modelling of the Energy of Quasi Magnetic Curves, *Journal of Advanced Physics*, 7, 1-7.
- Langer, J., R. Perline. 1990. The Hasimoto Transformation and Integrable Flows on Curves, *Appl. Math. Lett.*, 3 , 61–64.
- O'Neill, B. 1996. Elementary Differential Geometry, *Academic Press*, New York, London, 520.
- Özdemir, Z., Gök, İ., Yaylı, Y., Ekmekçi, F.N. 2015. Notes on Magnetic Curves in 3D semi-Riemannian Manifolds, *Turk J. Math.*, 39, 412-426.
- Sabuncuoğlu, A., 2001, Diferansiyel Geometri, *Nobel Yayınları*, Ankara, 522.
- Synge, J.L., 1960, Relativity: The General Theory, *North Holland*, Amsterdam, 505.