T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI İNTEGRO DENKLEM MODELLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL DAVRANIŞLARI

Ayla KARTAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2021
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI İNTEGRO DENKLEM MODELLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL DAVRANIŞLARI

Ayla KARTAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Haziran-2021
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Ayla KARTAL tarafından hazırlanan “Bazı İntegro Denklem Modellerinin Çözümlerinin Niteliksel Davranışları” adlı tez çalışması …/…/… tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Doç. Dr. Kenan YILDIRIM
Muş Alparslan Üniversitesi
Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri ………………….
Danışman
Doç. Dr. Erdal KORKMAZ …………………..
Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Üye
Dr. Öğretim Üyesi Osman Tunç
Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Fen Fakültesi, Matematik Bölümü …………………..

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu …../……/……. Tarih ve ………/……….. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Ayla KARTAL

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI İNTEGRO DENKLEM MODELLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL DAVRANIŞLARI

Ayla KARTAL

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

Bu tez çalışmasında; integral denklemler ile Volterra integro-diferansiyel denklem modellerinin çözümlerinin niteliksel analizleri incelendi. İntegro-diferansiyel denklem modelleri ve bu denklem modellerinin çözümlerinin kararlılık, sınırlılık vb. gibi nitel özelliklerinin belirlenmesi için gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilerek kullandığımız Lyapunov' un ikinci metodu tanıtıldı. Esnek bir Lyapunov fonksiyoneli kullanılarak lineer ve lineer olmayan çeşitli integral denklemlerin çözümlerinin nitel özellikleri araştırıldı. Sonsuz gecikmeli lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerde Lyapunov fonksiyonları kullanılarak düzgün kararlılıkları analiz edildi. Lineer olmayan fonksiyonel diferansiyel sistemlerinin sıfır çözümünün üstel asimptotik kararlılığını ve düzgün üstel asimptotik kararlılığını garanti eden yeterli koşulları elde etmek için kesin negatif olmayan Lyapunov fonksiyonelleri kullanıldı.

2021, 55 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Kararlılık, Lyapunov Fonksiyonu, Lyapunov İkinci Metodu, Lineer Olmayan Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler

ABSTRACT

MS THESIS

QUALITATIVE BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF SOME INTEGRO EQUATION MODELS

Ayla KARTAL

Muş Alparslan University
Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal KORKMAZ

In this thesis study; Qualitative analyzes of the solutions of integral equations and Volterra integro-differential equation models were examined. Integro-differential equation models and the stability, limitation, etc. of the solutions of these equation models. Lyapunov's second method, which we used, was introduced by giving place to the basic definitions and theorems necessary for the determination of qualitative characteristics such as The qualitative properties of the solutions of various linear and non-linear integral equations were investigated using a flexible Lyapunov functional. Uniform stability was analyzed using Lyapunov functions in infinitely delayed nonlinear Volterra integro-differential equations. Strictly non-negative Lyapunov functionals were used to obtain sufficient conditions that guarantee the exponential asymptotic stability and uniform exponential asymptotic stability of the zero solution of nonlinear functional differential systems.

2021, 55 Pages

Keywords: Stability, Lyapunov Functionals, Lyapunov Second Method, Nonlinear Volterra Integro-Differential Equations,

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, özellikle bu süreçte bana büyük sabır gösteren çok kıymetli danışman hocam sayın Doç. Dr. Erdal KORKMAZ' a sonsuz teşekkür eder saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ayla KARTAL
MUŞ-2021

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

δ	:	Delta
ε	:	Epsilon
γ	:	Gama
τ	:	Tau
λ	:	Lambda
$\|.\|$	:	Norm
μ	:	Mü
$\ni$	:	Öyle ki
R	:	Reel sayılar kümesi

Kısaltmalar

ODE	:	Adi Diferansiyel Denklem
FDE	:	Fredholm Diferansiyel Denklem
UEAS	:	Düzgün Üstel Asimptotik Kararlılık
LF	:	Lyapunov Fonksiyonu
VIDE	:	Volterra İntegro Diferansiyel Denklem

1. GİRİŞ

Adi diferansiyel denklemler ve integro-diferansiyel denklemler için nitel teoride önemli bir konu Lyapunov' un ikinci metodudur. Lyapunov' un ikinci metodu, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin kararlılık davranışlarını incelemede kullanılan, en iyi sonuçları veren metotlardan biridir. Bu metodun özelliği, çözümlere yönelik herhangi bir ön bilgi sahibi olmaksızın çözümlerin kararlılığı hakkında bilgi vermesidir. Bu metodu 1892' de kullanan Lyapunov, bu metodu sadece basit kararlılık teoremlerini kurmak için kullanmasına rağmen onun bu basit düşünceleri son 40 yıl boyunca fizik ve mühendislikte yeni problemlere etkili bir şekilde uygulanmaktadır. Bu gün bu metot sadece diferansiyel denklemler teorisinde değil aynı zamanda kontrol sistemler teorisinde, kuvvet sistemler analizinde, dinamik sistemlerde ve feedback sistemlerde etkili bir araç olarak kullanılmaktadır.

Öncelikle Burton ve ark. (1985) Volterra integro-diferansiyel denklem için geçerli görünen bir Lyapunov teorisini geliştirdiler. Çözümler boyunca artmayan veya kesin olarak azalan Lyapunov fonksiyonlarını kullandılar. Teorik olarak bu yöntemin çok sayıda uygulaması mevcuttur. Bununla birlikte sıradan bir diferansiyel denklem veya fonksiyonel bir Volterra integro-diferansiyel denklem için uygun bir Lyapunov fonksiyonu bulmak oldukça zor bir iştir. Yöntemin temel gereksinimi, çözümler boyunca kesinlikle azalan olmayan pozitif bir fonksiyon bulmaktır. Bu durumda sıradan bir diferansiyel denklemi bir integro-diferansiyel denklem ya da fonksiyonel bir diferansiyel denklem ile değiştirdiğimizde durum daha da zorlaşıyor. Dahası literatürde Volterra integro-diferansiyel denklemlerin nitel davranışları hakkında son zamanlarda araştırmacılar tarafından dikkate değer çalışmalar yapılmaktadır. Bu da bizi bu yönde bir çalışmaya sevk etmektedir.

Bu çalışmada sabit bir gecikme ile birinci dereceden skaler ve vektör lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığı, sınırlılığı, yakınsaklığı Lyapunov' un ikinci metodu kullanılarak incelenmiştir. Sonsuz gecikmeli lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel analizleri de yine Lyapunov' un ikinci metodu kullanılarak ele alınmıştır.

Kesin negatif olmayan Lyapunov fonksiyonelleri, doğrusal olmayan fonksiyonel diferansiyel sistemlerin sıfır çözümünün üstel asimptotik kararlılığını ve düzgün üstel asimptotik kararlılığını garanti eden yeterli koşulları elde etmek için kullanılır. Teori, Volterra integro-diferansiyel denklemlerine önerme örnekleri şeklinde uygulanır.

Sabit zaman gecikmeli lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler için Lyapunov fonksiyonu tanımlandı ve bunlar dikkate alınan sıfır çözümlerin düzgün üstel asimptotik kararlılığını garanti eden özel koşulları elde etmek için kullanılır. Elde edilen sonuçlar genelleştirildiğinde gecikmesiz durumlardan zaman gecikmeli daha genel durumlara kadar literatürdeki mevcut sonuçları tamamlar ve iyileştirir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Son kırk yıl boyunca, Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışlarına yönelik çok sayıda sonuçlar elde edilmektedir. Bu çalışmalardan Becker (2009), Burton (1979; 1982; 2005; 2009), Burton ve Haddock (2009), Burton ve Mahfoud (1983; 1985), Miller (1971), Staffans (1988) çok önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Adi diferansiyel denklemler ve integro-diferansiyel denklemler için nitel teoride önemli bir noktanın Lyapunov' un ikinci metodu olduğu belirtilmelidir.

Sonsuz gecikmeli lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denkleminin sıfır çözümünün üstel kararlılığı analiz edilmiştir (Raffoul, 2013).

$$x'(t) = \int_{t-r}^{t} C(t,s)g\big(x(s)\big)ds, \tag{2.1}$$

denklemi için $r > 0$ ve C' nin her iki argümanı da süreklidir. $g(x): R \to R$ bir fonksiyon ve x süreklidir. (2.1) denklemi nükleer reaktörlerin çalışmasını araştırmaktadır ve sıfır çözümün kararlılığı Brownell ve Ergen tarafından 1954' de incelenmiştir. Daha sonra aynı çalışma 1960' ta Nohel ve 1964' te Levin ve Nohel tarafından yeniden incelenmiştir.

Son zamanlarda Burton, Lyapunov fonsiyonunun kullanımından kaynaklanan bazı zorlukları hafifletmek için sabit nokta teorisi kavramını kullanmış (2.1) denkleminin sıfır çözümünün kararlılığı ve asimptotik kararlılığı için skaler sonuçlar elde etmiştir (Burton, 2003). Raffoul çalışmalarının sonuçlarını sonsuz gecikmeli lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem (2.2)' ye genişletme konusunda açık bir problem önermiştir.

$$x'(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t,s)g\left(x(s)\right)ds \tag{2.2}$$

Son altı yılda açık sorunla ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Fakat hiçbirinin doğru çözümü bulunamamıştır. Buradaki zorluk sonsuz gecikmenin varlığından kaynaklanmaktadır. Bu da işleme uygun bir Lyapunov fonksiyonu bulunmasını imkansız olmasa bile çok zorlaştırmaktadır (Raffoul ve Rai, 2016).

Lyapunov' un doğrudan yöntemi, adi diferansiyel denklemlerin (ODE)' ler nitel çalışmasında güçlü bir uygulama haline gelmiştir. Son yirmi yıl içerisinde bu teknik fonksiyonel diferansiyel denklemlere birçok araştırmacı tarafından uygulanmıştır. Lyapunov fonksiyonları (ODE)' lerin araştırılmasında kullanılırken daha genel olarak Lyapunov fonksiyonlarının (FDE)' ler ve (IDE)' lerin çalışmasında kullanıldığı bilinmektedir. (VIDE)' ler, (FDE)' ler olarak da ele alınabileceğinden Lyapunov fonksiyonları Adıvar ve Raffoul (2012), Becker (2007), Becker (2009), Becker (2013), Burton (1979), Burton (1982), Burton (2005), Burton ve ark. (1985), Burton ve Mahfoud (1983), Burton ve Mahfoud (1985), Corduneanu (1973), Diamandescu (2006), Eloe ve ark. (2000), Furumochi and Matsuoka (1999), Graef and Tunç (2015), Graef ve ark. (2016), Grimmer and Seifert (1975), Gripenberg ve ark. (1990), Hara ve ark. (1990), Islam ve Raffoul (2014), Jordan (1979), Levin (1963), Mahfoud (1987), Miller (1971), Raffoul (2004), Raffoul (2007), Raffoul (2009), Raffoul ve Ren (2016), Raffoul ve Unal (2014), Rama Mohanna Rao ve Srinivas (1985), Staffans (1988), Tunç (2016), Tunç ve Ayhan (2015), Vanualailai ve Nakagiri (2003), Wang (2000), Wazwaz (2011), Zhang, (2005), Da Zhang (1990) tarafından çeşitli (VIDE)' ler için özel olarak oluşturulmuş ve tanımlanmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Temel Kavramlar

$f \epsilon C(R^n, R^n)$ olmak üzere $x' = f(x)$ formundaki diferansiyel denklemini ele alacağız. Farz edelim ki bu denklem sisteminin çözümlerinin varlığını ve tekliğini sağlamak için f yeterince düzgündür. Orijinin komşuluğunda $x \neq 0$ için $f(x) \neq 0$ ve $f(0) = 0$ olsun ki diferansiyel denklem $x = 0$ denilen sıfır çözümü sağlar ve orijin diferansiyel denklemin izole edilen kritik noktasıdır. Ω, orijini içeren R^n' de bir açık küme olsun. Farz edelim ki $V(x)$, Ω üzerinde tanımlanan bir sürekli skaler fonksiyondur. f, sürekli ise çözüm vardır. f, Lipstchitz şartını sağlarsa çözüm tektir. (Herhangi bir çözüm sıfır çözüme dönüştürülebilir.) Geometrik olarak kolay yorumlanabilmesi adına biz Öklid normunu kullanırız.

$$\|x\|^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2$$

Burada geliştirilen teori $\|x\| = \sum_{j=1}^{n} |x_i|$ ile tanımlanan $x \in R^n$ bir vektör fonksiyonunun normu için eş derecede geçerlidir.

Tanım 3.1 $x \in \Omega$ olsun. $x \neq 0$ için $V(x) > 0$ ve $V(0) = 0$ ise $V(x)$ skaler fonksiyonuna Ω kümesi üzerinde pozitif tanımlı denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.2 $x \in \Omega$ olsun. $V(0) = 0$ ve $x \neq 0$ için $V(x) \geq 0$ ise $V(x)$ skaler fonksiyonuna Ω kümesi üzerinde yarı pozitif tanımlı denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.3 $-V(x)$ skaler fonksiyonu pozitif tanımlı ise $V(x)$ fonksiyonuna negatif tanımlıdır, $-V(x)$ fonksiyonuna yarı pozitif tanımlı ise $V(x)$ fonksiyonuna yarı negatif tanımlı denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Fiziksel fenomen tanımlanan matematiksel modeller ya da denklemler çoğunlukla $\mathrm{x}(\mathrm{t}_0) = \mathrm{x}_0$ başlangıç bilgisi ile birlikte,

$$\mathrm{x}' = \mathrm{F}(\mathrm{t}, \mathrm{x}) \tag{3.1}$$

formundaki adi diferansiyel denklemlerdir. Genellikle tüm ölçüm türlerinden kaynaklanan ilk verilerde hata olabileceğinden, ilk verilerdeki küçük farklılıkların (3.1)' in çözümlerinin istenen davranışını ne kadar etkilediğini bilmek önemlidir. İlk verilerde yeterince küçük bir değişiklik yapılması durumunda, ilgili çözümde önemli bir sapma gözlenirse, o zaman verilen başlangıç verilerinden elde edilen çözüm kabul edilemezdir, çünkü gerekli fenomeni yaklaşık olarak tanımlamamaktadır.

Çözümlerin kayda değer bir şekilde istenen davranıştan sapmasına izin vermeyecek koşulların araştırılması problemi, bunun için önemlidir. (3.1)' in çözümlerinin davranışlarıyla ilgili bu tür problemlerle ilgilenen matematik alanı genellikle kararlılık teorisi olarak tercih edilir. $t_0 \geq 0$ sağında var olan (t_0, x_0) başlangıç noktasından geçen (3.1)' in bir çözümü $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ olsun. Biz x(t) çözümü için kararlılığın temel kavramlarını tanıştırmadan önce t_0 ve x_0 başlangıç değerleri üzerine $x(t, t_0, x_0)$ çözümlerinin sürekli bağımlılığına ilişkin bir sonuç ispatlayacağız.

Teorem 3.1 $F(t, x)$ fonksiyonu $B = \{(t, x): t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha, \|x - x_0\| \leq b\}$ kümesinde sürekli ve $(t, x_1), (t, x_2) \in B$ için,

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq K. \|x_1 - x_2\|$$

Lipschitz şartını sağlasın. O zaman $x_n \to x_0$ demek $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ için $x(t, t_0, x_n) \to x(t, t_0 x_0)$ düzgün demektir (Ahmad ve Rao, 1999).

İspat: Sırasıyla (t_0, x_0) ve (t_0, x_n) den geçen (3.1)' in herhangi iki çözümü $x(t, t_0, x_0)$ ve $x(t, t_0, x_n)$ olsun.

$$x(t, t_0, x_n) = x_n + \int_{t_0}^{t} F\big(s, x(s, t_0, x_n)\big) ds,$$

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, x(s, t_0, x_0)\big) ds$$

Lipchitz şartını kullanarak $t \geq t_0$ için,

$$\|x(t, t_0, x_n) - x(t, t_0, x_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \int_{t_0}^{t} K\|x(s, t_0, x_n) - x(s, t_0, x_0)\| \, ds.$$

$$\|x(t, t_0, x_n) - x(t, t_0, x_0)\| \leq \|x_n - x_0\|. \exp(K\alpha)$$

Bu sonucu ima eder. Biz şimdi (3.1)' in $x(t, t_0, x_0)$ çözümü için çeşitli kararlılık kavramları tanımlarız ve bu kavramların eşdeğer olmadığını örneklerle göreceğiz. Bundan sonra kararlılıkla biz $[t_0, \infty]$ aralığı üzerinde kararlılığı kastediyoruz.

Tanım 3.4 $x(t)$, (3.1)' in çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (3.1) in herhangi bir $\bar{x}(t) = x(t, t_0, \bar{x}_0)$ çözümü için $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.1) 'in $x(t)$ çözümüne kararlı denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.5 Eğer (3.1)'in $x(t)$ çözümü kararlı ve bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ var $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\bar{x}(t) - x(t)\| \to 0$ oluyorsa (3.1)' in $x(t)$ çözümüne asimptotik kararlı denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.6 Eğer (3.1)' in $x(t)$ çözümü kararlı değilse kararsız olarak bilinir. Birinci ve üçüncü tanımlar 1892' de A. M. Lyapunov tarafından önerilmiştir. Bunlar (3.1)' in sağ tarafındaki küçük farklılıklar altında kararlılığın korunmasına izin vermediği için biraz zayıftır. Bu nedenle, sürekli hareket eden pertürbasyonlar altında çözümlerin kararlılığını tartışmak için aşağıdaki güçlü kavramlara ihtiyacımız var (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.7 $x(t)$, (3.1)' in çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (3.1)' in herhangi bir $\overline{x}(t) = x(t, t_0, \overline{x}_0)$ çözümü ve $t_1 > t_0$ için $\|\overline{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta$ iken her $t > t_1$ için $\|\overline{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.1)'in $x(t)$ çözümüne düzgün kararlı denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.8 Eğer (3.1)' in $x(t)$, çözümü düzgün kararlı ve bir $\delta_0 > 0$ vardır ve her bir $\eta > 0$ için bir $T = T(\eta) > 0$ vardır ki $t_1 \geq t_0$ için $\|\overline{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta_0$ iken her $t \geq t_1 + T$ için $\|\overline{x}(t) - x(t)\| < \eta$ oluyorsa (3.1)' in $x(t)$ çözümüne düzgün asiptotik kararlı denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.9 $x(t)$, (3.1)' in çözümü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki (3.1)' in herhangi bir $\overline{x}(t) = x(t, t_0, \overline{x}_0)$ çözümü ve $t_1 > t_0$ için $\|\overline{x}(t_1) - x(t_1)\| \leq \delta$ iken her $t \geq t_0$ için $\|\overline{x}(t) - x(t)\| < \varepsilon$ oluyorsa (3.1)' in $x(t)$ çözümüne kuvvetli kararlı denir (Ahmad ve Rao, 1999).

Not 3.1 Birinci tanımda δ başlangıç anı t_0 bağlı iken dördüncü tanımda δ, t_0' dan bağımsızdır. Tanımlardan; kuvvetli kararlı ise düzgün kararlı, düzgün kararlı ise kararlı, düzgün asiptotik kararlı ise asimptotik kararlı olduğu olduğu açıktır. Bu ifadelerin tersi genellikle doğru değildir. Bununla birlikte otonom sistemler ve periyodik sistemler $((F(t + w, x) = F(t, x))$ için eğer sıfır çözümü kararlı ise düzgün kararlıdır, asimptotik kararlı ise düzgün asimptotik kararlıdır. Farz edelim ki

$$x' = f(x) \tag{3.2}$$

(3.2) denkleminde t bağımsız değişken olarak yer almadığı için sistem otonomdur ve bu otonom sistemin $x(t) \equiv 0$ sıfır çözümü kararlıdır. (3.2) için biliyoruz ki eğer $x(t)$, $t \in [t_0, \infty]$ bir çözüm ve $\alpha \geq 0$ ise o zaman $x(t+\propto), t \in [t_0 - \alpha, \infty]$ da bir çözümdür.

Bilinmeyen fonksiyon $u(x)$' in integral işareti altında ortaya çıkması ile oluşturulan denklemler integral denklemleridir. İntegral denklemlerinin en yaygın hali,

$$u(x) = f(x) + \lambda. \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t). u(t)dt \tag{3.3}$$

formundadır. Burada $g(x)$ ve $h(x)$ integrasyonun sınırları, λ sabit bir parametre ve $K(x, t)$ iki değişkenli integral denklemin çekirdeğinin bilinmeyen bir fonksiyonudur. Bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ integral işareti içerisinde ortaya çıkar. Diğer birçok durumlarda bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ integral işareti dışında ve içerisinde ortaya çıkar. İntegrasyon sınırları $g(x)$ ve $h(x)$ her ikisi de değişkenli sabit ya da biri sabit biri değişken olabilir. İntegral denklemler çok değişik formlarda ortaya çıkabilir.

İntegrasyon sınırları integral denklemini sınıflandırmada iki farklı yolla kullanılır.

1) İntegrasyonun sınırları sabit ise bu integral denkleme Fredholm integral denklemi denir (Wazwaz, 2011).

$$u(x) = f(x) + \lambda. \int_a^b K(x,t).\, u(t)dt \tag{3.4}$$

formunda yazılır. Burada a ve b sabittir.

2) En az bir sınır değişken ise denkleme Volterra integral denklemi denir (Wazwaz, 2011).

$$u(x) = f(x) + \lambda. \int_a^x K(x,t).\, u(t)dt \tag{3.5}$$

formunda yazılır. Ayrıca bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun ortaya çıkışına bağlı olarak iki farklı tür integral denklem aşağıdaki gibi tanımlanır.

1.Eğer bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ Fredholm ya da Volterra integral denklemlerinin sadece integral işareti altında ortaya çıkarsa denkleme 1.Tür Fredholm ya da Volterra integral denklem denir (Wazwaz, 2011).

2.Eğer bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ Fredholm ya da Volterra integral denklemlerinin integral işaretinin hem içinde hem de dışında ortaya çıkarsa integral denkleme 2.Tür Fredholm ya da Volterra integral denklem denir (Wazwaz, 2011).

3.Yukarıda temsil edilen Fredholm ya da Volterra integral denklemlerde eğer $f(x) = 0$ alınırsa,

$$u(x) = \lambda. \int_a^b K(x,t).\, u(t)dt \tag{3.6}$$

$$u(x) = \lambda. \int_a^x K(x,t).\, u(t)dt \tag{3.7}$$

(3.6) denklemine homojen Fredholm, (3.7) denklemine ise homojen Volterra integral denklemi denir. Herhangi bir denklem bilinmeyen fonksiyon $f(x) = 0$ 'ın hem türevlerini hem de integrallerini içerirse bu denkleme integro-diferansiyel denklem denir. Fredholm integro-diferansiyel denklem,

$$u^{(k)}(\mathrm{x}) = \mathrm{f(x)} + \lambda . \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{K(x,t).u(t)dt} \tag{3.8}$$

formundadır. Volterra integro-diferansiyel denklem,

$$u^{(k)}(\mathrm{x}) = \mathrm{f(x)} + \lambda . \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{K(x,t).u(t)dt} \tag{3.9}$$

formundadır. İntegral denklemler farklı türde ortaya çıkarlar. İntegral denklemlerin tipleri denklemin çekirdeğine ve integrasyon sınırlarına bağlıdır.

Fredholm integral denklemlerde integrasyonun sınırları sabittir ve ayrıca bilinmeyen fonksiyon $\mathrm{u(x)}$ sadece integral işareti altında;

$$\mathrm{f(x)} = \lambda . \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{K(x,t).u(t)dt} \tag{3.10}$$

şeklinde ortaya çıkabilir. Buna 1. Tür Fredholm integral denklem denir (Wazwaz, 2011). Bununla birlikte 2. Tür Fredholm integral denklem için bilinmeyen fonksiyon $\mathrm{u(x)}$ 'in integral işareti içerisinde ve dışarısında,

$$\mathrm{u(x)} = \mathrm{f(x)} + \lambda . \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{K(x,t).u(t)dt} \tag{3.11}$$

formundaki gibi ortaya çıkmasıdır (Wazwaz, 2011).

Örnek 3.1 $\frac{\sin(x)-\cos(x)}{x^2} = \int_0^1 \sin(x.t).u(t)dt$ 1. Tür Fredholm İntegral Denklem

Örnek 3.2 $u(x) = x + 1/2 . \int_{-1}^{1}(x-t).u(t)dt$ 2. Tür Fredholm İntegral Denklem

Volterra integral denklemlerde integrasyon sınırlarından en az biri değişkendir. Bilinmeyen fonksiyon $\mathrm{u(x)}$ ‘in integral işareti altında,

$$\mathrm{f(x)} = \lambda . \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{K(x,t).u(t)dt} \tag{3.12}$$

formundaki gibi ortaya çıkmasına 1. Tür Volterra integral denklem denir (Wazwaz, 2011). Ayrıca bilinmeyen fonksiyon $\mathrm{u(x)}$’in integral işareti içerisinde ve dışarısında,

$$\mathrm{u(x)} = \mathrm{f(x)} + \lambda . \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{K(x,t).u(t)dt} \tag{3.13}$$

formundaki gibi ortaya çıkmasına 2. Tür Volterra integral denklem denir (Wazwaz, 2011).

Örnek 3.3 $x . e^x = \lambda . \int_0^x e^{t-x} . u(t)dt$ 1. Tür Volterra İntegral Denklem

Örnek 3.4 $5.x^2 + x^3 = \int_0^x (5 + 3.x - 3.t).u(t)dt$ 1. Tür Volterra İntegral Denklem

Örnek 3.5 $u(x) = 1 - \int_0^x u(t).dt$ 2. Tür Volterra İntegral Denklem

Örnek 3.6 $u(x) = x + \int_0^x (x - t).u(t).dt$ 2. Tür Volterra İntegral Denklem

Volterra Fredholm integral denklemler literatürde iki farklı formda,

$$u(x) = f(x) + \lambda_1.\int_a^x K_1(x,t).u(t)dt + \lambda_2\int_a^b K_2(x,t).u(t)dt \qquad (3.14)$$

$$u(x,t) = f(x,t) + \lambda\int_0^t\int_\mu F\big(x,t,\varepsilon,\tau,u(\varepsilon,\tau)\big)d\varepsilon d\tau \qquad (3.15)$$

$(x,t) \in \mu \times [0,T]$ şeklinde yazılır. μ , R^n' in kapalı alt kümesidir.

Örnek 3.7 $u(x) = 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x x.u(t).dt - \int_0^1 t.u(t).dt$

Örnek 3.8 $u(x,t) = x + t^3 + \frac{1}{2}.t^2 - \frac{1}{2}.t - \int_0^t\int_0^1 (\varepsilon - \tau)d\varepsilon d\tau$

Volterra integral denklemlerde integrasyon sınırlarından biri ya da her ikisi sonsuz ise denkleme singular denir. Ayrıca önceki iki denklemde $K(x,t)$ çekirdeği integrasyon aralığında bir ya da daha çok noktada sınırsız olursa denkleme singular denir.

Burada,

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha}.u(t)dt \quad ; \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (3.16)$$

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha}.u(t)dt \quad ; \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (3.17)$$

denklemlerine odaklanacağız. Son iki denkleme sırası ile genelleştirilmiş Abel integral denklemi ve zayıf singular integral denklemi denir.

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ için } f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}.u(t)dt$$

denklemine Abel' in singular integral denklemi denir. Dikkat edilmelidir ki denklemin çekirdeği t=x ' de sonsuz olur.

İntegro-diferansiyel denklemler birçok bilimsel uygulamalarda kullanılır. Özellikle başlangıç değer problemleri ya da sınır değer problemleri integral denklemlere dönüştüğü zaman ortaya çıkar. İntegro-diferansiyel denklemler hem integral hem de diferansiyel operatörleri içerir. Bilinmeyen fonksiyonların türevleri herhangi bir mertebeden olabilir. İntegro-diferansiyel denklemlerin sınıflandırılmasında daha önce kullanılan aynı kategoriyi takip edeceğiz.

Fredholm integro-diferansiyel denklemler, diferansiyel denklemlerin integral denklemlere dönüşmesi ile ortaya çıkar. Fredholm integro-diferansiyel denklemleri bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ ve $u(x)$‘ in n. mertebeden türevlerini integral içerisinde ve dışarısında içeren ifadelerdir. Bu durumda integrasyonun sınırları Fredholm integral denklemlerdeki gibi sabittir. Dikkat edilmelidir ki başlangıç şartları özel çözümler elde etmek için Fredholm integro-diferansiyel denklemlerde verilir. Fredholm integro-diferansiyel denklemler,

$$u^n(x) = f(x) + \lambda . \int_a^b K(x,t).u(t)dt \tag{3.18}$$

formundadır. Buradan $u^n(x)$, $u(x)$’ in n. türevini gösterir. Daha düşük mertebede diğer türevler eşitliğin sol tarafında $u^n(x)$ ile birlikte yazılabilir.

Örnek 3.9 $u'(x) = 1 - \frac{1}{3}.x + \int_0^1 x.u(t)dt, u(0) = 0$

Örnek 3.10 $''u(x) + u'(x) = x - \sin(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.t.u(t)dtu \ \ , u(0) = 0 \ \ u'(0) = 1$

Volterra integro-diferansiyel denklemler başlangıç değer problemleri integral denklemlere dönüştüğü zaman ortaya çıkabilir. Volterra intergro-diferansiyel denklemler bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ ve integral işareti içerisindeki ve dışarısındaki $u(x)$ in n. mertebeden türevlerini içerir. Bu durumda integrasyonun sınırlarından en az biri Volterra integral denklemlerdeki gibi değişkendir. Aynı denklemde diferansiyel ve integral operatörler bulunduğundan dolayı bu denklemlere integro-diferansiyel denklemler denir. Başlangıç şartlarının Volterra integro-diferansiyel denklemlere özel çözümler belirlemek için verildiğine dikkat edilmelidir. Volterra integro-diferansiyel denklemler,

$$u^n(x) = f(x) + \lambda . \int_0^x K(x,t).u(t)dt \tag{3.19}$$

formundadır.

Örnek 3.11 $u'(x) = -1 + \frac{1}{2}.x^2 - x.e^x - \int_0^x t.u(t)dt \ \ , u(0) = 0$

Örnek3.12 $u''(x) + u'(x) = 1 - x.(\sin(x) + \cos(x)) - \int_0^x t.u(t)dt, u(0) = -1,$

$u'(0) = 1$

Volterra –Fredholm integro-diferansiyel denklemler bir ya da daha çok adi mertebeden türevin Volterra-Fredholm integral denklemlerdeki gibi ortaya çıkmasıdır. Volterra – Fredholm integro denklemler,

$$\mathrm{u^n(x) = f(x) + } \lambda_1 . \int_a^x \mathrm{K_1(x,t).u(t)dt + 2.} \int_a^b \mathrm{K_2(x,t).u(t)dt} \qquad (3.20)$$

ve

$$\mathrm{u^n(x,t) = f(x,t) + } \lambda . \int_0^t \int_\mu \mathrm{F\big(x,t,\varepsilon,\tau,u(\varepsilon,\tau)\big)d\varepsilon d\tau} \quad , \qquad \mathrm{(x,t) \in \mu \; x \; [0,T]} \qquad (3.21)$$

burada $\mathrm{f(x,t)}$ ve $\mathrm{F(x,t,\varepsilon,\tau,u(\varepsilon,\tau))}$ fonksiyonları μ x $[0,\mathrm{T}]$ üzerinde analitiktir.

Örnek 3.13

(i) $\mathrm{u'(x) = x^4 + 24x + 3 - \int_0^x (x-t).u(t)dt + \int_0^1 t.u(t)dt \; , u(0) = 0}$

(ii) $\mathrm{u''(x,t) = 1 + t^3 + \frac{1}{2}.t^2 - \frac{1}{2}.t - \int_0^t \int_\mu (\tau - \varepsilon)d\varepsilon d\tau \; , u(0,t) = t^3}$

$$\dot{X} = f(t,X) \qquad (3.22)$$

Diferansiyel denklem sistemini düşünelim. $X(t;t_0,X_0)$ ifadesi (t_0,X_0) noktasından geçen (3.22) denkleminin bir çözümünü ifade eder. Genelde (3.22) denkleminin sıfır çözümünün nitel özellikleri incelenir. Çünkü (3.22) diferansiyel denkleminin herhangi bir çözümü sıfır çözüme dönüştürülebilir.

R_reel sayılar cümlesi, I, R' de bir açık aralık olsun. $I = \{t \in R: r_1 < t < r_2\}$ olsun. Burada r_1 ve r_2 R' de alınan herhangi iki noktadır. $X = (X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ olsun. $X = (t, X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ ise $n+1$ boyutlu R^{n+1} uzayında bir eleman olsun.

$$(t, X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) = (t, X)$$

yazılabilir. B ise R^{n+1} uzayında açık bağlantılı bir cümle ya da bölge olsun. $C[B, R^n]$ ise B bölgesinde tanımlı ve sürekli ve de R^n' de değerler alan fonksiyonların bir sınıfını temsil etmektedir.

Tanım 3.10 Her $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in I$ için öyle bir $\delta(t_0,\varepsilon) > 0$ vardır ki her $t \geq t_0$ için

$|X_0| < \delta(t_0,\varepsilon)$ iken $|X(t;t_0,X_0)| < \varepsilon$

sağlanır ise ve o zaman (3.22) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.11 Eğer (3.22) denkleminin sıfır çözümü kararlı ve δ *sayısı* t_0' dan bağımsız ise (3.22) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.12 $\propto \in [t_1,t_2], t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$ için $X_0 < \delta(t_0,\propto)$ ise $|X(t;t_0,X_0)| \to 0, t \to \infty$ olur o halde (3.22) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.13 Eğer denklem (3.22)' nin sıfır çözümü düzgün kararlı ve $\delta > 0, T(\epsilon), X_0 < \delta$ her $t \geq t_0 + T(\epsilon)$ için $|X(t; t_0, X_0)| < \varepsilon$ sağlanır ve o halde (3.22) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Ahmad ve Rao, 1999).

Tanım 3.14 Eğer bir $\beta > 0$ var ise her $t \geq t_0$ için $|X(t; t_0, X_0)| < \beta$ olur öyle ki β' ya bağlı her çözümde (3.22) denkleminin $X(t; t_0, X_0)$ çözümü sınırlıdır (Ahmad ve Rao, 1999).

3.2 Lyapunov' un İkinci Metodu

Yarım yüzyıla yakın bir zamandır lineer olmayan diferansiyel denklemlerin nitel teorisinin araştırılması için büyük çabalar sarf edilmiştir. Bu bağlamda çözümlerin sınırlılığı, kararlılığı, periyodikliği ve yakınsaması gibi nitel özelliklerin araştırılmasında kullanılan tekniklerden bir tanesi de Lyapunov' un ikinci metodudur. Kararlı olan sistemlerin yakınsama özelliği teorik olarak önemlidir. Uygulamalarda denge noktasında gerçekleşen küçük sapmalar sonsuza gittiğinde yörünge yine ona geri dönecektir. Bu tezin niteliksel özelliklerini inceleyen yaklaşım Lyapunov' un ikinci metodudur. Bu kavram dinamik sistemlerin kararlılık alanı ve otomatik kontrol uygulamalarının farkındadır. Lyapunov yönteminin uygulanması skaler bir fonksiyonun oluşturulmasında yatar. Belirli özelliklere sahip bir skaler fonksiyon ve türevlerinin özellikleri karşılaştırıldığında sistemin kararlılık davranışı bilinir. Lyapunov ikinci metodunun uygulanmasındaki en büyük zorluk lineer olmayan sistemlerin çözümlerinin niteliksel özelliklerine uygun Lyapunov fonksiyonlarını bulma işleminin kolay bir prosedür olmamasıdır. Lyapunov fonksiyonu bulmak bir sanattır ve diğer sanatlar gibi takip edilmesi gereken yörüngeler içerir. Kararlı bir sistem için çok sayıda hatta sonsuz sayıda Lyapunov fonksiyonu oluşturulabilir. Lyapunov fonksiyonlarını oluşturmak için literatürde önerilen birçok yöntem mevcuttur. Krasovskii' s Metodu, Schultz – Gibson' s Variable Metodu, Intrinsic Metodu bu yöntemlerden bir kaçıdır. Yüksek mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerle ilgili birçok araştırma sonucu Lyapunov teoremleri ve genellemeleri kullanılarak elde edilir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

4.1 İntegral Denklemler ve Esnek Bir Lyapunov Fonksiyonu

Bu bölümde esnek Lyapunov fonksiyoneli kullanarak lineer ve lineer olmayan çeşitli integral denklemlerin çözümlerinin bazı nitel özellikleri incelenir. Amaç limit çözüm kümelerini içeren nitel özellikler elde etmektir. İlk kez Lyapunov fonksiyoneli birinci mertebeden olmayan integral denkleme doğrudan uygulanır. Ek olarak, bir integral denklemi çekirdeğin özelliklerinin çoğunu koruyan kuvvetli kararlı bir diferansiyel denkleme dönüştürmek için bir strateji geliştirilir ve sonra ona esnek Lyapunov fonksiyoneli uygulanır. Bunların hiçbiri tekil çekirdeklere uygulanmaz, ancak Lyapunov fonksiyoneli tekil çekirdeklere sahip olan denklemlere uygulamak için çalışmalar devam etmektedir. a ve g sürekli, C sürekli konveks, $xg(t,x) \geq 0$ olmak üzere

$$x(t) = a(t) - \int_{-\infty}^{t} C(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds, \quad -\infty < t < \infty \tag{4.1}$$

$$x(t) = a(t) - \int_{0}^{t} C(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds, \qquad 0 < t < \infty \tag{4.2}$$

$$R(t,s) = C(t,s) - \int_{s}^{t} C(t,u)R(u,s)du \tag{4.3}$$

$$x(t) = a(t) - \int_{t-T}^{t} C(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds \tag{4.4}$$

formundaki skaler integral denklemleri verilsin. Araştırmacılar konveks çekirdekli integral ve diferansiyel denklemlerle ilgili birçok tartışma için Burton (2005), Burton (2008), Krasovskii (1963), Levin (1965), Volterra (1928), Zhang (2009)' a bakabilirler. Dünyadaki birçok problem bu çekirdekler ile modellenir. Bu problemler 1992' den beri $V'(t) \leq 2g(t,x)[a(t) - x(t)]$ olmak üzere V Lyapunov fonksiyonelleri kullanılarak çalışılmaktadır. Burada esas zorluk g fonksiyonu üzerine monotonluk gibi ciddi şartlar olmaksızın p ve q fonksiyonlarının pozitif tanımlılığı ile $V'(t) \leq -p(x(t)) + q(t)$ yazmaktır. Bunun için iki farklı teknik kullanılır. Bu denklemlerin $t = \infty$ dışında sınırlıysa $t = \infty$' da sürdürülebilen çözümlere sahip olduğunu gösteren varlık teoremlerinden faydalanılır. Aynı zamanda Perron teoreminden bahsediyoruz ki bu teorem eğer $R(t,s)$ sürekli ve eğer her sürekli ve sınırlı a için $\int_0^t R(t,s)a(s)ds$ ifadesi sınırlı ise o zaman $\sup_{0 \leq t < \infty} \int_0^t |R(t,s)|ds < \infty$ olduğunu söyler (Burton, 2005).

Tanım 4.1 Eğer $\int_0^\infty (f(t)-g(t))^2 dt < \infty$ ise f fonksiyonu $L^2[0,\infty)$ da g fonksiyonuna yakınsaktır denir. Eğer $t \to \infty$ iken $|f(t)-g(t)| \to 0$ ise f fonksiyonu g fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir. Şimdi (4.2) denklemi için

$$C(t,s) \geq 0, \quad C_S(t,s) \geq 0, \quad C_{st}(t,s) \leq 0, \quad C_t(t,0) \leq 0 \tag{4.5}$$

şartları sağlansın. Burada alt simgeler kısmi türevi belirtir (Burton, 2009).

Teorem 4.1 (4.2) skaler denklemi verilsin ve (4.5) sağlansın. O zaman (4.2)' nin herhangi bir çözümü boyunca,

$$V(t) = \int_0^t C_s(t,s)\left(\int_s^t g\big(u,x(u)\big)\,du\right)^2 ds + C(t,0)\left(\int_0^t g(s,x(s))ds\right)^2 \tag{4.6}$$

fonksiyoneli

$$V'(t) \leq 2g\big(t,x(t)\big)[a(t)-x(t)] \tag{4.7}$$

eşitsizliğini sağlar. Eğer

$$C(t,t) \leq B \tag{4.8}$$

olacak şekilde bir $B > 0$ sabiti varsa o zaman (4.2)' nin herhangi bir çözümü boyunca

$$(a(t)-x(t))^2 \leq 2BV(t) \tag{4.9}$$

sahip olunur (Burton, 2009).

İspat: Önce Lyapunov fonksiyonelinin nasıl elde edildiği gösterilir. (4.2)' i aşağıdaki

$$(x(t)-a(t)) \quad = \left(-\int_0^t C(t,s)g(s,x(s))\,ds\right)$$

gibi yazılır ve her iki tarafın

$$(x(t)-a(t))^2 \quad = \left(-\int_0^t C(t,s)g(s,x(s))\,ds\right)^2$$

karesi alınır, daha sonra $C(t,s) = u, g\big(s,x(s)\big)ds = dv$ ve $\int_s^t g\big(s,x(s)\big)ds = v$ şeklinde kısmi türev kullanılarak, $(a-b)^2 \geq 0,\ a^2+b^2 \geq 2ab$ eşitsizliğinden

$$(x(t)-a(t))^2 = \left(C(t,s)\int_s^t g\big(u,x(u)\big)du\Big|_0^t - \int_0^t C_s\,(t,s)\int_s^t g(u,x(u))duds\right)^2$$

$$\leq 2\left[\left(-C(t,0)\int_0^t g\big(u,x(u)\big)du\right)^2 + \left(\int_0^t C_S(t,s)\int_s^t g\big(u,x(u)\big)\,duds\right)^2\right]$$

yazılır.

$$\left(\int_0^t C_S(t,s)\int_0^t g(u,x(u))du\,ds\right)^2 \leq \int_0^t C_s\,(t,s)ds\int_0^t C_s\,(t,s)\left(\int_s^t g(u,x(u))du\right)^2 ds$$

olduğundan,

$$\leq 2\left[\left(C(t,0)\int_0^t g(u,x(u))du\right)^2 + \int_0^t C_s\,(t,s)ds\int_0^t C_s\,(t,s)\left(\int_s^t g(u,x(u))du\right)^2 ds\right]$$

elde edilir ve $\int_0^t C_s(t,s)ds = [C(t,t) - C(t,0)] \leq B$ olduğundan,

$$\leq 2\left[C(t,0) + \int_0^t C_s\,(t,s)ds\right]\left[C(t,0)\left(\int_0^t g\big(u,x(u)\big)du\right)^2\right.$$

$$\left. + \int_0^t C_s(t,s)\left(\int_s^t g(u,x(u))\,du\right)^2 ds\right]$$

$$\leq 2BV(t)$$

sahip olunur. Bu sonuç x bir çözüm olduğunda sadece geçerlidir. $a(t) = 0$ alın ve sol taraftaki x çözümünden dolayı V' nin pozitif tanımlı olduğuna dikkat edin. Aynı zamanda, eğer $a(t)$ sınırlı ise o zaman $|x| \to \infty$ iken $V \to \infty$ olur bu yüzden V bütün x çözümleri için radyal sınırsızdır. Diferansiyel denklemler için Lyapunov fonksiyonellerinden farklı olarak, bu ifadenin sol tarafında görüldüğü gibi x' in bir çözüm olduğu gerçeğini kullanmadan Lyapunov fonksiyonelin radyal olarak sınırsız olduğunu belirleyemeyiz. İlginç bir şekilde, bir Lyapunov fonksiyonun bir diferansiyel denklemin çözümü boyunca diferensiyellemek genellikle basit olsa da, Lyapunov fonksiyoneli bir integral denklemin çözümü boyunca diferansiyellemek Lyapunov fonksiyoneli oluşturmaktan daha zor olabilir. Dikkat ediniz ki eğer $x(t)$ herhangi bir sürekli bir fonksiyon ise o zaman $V(t)$ Leibniz' in kuralına göre diferansiyellenebilir ve

$$V'(t) = \int_0^t C_{st}(t,s)\left(\int_s^t g(u,x(u))\,du\right)^2 ds$$

$$+2g\big(t,x(t)\big)\int_0^t C_s\,(t,s)\int_s^t g\big(u,x(u)\big)\,duds$$

$$+C_t(t,0)\left(\int_0^t g\big(s,x(s)\big)ds\right)^2 + 2g(t,x(t))C(t,0)\int_0^t g\big(s,x(s)\big)ds$$

elde edilir. Bu terimlerden birinin $\int_0^t C(t,s)g(s,x(s))ds$ sonucunu verdiği görülür. Tam da Krasovskii 1950' lerde Lyapunov fonksiyonunu inşa ederken bu şekilde inşa etti (Krasovskii, 1963). Böylece bu integrali onun eşdeğeri $a(t) - x(t)$ ile değiştirerek V ve (4.2)' i birleştirilecek. Bu terimi bulmak için, üçüncü-son terimi parçalara bölerek

$$2g(t,x(t))\left[C(t,s)\int_s^t g\big(u,x(u)\big)\,du\Big|_0^t + \int_0^t C(t,s)g(s,x(s))ds\right]$$

$$= 2g(t, x(t))\left[-C(t,0)\int_0^t g\big(u, x(u)\big)du + \int_0^t C(t,s)g(s, x(s))ds\right]$$

$$= 2g\big(t, x(t)\big)\left[-C(t,0)\int_0^t g\big(u, x(u)\big)du + a(t) - x(t)\right]$$

elde edilir.

Terimler toplanarak,

$$V'(t) \quad = \int_0^t C_{st}\,(t,s)\left(\int_s^t g\big(u, x(u)\big)du\right)^2 ds + C_t(t,0)\left(\int_0^t g(s, x(s))ds\right)^2$$
$$+2g(t, x(t))[a(t) - x(t)] \le 2g(t, x(t))[a(t) - x(t)].$$

Aşağıda (4.10)' da $K = 1$ yerine $|g(t,x)| \le K|x|$' i sorgulamak bir şey kazandırmayacaktır çünkü K konveksliği değiştirmeksizin $C(t,s)$' ye çekilebilir. Bu ilk adımdır.

Teorem 4.2 $xg(t,x) \ge 0$, (4.5) ve (4.8) sağlansın.

$$|g(t,x)| \le |x| \tag{4.10}$$

olsun ki,

$$V'(t) \le -\big(a(t) - g(t,x)\big)^2 - g^2(t,x) + a^2(t) \tag{4.11}$$

sağlansın.

(i) Eğer $a \in L^2[0,\infty)$ ise o zaman $g(t,x(t)) \in L^2[0,\infty)$ ve $L^2(0,\infty)$' da $g(t,x(t)) \to a(t)$.

(ii) Eğer

$$\int_0^t C_s(t,s)\,(t-s)\int_s^t a^2(u)du + C(t,0)t\int_0^t a^2\,(u)du \le \Lambda$$

olacak şekilde $\Lambda > 0$ varsa o zaman $(x(t) - a(t))^2$ sınırlıdır. Özellikle, eğer

$$\int_0^t C_s(t,s)(t-s)^2\,ds + C(t,0)t^2 \le \Lambda$$

ise o zaman x, her sınırlı ve sürekli a fonksiyonu için sınırlıdır, eğer ilaveten (4.2) lineer olsun diye $g(t,x) = x$ alınırsa o zaman Perron'un teoreminden $\sup_{t\ge 0}\int_0^t |R(t,s)|\,ds < \infty$ olur, burada R (4.3) ve $x(t) = a(t) - \int_0^t R(t,s)a(s)ds$ sağlar (Burton, 2009).

İspat: Bir integrasyonla (i) elde edilsin diye

$$V'(t) \quad \le 2g(t,x)a(t) - 2g(t,x)x \le 2g(t,x)[a(t) - g(t,x)]$$
$$= -\Big(a(t) - g\big(t, x(t)\big)\Big)^2 - g^2\big(t, x(t)\big) + a^2(t)$$

sahibiz. Eğer $(x(t)-a(t))$ sınırsız ise o zaman V sınırsızdır yani $0 \leq s \leq t_n$ için $V(t_n) \geq V(s)$ ile birlikte $\{t_n\} \uparrow \infty$ dizisi vardır ve $V(t_n) \uparrow \infty$. Bu türevsel ilişkiden $0 \leq s \leq t_n$ için

$$0 \leq V(t_n) - V(s) \leq \int_s^{t_n} a^2(u)du - \int_s^{t_n} g^2(u,x(u))du$$

sahip olunur. Eğer $t = t_n$ alırsak o zaman

$$\int_s^t g^2\big(u,x(u)\big)du \leq \int_s^t a^2\,(u)du$$

olur. Bu yüzden bu t ler için t_n de n den bağımsız

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2B}(a(t)-x(t))^2 \leq V(t) \\
&= \int_0^t C_s(t,s)\left(\int_s^t g\big(u,x(u)\big)du\right)^2 ds + C(t,0)\left(\int_0^t g(u,x(u))du\right)^2 \\
&\leq \int_0^t C_s\,(t,s)(t-s)\int_s^t g^2\big(u,x(u)\big)duds + C(t,0)t\int_0^t g^2(u,x(u))du \\
&\leq \int_0^t C_s(t,s)(t-s)\int_s^t a^2(u)duds + C(t,0)t\int_0^t a^2(u)du \leq \Lambda
\end{aligned}$$

sahip olunur. Bu V nin sınırsız olması ile bir çelişkilidir. Geri kalanı açıktır.

Şimdi (4.7) temel bağıntısını ele alınır ve (4.10) $x(t)\ ve\ a(t)$ ‘nın etkili bir şekilde ayrılmasını sağlamadaki ilk adımımızdır. Ayrılma işlemi başarılıdır çünkü ne $g(t,x)$ ne de $a(t)$, $\int_s^t g^2\big(s,x(s)\big)ds \leq \int_s^t a^2\,(s)ds$ ilişkisini kurmak için herhangi bir şekilde değiştirilmez. İkinci adımımız integro-diferansiyel denklemi içermeli ve $g(t,x) = g(x)$ olmalıdır. Burada integral denklemler için Liapunov fonksiyonellerinin diferansiyel denklemler için Lyapunov fonksiyonellerinden daha genel olabileceği görülür. $g(t,x) = g(x)$ alarak

$$\begin{aligned}
x(t) &= a(t) - \int_0^t C(t,s)g(x(s))ds \\
y(t) &= g^{-1}\big(a(t)\big) - \int_0^t C(t,s)y(s)ds
\end{aligned}$$

denklemlerinin benzer limit kümeleri ile çözümlere sahip olduğu gösterilir. Bunu bir bağlama oturtmak için bazı yeni sonuçları gözden geçirilir. $g(t,x) = x$ aldığımız zaman

$$R(t,s) = C(t,s) - \int_s^t C(t,u)R(u,s)du \tag{4.12}$$

çözücü denklemi ile birlikte

$$x(t) = a(t) - \int_0^t C(t,s)x(s)ds \tag{4.13}$$

ve parametrelerin değişim formülü

$$x(t) = a(t) - \int_0^t R(t,s)a(s)ds \tag{4.14}$$

çalışılır. [8] de kapsamlı bir biçimde tartışılan R nin integral özellikleri kullanılan pertürbasyon formülü vardır. Burada daha çok Burton (2010)' daki bazı özellikler göz önüne alınır. İlk önce (4.6) ile tanımlanan $V(t)$ için

$$V'(t) \leq 2x(t)[a(t) - x(t)] = -\big(x(t) - a(t)\big)^2 - x^2(t) + a^2(t) \tag{4.15}$$

sahip olunur bu yüzden ayrışma basit ve çok etkilidir. Eğer (4.8) sağlarsa o zaman

$$\frac{1}{2B}(x(t) - a(t))^2 + \int_0^t (x(s) - a(s))^2 ds + \int_0^t x^2(s)ds \leq \int_0^t a^2\,(s)ds \tag{4.16}$$

sahip olunur. Eğer $a \in L^2[0,\infty)$ ise o zaman $x \in L^2[0,\infty)$ ve $L^2[0,\infty)$ içerisinde $x \to a$ ' dır.

Teorem 4.3 (4.5) ve (4.8) sağlasın öyle ki aynı zamanda (4.16) sağlar. Eğer $\int_0^t C_t^2\,(t,s)ds$ sınırlı, $a \in L^2[0,\infty)$ ve a sınırlı ise o zaman x sınırlıdır, $L^2[0,\infty)$ da $x \to a$ noktasal yakınsaktır.

$\int_0^t (x(s) - a(s))^{\mathbf{2}} ds$ sınırlı integrali vardır ve integralin türevinin (4.16) ile sınırlı olduğunu ve Schwarz eşitsizliğini ile $x'(t) - a'(t) = -C(t,t)x(t) - \int_0^t C_t(t,s)x(s)ds$ üzerine kullanıldığını gösterilebilir. Böylece bu integral sıfıra yaklaşır. Şimdi çözücü denklem için, $V(t)$

$$W(t,s) := \int_s^t C_s(t,u)\left(\int_u^t R(v,s)dv\right)^2 du + C(t,s)\left(\int_s^t R(u,s)du\right)^2 \tag{4.17}$$

ye kolayca değiştirilir ve aşağıdaki sonucu elde etmek için Teorem 4.1' nin ispatındaki hesaplamalar takip edilir (Burton, 2009).

Teorem 4.4 Eğer $W(t,s)$ (4.17)' de olduğu gibi tanımlanırsa, o zaman (4.12)' nin bir çözümü boyunca

$$W_t(t,s) \leq 2R(t,s)C(t,s) - 2R^2(t,s) = -\big(C(t,s) - R(t,s)\big)^2 + C^2(t,s) - R^2(t,s), \quad 0 \leq s \leq t \tag{4.18}$$

sahip olunur.

$W(s) = 0$ iken (4.8)' i sağlarsa o zaman

$$\frac{1}{2B}(R(t,s)-C(t,s))^2 \quad \le W(t,s) \le -\int_s^t R^2\,(u,s)du$$

$$+\int_s^t C^2\,(u,s)du - \int_s^t \big(C(u,s)-R(u,s)\big)^2 du \qquad (4.19)$$

sahip olunur (Burton, 2009).

Ek olarak eğer $\int_s^t [C^2(u,s) + \ C^2(t,u) + C_t^2(t,u)du]$ sınırlı ise o zaman s sabiti için hem noktasal hem de $L^2[s,\infty)$ da $R(t,s) \to C(t,s)$' dir.

Bu W ve dolayısıyla (4.19)' un türevini elde etmek için bir hesaplamadır. Son belirtilen sınırlılık koşulları, çözücü denklem ve Schwarz eşitsizliği ile

$$C_t(t,s) - R_t(t,s) \qquad (4.20)$$

nin sınırlı olduğunu göstermek için kullanılabilir böylece $\int_s^t (C(u,s)-R(u,s))^2 du$ yakınsaması integralin sıfıra yaklaştığını ima edecek.

$R(t,s)$ ‘ nin $C(t,s)$' ye güçlü yakınsamasıyla (4.14) ile verilen parametrelerin değişim formülünde $R(t,s)$' yi verilen $C(t,s)$ çekirdeği ile değiştirebileceğimiz fikri ortaya çıkar. Bu durumda ortaya çıkan hatanın küçük olacağı beklentisi vardır.

Teorem 4.5 Eğer s sabiti için$C(t,s) - R(t,s) \in L^2[s,\infty)$ ve eğer $a \in L^1[0,\infty)$ ise o zaman

$$y(t) = a(t) - \int_0^t R(t,s)a(s)ds$$

ve

$$Y(t) = a(t) - \int_0^t C(t,s)a(s)ds$$

için

$$y - Y \in L^2[0,\infty)$$

sahip olunur. Dahası eğer (4.20) sağlarsa $y(t) \to Y(t)$ noktasal yakınsar (Burton, 2009).

Teorem 4.2'de

$$g(t,x) = g(x), xg(x) \ge 0, |g(x)| \le |x|, \frac{dg(x)}{dx} > 0 \qquad (4.21)$$

alınsın öyle ki

$$V'(t) \le 2g(t,x)[a(t) - x(t))] \le 2g(x)[a(t) - g(x))]$$

$$= -\big(a(t) - g(x)\big)^2 - g^2(x) + a^2(t) \qquad (4.22)$$

olsun.

$$y(t) = g^{-1}\big(a(t)\big) - \int_0^t C(t,s)y(s)ds \qquad (4.23)$$

denklemini (4.13)' e uyarlayın (Burton, 2009).

Teorem 4.6 (4.5), (4.8) ve (4.21) şartları (4.2) için sağlasın. Aynı zamanda varsayalım ki $a \in L^2[0,\infty), g^{-1}(a(t)) \in L^2[0,\infty)$,

$$\int_0^t C_t^2(t,s)ds \tag{4.24}$$

sınırlıdır (Burton, 2009).

Eğer Teorem 4.3 ile $a(t)$ sınırlı ise (4.23)' ün y çözümü $L^2[0,\infty)$ da noktasal $y(t) \to g^{-1}(a(t))$ sağlarken o zaman (4.2)' nin x çözümü Teorem 4.2 den $\ , L^2[0,\infty)$' da $g(x(t)) \to a(t)$' ye sahibiz.

1992' den önce Lyapunov yönteminin integral denklemlere uygulanabilmesinin tek yolu onları birinci mertebeden diferansiyellemekti (Burton, 1993; Burton, 1996, Burton, 2005; Burton ve Makay 2002; Krasovskii, 1963; Levin, 1963; Londen, 1972; Volterra, 1928). Şimdi $g(t,x)$ yerine $g(x)$ ile başlarsak

$$x(t) = a(t) - \int_0^t C(t,x)g(x(s))ds \tag{4.25}$$

sahip olunur. Eğer (4.2)' nin sağladığını ve a' nın diferansiyellenebilir olduğunu varsayarsak, o zaman

$$x'(t) = a'(t) - C(t,t)g(x(t)) - \int_0^t C_t(t,s)\, g(x(s)ds \tag{4.26}$$

yazılabilir. Sorun şu ki $C(t,x)$' in konveks olmasına karşılık C_t genellikle konveks değildir. Daha sonra klasik teoride Lyapunov' un doğrudan yöntemini içermeyen çok küçük bir çekirdek ile çalışma zorunluluğu ile karşı karşıyayız. Bunun bir çözümü var. Bazı genel koşullar altında eğer $C(t,x)$ konveks ve k yeterince büyük bir sabit ise o zaman

$$D(t,s) \coloneqq C_t(t,s) + kC(t,s) \tag{4.27}$$

konvekstir ve C_t'yi kaplamaktadır. Böylece

$$x'(t) + kx(t) = a'(t) + ka(t) - C(t,t)g(x(t)) - \int_0^t D(t,s)g(x(s))ds \tag{4.28}$$

formunda yazılırsa o zaman üç şey olmaktadır. Onunla birlikte gelen bir dizi Lyapunov fonksiyonuyla birlikte bir diferansiyel denklemimiz var, $xg(x) \geq 0\ ve\ C(t,t) \geq 0$ olduğunda düzgün asimptotik kararlı denklemin pertürbe

$$x' + kx(t) + C(t,t)g(x(t)) = 0 \tag{4.29}$$

formuna ve konveks çekirdeğe sahip olunur.

Bütün bunların amacı, k'nin değerinden bağımsız olarak, (4.28)’ in bir çözümünün aynı zamanda (4.25)' inde bir çözümü olduğunu açıklamaktır. Dolayısıyla, (4.28)’ in tüm çözümlerinin belirli bir nitel özelliğe sahip olduğunu kanıtlayabilirsek (4.25)’ in herhangi bir çözümünün de öyle olduğunu kanıtlamış oluruz. Burada kullanılan Lyapunov fonksiyoneli esasen Levin’ in (1963) fonksiyonelidir ve Krasovskii' de (1963).

Aşağıda (i)’ de $\mu,\ g(x)$’ i emilebildiğinden dolayı $C(t,t) \geq 1$ yerine $C(t,t) \geq \mu \geq 0$ olması daha genel olmayacaktır. Aynı zamanda $a' + ka \in L^2[0,\infty)$ sorulur fakat bundan kaçınılabilir ve Λ ile birlikte Teorem 4.2’ nin ispatını takiben sınırlılığı elde edilir.

Teorem 4.7 Eğer D, (4.5)’ deki gibi konveks, $xg(x) \geq 0$ ve

$$\begin{aligned} L(t) &= 2\int_0^x g(s)ds + \int_0^t D_s\,(t,s)\left(\int_s^t g\big(x(u)\big)du\right)^2 ds \\ &\quad + D(t,0)\left(\int_0^t g\big(x(u)\big)du\right)^2 \end{aligned} \tag{4.30}$$

ise o zaman (4.28) herhangi bir çözümü boyunca

$$L'(t) \leq 2g(x)[a'(t) + ka(t)] - 2g(x)[kx + C(t,t)g(x)] \tag{4.31}$$

sahip olunur.

(i)Varsayalım ki $C(t,t) \geq 1$. O zaman

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -\big[a'(t) + ka(t) - g\big(x(t)\big)\big]^2 - g^2\big(x(t)\big) - kxg(x) \\ &\quad + [a'(t) + ka(t)]^2 \end{aligned} \tag{4.32}$$

olur.

(ii) Ek olarak eğer $a'(t) + ka(t) \in L^2[0,\infty)$ ise o zaman $L^2[0,\infty)$ da $g\big(x(t)\big) \to a'(t) + ka(t)$, $\int_0^{x(t)} g(s)ds$ sınırlıdır, $g(x(t)) \in L^2[0,\infty)$ ve $xg(x) \in L^1[0,\infty)$ (Burton, 2009).

İspat: (4.28)’ in çözümü boyunca genel zincir kuralını kullanarak L’ nin türevi alınır ve sonra (4.31) elde etmek için Teorem 4.1’ in kanıtının son kısmında yaptığımız gibi parçalar halinde integrali alınır. (i) sağladığı zaman

$$L'(t) \leq 2g\big(x(t)\big)[a'(t) + ka(t)] - 2g^2\big(x(t)\big) - 2kxg(x)$$

sahip olunur ve (4.32) elde edilir.

(ii)’ yi elde etmek için $2\int_0^x g(s)ds \leq L(t)$ eşitsizliğini kullanılır ve sonra (4.32)’ in integrali alınır.

Burada (4.32)’ i ayırmamız sembol haricinde g’ den hiçbir şey elde etmez ancak g(t,x) ile birlikte (4.30)’ yı kullanamayız.

Şimdi h pozitif bir sabit olmak üzere,

$$x(t) = a(t) - \int_{t-h}^{t} C(t,s)g\big(s, x(s)\big)ds \tag{4.33}$$

skaler denklemi ele alınır. $A > 0$ için

$$|a(t)| < A \tag{4.34}$$

olmak üzere

$$C(t,s) \geq 0, C_s(t,s) \geq 0, C_{st}(t,s) \leq 0, C(t,t-h) = 0 \tag{4.35}$$

ve

$$xg(t,x) \geq 0 \tag{4.36}$$

olsun. (4.33) denklemi üç çeşit çözüme sahip olabilir. Denklem muhtemelen periyodik bir çözüm olan $(-\infty, \infty)$ da sürekli bir çözüme sahip olabilir. Bu denklem $\varphi: [t_0 - h, t_0] \to \mathrm{R}$ sürekli bir başlangıç fonksiyonuna ve $[t_0 - h, t_0]$ üzerinde $x(t) = \varphi(t)$, $t > t_0$ için denklemi sağlayan bir $x(t)$ çözümüne sahip olabilir, eğer $\varphi(t_0) = a(t_0) - \int_{t_0-h}^{t_0} C(t_0, s)g(s, \varphi(s))ds$ ise o zaman çözüm süreklidir aksi taktirde sürekli değildir. Bu t_0’ da uç nokta (dönüm noktası) ile bir çözüme sahip bir fonksiyonel diferansiyel denkleme benzerdir. Bu verilen φ için çözüm sürekli olsun diye φ’ ye yakın keyfi farklı başlangıç fonksiyonu seçilebileceğini gösterir.

Teorem 4.8 (4.35) ve (4.36) sağlansın ve x, (4.33)’ ün herhangi bir sürekli çözümü olsun. O zaman

$$H(t) = \frac{1}{2}\int_{t-h}^{t} C_s(t,s)\left(\int_s^t g\big(v, x(v)\big)\, dv\right)^2 ds \tag{4.37}$$

fonksiyoneli

$$\big(a(t) - x(t)\big)^2 \leq 2H(t)C(t,t) \tag{4.38}$$

ve

$$H'(t) \leq g\big(t, x(t)\big)[a(t) - x(t)] \tag{4.39}$$

sağlar (Burton, 2009).

İspat:

$$\begin{aligned} H'(t) \quad &= \frac{1}{2}\int_{t-h}^{t} C_{st}\,(t,s)\left(\int_s^t g(v, x(v))dv\right)^2 ds \\ &-\frac{1}{2}C_s(t, t-h)\left(\int_{t-h}^{t} g(v, x(v))dv\right)^2 \end{aligned}$$

$$+g(t,x(t))\int_{t-h}^{t} C_s(t,s)\int_{s}^{t} g(v,x(v))\,dvds$$
$$\leq g(t,x(t))\int_{t-h}^{t} C_s(t,s)\int_{s}^{t} g(v,x(v))\,dvds$$

sahip olunur. Son terimin kısmi integrali alınarak

$$g(t,x(t))\left[C(t,s)\int_{s}^{t} g(v,x(v))dv\Big|_{s=t-h}^{s=t}+\int_{t-h}^{t} C(t,s)g(s,x(s))ds\right]$$
$$=g(t,x(t))\int_{t-h}^{t} C(t,s)g(s,x(s))ds$$

elde edilir. O zaman (4.33) den

$$H'(t)\leq g(t,x(t))\int_{t-h}^{t} C(t,s)g(s,x(s))ds$$
$$=g(t,x(t))[a(t)-x(t)]$$

sahip olunur. Schwarz eşitsizliğinden yararlanarak H üzerinde en düşük sınır elde etmek için

$$\left(\int_{t-h}^{t} C_s(t,s)\int_{s}^{t} g(v,x(v))\,dvds\right)^2 \leq \int_{t-h}^{t} C_s(t,s)\int_{t-h}^{t} C_s(t,s)\left(\int_{s}^{t} g(v,x(v))\,dv\right)^2$$
$$=2H(t)C(t,t)$$

yazılır. Bu eşitsizliğin solundaki terimin kısmi integrali gerektiği gibi

$$\left(C(t,s)\int_{s}^{t} g(v,x(v))dv\Big|_{s=t-h}^{s=t}+\int_{t-h}^{t} C(t,s)g(s,x(s))ds\right)^2$$
$$=(a(t)-x(t))^2$$

verir.

Teorem 4.9 (4.35) ve (4.36) sağlansın, $|g(t,x)|\leq|x|$ ve $C(t,t)$ sınırlı olsun.

(i) Eğer (4.34) sağlarsa o zaman (4.33)' nin herhangi sürekli $x(t)$ çözümü sınırlıdır ve

$$(x(t)-a(t))^2\leq h^2A^2C(t,t) \qquad (4.40)$$

sağlar.

(ii) Eğer $a\in L^2[0,\infty)$ ise, o zaman $L^2[0,\infty)$ da $g\big(t,x(t)\big)\rightarrow a(t)$ (Burton, 2009).

İspat: (4.39)' dan

$$2H'(t)\leq 2g\big(t,x(t)\big)\big[a(t)-g\big(t,x(t)\big)\big]$$
$$=-\Big(a(t)-g\big(t,x(t)\big)\Big)^2-g^2\big(t,x(t)\big)+a^2(t)$$

sahip olunur. (ii) kısmı elde edilir.

Eğer (4.34) sağlarsa ve x(t) çözümü sınırlı değilse o zaman (4.38) ve $C(t,t)$ sınırlı olmasından $H(t)$ sınırsız olduğuna sahip olunur. Böylece $t_n - h \leq s \leq t_n$ için $H(t_n) \geq H(s)$, ile birlikte bir $\{t_n\} \uparrow \infty$ dizisi var. Bu s' ler için

$$0 \leq 2\big(H(t_n) - H(s)\big) \leq -\int_s^{t_n} g^2\big(u, x(u)\big)du + \int_s^{t_n} a^2(u)du$$

$$\int_s^{t_n} g^2\big(u, x(u)\big)du \leq hA^2$$

sahip olunur. Schwarz eşitsizliği ile sınırlı olan

$$\begin{aligned} 2H(t_n) \quad &\leq \int_{t-h}^{t} C_s(t,s)(t-s)\int_s^t g^2(v,x(v))dvds \\ &\leq h^2A^2\int_{t-h}^{t} C_s(t,s)ds = h^2A^2C(t,s)\Big|_{t-h}^{t} \leq h^2A^2C(t,t) \end{aligned}$$

sahip olunur bu ise bir çelişkidir. (4.38)' den, a ve $H(t)C(t,t)$ sınırlı olduğundan x' de sınırlıdır böylece (i) doğrudur.

Teorem 4.10 (Schaefer Teoremi) $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. P, X' in her sınırlı alt kümesinde kompakt olan X' den X' e bir sürekli dönüşümdür.

(i) $\lambda = 1$ için $x = \lambda Px$ denkleminin X' de bir çözümü vardır ya da

(ii) $0 < \lambda < 1$ için bütün x çözümlerinin kümesi sınırsızdır.

(4.32) için $(X, \|.\|)$'i supremum norm ile birlikte sürekli T-periyodik fonksiyonların Banach uzayı alınır ve bu $T > 0$ periyodu için

$$C(t+T, s+T) = C(t,s), a(t+T) = a(t), g(t+T, x) = g(t,x) \qquad (4.41)$$

sahip olduğu kabul edilir.

$\varphi \in X$ ile P

$$(P\varphi)(t) = a(t) - \int_{t-h}^{t} C(t,s)g(s,\varphi(s))ds$$

tanımlanır. Şu gerçektir ki $(P\varphi)(t+T) = (P\varphi)(t)$ yani $P : X \to X$. P nin sürekli olduğu gösterebilir.

Y, X' in sabit sınırlı bir alt kümesi ve φ, Y' nin keyfi bir elemanı ise o zaman $C(t, t - h) = 0$ olduğundan

$$\frac{d}{dt}\int_{t-h}^{t} C(t,s)g\big(s,\varphi(s)\big)ds = C(t,t)g\big(t,\varphi(t)\big) + \int_{t-h}^{t} C_t(t,s)g(s,\varphi(s))ds$$

olduğuna dikkat edin. Eğer

$$\int_{t-h}^{t} |C_t(t,s)|ds + C(t,t) \tag{4.42}$$

sınırlı ise bu Y üzerinde sınırlandırılacaktır. a düzgün sürekli olduğundan Y bir eş sürekli kümeye eşlenir. Bu gerekli kompaktlığı oluşturur (Burton, 2009).

Teorem 4.11 Teorem 4.9' un koşulları ve bunun yanı sıra (4.41) ve (4.42) sağlansın. O zaman (4.33) bir T-periyodik çözüme sahiptir (Burton, 2009).

İspat: $0 < \lambda < 1$ için $x = \lambda P x$ herhangi bir çözümünün$\|x\| \le M$ sağlayacak şekilde bir M sayısının olduğunu gösterirsek Schaefer teoreminin tüm koşulları sağlanmış olacak. Ancak Teorem 4.9' un tüm koşulları

$$x(t) = \lambda\left[a(t) - \int_{t-h}^{t} C(t,s)g(s,x(s))ds\right]$$

denklemi için sağlar ve (4.40) ile istenen sınıra sahip olunur.

Eğer $x(t)$ sınırlı ise $g(t,x(t))$ de sınırlı olmak üzere sonsuz gecikmeli

$$x(t) = a(t) - \int_{-\infty}^{t} C(t,s)g\big(s,x(s)\big)ds \tag{4.43}$$

denklemini düşünün.

$$xg(t,x) \ge 0 \tag{4.44}$$

$$C(t,s) \ge 0, C_s(t,s) \ge 0, C_{st}(t,s) \le 0, C(t,t) \le B \tag{4.45}$$

Her sabit t için,

$$\lim_{t\to-\infty}(t-s)C(t,s) = 0 \tag{4.46}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{t} \left[C(t,s) + \big(C_s(t,s) - C_{st}(t,s)\big)(t-s)^2\right] ds \tag{4.47}$$

integrali süreklidir.

(4.43) denklemi bir $\varphi : (-\infty, t_0] \to R$ başlangıç fonksiyonuna sahip olabilir, bu durumda t_0' da sürekli çözümün olması için $\varphi(t_0) = a(t_0) - \int_{-\infty}^{t_0} C(t_0,s)g(s,\varphi(s))ds$ olması gerekir. Eğer φ sınırlı ve sürekli ise o zaman (4.47) bu integralin var olduğunu gösterir. Ayrıca (4.43) denklemi R' nin tamamında bir ψ çözümüne sahip olabilir. Bu durumda ψ herhangi bir $(-\infty, t_0]$ aralığında bir başlangıç fonksiyonudur.

Teorem 4.12 (4.44) ve (4.47) sağlansın. Eğer $x(t)$, sınırlı sürekli başlangıç fonksiyonu φ ile birlikte $[t_0, \infty)$ aralığında (4.43)' ün sürekli bir çözümü ise o zaman

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} C_s\,(t,s)\left(\int_{s}^{t} g\big(v,x(v)\big)dv\right)^2 ds \tag{4.48}$$

için

$$H'(t) \leq 2g(t, x(t))[a(t) - x(t)]$$

ve

$$(a(t) - x(t))^2 \leq C(t,t)H(t) \tag{4.49}$$

sahip olunur **(**Burton, 2009).

İspat: Bir hesaplama ile

$$\begin{aligned} H'(t) &= \int_{-\infty}^{t} C_{st}(t,s)\left(\int_s^t g\big(v,x(v)\big)dv\right)^2 ds + g(t,x(t))\int_{-\infty}^{t} C_s(t,s)\int_s^t g\big(v,x(v)\big)dvds \\ &\leq 2g(t,x(t))\left[C(t,s)\int_s^t g\big(v,x(v)\big)dv\Big|_{s=-\infty}^{s=t} + \int_{-\infty}^{t} C(t,s)g(s,x(s))ds\right] \\ &= 2g(t,x(t))[a(t) - x(t)] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada son integralin yanındakinin sıfır olduğu sonucuna varmak için başlangıç fonksiyonun ve (4.46)'nın sınırlılığını kullandık. H' de gösterilen ilk integralin varlığı (4.47)' den elde edilir.

H üzerindeki alt sınır için,

$$\begin{aligned} \theta(t) &:= \left(\int_{-\infty}^{t} C_s(t,s)\int_s^t g\big(v,x(v)\big)dvds\right)^2 \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{t} C_s(t,s)ds\int_{-\infty}^{t} C_s(t,s)\left(\int_s^t g\big(v,x(v)\big)dv\right)^2 ds\right) \\ &= C(t,t)H(t) \end{aligned}$$

belirlenir, burada şartı kullanarak $\lim_{s\to-\infty} C(t,s) = 0$ alınmaktadır. Diğer yandan,

$$\theta(t) = \left(C(t,s)\int_s^t g\big(v,x(v)\big)dv\Big|_{s=-\infty}^{s=t} + \int_{-\infty}^{t} C(t,s)g(s,x(s))ds\right)^2 = (a(t) - x(t))^2.$$

İşte Teorem 4. 2'ye paralel bir şekilde ispatlanabilecek çok kısa bir sonuç.

Teorem 4.13 Teorem 4.12' nin koşulları sağlansın, $|g(t,x)| \leq |x|$, $a \in L^2[0,\infty)$ olsun ve $x(t)$, sınırlı, sürekli başlangıç fonksiyonu ile birlikte (4.43)' ün herhangi bir sürekli çözümü olsun. O zaman $L^2[0,\infty)$ da $g\big(t,x(t)\big) \to a(t)$, , $g(t,x(t)) \in L^2[0,\infty)$ $a(t)$ ve $C(t,t)$ ile sınırlıyken $x(t)$ sınırlıdır **(**Burton, 2009).

D' yi Teorem 4.7 deki gibi tanımlansın. $g(t,x) = g(x)$, $C(t,t) \geq 1$ olsun ve

$$x' = a'(t) + ka(t) - \big[kx(t) + C(t,t)g\big(x(t)\big)\big] - \int_{-\infty}^{t} D(t,s)g\big(x(s)\big)ds.$$

verilsin. Ardından,

$$U(t) = 2\int_0^x g(s)ds + \int_{-\infty}^{t} D_s(t,s)\left(\int_s^t g(x(u))\,du\right)^2 ds$$

olarak U tanımlansın ve Teorem 4.7 dekine paralel bir sonuç elde edilir.

4.2 Lyapunov Fonksiyonları Kullanılarak Lineer Olmayan Sonsuz Gecikmeli Volterra İntegro Diferansiyel Denklemlerde Düzgün Kararlılık

Bu bölümde doğrusal olmayan sonsuz gecikmeli

$$x'(t) \quad = Px(t) + \int_{-\infty}^{t} C(t,s)g(x(s))\,ds, -\infty < s \le t \tag{4.50}$$

ve

$$x'(t) \quad = Px(t) + \int_{-\infty}^{t} C(t,s)g(x(s))\,ds, -\infty < s \le t \tag{4.51}$$

Volterra integro-diferansiyel denklemleri alınır ve bir $V(t,x) \coloneqq V(t)$ Lyapunov fonksiyonu inşa edilir. Bazı α pozitif sabiti için ve uygun koşullar altında (4.51)' in çözümleri boyunca $V'(t) \le -\alpha|x|^2$ olduğu gösterilir. Bu sıfır çözüme ilişkin kararlı sonuçları elde etmek için konumlandıracak ve buna ek olarak her kare çözümün integrallenebilir ya da L_1 olduğunu gösterecek.

Normalde (4.51)' deki P fonksiyonunu sıfır çözümün kararlılık özellikleri için negatif bir fonksiyon olması beklenir. Ama bu şart gerekmez. P sabitinin pozitif etkisini dengelemek için $C(t,s)$ çekirdeğinin boyutu kullanılır. C(t, s) çekirdeğinin ne kadar hızlı çürümeye (decay) bağlı olarak pozitif sabit P için (4.51)' in sıfır çözümünün düzgün kararlı olduğunu gösteren ana sonuçların bir uygulaması olarak örnekler verilir. Sürekli $\varphi: (-\infty,\infty) \to R$ fonksiyonun normu $\|\varphi\| = \sup_{s\in R}|\varphi(s)|$ ile belirlenir. $E_{t_0} = (-\infty, t_0]$ olmak üzere $\psi: E_{t_0} \to R$ sınırlı ve sürekli bir başlangıç fonksiyonu olsun. $t \ge t_0$ ve $s \in E_{t_0}, x(t,t_0,\psi) = \psi(s)$ için $x(t)$, (4.51) sağlarsa $x(t) = x(t,t_0,\psi)$ (4.51)' in bir çözümüdür denir. $t \ge t_0$ için $C(t)$ kümesi, tüm ϕ sürekli fonksiyonlar kümesini gösterir ve $\phi : R \to R,\ \|\phi\| = \sup\{|\phi(s)|: s \le t\}$.

Tanım 4.2 Her $\varepsilon > 0$ ve her bir t_0 için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ vardır ki $\left[\phi \in E_{t_0} \to R, \phi \in C(t): \|\phi\| < \delta\right]$ iken tüm $t \ge t_0$ için $|x(t,t_0,\phi)| < \varepsilon$ oluyorsa **(**4.51)' in sıfır çözümü kararlıdır denir ve δ' nın t_0' dan bağımsız olması durumunda sıfır çözümü düzgün kararlıdır denir (Raffoul ve Rai, 2016).

Daha sonra, uygun bir Lyapunov fonksiyonelinin yazılabilmesi için (4.51) yeniden yazmak için özel bir teknik kullanılır.

$$A(t,s) := \int_{-\infty}^{t-s} C(u+s,s)du, \quad t-s \geq 0$$

ile başlansın. Kabul edelim ki aşağıdaki

$$xg(x) \geq \lambda_2 x^2, x \neq 0 \tag{4.52}$$

$$|g(x)| \leq \lambda_1 |x| \tag{4.53}$$

$$A(t,t) > 0, t \in [0,\infty) \tag{4.54}$$

koşulları sağlayan λ_1 ve λ_2 pozitif sabitleri vardır.

(4.52) ve (4.53) koşullarının $g(0) = 0$ olduğunu ima ettiği açıktır. (4.51) ile

$$x'(t) = Px(t) - A(t,t)g\big(x(t)\big) + \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} A(t,s)g\big(x(s)\big)ds. \tag{4.55}$$

ifadesinin eşdeğer olduğu kolayca kanıtlanabilir.

Teorem 4.14 (4.52) ve (4.54) şartları sağlansın. Kabul edelim ki

$$2P - 2\lambda_2 A(t,t) + P^2 + \lambda_1 A^2(t,t) + {\lambda_1}^2 \gamma \int_{t}^{\infty} |A(u,t)|du \leq -\alpha \tag{4.56}$$

$$2\int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|ds - \gamma \leq 0 \tag{4.57}$$

$$1 - \lambda_1 \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|ds > 0 \tag{4.58}$$

olacak şekilde $\gamma > 0$ ve $\alpha > 0$ sabitleri vardır. O zaman (4.51)' in sıfır çözümü kararlıdır (Raffoul ve Rai, 2016).

İspat: (4.51)' in bir çözümü $x(t) = x(t,t_0,\psi)$ olsun ve $V(t) = V(t,x)$ Lyapunov fonksiyonu

$$\begin{aligned} V(t) \; &= \left(x - \int_{-\infty}^{t} A(t,s)g(x(s))ds\right)^2 \\ &+\gamma \int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty} |A(u,z)|g^2\big(x(z)\big)dudz. \end{aligned} \tag{4.59}$$

ile tanımlansın. Şimdi (4.59)' un türevini alarak ve (4.51)' i kullanarak

$$\begin{aligned} V'(t) \; &= 2\left(x - \int_{-\infty}^{t} A(t,s)g(x(s))ds\right)[Px - A(t,t)g(x)] \\ &+\gamma \int_{t}^{\infty} |A(u,t)|g^2\big(x(t)\big)du - \gamma \int_{-\infty}^{t} |A(t,z)|g^2(x(z))dz \\ &= 2Px^2 - 2A(t,t)xg(x) - 2Px \int_{-\infty}^{t} A(t,s)g\big(x(s)\big)ds \end{aligned}$$

$$+2A(t,t)g(x)\int_{-\infty}^{t} A(t,s)g(x(s))ds$$

$$+\gamma\int_{t}^{\infty}|A(u,t)|g^2\big(x(t)\big)du-\gamma\int_{-\infty}^{t}|A(t,z)|g^2\big(x(z)\big)dz \tag{4.60}$$

sahip olunur.

(4.60) ifadesini basitleştirmek için Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
2Px\int_{-\infty}^{t} A(t,s)g(x(s))ds &\leq P^2x^2+\left(\int_{-\infty}^{t} A(t,s)g(x(s))\,ds\right)^2\\
&= P^2x^2+\left(\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|^{\frac{1}{2}}|A(t,s)|^{\frac{1}{2}}|g(x(s))|ds\right)^2\\
&\leq P^2x^2+\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|g^2\big(x(s)\big)\,ds
\end{aligned}$$

gibi basit hesaplamalar yapılır. Benzer şekilde,

$$2A(t,t)g(x)\int_{-\infty}^{t} A(t,s)g\big(x(s)\big)ds$$

$$\leq {\lambda_1}^2A^2(t,t)x^2+\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|g^2(x(s))\,ds$$

yazılır. Yukarıdaki iki ifadeyi (4.60)' da yerine yazarak ve sonrasında (4.56) ve (4.57) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
V'(t) &\leq \left[2P-2\lambda_2A(t,t)+P^2+\lambda_1A^2(t,t)+{\lambda_1}^2\gamma\int_{t}^{\infty}|A(u,t)|\,du\right]|x|^2\\
&+\left[2\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds-\gamma\right]\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|g^2(x(s))\,ds\\
&\leq -\alpha|x|^2
\end{aligned} \tag{4.61}$$

elde edilir. $\varepsilon>0$ verilsin, $\delta>0$, bulunur $\left[\psi\in E_{t_0}\to R\colon\|\psi\|<\delta\right]$ iken $|x(t,t_0,\psi)|<\varepsilon$ olur bunun için

$$L^2=\left(1+{\lambda_1}^2\int_{-\infty}^{t_0}|A(t_0,s)|ds\right)^2+{\lambda_1}^2\gamma\int_{-\infty}^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}|A(u,z)|dudz.$$

olsun. (4.61) ile birlikte $t\geq t_0$ için azalan V ye sahip olunur. Böylece (4.59)' u kullanarak,

$$\begin{aligned}
V(t,x) &\leq V(t_0,\psi)\\
&\leq \left(|\psi(t_0)|+\lambda_1\int_{-\infty}^{t_0}|A(t_0,s)||\psi(s)|ds\right)^2
\end{aligned}$$

$$+{\lambda_1}^2\gamma\int_{-\infty}^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}|A(u,z)|\psi^2(z)dudz.$$

$$=\delta^2\left[\left(1+{\lambda_1}^2\int_{-\infty}^{t_0}|A(t_0,s)|ds\right)^2+{\lambda_1}^2\gamma\int_{-\infty}^{t_0}\int_{t_0}^{\infty}|A(u,z)|dudz.\right]$$

$$\leq \delta^2L^2 \tag{4.62}$$

ulaşırız. (4.59) ile

$$V(t,x) \quad \geq\left(x-\int_{-\infty}^{t}A(t,s)g(x(s))ds\right)^2$$

$$\geq\left(|x|-\left|\int_{-\infty}^{t}A(t,s)g\big(x(s)\big)ds\right|\right)^2.$$

elde edilir. Yukarıdaki iki eşitsizliği birleştirdiğimizde

$$|x(t)|\leq \delta L+\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|\left|g\big(x(s)\big)\right|ds$$

eşitsizliğine sahip olunur. Bu yüzden $|x(t)|<\varepsilon$ olduğu sürece (4.53)' i kullanarak

$$|x(t)|\leq \delta L+\varepsilon\lambda_1\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds\,,t\geq t_0$$

elde edilir.

Böylece yukarıdaki eşitsizlikten $|x(t)|<\varepsilon$ için $\delta<\frac{\varepsilon}{L}\left(1-\lambda_1\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds\right)$ olur. (4.58)' e göre biz $1-\lambda_1\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds>0$ eşitsizliğine sahibiz bu nedenle δ ile ilgili yukarıdaki eşitsizlik geçerlidir. Buda ispatı tamamlar.

Bir sonraki teorem x' in herhangi bir çözümünün $|x(t)|^2\in L_{[t_0,\infty)}, t_0\in E_k$ koşulları sağladığını ispatlar.

Teorem 4.15 Teorem 4.14' deki tüm şartların sağlandığını kabul edelim. $x(t)$, (4.51)' ün herhangi bir çözümü olsun. O zaman $|x(t)|^2\in L_{[t_0,\infty)}, t_0\in E_k$ olur (Raffoul ve Rai, 2016).

İspat: Teorem 4.14' den sıfır çözümün kararlı olduğu bilinir. Dolayısıyla bazı δ kararlılığı için $|x(t,t_0,\psi)|<1$ alırız. V azalan olduğundan (4.61)' i t_0 dan t ye integraller ve (4.62)' yi kullanarak

$$V(t,x)\leq V(t_0,\psi)-\alpha\int_{t_0}^{t}|x(s)|^2ds\leq S^2L^2-\alpha\int_{t_0}^{t}|x(s)|^2ds.$$

$$V(t,x)\geq\left(x-\int_{-\infty}^{t}A(t,s)g(x(s))ds\right)^2$$

$$\left(x-\int_{-\infty}^{t}A(t,s)g(x(s))ds\right)^{2}\leq S^{2}L^{2}-\alpha\int_{t_0}^{t}|x(s)|^{2}ds. \tag{4.63}$$

alınır. Aynı zamanda Schwarz eşitsizliğini ve (4.53)' ü kullanarak,

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)||g(x(s))|ds\right)^{2} &= \left(\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|^{\frac{1}{2}}|A(t,s)|^{\frac{1}{2}}|g(x(s))|\,ds\right)^{2}\\ &\leq {\lambda_1}^{2}\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)||x(s)|^{2}ds.\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.57) ile $\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds$ sınırlı ve $|x|^2<1$ olduğundan $\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)||x(s)|^2ds$ ifadesi sınırlıdır dolayısıyla $\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)||g(x(s))|ds$ ifadesi de sınırlıdır. Bu nedenle (4.63)' den,

$$\begin{aligned}\alpha\int_{t_0}^{t}|x(s)|^{2}\,ds &\leq S^{2}L^{2}-\left(x-\int_{-\infty}^{t}A(t,s)g(x(s))ds\right)^{2}\\ &\leq S^{2}L^{2}+\left(|x|-\left|\int_{-\infty}^{t}A(t,s)g(x(s))ds\right|\right)^{2}\\ &\leq S^{2}L^{2}+|x|^{2}+2|x|\left|\int_{-\infty}^{t}A(t,s)g\big(x(s)\big)ds\right|+\left(\left|\int_{-\infty}^{t}A(t,s)g(x(s))ds\right|\right)^{2}\\ &\leq S^{2}L^{2}+|x|^{2}+|x|^{2}\left(\left|\int_{-\infty}^{t}A(t,s)g\big(x(s)\big)ds\right|\right)^{2}+\left(\left|\int_{-\infty}^{t}A(t,s)g(x(s))ds\right|\right)^{2}\\ &\leq S^{2}L^{2}+2+2\left(\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)||g(x(s))|ds\right)^{2}\\ &\leq K\end{aligned}$$

sonucuna varırız burada K pozitif sabittir. Bu $|x(t)|^2\in L_{[t_0,\infty)}, t_0\in E_k$ olduğunu gösterir.

(4.51) için elde edilen sonuçları (4.50)' ye genişletmek oldukça basittir. (4.50) tamamen lineer olmadığı için bu dikkat çekicidir. Lineer bir terimin olmaması, ters çevirmeyi veya uygun bir Lyapunov fonksiyoneli bulmayı imkansız değilse de son derece zorlaştırır. Buradaki avantaj, denklemi (4.55)' e eşdeğer olacak şekilde yeniden yazılabilir olmasıdır.

Teorem 4.16 (4.52) ve (4.54) sağlansın. Ek olarak,

$$-2\lambda_2A(t,t)+\lambda_1A^2(t,t)+{\lambda_1}^{2}\gamma\int_{t}^{\infty}|A(u,t)|du\leq-\alpha \tag{4.64}$$

$$\int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|ds - \gamma \le 0, \tag{4.65}$$

ve

$$1 - \lambda_1 \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|ds > 0 \tag{4.66}$$

koşulları sağlansın o zaman (4.50)' nin sıfır çözümü kararlıdır. $|x(t)|^2 \in L_{[t_0,\infty)}, t_0 \in E_k$ (Raffoul ve Rai, 2016).

İspat: Teorem 4.14 ve Teorem 4.15 **i**spatında $P = 0$ alınarak elde edilir.

Sonraki teoremde, (4.51)' in sıfır çözümünün, Lyapunov fonksiyonelindeki çift katlı integral üzerinde düzgün sınırlılık gerektirerek düzgün kararlı olduğu gösterilir. Basitleştirmek için

$$J = \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|ds. \tag{4.67}$$

alınır.

Teorem 4.17 Teorem 4.14' deki tüm şartlar sağlansın. Bazı pozitif R sabiti ve her $t \ge t_0$ için,

$$\int_{-\infty}^{t} \int_{t}^{\infty} |A(u,z)|du\, dz \le R \tag{4.68}$$

ise o zaman (4.51)' in sıfır çözümü düzgün kararlıdır (Raffoul ve Rai, 2016).

İspat: (4.59) ile V fonksiyonu verilsin. O zaman V' yi genişleterek ve Schwartz eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} V(t) &= x^2(t) + \left(\int_{-\infty}^{t} A(t,s)g(x(s))\, ds\right)^2 - 2x(t)\int_{-\infty}^{t} A(t,s)g(x(s))ds \\ &+\gamma \int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty} |A(u,z)|g^2(x(z))dudz \\ &\le 2x^2(t) + 2\int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|ds \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|g^2\big(x(s)\big)ds \\ &+\gamma \int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty} |A(u,z)|g^2\big(x(z)\big)dudz \\ &\le 2x^2(t) + 2{\lambda_1}^2 J\int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|x^2(s)ds \\ &+\gamma{\lambda_1}^2 \int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty} |A(u,z)|x^2(z)dudz\,. \end{aligned} \tag{4.69}$$

varırız. $\epsilon > 0$ ve $t_0 \in E_k$ sabiti verilsin.

$$\left(2+2{\lambda_1}^2 J+\gamma{\lambda_1}^2 R\right)^{\frac{1}{2}}\delta<\epsilon(1-\lambda_1 J) \tag{4.70}$$

olacak şekilde $0<\delta<\epsilon$ ile birlikte $\delta>0$ seçilir.

$\|\phi\|<\delta$ ile birlikte $x(t)=x(t,t_0,\phi)$ (4.51) ün bir çözümü olsun. O zaman $t\geq t_0$ için (4.69) ve (4.70) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\left(x-\int_{-\infty}^{t}A(t,s)g(x(s))ds\right)^2 &\leq V(t)\leq V(t_0)\\ &\leq \left(2+2{\lambda_1}^2 J+\gamma{\lambda_1}^2 R\right)\delta^2 \end{aligned}\tag{4.71}$$

sahip olunur, aynı zamanda

$$\begin{aligned}\left|x-\int_{-\infty}^{t}A(t,s)g(x(s))ds\right| &\geq |x|-\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)||g(x(s))|ds\\ &\geq |x|-\lambda_1\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)||x(s)|ds\end{aligned}\tag{4.72}$$

olduğu görülür.

Her $t\geq t_0$ için $|x(t)|<\epsilon$ olduğunu iddia edilir. Her $-\infty\leq u\leq t_0$ için $|x(u)|<\delta<\epsilon$ olduğuna dikkat edin. Eğer iddia doğru değilse $t_0\leq s<t_*$ için $|x(t)|<\epsilon$ ve $|x(t_*)|=\epsilon$ olacak şekilde ilk t $t=t_*$ olsun. (4.53), (4.67), (4.71) ve (4.72)' yi kullanarak,

$$\begin{aligned}\epsilon(1-\lambda_1 J) &= \epsilon(1-\lambda_1\int_{-\infty}^{t}|A(t,s)|ds)\\ &\leq |x(t_*)|-\lambda_1\int_{-\infty}^{t_*}|A(t_*,s)||x(s)|ds\\ &\leq |x(t_*)|-\int_{-\infty}^{t_*}|A(t_*,s)||g(x(s))|ds\\ &\leq \left|x(t_*)-\int_{-\infty}^{t_*}A(t_*,s)g(x(s))ds\right|\\ &\leq \left(2+2{\lambda_1}^2 J+\gamma{\lambda_1}^2 R\right)^{\frac{1}{2}}\delta\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise (4.70) ile çelişir ve ispat tamamlanır.

(4.50)' nin sıfır çözümünün düzgün kararlılığı ile ilgili olarak aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.1 Teorem 4.16' nın tüm koşulları (4.68) ile birlikte sağlandığı varsayılsın. O zaman (4.50)' nin sıfır çözümü düzgün kararlıdır.

Örnek 4.1 $g(x) = x\left(\frac{sin^2(x)+1}{4}\right)$ olsun. O zaman $g(0) = 0,\ xg(x) > \frac{x^2}{4},\ |g(x)| \leq \frac{1}{2}|x|$ olur. Eğer $C(t,s) = \frac{-1}{16(t-s+1)^4}$ olarak seçilirse o zaman $C(u+s,s) = \frac{-1}{16(u+1)^4}$ ve

$$A(t,s) = \int_{-\infty}^{t-s} C(u+s,s)ds = \frac{1}{4(t-s+1)^3}$$

olur. Bu durum $A(t,t) = \frac{1}{4}$ ve böylece (4.54) koşulu sağlanır. Böylece aşağıdaki ifadelerin doğrulanması kolaydır.

$$\int_{t}^{\infty} |A(u,t)|du = \frac{3}{4}, \qquad \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|ds = \frac{3}{4},$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty} |A(u,z)|dudz &= \int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty} \frac{1}{4(u-z+1)^3}dudz \\ &= \int_{-\infty}^{t} \frac{3}{4.(t-z+1)^2}dz\end{aligned}$$

$\gamma = \frac{3}{2}$ ve $P = -1$ olsun. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ve $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ den dolayı (4.56), (4.57) ve (4.58)' ın sağlandığını doğrulamak kolaydır. Bu nedenle lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemin,

$$x'(t) = -x(t) - \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{16(t-s+1)^4} x(s)\left(\frac{sin^2(x(s))}{4} + 1\right)ds,$$

sıfır çözümü Teorem 4.16 gereği düzgün kararlıdır.

Sonraki örnekte $P > 0$' a sahip olmamızı sağlayan bir C çekirdeği seçeriz.

Örnek 4.2 $g(x)$ fonksiyonunu önceki örnekteki gibi tanımlansın. Daha sonra seçilmek üzere olan bazı pozitif sabit k değeri için $C(t,s) = -e^{-k(t-s)}$ olsun. O zaman $A(t,s) = \frac{1}{k}e^{-k(t-s)}$ ve bunun bir sonucu olarak $A(t,t) = \frac{1}{k}$ olur. Böylelikle

$$\int_{t}^{\infty} |A(u,t)|du = \int_{-\infty}^{t} |A(t,s)|ds = \frac{1}{k^2}$$

olduğu görülür. Üstelik $\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty}|A(u,z)|dudz = \frac{1}{k^3}$.

$k = 4$ ve $\gamma = \frac{1}{32}$ olsun. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ve $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ den dolayı (4.57) ve (4.58) koşulları sağlanır. (4.56) nın sağlanması için uygun P seçimi kaldı. (4.56)' da tüm parametrelerin yerine konması ile ikinci dereceden denkleme yol açar.

$$P^2 + 2P - \eta^2 < 0, \eta^2 = 0.093261711875. \tag{4.73}$$

ikinci dereceden denklemi elde edilir. (4.73) eşitsizliği

$$0 \leq P < -1 + \sqrt{2 + 2\,\eta^2}.$$

için sağlanır. Böylece P pozitif sabiti için lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel

$$x'(t) = Px(t) - \int_{-\infty}^{t} e^{-k(t-s)} x(s) \left(\frac{sin^2(x(s))}{4} + 1 \right) ds$$

denkleminin düzgün kararlı olduğunu gösterdik.

Fonksiyonel diferansiyel denklemlerin nitel analizinde Lyapunov teorisini kullanırken, elde edilen sonuçların doğrudan Lyapunov fonksiyonunun veya fonksiyonelliğinin özelliği ile ilişkili olduğuna inanılmaktadır. Burada doğru Lyapunov fonksiyonelini kullanarak lineer olmayan integro-diferansiyel denklemi lineer bir terime dönüştürür. (4.55) formunda (4.51)' i yeniden yazarak (4.59)' da verilen Lyapunov fonksiyonunun oluşturulmasına nasıl yaklaşacağına dair ipucu verir. Bu, (4.55) in karesi (4.59) ile verilen Lyapunov fonksiyonelinin ilk terimi olan

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) - \int_{-\infty}^{t} A(t,s) g(x(s)) ds \right) = Px(t) - A(t,t) g(x(t))$$

formuna alınabileceğine dikkat edilerek kolayca görülebilir.

Ek olarak, bu teknik (4.50) de verilen tamamen lineer olmayan integro-diferansiyel denklem üzerinde kararlılık sonuçları çıkarmamızı sağlamıştır. Islam ve Raffoul (2005)' te yazarlar skaler lineer Volterra integro-diferansiyel denklemini

$$x'(t) = h(t)x(t) + \int_{0}^{t} C(at - s) x(s) ds \qquad (4.74)$$

ve onun pertürbe formu,

$$x'(t) = h(t)x(t) + \int_{0}^{t} C(at - s) x(s) ds + g(t, x(t)) \qquad (4.75)$$

$a > 1$ sabiti için ele aldılar. $g(t, x(t))$ fonksiyonu x ve t için süreklidir ve sürekli λt için $g(t, x(t)) \leq \lambda t |x(t)|$. Üstelik $t \geq 0$ için $h(t)$ süreklidir ve $C: R \to R$ süreklidir.

Varsayım 4.1 Teorem 4.14' ün tüm koşulları sağlansın. Eğer,

$$\int_{t}^{\infty} |A(u,z)| du \in L^1(-\infty, \infty) \qquad (4.76)$$

şartını sağlıyorsa (4.51)' in sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı olur.

4.3 Sabit Zaman Gecikmeli Lineer Olmayan Volterra İntegro Diferansiyel Denklemlerin Üstel Kararlılığı

D, R^n de orijini içeren bir küme olsun. $x: [0, t] \to D$ olmak üzere

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t,s)f\big(x(s)\big)ds. \tag{4.77}$$

Volterra integro-diferansiyel denklemini verilsin. Diyelim ki $V: R^+ \times D \to R^+$, negatif olmayan reel sayılar kümesi R^+ da sürekli türevlenebilir Lyapunov fonksiyonu

$$W_1(|x|) \le V\big(t, x(.)\big) \le W_2(|x|) + \int_0^t \varphi_1(t,s)W_3(|x(s)|)ds \tag{4.78}$$

ve

$$V'\big(t, x(.)\big) \le -\eta(t)V\big(t, x(.)\big) + F(t) \tag{4.79}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $F: [0,t] \to R^n$ sürekli bir fonksiyondur ve W_i kesin olarak artandır, $W_i(0) = 0$ ve eğer $s > 0$ ise $W_i(s) > 0$ ve $W_i: [0,\infty) \to [0,\infty)$ süreklidir. η fonksiyonu süreklidir ve negatif değildir. $t_0 \ge 0$ olsun, o zaman her bir sürekli $\Phi: [0,t_0] \to R^n$ fonksiyonu için, $0 \le t \le t_0$ için $x(t,t_0,\Phi) = \Phi(t)$ olacak şekilde $t_0 \le t \le I$ için (4.77) yi sağlayan $[t_0, I]$ aralığında en az bir sürekli $x(t) = x(t,t_0,\Phi)$ fonksiyonu vardır. Parametrelerin değişim formülünü kullanarak (4.79) dan formülünün varyasyonunu elde eder.

$$V(t,x(.)) \le \left[V(t_0,\Phi) + \int_{t_0}^t |F(s)| \exp\left(\int_{t_0}^s \eta(u)du\right) ds\right] \exp\left(-\int_{t_0}^t \eta(s)ds\right) \tag{4.80}$$

sahip olunur. Şimdi, $\|.\|$ Öklid normu olmak üzere p pozitif sabiti için $W_1 = \|x\|^p$ ise o zaman (4.78) ve (4.80)' den

$$\|x\| \le \left[V(t_0,\Phi) + \int_{t_0}^t |F(s)| \exp\left(\int_{t_0}^s \eta(u)du\right) ds\right]^{\frac{1}{p}} \exp\frac{1}{p}\left(-\int_{t_0}^t \eta(s)ds\right) \tag{4.81}$$

yazılır. Böylece, pozitif K sabitleri için eğer

$$\int_{t_0}^t |F(s)| \exp\left(\int_{t_0}^s \eta(u)du\right) ds \le K$$

ise o zaman $t \to \infty$ iken $\int_{t_0}^t \eta(s)ds \to \infty$ sağlarsa (4.81), (4.77)' nin sıfır çözümünün üstel olarak kararlı olduğunu gösterir. Parametrelerin değişim formülü (4.80) kolayca (4.79) elde edilir. Ancak (4.79) sağlayacak şekilde bir V Lyapunov fonksiyoneli bulmak son derece zordur. Burada amaç böyle bir Lyapunov fonksiyonelinin inşasına sistematik olarak yaklaşmaktır.

Bu bölümde fonksiyonel diferansiyel denklemlerin üstel asimptotik kararlı olduğunu ifade eden (4.79) koşulunu elde etmek için oluşturulan Lyapunov fonksiyonellerine kolay bir yol sağlayan altı teorem ve iki önerme sunulur. Negatif olmayan belirli Lyapunov fonksiyonellerinden yararlanılır ve

$$x'(t) = G(t, x(s); 0 \leq s \leq t) = G(t, x(.)) \tag{4.82}$$

fonksiyonel diferansiyel denklemler sisteminin sıfır çözümünün üstel asimptotik kararlılığını garanti eden yeterli koşulları elde edilir. Burada $G(t, 0) = 0$, $x \in R^n, G: R^+ \times R^n \to R^n$ lineer olmayan sürekli fonksiyondur. $t_0 \geq 0$ olsun, o zaman her bir sürekli $\Phi: [0, t_0] \to R^n$ fonksiyonu için, $0 \leq t \leq t_0$ için $x(t, t_0, \Phi) = \Phi(t)$ olacak şekilde $t_0 \leq t \leq I$ için (4.82) yi sağlayan $[t_0, I]$ aralığında en az bir sürekli $x(t) = x(t, t_0, \Phi)$ fonksiyonu vardır. Kabul edelim ki $t = t_0$' da $x'(t), x(t)$' nin sağdan türevidir. (4.82)' nin çözümlerin varlığını, tekliğini, sürekliliğini sağlayan koşullar için Driver (1977), Raffoul (2004)' e bakınız. Raffoul (2003)' de yazar diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinin sınırlılığını inceledi. Öte yandan Raffoul (2004)' te negatif olmayan belirli Lyapunov fonksiyonellerini kullanarak (4.82)' nin çözümlerinin sınırlılığını araştırdı.

(4.82) denkleminin bir özel hali (4.77) denklemidir. Sonuçlar n pozitif ve rasyonel olmak üzere $f(x) = x^n$ alarak (4.77) biçimindeki Volterra integro-diferansiyel denklemlere uygulanır. Sonra, buradaki teoremler Vanualailai (2002)' de elde edilenler ile karşılaştırılır. (4.77)' nin çözümlerinin sınırlılığı ve kararlılığı hakkında daha fazla bilgi için Caraballo (2001), Cheban (2001), Lınh ve Phat (2001), Hale (1977), Yoshızawa (1966) referanslarına bakılabilir.

$\Phi: [0, t_0] \to R^n$ sürekli olmak üzere, $|\Phi| = sup\{\|\Phi(s)\|: 0 \leq s \leq t_0\}$ olarak tanımlansın.

Tanım 4.3 Eğer pozitif bir M sabiti için (4.82)' nin herhangi bir $x(t, t_0, \Phi)$ çözümü

$$\|x(t, t_0, \Phi)\| \leq C(|\Phi|, t_0)e^{-M(t-t_0)}, t \geq t_0$$

eşitsizliğini sağlıyor ise (4.82) sisteminin sıfır çözümünün üstel asimptotik kararlıdır denir. Burada $C(|\Phi|, t_0), |\Phi|$ ve t_0' a bağlı bir sabittir ve Φ verilen sürekli ve sınırlı bir başlangıç fonksiyonudur. Eğer C, t_0' dan bağımsız ise (4.82) sisteminin sıfır çözümü düzgün üstel asimptotik kararlıdır denir.

Eğer $x(t)$, (4.82) sisteminin herhangi bir çözümü ise sürekli türevlenebilir bir

$$V: R^+ \times R^n \to R^+,$$

fonksiyon için V' nin türevi,

$$V'\big(t, x(.)\big) = \frac{\partial V(t, x(.))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V\big(t, x(.)\big)}{\partial x_i} G_i\,(t, x)$$

olarak tanımlanır (Raffoul, 2007).

Teorem 4.18 D, R^n' de orijini içeren bir küme olsun. Bazı $p, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \delta$ ve L pozitif sabitleri için

$$\lambda_1 \|x\|^p \leq V\big(t, x(.)\big) \leq \lambda_2 W_2(|x|) + \lambda_2 \int_0^t \varphi_1(t,s) W_3(|x(s)|) ds \tag{4.83}$$

ve

$$V'\big(t, x(.)\big) \leq \lambda_3 W_4(|x|) + \lambda_3 \int_0^t \varphi_2(t,s) W_5(|x(s)|) ds + Le^{-\delta t} \tag{4.84}$$

eşitsizliklerini sağlayan sürekli türevlenebilir $V: R^+ \times D \rightarrow R^+$, Lyapunov fonksiyoneli vardır. $\varphi_i(t,s) \geq 0$ fonksiyonları $0 \leq s \leq t < \infty$, $i = 1,2$ için sürekli ve skaler değerlidirler. Eğer bazı B pozitif sabitleri için $\int_0^t \varphi_1(t,s) ds \leq B$ olmak üzere bazı γ pozitif sabiti için

$$W_2(|x|) - W_4(|x|) + \int_0^t \big(\varphi_1(t,s) W_3(|x|) - \varphi_2(t,s) W_5(|x|)\big) ds \leq \gamma e^{-\delta t} \tag{4.85}$$

eşitsizliğini sağlarsa, o zaman (4.82)' nin sıfır çözümü düzgün üstel asimptotik kararlıdır (Raffoul, 2007).

İspat: $0 < M = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} < \delta$ olsun. Herhangi bir başlangıç zamanı $t_0 \geq 0$, için (4.82)' nin herhangi bir $x(t)$ çözümü $0 \leq t \leq t_0$ için $x(t) = \Phi(t)$ olsun. O zaman,

$$\frac{d}{dt}\big(V(t, x(.)) e^{M(t-t_0)}\big) = \big[V'\big(t, x(.)\big) + MV(t, x(.))\big] e^{M(t-t_0)}$$

olur. $x(t) \in R^n$ için, (4.83) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(V\big(t, x(.)\big) e^{M(t-t_0)}\big) \quad & \leq [-\lambda_3 W_4(|x|) - \lambda_3 \int_0^t \varphi_2(t,s) W_5(|x(s)|) ds + Le^{-\delta t} \\
& +M\lambda_2 W_2(|x|) + M\lambda_2 \int_0^t \varphi_1(t,s) W_3(|x(s)|) ds] e^{M(t-t_0)} \\
& = \lambda_3 [W_2(|x|) - W_4(|x|) + Le^{-\delta t} \\
& + \int_0^t \big(\varphi_1(t,s) W_3(|x(s)|) - \varphi_2(t,s) W_5(|x(s)|)\big) ds] e^{M(t-t_0)} \\
& \leq (\lambda_3 \gamma + L) e^{-\delta t} e^{M(t-t_0)} \\
& \leq (\lambda_3 \gamma + L) e^{-\delta(t-t_0)} e^{M(t-t_0)} \\
& = (\lambda_3 \gamma + L) e^{(M-\delta)(t-t_0)}
\end{aligned} \tag{4.86}$$

sahip olunur. (4.86) eşitsizliği t_0' dan t' ye integrallenirse,

$$\big(V(t, x(.)) e^{M(t-t_0)}\big) \quad \leq V(t_0, \Phi) + \frac{\lambda_3 \gamma + L}{M - \delta} e^{(M-\delta)(t-t_0)} - \frac{\lambda_3 \gamma + L}{M - \delta}$$

$$\leq V(t_0, \Phi) + \frac{\lambda_3 \gamma + L}{\delta - M}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$V(t, x(.)) \leq \left(V(t_0, \Phi) + \frac{\lambda_3 \gamma + L}{\delta - M} \right) e^{-M(t-t_0)}$$

(4.83)' den $\lambda_1 \|x\|^p \leq V(t, x(.))$ koşulundan $t \geq t_0$ için

$$\|x\| \quad \leq \left\{ \frac{1}{\lambda_1} \right\}^{\frac{1}{p}} \left(\lambda_2 W_2(|\Phi|) + \lambda_2 W_3(|\Phi|) \int_0^t \varphi_1(t_0, s) ds + \frac{\lambda_3 \gamma + L}{\delta - M} \right)^{\frac{1}{p}} e^{-\frac{M}{p}(t-t_0)}$$

olur bu da ispatı tamamlar.

Açıklama 4.1 Eğer sonra ki önermedeki gibi φ_1, φ_2 fonksiyonları üzerine uygun şartlar ile $W_2 = W_4, W_3 = W_5$ ise (4.85) koşulu kolaylıkla sağlanır.

Önerme 4.1 Verilen bir sınırlı sürekli başlangıç fonksiyonu $0 \leq t \leq t_0$ için $x(t) = \Phi(t)$ ve $1 < \delta$ için

$$x' = \sigma(t)x(t) + e^{-\delta t} \int_0^t B(t, s) x^{\frac{2}{3}}(s) ds, \quad t \geq 0, \tag{4.87}$$

skaler lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemi verilsin. Eğer

$$2\sigma(t) + e^{-\delta t} \int_0^t |B(t, s)| ds + \int_t^\infty e^{-\delta u} |B(u, t)| du \leq -1,$$

$$\int_0^t \int_t^\infty e^{-\delta u} |B(u, s)| du ds, \quad \int_0^t |B(t, s)| ds < \infty,$$

ve

$$\frac{e^{-\delta t} |B(t, s)|}{3} \geq \int_t^\infty e^{-\delta u} |B(u, s)| du$$

ise o zaman (4.87)' nin sıfır çözümü düzgün üstel asimptotik kararlıdır (Raffoul, 2007).

İspat: Bunun için

$$V(t, x(.)) = x^2 + \int_0^t \int_t^\infty e^{-\delta u} |B(u, s)| du x^2(s) ds.$$

Lyapunov fonksiyonu verilsin. O zaman (4.86)' nın çözümleri boyunca

$$\begin{aligned} V'(t, x(.)) \quad &= 2xx' + \int_t^\infty e^{-\delta u} |B(u, t)| x^2(t) du - \int_0^t e^{-\delta t} |B(t, s)| x^2(s) ds \\ &\leq 2\sigma(t) x^2 + 2e^{-\delta t} \int_0^t |B(t, s)| |x(t)| x^{\frac{2}{3}}(s) ds \\ &+ \int_t^\infty e^{-\delta u} |B(u, t)| x^2(t) du - \int_0^t e^{-\delta t} |B(t, s)| x^2(s) ds. \end{aligned}$$

sahip olunur. $ab \le {a^2}/{2} + {b^2}/{2}$ eşitsizliğinden yukarıdaki eşitsizlik

$$V'\big(t,x(.)\big) \quad \le 2\sigma(t)x^2 + e^{-\delta t}\int_0^t |B(t,s)|(x^2(t) + x^{\frac{4}{3}}(s))ds.$$

$$+\int_t^\infty e^{-\delta u}|B(u,t)|x^2(t)du - \int_0^t e^{-\delta t}|B(t,s)|x^2(s)ds. \qquad (4.88)$$

olarak yazılır. (4.88) eşitsizliğini daha da basitleştirmek için herhangi negatif olmayan gerçel w ve z sayıları için

$$wz \le \frac{w^e}{e} + \frac{z^f}{f}, \qquad \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$$

Young eşitsizliğini kullanarak $e = \frac{3}{2}, f = 3$ için

$$\int_0^t |B(t,s)|x^{\frac{4}{3}}(s)ds \quad = \int_0^t |B(t,s)|^{\frac{1}{3}}|B(t,s)|^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}(s)ds$$

$$\le \int_0^t \left(\frac{|B(t,s)|}{3} + \frac{2}{3}|B(t,s)|x^2(s)\right)ds$$

elde edilir. Bu son eşitsizliği (4.87) de yerine yazarak $L = \frac{1}{3}\int_0^t |B(t,s)|ds$ olmak üzere

$$V'(t,x(.)) \quad \le \left(2\sigma(t) + e^{-\delta t}\int_0^t |B(t,s)|ds + \int_t^\infty e^{-\delta u}|B(u,t)|du\right)x^2(t)$$

$$-e^{-\delta t}\int_0^t \left(|B(t,s)| - \frac{2}{3}|B(t,s)|\right)x^2(s)ds + \frac{e^{-\delta t}}{3}\int_0^t |B(t,s)|ds$$

$$\le -x^2(t) - \int_0^t \frac{e^{-\delta t}|B(t,s)|}{3}x^2(s)ds + Le^{-\delta t}$$

sonucuna varılır. $W_2 = W_4 = x^2(t)$, $W_3 = W_5 = x^2(s)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ve $\varphi_1(t,s) = \int_t^\infty e^{-\delta u}|B(u,s)|du$, $\varphi_2(t,s) = \frac{e^{-\delta u}|B(t,s)|}{3}$ alarak Teorem 4.18' in (4.83) ve (4.84) koşullarının $M = 1$ ile sağlandığı görülür. Geriye (4.85) koşulunun sağlandığını göstermek kalır. $\frac{e^{-\delta u}|B(t,s)|}{3} \ge \int_t^\infty e^{-\delta u}|B(u,s)|du$ olduğundan

$$W_2(|x|) - \quad W_4(|x|) + \int_0^t \big(\varphi_1(t,s)W_3(|x(s)|) - \varphi_2(t,s)W_5(|x(s)|)\big)ds$$

$$= x^2(t) - x^2(t) + \int_0^t \left(\int_t^\infty e^{-\delta u}|B(u,s)|du - \frac{e^{-\delta t}|B(t,s)|}{3}\right)x^4(s)ds$$

$$= \int_0^t \left(\int_t^\infty e^{-\delta u}|B(u,s)|du - \frac{e^{-\delta t}|B(t,s)|}{3}\right)x^4(s)ds \le 0$$

sahip olunur. Bu yüzden $\gamma = 0$ için (4.85) koşulu sağlanır. Teorem 4.18' e göre (4.87) nin sıfır çözümü düzgün üstel asimptotik kararlıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Dikkat edin, eğer $B(t,s)=1,\ \sigma(t)=\frac{-(1+te^{-t}+\left(\frac{1}{\delta}\right)e^{-\delta t})}{2}$ alırsak, o zaman Önerme 4.1' in ilk iki koşulu sağlanır. Ayrıca $\delta=3$ alınarak

$$\frac{e^{-\delta t}|B(t,s)|}{3}\geq\int_t^\infty e^{-\delta u}|B(u,s)|du$$

koşulu sağlanır. Böylece $t\geq 0$ için

$$x'=\frac{-\left(1+te^{-t}+\left({}^{1}/_{\delta}\right)e^{-\delta t}\right)}{2}x(t)+\int_0^t e^{-\delta t}x^{\frac{2}{3}}(s)ds$$

denkleminin sıfır çözümü düzgün üstel asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.19 D,R^n' de orijini içeren bir küme olsun. $\lambda_1(t)$ azalmayan ve $0\leq s\leq t<\infty, i=1,2,.$ için $\varphi_i(t,s)\geq 0$ sürekli skaler değerli bir fonksiyon olmak üzere bazı pozitif sürekli $\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \lambda_3(t)$ fonksiyonları ve pozitif sabitler L,p,δ için

$$\lambda_1(t)\|x\|^p\leq V\big(t,x(.)\big)\leq\lambda_2(t)W_2(|x|)+\lambda_2(t)\int_0^t\varphi_1(t,s)W_3(|x(s)|)ds \qquad (4.89)$$

ve

$$V'\big(t,x(.)\big)\leq-\lambda_3(t)W_4(|x|)-\lambda_3(t)\int_0^t\varphi_2(t,s)W_5(|x(s)|)ds+Le^{-\delta t} \qquad (4.90)$$

eşitsizliklerini sağlayan türevlenebilir bir $V\colon R^+\times D\to R^+$ Lyapunov fonksiyonu verilsin. Eğer her $t\geq 0$ için B,N pozitif sabitleri için $\int_0^t\varphi_1(t,s)\,ds\leq B$ ve $\lambda_2(t)\leq N$ olmak üzere bazı γ pozitif sabiti için

$$W_2(|x|)-W_4(|x|)+\int_0^t(\varphi_1(t,s)W_3(|x(s)|)-\varphi_2(t,s)W_5(|x(s)|))ds$$
$$\leq\gamma e^{-\delta t} \qquad (4.91)$$

eşitsizliği sağlanır ise O zaman (4.82)' nin sıfır çözümü düzgün üstel asimptotik kararlıdır (Raffoul, 2007).

İspat:

$$M=\inf_{t\in R^+}\frac{\lambda_3(t)}{\lambda_2(t)}<\delta$$

olsun. Herhangi bir t_0 başlangıç zamanı için $x(t_0)=\Phi(t_0)$ sağlayan (4.82)' nin bir çözümü $x(t)$ olsun. O zaman,

$$\frac{d}{dt}\left(V(t,x(.))e^{M(t-t_0)}\right)\leq[-\lambda_3(t)W_4(|x|)-\lambda_3(t)\int_0^t\varphi_2(t,s)W_5(|x(s)|)ds+Le^{-\delta t}$$
$$+M\lambda_2(t)W_2(|x|)+M\lambda_2(t)\int_0^t\varphi_1(t,s)W_3(|x(s)|)ds]e^{M(t-t_0)}$$

olur. Fakat $\frac{\lambda_3(t)}{\lambda_2(t)} \geq M$, $-\lambda_3(t) \leq -M\lambda_2(t)$ olduğunu gösterir ve bu nedenle yukarıdaki eşitsizlik (4.92)' den

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(V(t,x(.))e^{M(t-t_0)}\right) &\leq [M\lambda_2(t)(-W_4(|x|) - \int_0^t \varphi_2(t,s)W_5(|x(s)|)ds \\ &+W_2(|x|) + \int_0^t \varphi_1(t,s)W_3(|x(s)|)ds) + Le^{-\delta t}]e^{M(t-t_0)} \\ &\leq (MN\gamma + L)e^{(M-\delta)(t-t_0)}\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlik t_0' dan t' ye integrallenirse,

$$V(t,x(.)) \leq \left(V(t_0,\Phi) + \frac{MN\gamma + L}{\delta - M}\right)e^{-M(t-t_0)}$$

sahip olunur. $\lambda_1(t)$ azalmayan olduğundan $t \geq t_0 \geq 0$ için $\lambda_1(t) \geq \lambda_1(t_0)$ olur. Böylece (4.90)' dan $\lambda_1(t)\|x\|^p \leq V(t,x(.))$ olur bu ise her $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned}\|x\| \leq \left\{\frac{1}{\lambda_1(t_0)}\right\}^{\frac{1}{p}}\Bigg(&\lambda_2(t)W_2(|\Phi|) + \lambda_2(t_0)W_3(|\Phi|)\int_0^{t_0}\varphi_1(t_0,s)ds \\ &+\frac{MN\gamma + L}{\delta - M}\Bigg)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{-M}{p}(t-t_0)}\end{aligned} \tag{4.92}$$

olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.20 Teorem 4.19' un bütün koşulları λ_1' in azalmayan olduğu koşulu hariç bunun yerine $\forall t \geq t_0 \geq 0$ için $\lambda_1(t) \geq e^{-at}$, olacak şekilde pozitif bir $a < M$ sabiti vardır alınarak sağlansın. O zaman (4.82)' nin sıfır çözümü düzgün üstel asimptotik kararlıdır (Raffoul, 2007).

İspat: İspat Teorem 4.19' un ispatı ile hemen hemen aynıdır. (4.92) eşitsizliğinden, $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned}\|x\| &\leq \left\{\frac{1}{\lambda_1(t_0)}\right\}^{\frac{1}{p}}\Bigg(\lambda_2(t_0)W_2(|\Phi|) + \lambda_2(t_0)W_3(|\Phi|)\int_0^{t_0}\varphi_1(t_0,s)ds \\ &\qquad +\frac{MN\gamma + L}{\delta - M}\Bigg)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{-M}{p}(t-t_0)} \\ &\leq \Bigg(\lambda_2(t_0)W_2(|\Phi|) + \lambda_2(t_0)W_3(|\Phi|)\int_0^{t_0}\varphi_1(t_0,s)ds \\ &\qquad +\frac{MN\gamma + L}{\delta - M}\Bigg)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{-M}{p}(t-t_0)}\end{aligned} \tag{4.93}$$

olur.

Teorem 4.21 Eğer bir pozitif N sabiti ve $\forall t \geq 0$ için $\lambda_2(t) \leq N$ koşulu sağlamaz ise ve (4.85) ve (4.92)' de $\gamma = 0$ ise o zaman Teorem 4.20 veya Teorem 4.21 den (4.82)' nin sıfır çözümü üstel asimptotik kararlıdır (Raffoul, 2007).

İspat: İspat (4.92) ve (4.93)' den kolayca çıkarılabilir. Bunu görmek için $\gamma = 0$ olan eşitsizlik (4.93) eşitsizliği her $t \geq t_0$

$$\|x\| \leq \left\{\frac{1}{\lambda_1(t_0)}\right\}^{\frac{1}{p}} \left(\lambda_2(t_0)W_2(|\Phi|) + \lambda_2(t_0)W_3(|\Phi|)\int_0^{t_0} \varphi_1(t_0,s)ds \right.$$
$$\left. + \frac{L}{\delta - M}\right)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{-M}{p}(t-t_0)}$$

ifadesini ima eder. (4.93)' ü düşünürsek aynı şey geçerlidir.

Önerme 4.2 k_1, k_2 pozitif sabitleri ve $k_2 < 1$ için $1 < \delta = k_1 + k_2$ olsun. Belirli bir sınırlı sürekli $0 \leq t \leq t_0$ için $x(t) = \Phi(t)$ başlangıç fonksiyonu için

$$x' = \sigma(t)x(t) + e^{-k_1 t}\int_0^t B(t,s)x^{\frac{2}{3}}(s)ds\,, t \geq 0 \tag{4.94}$$

skaler lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemi verilsin. Eğer

$$2\sigma(t) - k_2 + \int_0^t |B(t,s)|ds + \int_t^\infty |B(u,t)|\,du \leq -1,$$
$$\int_0^t\int_t^\infty |B(u,s)|duds\,, \int_0^t |B(t,s)|ds < \infty,$$

ve

$$\frac{|B(t,s)|}{3} \geq \int_t^\infty |B(u,s)|du$$

ise o zaman (4.94)' ün sıfır çözümü düzgün üstel asimptotik kararlıdır (Raffoul, 2007).

İspat: Lyapunov fonksiyonu

$$V\big(t,x(.)\big) = e^{-k_2 t}\left(x^2 + \int_0^t\int_t^\infty |B(u,s)|dux^2(s)ds\right)$$

olsun. Lyapunov fonksiyonunun (4.94)' ün çözümleri boyunca türevi $ab \leq {a^2}/{2} + {b^2}/{2}$ eşitsizliği kullanıldıktan sonra,

$$V'\big(t,x(.)\big) \quad \leq (2\sigma(t) - k_2)x^2(t)e^{-k_2 t} - k_2\int_0^t\int_t^\infty |B(u,s)|dux^2(s)ds$$
$$+2e^{-(k_1+k_2)t}\int_0^t |B(t,s)||x(t)|x^{\frac{2}{3}}(s)ds + e^{-k_2 t}\int_t^\infty |B(u,t)|x^2(t)du$$

$$-e^{-k_2 t}\int_0^t |B(t,s)|x^2(s)ds$$

$$\leq (2\sigma(t)-k_2)x^2(t)e^{-k_2 t}-k_2\int_0^t\int_t^\infty |B(u,s)|dux^2(s)ds$$

$$+e^{-(k_1+k_2)t}\int_0^t |B(t,s)|dsx^2(t)+e^{-(k_1+k_2)t}\int_0^t |B(t,s)|x^{\frac{4}{3}}(s)ds$$

$$+e^{-k_2 t}\int_t^\infty |B(u,t)|x^2(t)du - e^{-k_2 t}\int_0^t |B(t,s)|x^2(s)ds$$

elde edilir. Young eşitsizliğini kullanarak

$$e^{-(k_1+k_2)t}\int_0^t |B(t,s)|x^{\frac{4}{3}}(s)ds \quad = e^{-(k_1+k_2)t}\int_0^t |B(t,s)|^{\frac{1}{3}}|B(t,s)|^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}(s)ds$$

$$\leq e^{-(k_1+k_2)t}\int_0^t \left(\frac{|B(t,s)|}{3}+\frac{2}{3}|B(t,s)|x^2(s)\right)ds$$

sahip olunur. Son iki eşitsizlikten $L=\frac{1}{3}\int_0^t |B(t,s)|ds$ olmak üzere

$$V'(t,x(.)) \quad \leq \left(2\sigma(t)-k_2+\int_0^t |B(t,s)|ds+\int_t^\infty |B(u,t)|du\right)e^{-k_2 t}x^2(t)$$

$$-\int_0^t \frac{|B(t,s)|}{3}x^2(s)ds$$

$$\leq -x^2(t)-e^{-k_2 t}\int_0^t \frac{|B(t,s)|}{3}x^2(s)ds+Le^{-(k_1+k_2)t}$$

elde edilir. $W_2=W_4=x^2(t)$, $W_3=W_5=x^2(s)$, $\lambda_1(t)=\lambda_2(t)=\lambda_3(t)=e^{-k_2 t}$ ve $\varphi_1(t,s)=\int_t^\infty |B(u,s)|du$, $\varphi_2(t.s)=\frac{|B(t,s)|}{3}$, alarak $M=1$ ve $\gamma=0$ ile (4.85)' in (4.89), (4.90), (4.91) koşullarının sağlandığı görülür. Eğer $k_2<M$ alırsak o zaman Teorem 4.19' un hipotezi $a=k_2$ ile sağlanır ve bu nedenle (4.94)' ün sıfır çözümü düzgün üstel asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.22 $D\subset R^n$' nin orijini içeren bir küme ve $\lambda_1,\lambda_3,p,\delta>0, L\geq 0$ sabitler ve $0<\varepsilon<min\{\lambda_3,\delta\}$ olsun. Her $(t,x)\in[0,\infty)\times D$ için $V: D\to[0,\infty)$ bir tip I Lyapunov fonksiyonu

$$\lambda_1\|x\|^p\leq V(x) \tag{4.95}$$

$$\dot{V}(t,x)\leq -\lambda_3 V(x)+Le^{-\delta t} \tag{4.96}$$

olacak şekilde varsayılsın. O zaman (4.82)' nin herhangi bir sıfır çözümü düzgün üstel asimptotik kararlıdır (Raffoul, 2007).

İspat: Herhangi bir t_0 başlangıç zamanı için $x(t_0) = \Phi(t_0)$ ile $x(t)$, (4.82)' nin D' de herhangi bir çözümü olsun. $0 < \varepsilon < min\{\lambda_3, \delta\}$ olacak şekilde ε tanımlanır. O zaman, (2.15) ile

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(V(t,x(.))e^{\varepsilon t}) &= V'\big(t,x(t)\big)e^{\varepsilon t} + \varepsilon V(x(t))e^{\varepsilon t} \\
&\leq \Big(-\lambda_3 V\big(x(t)\big) + L^{-\delta t} + \varepsilon V\big(x(t)\big)\Big)e^{\varepsilon t} \\
&= e^{\varepsilon t}\big[\varepsilon V\big(x(t)\big) - \lambda_3 V\big(x(t)\big) + L^{-\delta t}\big] \\
&\leq Le^{(\varepsilon-\delta)t}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafını t_0' dan t' ye integrallersek,

$$\begin{aligned}
V\big(x(t)\big)e^{\varepsilon t} &\leq V(\Phi)e^{\varepsilon t_0} + \frac{L}{\varepsilon-\delta}e^{(\varepsilon-\delta)t} - \frac{L}{\varepsilon-\delta}e^{(\varepsilon-\delta)t_0} \\
&\leq V(t_0,\Phi)e^{\varepsilon t_0} + \frac{L}{\delta-\varepsilon}e^{(\varepsilon-\delta)t_0} \\
&\leq \left(V(t_0,\Phi) + \frac{L}{\delta-\varepsilon}\right)e^{\varepsilon t_0}
\end{aligned}$$

sahip olunur. Sonra eşitsizliğin her iki tarafı da $e^{\varepsilon t}$ ile bölünürse,

$$V(x(t)) \leq \left(V(t_0,\Phi) + \frac{L}{\delta-\varepsilon}\right)e^{-\varepsilon(t-t_0)}$$

olur. İspat (4.95) koşulu ile tamamlanır.

Önerme 4.3 Teorem 4.22' nin uygulamasını göstermek için verilen sınırlı ve sürekli başlangıç fonksiyonu $0 \leq t \leq t_0$ için $x(t) = \Phi(t)$ ve $t \geq 0$ için $\sigma(t)$ sürekli ve $0 \leq s \leq t < \infty$ için $B(t,s)$ sürekli olmak üzere,

$$x'(t) = \sigma(t)x(t) + \int_0^t B(t,s)f(s,x(s))ds + g(t,x(t)) \tag{4.97}$$

skaler lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemi verilsin. Varsayalım ki sürekli $f(t,x(t))$ ve $g(t,x(t))$ fonksiyonları, $\gamma(t)$ ve $\beta(t)$ fonksiyonları pozitif ve sınırlı olmak üzere

$$|g(t,x(t))| \leq \beta(t)|x(t)|^{\frac{1}{2}} \tag{4.98}$$

ve

$$|f(t,x(t))| \leq \gamma(t)|x(t)| \tag{4.99}$$

sağlar. Diyelim ki $k > 1$ ve $\lambda_3 > 0$ sabitleri var öyle ki,

$$\sigma(t) + \frac{1}{2} + k\int_t^\infty |B(u,t)|du\gamma(t) \leq -\lambda_3 < 0 \tag{4.100}$$

bazı $\epsilon > 0$ için $k = 1 + \epsilon$ olsun ve varsayalım ki $\lambda \geq \frac{k\lambda_3}{\epsilon} > 0,\ 0 \leq s \leq t \leq u < \infty$ olmak üzere

$$|B(t,s)| \geq \lambda \int_t^\infty |B(u,s)|du \tag{4.101}$$

ve $t_0 \geq 0$ için

$$\int_0^{t_0} \int_t^\infty |B(u,s)|du\gamma(s)ds \leq \rho < \infty \tag{4.102}$$

sağlansın. O zaman (4.97)' nin tüm çözümleri düzgün üstel asimptotik kararlıdır (Raffoul, 2007).

İspat: Lyapunov fonksiyonu

$$V\big(t, x(.)\big) = |x(t)| + k \int_0^t \int_t^\infty |B(u,s)|du|f(s,x(s))|ds \tag{4.103}$$

olarak tanımlansın. Lyapunov fonksiyonunun (4.97)' nin çözümleri boyunca türevi alındıktan sonra , (4.98) ve (4.101) koşulları kullanılarak,

$$\begin{aligned}
V'\big(t, x(.)\big) &= \frac{x(t)}{|x(t)|} x'(t) + k \int_t^\infty |B(u,t)|du|f(t,x(t))| \\
&\quad -k \int_0^t |B(t,s)||f(s,x(s))|ds \\
&\leq \sigma(t)|x(t)| + \int_0^t |B(t,s)|\big|f\big(s,x(s)\big)\big|ds + \big|g\big(t,x(t)\big)\big| \\
&\quad +k \int_t^\infty |B(u,t)|du|f(t,x(t))| - k \int_0^t |B(t,s)||f(s,x(s))|ds \\
&\leq \left[\sigma(t) + \frac{1}{2} + k \int_t^\infty |B(u,t)|du\gamma(t)\right] |x(t)| \\
&\quad +(1-k) \int_0^t |B(t,s)|\big|f\big(s,x(s)\big)\big|ds + \frac{\beta^2(t)}{2} \\
&\leq -\lambda_3|x(t)| - \epsilon \int_0^t |B(t,s)|\big|f\big(s,x(s)\big)\big|ds + \frac{\beta^2(t)}{2} \\
&\leq -\lambda_3|x(t)| - \epsilon\lambda \int_0^t \int_t^\infty |B(u,s)|du\big|f\big(s,x(s)\big)\big|ds + \frac{\beta^2(t)}{2} \\
&\leq -\lambda_3 \left[|x(t)| + k \int_0^t \int_t^\infty |B(u,s)|du\big|f\big(s,x(s)\big)\big|ds\right] + \frac{\beta^2(t)}{2}
\end{aligned}$$

$$= -\lambda_3 V\big(t, x(.)\big) + \frac{\beta^2(t)}{2}$$

elde edilir. Eğer δ pozitif sabiti için $\beta^2 \leq e^{-\delta t}$ ise o zaman $\lambda_1 = 1, p = 1$ ve $L = \frac{1}{2}$ alınarak Teorem 4.21' in hipotezi karşılanır ve ispat sonuçlandırılır.

Böylece rahatlıkla Raffoul (2007) in teoremlerinin literatürdeki bazı sonuçlar karşısında etkili olduğu söylenebilir. Özellikle Burton ve Somolinos (1999),

$$x'(t) = -h(t)x(t) - b(t)x^3(t) + \int_0^t C(at - s)x(s)ds\,, t \geq 0 \tag{4.104}$$

skaler Volterra integro-diferansiyel denklemini ele alır. Burada $h(t), b(t)$ ve $C(at - s)$ sürekli fonksiyonlardır. Burton ve Somolinos (1999), (4.104) sıfır çözümünün $a > 1$ için düzgün asimptotik kararlılığını ve $0 < a < 1$ için sadece asimptotik kararlılığını garanti eden koşullar elde ettiler. Bazı pozitif b_0 sabiti ve $\forall t \geq 0$ için $b(t) \geq b_0 > 0$, olduğunu varsaymaları gerekiyordu. Bütünlük adına ana teoremlerden biri aşağıdadır.

Teorem 4.23 Varsayalım ki

$$C \in L^1[0, \infty), a > 1, h(t) \geq 0, \tag{4.105}$$

$$b(t) \geq b_0 > 0 \tag{4.106}$$

$$2h(t) \geq \left[1 + \left({}^{1}/_{a}\right)\right] \int_{(a-1)t}^{\infty} |C(v)|dv, \tag{4.107}$$

ve

$$\int_t^{\infty} |C(u)|du \in L^1[0, \infty), \tag{4.108}$$

koşulları sağlanır. O zaman (4.104)' ün sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Burton ve Somolinos, 1999).

Burton ve Somolinos (1999)' da sayfa 5' te özellikle teoremin ve sonuçlarının n pozitif tek tamsayıların bölümü olduğunda $b(t)x^n$ işlevlerine uygulanacağını iddia ettiler. Bu nedenle basitlik adına skaler Volterra integro denklemi ele alıyoruz.

$$x'(t) = -h(t)x(t) - b(t)x^{\frac{1}{3}}(t) + \int_0^t C(at - s)x(s)ds\,, t \geq 0 \tag{4.109}$$

Bir sonraki teoremde uygun bir Lyapunov fonksiyonu görüntüleyerek ve Teorem 4.18' in sonuçlarından yararlanarak (4.106) koşulunun gerekli olmadığı yerde (4.109)' un sıfır çözümünün düzgün üstel asimptotik kararlı olduğunu gösteriyoruz. Öte yandan daha güçlü bir kararlılık türü veren sonucumuza ulaşmak için (4.107) koşulunu güçlendirmemiz ve $b(t)$ fonksiyonunun üstel olarak azalmasını istememiz gerekecek.

Tüm çözümleri üstel olarak sıfıra düşürmeye çalıştığımız için $b(t)$' nin üstel bozulması kimseyi şaşırtmamalıdır.

Teorem 4.24 Varsayalım ki (4.105) ve (4.108) sağlansın. $\delta,\ k > 1$ sabitleri için

$$-2h(t) + \frac{4|b(t)|}{3} + \left[1 + {}^{k}/_{a}\right] \int_{(a-1)t}^{\infty} |C(v)| dv \leq -1 \tag{4.110}$$

$$(-1 + k) \int_0^t C(at - s) ds \geq ({}^{k}/_{a}) \int_{(a-1)t}^{\infty} |C(v)| dv \tag{4.111}$$

ve

$$|b(t)| \leq e^{-\delta t} \tag{4.112}$$

eşitsizlikler sağlanırsa, o zaman (4.109)' un sıfır çözümü düzgün üstel asimptotik kararlıdır (Raffoul, 2007).

İspat: $0 \leq t \leq t_0$ için sürekli ve sınırlı $x(t) = \Phi(t)$ başlangıç fonksiyonu ile $x(t)$, (4.109)' un herhangi bir çözümü olsun. Lyapunov fonksiyonu olarak

$$V\big(t, x(.)\big) = x^2(t) + \frac{k}{a} \int_0^t \int_{at-s}^{\infty} |C(u)| du x^2(s) ds$$

alınsın. O zaman (4.109)' un çözümleri boyunca,

$$\begin{aligned} V'\big(t, x(.)\big) \quad &\leq -2h(t)x^2(t) + 2|b(t)|x^{\frac{4}{3}}(t) + 2|x(t)| \int_0^t |C(at - s)||x(s)| ds \\ &+ \frac{k}{a} \int_{(a-1)t}^{\infty} |C(v)| dv\, x^2(t) - k \int_0^t |C(at - s)| x^2(s) ds. \end{aligned}$$

alınır. Burada

$$2|x(t)| \int_0^t |C(at - s)||x(s)| ds \leq \int_0^t |C(at - s)|(x^2(t) + x^2(s)) ds$$

olduğunu göz önüne alarak ve $f = 3, e = {}^{3}/_{2}$ ile Young eşitsizliği kullanarak

$$\begin{aligned} 2|b(t)|x^{\frac{4}{3}}(t) \quad &= 2|b(t)|^{\frac{1}{3}}|b(t)|^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}(t) \\ &\leq \frac{2|b(t)|}{3} + \frac{4|b(t)|}{3} x^2(t) \end{aligned}$$

elde edilen bu sonuçları kullanarak $V'(t, x(.))$' nin sınırı

$$\begin{aligned} V'(t, x(.)) \quad &\leq \left[-2h(t) + \frac{4|b(t)|}{3} + \left(1 + {}^{k}/_{a}\right) \int_{(a-1)t}^{\infty} |C(v)| dv\right] x^2(t) \\ &-(-1 + k) \int_0^t |C(at - s)||x^2(s)| ds + \frac{2|b(t)|}{3} \\ &\leq -x^2(t) - \int_0^t (-1 + k)|C(at - s)||x^2(s)| ds \frac{2}{3} |b(t)|. \end{aligned}$$

olur. Teorem 4.18' in tüm koşullarının $L = \frac{4}{3}$, $M = 1$, $W_2 = W_4 = x^2(t)$, $W_3 = W_5 = x^2(s)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\varphi_1(t,s) = \left({}^{k}/_{a}\right) \int_{at-s}^{\infty} |C(u)| du$, $\varphi_2(t,s) = (-1+k)|C(at-s)|$ ve $\gamma = 0$ için sağlandığı görülür.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada Burton (2009), Raffoul ve Rai (2016), Raffoul (2007) yazarları tarafından ele alınan bazı integro ve integral denklem modellerinin çözümlerinin kararlılığı, sınırlılığı, üstel asimptotik kararlılığı, düzgün üstel asimptotik kararlılığı gibi nitel analizleri incelenmiştir. Literatürde Volterra integro ve integral diferansiyel denklem modellerinin nitel analizleri ile ilgili yapılan çalışmalar bizi bu yönde çalışmaya yönlendirmiştir. Volterra integro ve integral diferansiyel denklem modellerinin çözümlerinin nitel analizi yapılırken yöntem olarak Lyapunov' un ikinci metodu kullanılmıştır. Burton (2009) esnek Lyapunov fonksiyoneli kullanarak lineer ve lineer olmayan çeşitli integral denklemlerin çözümlerinin bazı nitel özelliklerini ilk kez incelemiştir. Amaç limit çözüm kümelerini içeren nitel özellikler elde etmektir. İlk kez Lyapunov fonksiyoneli birinci mertebeden olmayan integral denkleme doğrudan uygulamıştır. Ek olarak, bir integral denklemi çekirdeğin özelliklerinin çoğunu koruyan kuvvetli kararlı bir diferansiyel denkleme dönüştürmek için bir strateji geliştirmiş ve sonra ona esnek Lyapunov fonksiyoneli uygulamıştır. Raffoul ve Rai (2016), Raffoul (2007) Sonsuz Gecikmeli Lineer Olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem ve Sabit Zaman Gecikmeli Volterra integro-diferansiyel denklem modelleri için uygun Lyapunov fonksiyonları bulunarak denklemlerin nitel özellikleri analiz edilmiştir.

5.2 Öneriler

Araştırmacılara, farklı Volterra integro-diferansiyel denklem modelleri için uygun Lyapunov fonksiyonlarını araştırarak denklemlerin kararlılık, sınırlılık, yakınsaklık vb. gibi nitel özelliklerini incelemeleri önerilir.

KAYNAKLAR

Adıvar, M. and Raffoul, Y.N. 2012. Inequalities and exponential stability and instability in finite delay Volterra integro differential equations, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (Series 2)*, 61 (3), 321-330.

Ahmad, S. and Rao, M.R.M. 1999. Theory of Ordinary Differential Equations, With Applications of Biology and Engineering. Affiliated East-West Private Lmt..

Becker, L.C. 2007. Function bounds for solutions of Volterra equations and exponential asymptotic stability, *Nonlinear Analysis*, 67 (2), 382-397.

Becker, L.C. 2013. Resolvents and solutions of singular Volterra integral equations with separable kernels, *Applied Mathematics and Computation*, 219 (24), 11265-11277.

Burton, T.A. 1979. Stability theory for Volterra equations, *Journal Differential Equations*, 32 (1), 101-108.

Burton, T.A. 1982. Construction of Liyapunov functionals for Volterra equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 85 (1), 90-105.

Burton, T.A., 1983, Volterra Integral and Differential Equations, *Academic Press*, New York.

Burton, T.A. 1993. Boundedness and periodicity in integral and integro-differential equations, *Diff. Equ. Dynamical Systems*, 1, 161-172.

Burton, T.A., 2003, Stability by fixed point theory or Liapunov theory, Fixed Point Theory, (4),15-32.

Burton, T.A. 2004. Fixed points and stability of a nonconvolution equation, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132, 3679-3687.

Burton, T.A., 2005, Volterra integral and differential equations, Second edition. Mathematics in Science and Engineering, *Elsevier B. V.*, Amsterdam , 202.

Burton, T.A., 2005, Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, New york: Dower, 342.

Burton, T. A. 2007. Scalar nonlinear integral equations, *Tatra Mt. Math. Publ*, 38, 41-56.

Burton, T.A., 2008, Liapunov Functionals for Integral Equations, *Trafford Publishing*, Victoria, B. C., Canada, 361.

Burton T.A. 2009. Six integral equations and a flexible Liapunov functional, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 16(5), 241-252.

Burton, T.A. 2010. A Liapunov functional for a linear integral equation, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 10, 1-10.

Burton, T.A., Huang, Q.C. and Mahfoud, W.E. 1985. Rate of decay of solutions of Volterra equations, *Nonlinear Analysis*, 9 (7), 651-663.

Burton, T.A. and Mahfoud, W.E. 1983. Stability criteria for Volterra equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, 279 (1), 143-174.

Burton, T.A. and Mahfoud, W.E. 1985. Stability by decompositions for Volterra equations, *Tohoku Mathematical Journal (2)*, 37 (4), 489-511.

Burton, T.A. and Somolinos, A. 1999. Asymptotic stability in differential equations with unbounded delay, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, 13, 1-19.

Cable, M. and Raffoul, Y.N. 2011. Exponential stability and instability in multiple delays differential equations, *International Journal of Mathematics Sciences and Applications*, 1 (2).

Caraballo, D. 2001. On the decay rate of solutions of non-autonomous differential systems, *Electronic Journal of Differential Equations*, 5, 1-17.

Cheban, D. 2001. Uniform exponential stability of linear periodic systems in a Banach space, *Electronic Journal of Differential Equations*, 3, 1-12.

Diamandescu, A. 2006. On the strong stability of a nonlinear Volterra integro differential system, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae (N.S),* 75 (2), 153-162.

Driver, D., 1977, Ordinary and Delay Differential Equations , *Springer*, New York.

Eloe, P., Islam, M. and Zhang, B. 2000. Uniform asymptotic stability in linear Volterra integro differential equations with application to delay systems, *Dynamic Systems and Applications*, 9 (3), 331-344.

Graef, J.R. and Tunç, C. 2015. Continuability and boundednes of multi-delay functional integro differential equations of the second order, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM,* 109 (1), 169-173.

Graef, J.R.,Tunç, C. and Sevgin, S. 2016. Behavior of solutions of non-linear functional Volterra integro- differential equations with multiple delays, *Dynamic Systems and Applications*, 25 (1-2), 39-46.

Gripenberg, G., Londen, S.Q. and Staffans, O., 1990, Volterra integral and functional equations, 34, *Cambridge University Press,* Cambridge.

Hale, J.K., 1977, Theory of Functional Differential Equations, *Springer-Verlag*, Berlin.

Islam, M.N. and Raffoul, Y.N. 2014. Periodic and asymptotically periodic solutions in coupled nonlinear systems of Volterra integro differential equations, *Dynamic Systems and Applications*, 23 (2-3), 235-244.

Krasovskii, N.N., 1963, Stability of Montion, *Stanford University Press*, 188.

Levin, J.J. 1963. The asymptotic behavior of the solutions of a Volterra equation, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 14, 534-541.

Levin, J.J. 1965. The qualitative behavior of a nonlinear Volterra equation, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16, 711-718.

Londen, S.O. 1972. On the solutions of a nonlinear Volterra equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 39, 564-573.

Lınh, N. and Phat, V. 2001. Exponential stability of nonlinear time-varying differential equations and applications, *Electronic Journal of Differential Equations*, 24, 1-13.

Mahfoud, W.E. 1987. Boundedness properties in Volterra integro differential systems, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 100 (1), 37-45.

Miller, R.K. 1971. Asymptotic stability properties of linear Volterra integro differential equations, *Journal of Differential Equations*, 10, 485-506.

Nohel, A. 1960. A class of nonlinear delay differential equations, *Journal of Mathematical Physics*, 38, 295-311.

Raffoul, Y. 2003. Boundedness in nonlinear differential equations, *Nonlinear Stud.*, 10(4), 343-350.

Raffoul, Y.N. 2004. Boundedness in nonlinear functional differential equations with applications to Volterra integro differential equations, *Journal of Integral Equations and Applications*,16 (4), 375-388.

Raffoul, Y.N. 2007. Construction of Lyapunov functionals in functional differential equations with applications to exponential stability in Volterra integro differential equations, *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 4 (2), 13.

Raffoul, Y.N. 2009. Exponential analysis of solution of functional differential equations with unbounded terms, *Banach Journal Mathematical of Analysis,* 3 (2), 28-41.

Raffoul, Y.N. 2013. Exponential stability and instability in finite delay nonlinear Volterra integro differential equations, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 20 (1), 95-106.

Raffoul Y. and Rai H. 2016. Uniform stability in nonlinear infinite delay Volterra integro-differential equations using Lyapunov functionals, *Nonautonomous Dynamical Systems*, *3*(1), 14-23.

Staffans, O.J. 1988. A direct Lyapunov approach to Volterra integro differential equations, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 19 (4), 879-901.

Tunç, C. 2016. A note on the qualitative behaviors of nonlinear Volterra integro differential equation, *Journal of the Egyptian Mathematical Society,* 24 (2), 187-192.

Tunç, C. 2016. New stability and boundedness results to Volterra integro differential equations with delay, *Journal of the Egyptian Mathematical Society,* 24 (2), 210-213.

Tunç, C. 2016. Properties of solutions to Volterra integro differential equations with delay, *Applied Mathematics and Information Sciences,* 10 (5), 1775-1780.

Tunç C. and Mohammed S.A. 2017. New results on exponential stability of nonlinear Volterra integro-differential equations with constant time-lag. *Proyecciones (Antofagasta)*, *36*(4), 615-639.

Vanualaılaı, J. 2002. Some stability and boundedness criteria for a class of Volterra integro differential systems, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, 12, 1-20.

Volterra, V. 1928. Sur la théorie mathématique des phénomenes héréditaires, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, *7*, 249-298.

Wazwaz, A.M., 2011, Linear and nonlinear integral equations, *Springer,* Berlin, 639.

Yoshızawa, T. 1966. Stability Theory by Lyapunov Second Method, *The Math. Soc. Of Japan*, Tokyo.

Zhang, B. 2005. Necessary and sufficient conditions for stability in Volterra equations of non-convolution type, *Dynamic Systems and Applications,* 14 (3-4), 525-549.

Zhang, B. 2009. Boundedness and global attractivity of solutions for a system of nonlinear integral equations, *Cubo: A Mathematical Journal,* 11, 41-53.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ayla KARTAL
Uyruğu :
Doğum Yeri ve Tarihi :
Telefon :
Faks :
e-mail :

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise :		
Üniversite :		
Yüksek Lisans :		
Doktora :		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**

UZMANLIK ALANI

YABANCI DİLLER

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR