



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL DEĞİŞKENLİ BEZIER EĞRİLERİ
ÜZERİNE

Fadime TEKGÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2024
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL DEĞİŞKENLİ BEZİER EĞRİLERİ
ÜZERİNE

Fadime TEKGÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhsin İNCESU

Jüri Üyesi: Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Muhsin İNCESU

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI

Temmuz-2024
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

Fadime TEKGÜL tarafından hazırlanan “**DUAL DEĞİŞKENLİ BEZIER EĞRİLERİ ÜZERİNE**” adlı tez çalışması 13/06/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Talat KÖRPINAR
Muş Alparslan Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Üye

Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI
Bitlis Eren Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

.....

Danışman

Doç.Dr. Muhsin İNCESU
Muş Alparslan Üniversitesi,
Eğitim Fak., Mat. ve Fen Bil. Eğt. Bölümü

.....

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu/...../2024 Tarih ve/..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Selçuk SAĞIR
FBE Müdürü

Bu tez çalışması Muş Alparslan Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından BAP-22-EMF-4902-02 nolu proje ile desteklenmiştir.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Fadime TEKGÜL

Tarih:

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ
DUAL DEĞİŞKENLİ BEZIER EĞRİLERİ ÜZERİNE

Fadime TEKGÜL

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhsin İNCESU

Dual uzayda Bernstein taban polinomlarının ifadesini Samancı (2015, 2017) vermiştir. İncesu (2022) de Dual uzayda Bezier eğrileri ve birim dual küre üzerine projeksiyon eğrileri, reel parametreye bağlı olarak yani $t^* = 0$ durumunda verilmiştir. Bu çalışmada parametre keyfi dual değişken alınarak Bezier eğrileri ve bu eğrilerin birim dual küre üzerine projeksiyonları çalışılmıştır. Ayrıca dual küresel Bezier eğrilerinde Blashke çatı da ifade edilmiştir.

2024,71 Sayfa

Anahtar Kelimeler; Dual Bezier Eğri, Frenet Çatı, Blashke Çatı, Eğrilikler

ABSTRACT
MASTER THESIS
ON DUAL VARIABLE BEZIER CURVES

Fadime TEKGÜL

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhsin İNCESU

Samancı (2015,2017) gave the expression of Bernstein basis polynomials in dual space. İncesu gave Bezier curves in dual space and projection curves on the unit dual sphere, depending on the real parameter, that is, in the case of $t^*=0$. In this study, Bezier curves and the projections of these curves onto the unit dual sphere have been studied by taking the parameter as an arbitrary dual variable. Additionally, the Blaschke vector fields of the dual spherical Bezier curves has been expressed.

2024, 71 Pages

Keywords; Dual Bezier Curves, Frenet Frame, Blashke Frame, Curvatures

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince tez çalışmamın her aşamasında akademik birikimini ve her türlü desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, fikirleriyle çalışmalarına yol gösteren çok değerli danışmanım Doç. Dr. Muhsin İNCESU hocama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Teşekkürlerin en büyüğünü, tüm eğitim hayatım boyunca dualarıyla manevi desteğini hep arkamda hissettiğim canım annem Asiya KESKİN ve canım babam Halil KESKİN'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Tez çalışmam sırasında sorunlarıma çare olan, benimle sevinip benimle üzülen, beni her zaman destekleyen yol arkadaşım, biricik eşim Cumali TEKGÜL'e, çok teşekkür ediyorum.

Bu tezi yazarken tek başladığım yolculuğumda sonlara doğru bana eşlik eden tatlı yavrum Hasan Talha TEKGÜL'e, çokça teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu tezi bu üniversitede almama vesile olan her işin üstesinden gelen canım ablam Funda ŞAHİN'e ve çok kıymetli Doç.Dr. Ebru KORKMAZ hocama çok teşekkür ediyorum.

Yüksek lisans yapmam konusunda her daim beni motive eden güzel yürekli arkadaşım Sümeyra ŞAHİN'e teşekkür ediyorum.

Tez savunması sınavında ve sonrasında gösterdikleri ilgi ve yönlendirmeden dolayı jüri üyeleri hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Fadime TEKGÜL
MUŞ-2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
1.GİRİŞ VE KAYNAK ARAŞTIRMASI	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM.....	3
2.1. Bezier Eğrileri.....	3
2.1.1. Genel Bezier eğrileri.....	3
2.1.2. Bezier Eğrilerinin özellikleri.....	4
2.1.3. Kontrol poligonu.....	5
2.1.4. Konveks Hullar (convex hull)	5
2.2. Bezier Eğrilerinde Türev Kavramı	5
2.3. Rasyonel Bezier Eğrileri.....	7
2.4. Bezier Eğrileri İçin Algoritmalar	7
2.4.1. Bezier eğrileri için de casteljau algoritması.....	7
2.4.2. Bezier eğrileri için bölme (subdivision) algoritması	8
2.5. Dual Sayılar	9
2.5.1 Dual sayılar ve D -modülü.....	9
2.5.2. Regle yüzeyler	12
2.5.3. Kapalı Regle Yüzey ve integral invaryantları.....	14
2.6. Eğri ve Yüzeyler İçin Eğrilik.....	17
2.6.1. Düzlem Eğrilerde Eğrilik.....	17
2.6.2. Uzay Eğrilerinde Eğrilik ve Torsiyon.....	19
2.6.3. Dual küresel Eğriler	20
3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	22
3.1. Dual Uzayda Bezier Eğrileri.....	22
3.1.1. Lineer Dual Bezier Eğrisi	22
3.1.2. Dual Kuadratik Bezier Eğrileri	23
3.1.3. Kubik Dual Bezier Eğrisi.....	24
3.1.4. Genel Bezier Eğrisi.....	24
3.2. Dual Bezier Eğrilerinde Frenet Çatısı	28
3.3. Dual De Casteljau Algoritması	32
3.4. Dual Küresel Bezier Eğrileri ve Regle Yüzey Kompleksler	51
3.5. Dual Değişkenli Bezier Eğrilerinde Blashke Çatı	53
3.6. Türev Denklemleri	55

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	60
4.1. Sonuçlar	60
4.2. Öneriler	61
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	64



SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

\hat{B}	: Dual Uzayda Bézier Eğrisi
D	: Dual sayılar kümesi
D^3	: Dual Uzay
\bar{B}	: Dual Bezier Eğrisinin Birim Dual Küreye Projeksiyonu
\hat{T}	: Dual Teğet Birim Vektör Alanı
\hat{N}	: Dual Normal Birim Vektör Alanı
\hat{B}	: Dual Binormal Birim Vektör Alanı
$\{A_1, A_2, A_3\}$: Dual Blashke Çatı Vektör Alanları
B	: Kontrol Noktaları $\{P_i\}$ olan Reel Eğrisi
B^*	: Kontrol Noktaları $\{P_i^*\}$ olan reel eğrisi
\hat{B}'	: Dual Bezier Eğrisinde Türev
\hat{B}''	: Dual Bezier Eğrisinde ikinci türev
\hat{B}'''	: Dual Bezier Eğrisinde üçüncü türev
$\Delta\hat{P}_i$: $\hat{P}_{i+1} - \hat{P}_i$
$\frac{d}{dt}C(t)$: $C(t)$ eğrisinin türevi
$\Delta(P_j^i)$: $P_{j+i}^i - P_j^i$

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Bir bezier eğrisi için varyasyon azaltma özelliği	4
Şekil 2.2. Kontrol noktaları $b_0 = (1,-2,0)$, $b_1 = (2,0,1)$, $b_2 = (3,1,1)$, $b_3 = (-1,2,-1)$ olan bezier eğrisinin kontrol poligonu	5
Şekil 2.3. Bir bezier eğrisinin ayrılması	8
Şekil 2.4. Bir bezier eğrisi için bölme algoritması	9
Şekil 2.5. $\check{U} = \check{U} + \epsilon \check{U}^*$ vektörüne karşılık gelen yönlü L doğrusu.....	11
Şekil 2.6. Regle Yüzey	12
Şekil 2.7. Kapalı $r(t)$ eğrisi boyunca oluşan V_1 -kapalı regle yörünge yüzeyi	14
Şekil 2.8. Kapalı Regle yüzeyin boğaz çizgisi ve açılım uzunluğu ve açılım açısı.....	16
Şekil 2.9. $\hat{B}(t)$ Bezier eğrisinin birim dual küre üzerine projeksiyonu olan $\bar{B}(t)$ eğrisi	16
Şekil 3.1. Kuadratik Dual Bezier Eğrisi	23
Şekil 3.2. Dual Değişkenli Bezier Eğrilerinin D deki tanım bölgesi.....	35

1. GİRİŞ ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bilgisayar destekli tasarımların (CAD) temelini parametrik eğriler ve parametrik yüzeyler oluşturmaktadır. Bilgisayar destekli geometrik tasarımda (CAGD) şüphesiz ki en önemli buluşlar, Bezier Eğrileri ve yüzeyleri, Coons yamaları (patch) ve daha sonra da B- spline metodlarıdır. Bezier eğrileri ve yüzeyleri ilk defa 1958-1960 yıllarında otomotiv sektöründe, Citroen ve Renault firmalarında mühendis olarak görev yapan Paul de Casteljaou ve Pierre Bezier tarafından birbirlerinden bağımsız olarak geliştirilmiştir. De Casteljaou, P. Bezier'den az bir zaman önce geliştirmiş, ancak yaptığı çalışmaları herhangi bir yerde yayınlamamıştır. Böylece, polinom eğri ve yüzeylerin Bernstein formunda ifadesiyle tamamen gelişen Bezier eğri ve yüzeyleri teorisi, P.Bezier'in ismiyle anılır hale gelmiştir. Bezier eğri ve yüzeyleri otomotiv sanayiinden uçak sanayiine kadar çok geniş bir yelpazede kullanılmaktadır (İncesu,2003).

Bilgisayar destekli geometrik tasarım, 1974 yılında Amerika'da Utah Üniversitesinde yapılan konferansın ardından, Barnhill ve Riesenfeld' in önderliğinde kendi içinde bir disiplin içine girmiştir. (Barnhill ve Riesenfeld ,1974; İncesu, 2003)

Son zamanlarda kullanılan CAD sistemleri içinde en kararlı sayısal çözümleri veren eğrilerin Bezier ve rasyonel Bezier eğrileri oldukları da Farouki ve Rajan tarafından gösterilmiştir (Farouki ve Rajan, 1987).

Bezier eğrileri ile ilgili pek çok çalışmalar yapılmıştır. Bunlara örnek olarak G. Farin (1990), R. Farouki (1985), J.Hoschek (1985), H. Potmann (1995), Incesu (2003, 2004), Samancı H., Çelik S, Incesu M (2015), Samancı H (2018, 2021), Samancı H ve İncesu M (2020) çalışmaları verilebilir.

Bu tez çalışmasında dual uzayda tanımlı dual değişkenli bir Bezier eğrisinin denklemleri verilmiş ve bu eğrinin son nokta interpolasyon özellikleri ifade edilmiştir. Bir dual Bezier eğrisinin türev denkleminin yine bir Bezier eğrisi olduğu ve buna ait kontrol noktaları verilmiştir. Ayrıca türev eğrisinin reel ve dual kısımları verilmiştir. Bir dual Bezier eğrisinin ikinci türevinin de yine bir Bezier eğrisi olduğu ve kontrol noktalarının ilk dual eğrinin kontrol noktaları cinsinden ifadesi verilmiş, bu eğrinin özel durumlarda değerlerinin kontrol noktaları ile ifadesi (son nokta interpolasyonu) verilmiştir. Tezde bir dual Bezier eğrisinin n. nci dereceden türevi ifade edilerek genelleştirilmiştir. Bir dual Bezier eğrisinin ikinci türevlerinin interpolasyonu verilmiştir. Tezin 3.2 bölümünde bir dual Bezier eğrisinin herhangi bir noktada Frenet vektör alanları ve eğrilikleri verilmiştir.

Tezin 3.3. bölümünde dual Bezier eğrisinin herhangi bir noktasındaki vektörel değeri hesaplayabilmek ve dual eğriyi verilen noktadan ikiye ayırabilmek ve ayrılan bu eğrilerin kontrol noktalarını bulabilmek için **dual de Casteljaou** algoritması verilerek bu algoritma ile ifade edilmiştir.

Frenet vektör alanlarının ve eğriliklerin belirli noktalardaki interpolasyonu ile keyfi bir dual büyüklük için karşılık geldiği değerleri, tezde elde edilen **dual de Casteljaou** algoritmasıyla bulunan kontrol noktaları cinsinden ifade edilmiştir.

Tezde elde ettiğimiz sonuçları bir sayısal örnek üzerinde görebilmek adına verilen örnek üzerinde alınan sonuçlar gösterilmiştir.

Tezin 3.4. bölümünde dual uzayda verilen bir Bezier eğrisinin birim dual küre üzerine izdüşüm eğrisi verilmiş ve bu eğriye karşılık gelen reel regle yüzey kompleksleri ifade edilmiştir.

Tezin 3.5 bölümünde bir dual Bezier eğrisi üzerinde alınacak olan Blashke çatı vektör alanları $\{A_1, A_2, A_3\}$ ifade edilmiştir.

Tezin 3.6 bölümünde ise bir dual Bezier eğrisi üzerinde alınacak olan Blashke çatı vektör alanlarına $\{A_1, A_2, A_3\}$ ait türev denklemleri ifade edilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Bezier Eğrileri

Bezier eğrileri, özellikle mekanikte çok önemli bir yeri olan polinom eğrilerdir. Bilgisayar destekli tasarımda (CAD) ve bilgisayar grafiklerinde kullanılan eğri ve yüzeylerin en önemli gösterimlerinden biri de Bezier formlarıdır. n. dereceden bir Bezier eğrisi; kontrol noktaları adı verilen, n +1 tane nokta ile belirlenen ve n. dereceden Bernstein taban fonksiyonları ile lineer şekilde ifade edilen polinom eğri parçalarıdır.

2.1.1 Genel bezier eğrileri

Tanım 1: Genel Bezier eğrisi, Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen ve başlangıç noktası b_0 , bitim noktası b_n olan n. dereceden bir polinom eğridir. Genel Bezier eğrisi, vektörel formda,

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \quad t \in [0,1] \quad (1)$$

olarak tanımlanır. Burada $B_i^n(t)$ fonksiyonları

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} (1-t)^{n-i} t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2)$$

biçimde verilen Bernstein taban fonksiyonları (ya da Bernstein taban polinomları) dır.

$\frac{n!}{i!(n-i)!}$ ifadeleri de Binom katsayılarıdır ve $\binom{n}{i}$ ya da ${}^n C_i$ ile gösterilir.

Teorem 1: Bernstein taban polinomları aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$1) \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, t \in [0,1] \quad (\text{Toplamın birim olması}) \quad (3)$$

$$2) B_i^n(t) \geq 0, t \in [0,1] \quad (\text{Pozitiflik}) \quad (4)$$

$$3) B_{n-i}^n(t) = B_i^n(1-t), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (\text{Simetri}) \quad (5)$$

$$4) B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + t B_{i-1}^{n-1}(t) \quad (\text{indirgeme}) \quad (6)$$

(İncesu, 2003)

2.1.2. Bezier eğrilerinin özellikleri

Teorem 2: Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir $B = B(t)$ Bezier eğrisi aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$1) B(0) = b_0, \quad B(1) = b_n \quad (\text{Son nokta interpolasyon özelliği}) \quad (7)$$

$$2) B'(0) = \frac{dB}{dt} \Big|_{t=0} = n(b_1 - b_0) \quad (\text{Son nokta teğet özelliği})$$

$$B'(1) = \frac{dB}{dt} \Big|_{t=1} = n(b_n - b_{n-1}) \quad (8)$$

$$3) \forall t \in [0, 1] \text{ için, } B(t) \in \text{CH}(\{b_0, b_1, \dots, b_n\}) \quad (9)$$

(Bezier eğrisinin tamamı, kontrol noktalarının konvex alanı içinde kalmaktadır.)

4) F , bir Afın dönüşümü olmak üzere,

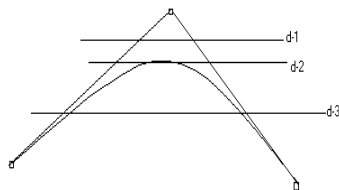
$$F(B(t)) = F\left(\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)\right) = \sum_{i=0}^n F(b_i) B_i^n(t) \quad (10)$$

dir. (Kontrol noktaları $b_i, i = 0, 1, \dots, n$ olan Bezier eğrisinin bir Afın dönüşümü altındaki görüntüsü, kontrol noktaları $F(b_i), i = 0, 1, \dots, n$ olan Bezier eğrisidir.)

5) Bir d doğrusu ile $B(t)$ düzlemsel Bezier eğrisinin arakesit noktalarının sayısı m , $B(t)$ Bezier eğrisinin kontrol poligonunun arakesit noktalarının sayısı s ise

$$m \leq s \quad \text{dir.} \quad (\text{Varyasyon Azaltma Özelliği})$$

Not: Varyasyon azaltma özelliği ilk kez I. Schoenberg (1953) tarafından verilmiştir. Bu konuda daha geniş bilgi Farin (1990) de mevcuttur.



Arakesit Noktalarının Sayısı

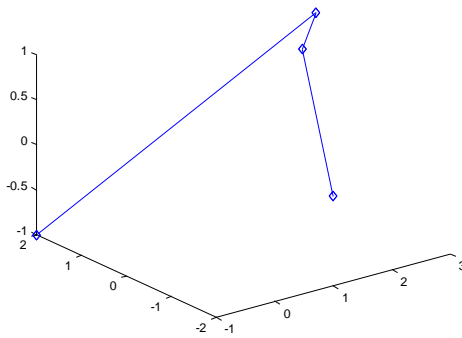
DOĞRU	BEZİER	POLİGON
d-1	0	2
d-2	1	2
d-3	2	2

Şekil 2.1. Bir Bezier eğrisi için Varyasyon Azaltma Özelliği

2.1.3. Kontrol poligonu

Tanım 2: Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir Bezier eğrisinin kontrol noktalarını sıra korumak kaydıyla birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu geometrik şekle Bezier eğrisinin kontrol poligonu adı verilir.

Örnek 1: Kontrol noktaları $b_0 = (1, -2, 0)$, $b_1 = (2, 0, 1)$, $b_2 = (3, 1, 1)$, $b_3 = (-1, 2, -1)$ olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu Şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Kontrol noktaları $b_0 = (1, -2, 0)$, $b_1 = (2, 0, 1)$, $b_2 = (3, 1, 1)$, $b_3 = (-1, 2, -1)$ olan Bezier eğrisinin kontrol poligonu

2.1.4. Konveks hullar (convex hull)

Tanım 3: $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^3$ sonlu noktalar sisteminin konveks hullunun vektörel ifadesi:

$$CH(X) = \left\{ a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n : x_i \in X, \sum_{i=0}^n a_i = 1, a_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n \right\} \quad (11)$$

olarak tanımlanır. Yani uzayda x_0, x_1, \dots, x_n noktalarını birleştirmek suretiyle elde edilen en geniş bölgeye $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sisteminin konveks hulu denir. (Marsh, 1999)

2.2. Bezier Eğrilerinde Türev Kavramı

Bezier eğrilerinde türevler, Bernstein polinomlarının türevlerinden elde edilmektedir.

Teorem 3: $0 \leq t \leq n$ için $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$ Bernstein taban fonksiyonlarının birinci ve ikinci türevleri

$$1) B_i^{n'}(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \quad \text{ya da} \quad (12)$$

$$B_i^{n'}(t) = \frac{i-nt}{t(1-t)} B_i^n(t) \quad (13)$$

$$2) B_i^{n''}(t) = n(n-1) [B_i^{n-2}(t) - 2B_{i-1}^{n-2}(t) + B_{i-2}^{n-2}(t)] \quad \text{ya da} \quad (14)$$

$$B_i^{n''}(t) = \left(\frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_i^n(t) \quad (15)$$

biçimindedir (İncesu,2003).

Yukarıda verilen teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4: Kontrol noktaları b_i , $i = 0,1,\dots,n$ olan ve $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ biçiminde

verilen bir Bezier eğrisinin türevi, kontrol noktaları $b_i^{(1)} = n(b_{i+1} - b_i)$, $i = 0,1,\dots,n-1$ olan $(n-1)$. dereceden bir Bezier eğrisidir. Yani,

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(1)} B_i^{n-1}(t) \quad , \quad b_i^{(1)} = n(b_{i+1} - b_i) \quad (16)$$

dir (İncesu, 2003).

Sonuç 1: Kontrol noktaları b_i , $i = 0,1,\dots,n$ olan ve $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ biçiminde

verilen bir Bezier eğrisinin ikinci türevi, kontrol noktaları $b_i^{(2)} = n(n-1)(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i)$, $i = 0,1,\dots,n-1$ olan $(n-2)$. dereceden bir Bezier eğrisidir. Yani,

$$B''(t) = \sum_{i=0}^{n-2} b_i^{(2)} B_i^{n-2}(t) \quad , \quad b_i^{(2)} = n(n-1)(b_{i+2} - 2b_{i+1} + b_i) \quad (17)$$

dir (İncesu, 2003).

Sonuç 2: Kontrol noktaları b_i , $i = 0, 1, \dots, n$ olan n . dereceden bir $B(t)$ Bezier eğri fonksiyonu için r . türev fonksiyonu, kontrol noktaları $i = 0, 1, \dots, n-r$ olmak üzere

$b_i^{(r)} = n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j}$ olan $(n-r)$. dereceden bir Bezier eğrisi temsil eder. Yani,

$$B^{(r)}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} B_i^{n-r}(t) \quad , \quad b_i^{(r)} = n(n-1)\dots(n-r+1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} b_{i+j} \quad (18)$$

dir (İncesu, 2003).

2.3. Rasyonel Bezier Eğrileri

Konikler, genel olarak üç tip olarak sınıflandırılır: Parabol, hiperbol ve elipsler. Parabol polinom fonksiyonlarla parametrelenebilir. Ancak, hiperbol ve elips ancak rasyonel fonksiyonlarla parametrelenebildiğinden hiperbol ve elips için bezier formları ancak rasyonel biçimde verilebilmektedir. Bu nedenle rasyonel bezier eğrilerinin ortaya konulmasında, bilgisayar destekli tasarımlarda koniklerin bezier formunda ifade edilebilme problemi önemli rol oynamıştır.

Bugün koniklerin, uçak endüstrisinden bilgisayar destekli matbaacılık alanlarına kadar pek çok alanda önemli ölçüde kullanım alanı vardır. Koniklerle ilgili yapılan algoritmik çalışmalar 1940'lı yıllarda gelişmeye başlamıştır. Bu konuda R. Liming (1944) örnek olarak verilebilir. Koniklerin rasyonel bezier formlarını veren E. Lee' dir (İncesu, 2003).

2.4. Bezier Eğrileri İçin Algoritmalar

2.4.1. Bezier eğrileri için de casteljau algoritması

De Casteljau Algoritması, bir Bezier eğrisinin $t_0 \in [0,1]$ noktasındaki $B(t_0)$ değerini hesaplamak için geliştirilmiş bir algoritmadır. Ayrıca verilen bir Bezier eğrisinin iki ayrı parçaya ayrılmasında da yine sıklıkla bu algoritma kullanılmaktadır. Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir $B = B(t)$ Bezier eğrisi için $t = t_0$ noktasındaki değerini bulmak için De Casteljau algoritmasının ifadesi aşağıdaki teoremle verilebilir:

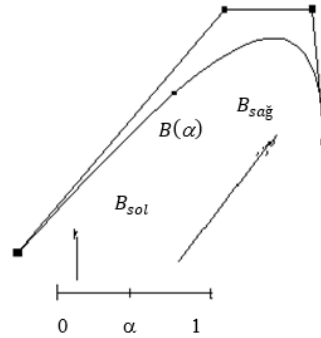
Teorem 5: (Marsh, 1999) Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olarak verilen n . dereceden bir $B = B(t)$ Bézier eğrisinin, $t = t_0$ noktasındaki değeri $B(t_0) = b_0^n$ dir. Burada $j = 0, 1, \dots, n, i = 1, \dots, n - j$ için,

$$\begin{aligned} b_i^0 &= b_i, \\ b_i^j &= (1 - t_0)b_j^{j-1} + t_0b_{i+1}^{j-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

dir.

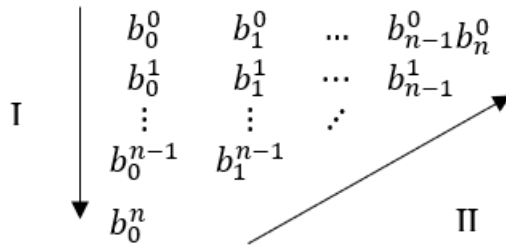
2.4.2. Bezier eğrileri için bölme (subdivision) algoritması

Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olan n .dereceden bir $B(t)$ Bézier eğrisi $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlanmaktadır. $[0,1]$ aralığı bir $\alpha \in [0,1]$ noktasından ikiye ayrıldığında, $B(t)$ Bézier eğrisi de $B(\alpha)$ noktasından ikiye ayrılacaktır. Böylece elde edilen iki ayrı eğri parçasından $B(\alpha)$ noktasının solunda kalan kısmı B_{sol} , sağında kalan kısmı da $B_{sağ}$ olarak ifade edilecek olursa, bu iki eğrinin tanım aralıkları sırasıyla $[0, \alpha]$ ve $[\alpha, 1]$ kapalı aralıkları olur. Her iki eğri parçası da, parametre dönüşümü yapılarak $[0,1]$ aralığında tanımlı Bézier eğrisi formunda ifade edilebilir. Böylece, elde edilen yeni Bézier eğrilerinin dereceleri de, ilk eğrinin derecesi ile aynı olacaktır. Kontrol noktaları da değişecek ve toplam $2n + 2$ tane olacaktır. Yani n . dereceden bir Bézier eğrisi, yine dereceleri n olan iki ayrı parçaya ayrılmaktadır. (Bakınız, Şekil 2.3.)



Şekil 2.3. Bir bezier eğrisinin ayrılması

Elde edilen yeni Bezier eğrilerinin kontrol noktaları bölme algoritması ile bulunmaktadır. Bu algoritmada De Casteljau algoritması kullanılır. Bu algoritma ile elde edilen B_{sol} ve $B_{sağ}$ Bezier eğrilerinin kontrol noktaları şu şekilde bulunur.



Şekil 2.4. Bir bezier eğrisi için bölme algoritması

Şekil 2.4. incelendiğinde I oku yönündeki noktalar, yukarıdan aşağıya doğru sırasıyla $b_0^0, b_0^1, \dots, b_0^{n-1}, b_0^n$ noktaları, B_{sol} Bézier eğrisinin kontrol noktaları; II oku yönündeki noktalar, aşağıdan yukarıya doğru sırasıyla $b_0^n, b_1^{n-1}, \dots, b_{n-1}^1, b_n^0$ noktaları, $B_{sağ}$ Bézier eğrisinin kontrol noktalarıdır. Bu durum bir teorem olarak aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 6: (Marsh, 1999) Kontrol noktaları $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ olan n . dereceden bir $B(t)$ Bézier eğrisini ikiye bölmek suretiyle elde edilen B_{sol} ve $B_{sağ}$ Bézier eğrilerinin kontrol noktaları; B_{sol} için $b_0^0, b_0^1, \dots, b_0^{n-1}, b_0^n$ ve $B_{sağ}$ için ise $b_0^n, b_1^{n-1}, \dots, b_{n-1}^1, b_n^0$ noktalarıdır. Burada b_i^j , (Şekil 2.4.) de verildiği gibidir.

2.5. Dual Sayılar

2.5.1 Dual sayılar ve D -modülü

İki boyutlu Öklid uzayları E^2 üzerinde toplama ve skaler ile çarpma olarak adlandırılan iki işlem aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} & +: E^2 \times E^2 \rightarrow E^2 \\ (A, B) & \rightarrow A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ & \therefore E^2 \times E^2 \rightarrow E^2 \\ (A, B) & \rightarrow A \cdot B = (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

burada $A = (a_1, a_2)$ ve $B = (b_1, b_2)$ dir. Bu işlemler altında E^2 kümesi bir halkadır ve dual sayılar olarak adlandırılır. Bu küme \mathbb{D} ile gösterilir. \mathbb{D} 'nin herhangi bir $A = (a, a^*)$ elemanı şu şekilde yazılabilir:

$$A = a(1,0) + a^*(0,1) \tag{20}$$

(1,0) elemanına gerçek birim, (0,1) elemanına dual birim adı verilir ve ε ile gösterilir. $\varepsilon^2 = 0$ olduğu açıkça görülmektedir. Bu nedenle ε elementi nilpotent bir elementtir. Herhangi bir $(r, 0)$ elemanı $r \in R$ ile izomorfiktir. Dolayısıyla herhangi bir $A = (a, a^*)$ dual sayısı $A = a + \varepsilon a^*$ olarak yazılabilir, burada $a, a^* \in \mathbb{R}$. Eğer bir $A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısı verilirse, o zaman a gerçek sayısına A dual sayısının gerçek kısmı denir ve a^* gerçek sayısına A dual sayısının dual kısmı denir. Bir dual $A = a + \varepsilon a^*$ sayının eşlenik sayısı $\bar{A} = a - \varepsilon a^*$ 'dir (Hacısalihoglu, 1983).

$A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısının A nın reel kısmı olan, sıfır olmayan a gerçek sayısı için çarpma operatörü tarafından ters çevrilmesi şu şekilde tanımlanır:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{a} - \varepsilon \frac{a^*}{a^2} \quad (21)$$

Eğer $a = 0$ ise $A = \varepsilon a^*$ sayısının tersi yoktur. Böylece, dual sayılar kümesi cebirsel olarak bir halka oluşturur, ancak bir cisim oluşturmaz.

$A = a + \varepsilon a^*$ sayısının mutlak değeri $|A| = \sqrt{A \cdot \bar{A}} = |a|$ dir. Herhangi bir $A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısı $A = \begin{bmatrix} a & a^* \\ 0 & a \end{bmatrix}$ biçiminde bir matris gösterimine sahiptir. Bu formda reel ve dual birimler sırasıyla; $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dir (Hacısalihoglu, 1983).

\mathbb{D}^3 'teki herhangi bir dual \hat{U} vektörü $\hat{U} = (\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3)$ olarak yazılabilir, burada $i = 1, 2, 3$ için $\vec{U}_i = u_i + \varepsilon u_i^* \in \mathbb{D}$ dir. Aynı \hat{U} vektörü $\hat{U} = \vec{U} + \varepsilon \vec{U}^*$ olarak da yazılabilir, burada $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{U}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*) \in \mathbb{R}^3$ dür. Bu nedenle $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \mathbb{D}^3$ kümesi bir D -modüldür (Hacısalihoglu, 1983).

İki dual \hat{U} ve \hat{V} vektörleri $\hat{U} = \vec{U} + \varepsilon \vec{U}^*$ ve $\hat{V} = \vec{V} + \varepsilon \vec{V}^*$ olarak verilsin. O zaman iki dual \hat{U} ve \hat{V} vektörün iç çarpımı $\langle \hat{U}, \hat{V} \rangle = \langle \vec{U}, \vec{V} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{U}^*, \vec{V} \rangle + \langle \vec{U}, \vec{V}^* \rangle)$ olur. Bir $\hat{U} = \vec{U} + \varepsilon \vec{U}^*$ dual vektörünün normu, dual vektörün reel kısmı sıfırdan farklıysa

$$\|\hat{U}\| = \sqrt{\langle \hat{U}, \hat{U} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{U}, \vec{U} \rangle + 2\varepsilon \langle \vec{U}, \vec{U}^* \rangle} = \|\vec{U}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{U}, \vec{U}^* \rangle}{\|\vec{U}\|} = u + \varepsilon u^* \in D \quad (22)$$

biçiminde bir dual sayıdır.

Bir dual \hat{U} vektörünün normu $1 + \varepsilon 0 = 1$ ise, o zaman \hat{U} vektörüne dual birim vektör denir (Hacısalihoglu, 1983).

Önerme 1: $\hat{U} = \vec{U} + \varepsilon\vec{U}^*$ dual vektörü verilsin. Eğer $\|\hat{U}\| = 1$ ise $\|\vec{U}\| = 1$ ve $\langle U, U^* \rangle = 0$ dır (Hacısalihoglu, 1983).

Önerme 2: $\hat{U} = \vec{U} + \varepsilon\vec{U}^*$ dual vektörü verilsin. Eğer $\|\hat{U}\| \neq 1$ ve $U \neq 0$ ise

$$\begin{aligned}\check{U} &= \frac{\hat{U}}{\|\hat{U}\|} = \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|} + \varepsilon \frac{\vec{U}^* - \frac{\langle \vec{U}, \vec{U}^* \rangle \vec{U}}{\|\vec{U}\|^2}}{\|\vec{U}\|} = \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|} + \varepsilon \left(\frac{\vec{U}^*}{\|\vec{U}^*\|} - (23) \frac{\langle \vec{U}, \vec{U}^* \rangle \vec{U}}{\|\vec{U}\|^3} \right) \\ &= \dot{U} + \varepsilon \dot{U}^*\end{aligned}$$

vektörü \hat{U} yönündeki birim dual vektördür (Hacısalihoglu, 1983).

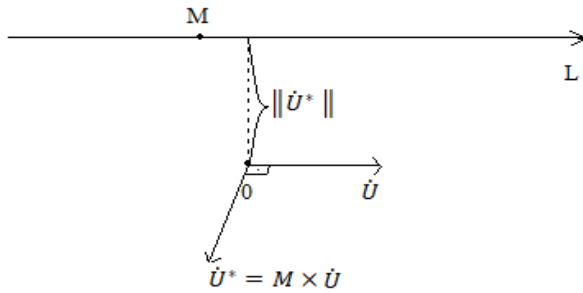
Tanım 4: \mathbb{D}^3 teki D -modul üzerindeki dual vektörlerin kümesi birim dual küre diye adlandırılır. Yani birim dual küre

$$\{\check{U} = \dot{U} + \varepsilon\dot{U}^* \in D^3: \|\check{U}\| = 1\} \quad (24)$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 7 (E. Study): $\check{U} = \dot{U} + \varepsilon\dot{U}^*$ ($\vec{U} \neq 0$) birim dual küre üzerindeki her bir vektör \mathbb{R}^3 te yönlendirilmiş bir doğruya bire bir olarak karşılık gelir (Hacısalihoglu, 1983).

Bu teoreme göre, $\check{U} = \dot{U} + \varepsilon\dot{U}^*$ ($\vec{U} \neq 0$) birim dual vektörüne yalnızca bir yönlü doğru karşılık gelir. Burada \dot{U} reel vektörü karşılık gelen vektörün yönünü gösterir ve \dot{U}^* vektörü de \dot{U} nun orjine göre vektörel momentini ifade eder. \dot{U} nun vektörel momenti $\dot{U}^* = 0M \wedge \dot{U}$ ile verilir. Burada M , \dot{U} -yönlü doğrusunun üzerinde bir nokta ve \wedge sembolü de \mathbb{R}^3 deki vektörlerin dış çarpımını ifade eder (Gürsoy, 1990).



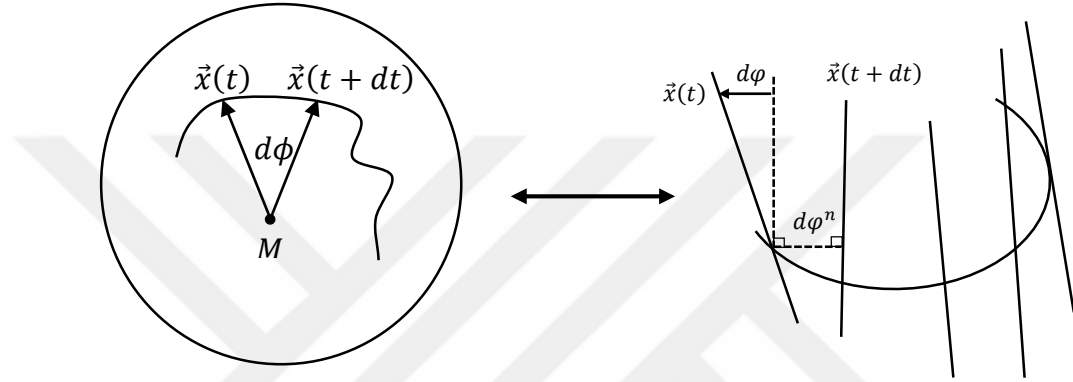
Şekil 2.5. $\check{U} = \dot{U} + \varepsilon\dot{U}^*$ vektörüne karşılık gelen yönlü L doğrusu

2.5.2. Regle yüzeyler

1-parametrelili K/K' dual küresel hareketinde, K da tesbit edilmiş bir X dual noktası, K' sabit dual küresi üzerinde $t \in \mathbb{R}$ parametresine bağlı bir,

$$\vec{x} = \vec{x}(t), \quad \|\vec{x}\| = 1,$$

eğrisi çizer. t parametresine göre diferansiyellenebilen bu dual küresel eğriye bir regle yüzey olarak bakabiliriz. Çünkü E. Study dönüşümüne göre, bu eğriye çizgiler uzayında bir 1-parametrelili bir doğru ailesi (Regle yüzey) karşılık gelir. Eğer dual küresel eğri kapalı ise, karşılık gelen regle yüzey de kapalıdır.



Şekil 2.6. Regle yüzey

$\vec{x} = \vec{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ dual küresel eğrisine, çizgiler uzayındaki (x) -regle yüzeyinin dual küresel resmi de denir.

$\vec{x} = \vec{x}(t)$ dual küresel eğrisinin $d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi^*$ dual yay elementi için,

$$\begin{aligned} d\Phi^2 &= \langle d\vec{X}, d\vec{X} \rangle \\ &= \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle dt^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} d\varphi^2 &= \langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle \\ d\varphi \cdot d\varphi^* &= \langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

$\vec{x}(t)$ ve $\vec{x}(t + dt)$ dual birim vektörleri arasındaki $d\Phi$ dual açısı, aynı zamanda bu dual vektörlerin uç noktaları arasındaki dual küresel uzaklık olarak da alınabilir.

$d\varphi$ ve $d\varphi^*$ reel büyüklükleri ise, çizgiler uzayında regle yüzeyin $\vec{x}(t)$ ve $\vec{x}(t + dt)$ ana doğruları arasında, sırasıyla, açı ve en kısa uzaklığa karşılık gelirler.

Ortogonal koordinat dönüşümlerinde iç çarpım korunduğu (değişmez kaldığı) için;

$$\langle d\vec{X}, d\vec{X} \rangle = \langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle + 2\varepsilon \langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle$$

ifadesindeki,

$$\langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle \text{ ve } \langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle$$

iç çarpımları da, koordinat dönüşümlerine karşı değişmezdir. O halde, bunların oranı, regle yüzeyin en basit birer diferansiyel değişmezidir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 5: $\vec{x} = \vec{x}(t)$, $\|\vec{x}\| = 1$, $t \in \mathbb{R}$ regle yüzeyinde, $\vec{x}(t)$ ve $\vec{x}(t + dt)$ komşu ana doğruları arasındaki dual açı, $d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi^*$ olmak üzere,

$$\frac{1}{d} = \frac{\langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle}{\langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle} = \frac{d\varphi}{d\varphi^*}$$

büyüklüğüne bu yüzeyin $\vec{x}(t)$ ana doğrusu boyunca dağıtma parametresi veya drall'ı denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 6: Komşu ana doğruları kesişen regle yüzeylere torslar veya açılabilir yüzeyler denir.

Torslar için drall'ın sıfır olması bir karakteristiktir. Zira,

$$\frac{1}{d} = \frac{d\varphi}{d\varphi^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\varphi^* = 0$$

dır. Bu ise, $\vec{x}(t)$ ve $\vec{x}(t + dt)$ ana doğrularının kesişmesi demektir. Drall'ın bu tanımı silindirler için geçerli değildir. Drall'ı sıfır olmayan bir regle yüzeyde komşu ana doğrular aykırıdır (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 7: $\vec{x} = \vec{x}(t)$, $\|\vec{x}\| = 1$, $t \in \mathbb{R}$ regle yüzeyinde, $\vec{x}(t)$ ve $\vec{x}(t + dt)$ komşu ana doğruların ortak dikmesinin, $\vec{x}(t)$ ana doğrusu üzerindeki ayağına, merkez noktası veya boğaz noktası veya sitriksiyon noktası denir. Bu noktaların geometrik yerine ise boğaz çizgisi veya sitriksiyon çizgisi denir (Hacısalihoglu, 1983).

Verilen bir regle yüzeyde, bütün ana doğruları kesen bir (C) eğrisi yüzeyin dayanak eğrisi (Referans eğrisi) olarak anılabilir.

Tanım 8: $\vec{x} = \vec{x}(t)$, $\|\vec{x}\| = 1$, $t \in \mathbb{R}$ regle yüzeyinde, $\vec{x}(t)$ ve $\vec{x}(t + dt)$ komşu ana doğrularını dik kesen eğriye, regle yüzeyin ortogonal yörünge eğrisi denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.5.3. Kapalı regle yüzey ve integral invariantları

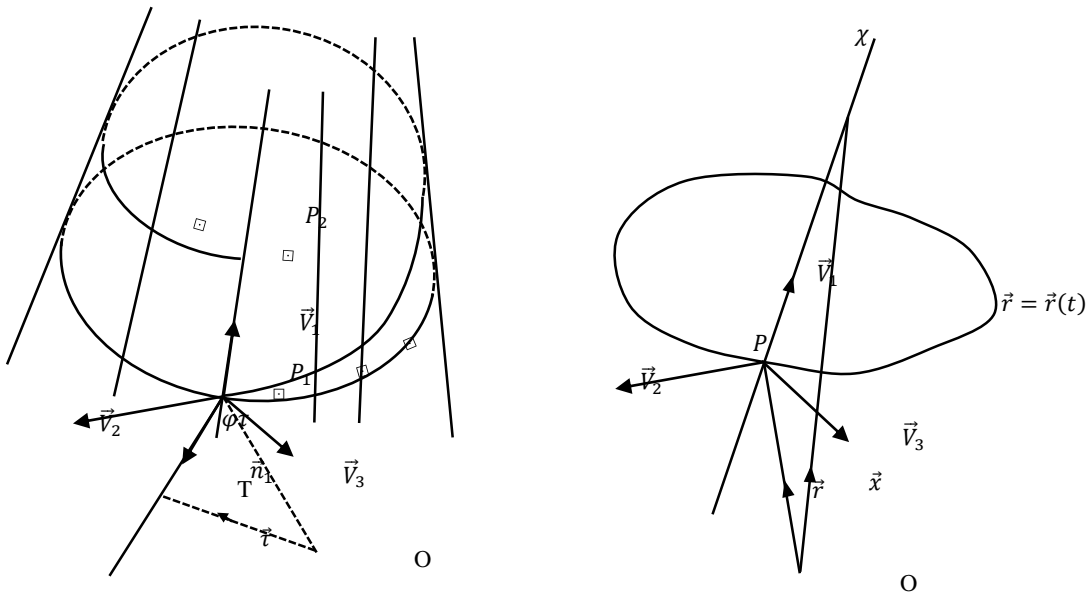
Bir H/H' kapalı uzay hareketinde, hareketli uzayı temsil eden $\{P; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ üç ayaklısının bir,

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{r}(t + 2\pi) = \vec{r}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

kapalı eğrisi üzerinde hareket ettiğini varsayarsak, H uzayının tespit edilmiş bir doğrusu, H' - uzayında bir kapalı regle yüzey çizer. Örneğin, \vec{v}_1 - doğrusunun çizdiği kapalı regle yüzey üzerindeki bir noktanın yer vektörünü \vec{x} ile gösterirsek, bu yüzeyin denklemini,

$$\begin{aligned} \vec{x}(t, v) &= \vec{r}(t) + v\vec{v}_1(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ \vec{x}(t + 2\pi, v) &= \vec{x}(t, v) \\ \|\vec{v}_1\| &= 1 \end{aligned} \tag{25}$$

ile verebiliriz. \vec{v}_1 vektörüne bu kapalı regle yüzeyin doğuranı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).



Şekil 2.7. Kapalı $r(t)$ eğrisi boyunca oluşan V_1 -kapalı regle yörünge yüzeyi

Burada \vec{v}_1 - doğrusu, kapalı regle yüzeyin ana doğrusunu, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ kapalı eğrisi de dayanak eğrisini göstermektedir. \vec{v}_1 - doğrusunun çizdiği kapalı regle yüzeyi (\vec{v}_1) ile gösterirsek, (\vec{v}_1)- kapalı regle yüzeyinin bir P_1 noktasından geçen ortogonal yörüngesinin diferansiyel denklemi;

$$\langle d\vec{x}, \vec{v}_1 \rangle = 0, \quad \|\vec{v}_1\| = 1$$

dır. Burada (25) ifadesi kullanılarak,

$$dv = -\langle d\vec{r}, \vec{v}_1 \rangle$$

bulunur.

Tanım 9: Bir $\vec{x}(t, v) = \vec{r}(t) + \vec{v}_1(t)$ kapalı regle yüzeyi için,

$$\ell = \oint dv = -\oint \langle d\vec{r}, \vec{v}_1 \rangle$$

büyüklüğüne bu kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu denir (Gürsoy, 1990).

Bu tanım bize, v_1 - ana doğrusunun, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ kapalı eğrisine dayanarak kapalı regle yüzeyi çizdiğinden, kendi doğrultusunda $\ell = \oint dv$ kadar ilerleyerek ilk konumu ile çakıştığını gösterir. Bu nedenle, v_1 - ana doğrusunun bir P_1 noktasından başlayan ortogonal yörünge, bir periyot sonra aynı v_1 - ana doğrusunu P_1 den farklı bir P_2 noktasında keser. Ortogonal yörüngeler, çıkış noktasından bağımsız olduğundan, ℓ açılım uzunluğu kapalı regle yüzeyler için bir integral invaryantıdır (Gürsoy,1990).

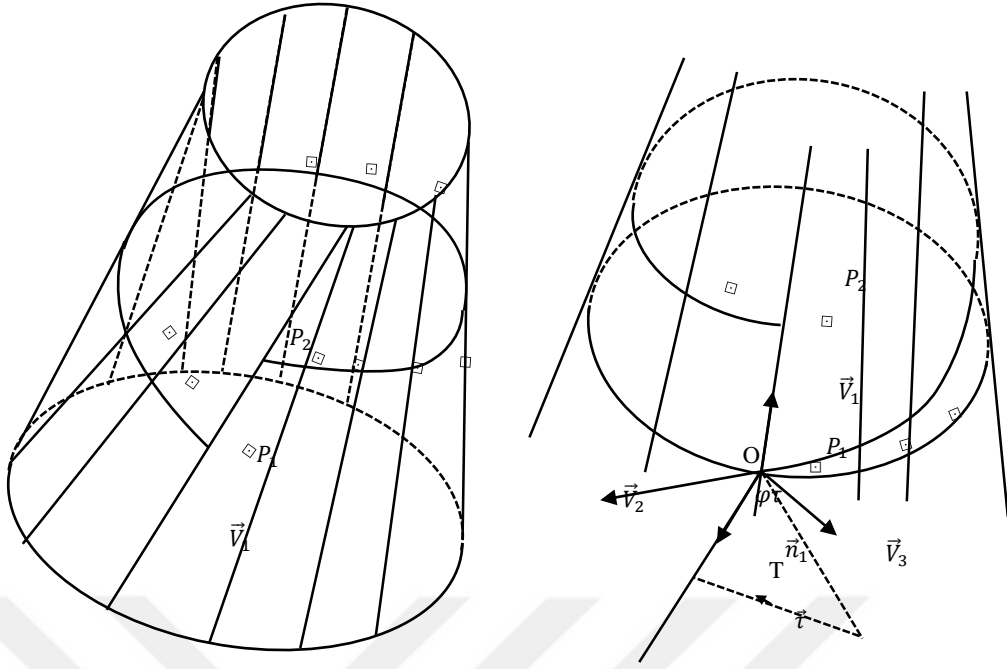
Şimdi (\vec{v}_1)- kapalı regle yüzeyi için, ikinci bir integral invaryantı olan açılım açısı tanımlansın.

Tanım 10: (\vec{v}_2, \vec{v}_3)- düzleminde bir birim vektörü,

$$\vec{n}_1 = \cos\varphi\vec{v}_2 + \sin\varphi\vec{v}_3$$

olarak seçelim. n_1 doğrusu, kapalı hareket esnasında yüzeyin P noktasından geçen ortogonal yörüngesi boyunca bir tors (açılabilir yüzey) çizsin. Yani torsun denklemi,

$$\vec{T} = \vec{x} + \omega\vec{n}_1 \quad \omega \in \mathbb{R}$$



Şekil 2.8. Kapalı Regle yüzeyin boğaz çizgisi ve açılım uzunluğu ve açılım açısı

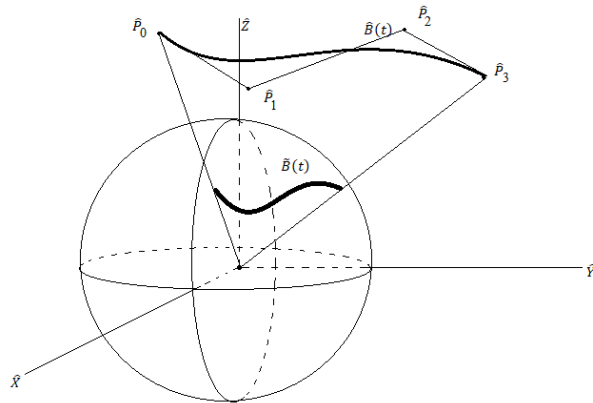
olsun. Ayrıca bu torsun dayanak eğrisi $\vec{x}(t)$ için ortogonal yörünge olma şartı,

$$\langle d\vec{r}, \vec{v}_1 \rangle = 0$$

sağlansın. n_1 - doğrusu bu koşulları sağlamak üzere kapalı hareketi esnasında, hareketin bir fonksiyonu olarak değişen φ açısının bir periyotluk süredeki toplam değişme miktarına (\vec{v}_1)- kapalı regle yüzeyinin açılım açısı denir ve,

$$\lambda_{\vec{v}_1} = \oint dv$$

eğrisel integrali ile belirtilir (Gürsoy,1990).



Şekil 2.9. $\bar{B}(t)$ Bezier eğrisinin birim dual küre üzerine projeksiyonu olan $\bar{B}(t)$ eğrisi

2.6. Eğri ve Yüzeyler İçin Eğrilikler

2.6.1. Düzlem eğrilerde eğrilik

Tanım 11: $\alpha(t)$, $I = [a,b]$ aralığında tanımlı, istenilen mertebeden türevlenebilir bir parametrik eğri olsun. Eğer, her $t \in [a,b]$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise $\alpha(t)$ parametrik eğrisine **regülerdir** denir. Eğer her $t \in [a,b]$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise α -ya **birim hızlı** denir.

Tanım 12: $I = [a,b]$ aralığında tanımlı, sürekli ve türevlenebilir bir $\alpha(t)$ parametrik eğrisi için, **yay uzunluğu**,

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

ile tanımlanır. $t_0 \in [a,b]$ olmak üzere, t_0 dan itibaren t nin artan değerlerine karşın, α parametrik eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu $u \in [a,b]$ olmak üzere,

$$s_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \quad (26)$$

ile tanımlıdır. $s_\alpha(t)$ - nin aldığı değerler $[0, s_\alpha(t)]$ aralığında değişmektedir. Açıkça görülebilir ki,

$$\frac{d}{dt} s_\alpha(t) = s'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|$$

dir. $\|\alpha'(t)\| \geq 0$ olduğundan $s_\alpha(t)$ fonksiyonu monoton artan bir fonksiyondur. Dolayısıyla tersi mevcuttur. Bu ters fonksiyon, $\alpha(t)$ parametrik eğrisi için $s \in [0, s_\alpha(t)]$ elemanını $t = t_\alpha(s) \in [a, b]$ elemanına dönüştüren bir parametre dönüşümüdür. Böylece, $s_\alpha(t)$ ve $t_\alpha(s)$ ters fonksiyonlar olduklarından, $t_\alpha(s_\alpha(t)) = t$ ve $s_\alpha(t_\alpha(s)) = s$ elde edilir. Bu şekilde elde edilen $t = t_\alpha(s)$ parametresine **yay uzunluğu parametresi** denir. Bir $\alpha(t)$ parametrik eğrisi, s yay uzunluğu parametresine göre $\beta(s) = \alpha(t_\alpha(s))$ biçiminde yeniden parametrize edilebilir [28, p.11-12].

Bir $\alpha(t)$ parametrik eğrisi üzerinde Frenet çatısı denilen $\{ T, N, B \}$ çatısı inşa edilebilir. $T(s)$ ve $N(s)$ vektörleri, sırasıyla $\alpha(t)$ nin birim teğet ve birim asal normal

vektörleri olsun. $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$ olduğundan türev alınır, $\left\langle T(s), \frac{d}{ds} T(s) \right\rangle = 0$ elde edileceğinden $\frac{d}{ds} T(s)$, $T(s)$ vektörüne dik ve $N(s)$ vektörüne paralel olur. Böylece,

$$\frac{d}{ds} T(s) = \kappa(s) N(s) \quad (27)$$

yazılırsa, $\kappa(s)$ ye, α nın verilen $s(t)$ noktasındaki **eğriliği** denir. $\frac{1}{\kappa(s)}$ ifadesine de α nın

s noktasındaki **eğrilik yarıçapı** denir. Bir parametrik eğrinin herhangi bir noktasındaki eğriliği, eğrinin yay uzunluğuna göre o noktadaki teğetin dönme hızıdır. $T(s)$ birim teğet vektörünün t parametresine göre türevi alınır, zincir kuralına göre,

$$\frac{d}{dt} T(s(t)) = \frac{d}{ds} T(s(t)) \frac{d}{dt} s(t) = \kappa(s(t)) \frac{d}{dt} s(t) N(s(t)) \quad (28)$$

dir. α eğrisi, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ olarak alındığında t ye göre türevi $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ olur. Böylece,

$$\frac{d}{dt} s(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

dir. Bu ifadeye $v(t)$ denilirse ve (28) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dt} T(t) = \kappa(t) v(t) N(t)$$

elde edilir.

Teorem 8: $C(t) = (x(t), y(t))$ regüler düzlem eğrisinin eğriliği,

$$\kappa(t) = \frac{\frac{dx(t)}{dt} \frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{d^2x(t)}{dt^2} \frac{dy(t)}{dt}}{\|C'(t)\|^3}$$

dir (İncesu, 2003).

2.6.2. Uzay eğrilerinde eğrilik ve torsiyon

$C(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $I = [a, b]$ aralığında tanımlı, regüler bir parametrik uzay eğrisi olsun. Düzlem eğrilerde olduğu gibi $C(t)$ eğrisi, $C(t(s))$ biçiminde yay uzunluğu parametresine göre parametrelenip birim hızlı yapılır ve $C(t(s))$ üzerinde $\{T, N, B\}$ çatısı inşa edilirse,

$$\left. \begin{aligned} T(s) &= \frac{\frac{d}{ds} C(s)}{\left\| \frac{d}{ds} C(s) \right\|} \\ N(s) &= \frac{\frac{d}{ds} T(s)}{\left\| \frac{d}{ds} T(s) \right\|} = \frac{\frac{d}{ds} T(s)}{\kappa} \\ B(s) &= T(s) \times N(s) \end{aligned} \right\}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, $B(s)$, eğrinin binormalidir ve $\langle T(s), B(s) \rangle = 0$ olduğundan s ye göre türev alınırsa,

$$\langle T'(s), B(s) \rangle + \langle T(s), B'(s) \rangle = 0$$

dır. (27) ifadesinden

$$\langle \kappa(s)N(s), B(s) \rangle + \langle T(s), B'(s) \rangle = 0$$

ve $\langle N(s), B(s) \rangle = 0$ olduğundan,

$$\langle T(s), B'(s) \rangle = 0$$

elde edilir. Böylece, $B'(s)$, $T(s)$ ye dik olur. Ayrıca $B'(s)$, $B(s)$ ye de dik olacağından $B'(s)$, $N(s)$ yönünde olacaktır. Bu durumda,

$$\frac{d}{ds} B(s) = -\tau(s)N(s)$$

olduğu görülür. Burada (-) işareti s nin artan değerlerinde binormalin dönme yönünden kaynaklanmaktadır. Yani, $\frac{d}{ds} B(s)$, $N(s)$ vektörünün ters yönündedir. Böylece,

$$\tau(s) = \left\| \frac{d}{ds} B(s) \right\|$$

ifadesine $C(t)$ parametrik eğrisinin bir $s(t)$ noktasındaki **torsiyonu (burulması)** denir. Bu ifade ile de anlaşılacağı gibi, bir parametrik eğrinin herhangi bir noktasındaki burulması, eğrinin yay uzunluğuna göre o noktadaki binormalinin dönme hızıdır.

Böylece toparlarsak, T , N ve B vektörlerinin s parametresine göre türevlerini formülleştirebilirsek,

$$\left. \begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= \tau B - \kappa T \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \right\}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Bu formüllere Frenet- Serret formülleri denir. Bu formüller, 1851 de Serret, 1852 de de Frenet tarafından verilmiştir (Weatherburn, 1984).

Teorem 9: $C(t)$ regüler bir parametrik eğri olsun. Bu takdirde,

$$\kappa = \frac{\left\| \frac{d}{dt} C(t) \times \frac{d^2}{dt^2} C(t) \right\|}{\left\| \frac{d}{dt} C(t) \right\|^3}, \quad \tau = \frac{\left\langle \left(\frac{d}{dt} C(t) \times \frac{d^2}{dt^2} C(t) \right), \frac{d^3}{dt^3} C(t) \right\rangle}{\left\| \frac{d}{dt} C(t) \times \frac{d^2}{dt^2} C(t) \right\|^2},$$

$$T = \frac{\frac{d}{dt} C(t)}{\left\| \frac{d}{dt} C(t) \right\|}, \quad B = \frac{\frac{d}{dt} C(t) \times \frac{d^2}{dt^2} C(t)}{\left\| \frac{d}{dt} C(t) \times \frac{d^2}{dt^2} C(t) \right\|} \quad \text{ve} \quad N = B \times T$$

dir.

İspat: Marsh (1999).

2.6.3. Dual küresel eğriler

$\bar{X}(t, v)$ regle yüzeyi

$$\bar{X}(t, v) = x(t) + vy(t)$$

biçiminde verilmiş olsun. Eğer $y(t), R^3$ de herhangi bir sabit vektör ise bu durumda $\bar{X}(t, v)$ yüzeyi bir silindir ifade eder. Genel anlamda eğer $y(t)$ sabit olmayan bir vektör ise bu durumda $\bar{X}(t, v)$ yüzeyi bir regle yüzeyidir. Burada $y(t)$ eğrisi $\bar{X}(t, v)$ regle yüzeyinin direktör eğrisi olarak verilsin. Böylece her $t \in R$ için regle yüzeyi oluşturan hareketli doğru $y(t)$ ile aynı yöne sahip olur.

Buna göre $\bar{X}(t, v)$ regle yüzeyine E.Study teoreminin ters karşılığı olarak karşılık gelen $\hat{U}(t)$ küresel eğrisinin reel kısmı $\frac{y(t)}{\|y(t)\|}$ dir. Eğer $\bar{X}(t, v)$ regle yüzeyine E.Study teoreminin ters karşılığı gelen $\check{U}(t)$ küresel eğrisini

$$\check{U}(t) = u(t) + \varepsilon u^*(t)$$

biçiminde ifade etmiş olsaydık hiç şüphesiz ki $u(t) = \frac{y(t)}{\|y(t)\|}$ olurdu. Ayrıca E.Study teoremine göre $u^*(t)$ vektörü regle yüzeyin dayanak eğrisi olan $x(t)$ ile reel kısım $u(t)$ nin vektörel çarpımı olacağından küresel eğri

$$\check{U}(t) = \frac{y(t)}{\|y(t)\|} + \varepsilon \left(x(t) \wedge \frac{y(t)}{\|y(t)\|} \right)$$

biçimindedir (İncesu, 2022).



3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

3.1. Dual Uzayda Bezier Eğrileri

Dual uzayda Bernstein taban polinomlarının ifadesini Samancı (2015, 2017) vermiştir. İncesu (2022) de Dual uzayda Bezier eğrileri ve birim dual küre üzerine projeksiyon eğrileri, reel parametreye bağlı olarak yani $t^* = 0$ durumunda verilmiştir. Bu çalışmada parametre keyfi dual değişken alınarak Bezier eğrileri ve bu eğrilerin birim dual küre üzerine projeksiyonları çalışılacaktır. Ayrıca küresel Bezier eğrilerinde Blashke çatı da ifade edilecektir.

3.1.1. Linear Dual Bezier Eğrisi

Kontrol noktaları $\hat{P}_0 = P_0 + \varepsilon P_0^*$ ve $\hat{P}_1 = P_1 + \varepsilon P_1^*$ olan ($P_i \in R^3, i = 0,1$) lineer Bezier eğrisini göz önüne alalım.

$\hat{t} = t + \varepsilon t^* \varepsilon D$ olmak üzere $t \in [0,1]$ ve $t^* \in R$ anındaki Bezier eğrisinin vektörel ifadesi

$$\widehat{B}(\hat{t}) = \widehat{P}_0 + \hat{t} \overrightarrow{\widehat{P}_0 \widehat{P}_1}$$

olur. Dual değişken açıldığında bu ifade

$$\begin{aligned} \widehat{B}(\hat{t}) &= \widehat{B}(t + \varepsilon t^*) = \widehat{P}_0 + (t + \varepsilon t^*) \overrightarrow{\widehat{P}_0 \widehat{P}_1} \\ &= \widehat{P}_0 + (t + \varepsilon t^*) [\widehat{P}_1 - \widehat{P}_0] \\ &= \widehat{P}_0 [1 - (t + \varepsilon t^*)] + (t + \varepsilon t^*) \cdot \widehat{P}_1 \\ &= \widehat{P}_0 \underbrace{(1 - t - \varepsilon t)}_{\widehat{B}_0^1} + \underbrace{(t + \varepsilon t^*)}_{\widehat{B}_1^1} \cdot \widehat{P}_1 \end{aligned} \quad (29)$$

olarak tanımlanır. Eğer $\hat{t} = 0$ ise $\widehat{B}(\hat{t}) = \widehat{B}(0) = \widehat{P}_0$ ve $\hat{t} = 1$ ise $\widehat{B}(\hat{t}) = \widehat{B}(1) = \widehat{P}_1$ olduğu görülür. (29) ifadesi açıldığında

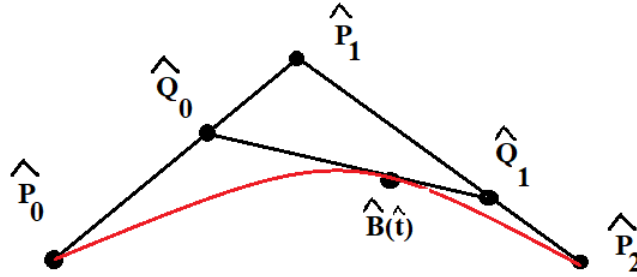
$$\begin{aligned} \widehat{B}(\hat{t}) &= (1 - (t + \varepsilon t^*)) (P_0 + \varepsilon P_0^*) + (t + \varepsilon t^*) (P_1 + \varepsilon P_1^*) \\ &= [(1 - t)P_0 + tP_1] + \varepsilon [((1 - t)P_0^* + tP_1^*) + t^*(P_1 - P_0)] \\ &= B(t) + \varepsilon (B^*(t) + t^*(P_1 - P_0)) \end{aligned} \quad (30)$$

şeklinde olduğu görülür. Burada $B(t)$, kontrol noktaları P_0 ve P_1 olan lineer Bezier eğrisi, $B^*(t)$ ise kontrol noktaları P_0^* ve P_1^* olan bir lineer Bezier eğrisi olur. Ayrıca

$1 - \hat{t} = (1 - t - \varepsilon t^*)$ ile $t + \varepsilon t^* = \hat{t}$ ifadeleri de sırasıyla $\hat{B}_0^1(\hat{t})$ ve $\hat{B}_1^1(\hat{t})$ ile ifade edilen dual Bernstein taban polinomlarıdır.

3.1.2. Dual Kuadratik Bezier Eğrileri

Kontrol noktaları $\hat{P}_0 = P_0 + \varepsilon P_0^*$, $\hat{P}_1 = P_1 + \varepsilon P_1^*$, $\hat{P}_2 = P_2 + \varepsilon P_2^*$ olan Kuadratik Bezier Eğrisini elde edelim



Şekil 3.1. Kuadratik Dual Bezier Eğrisi

$\hat{t} = t + \varepsilon t^* \in D$ olmak üzere ($t \in [0,1]$ ve $t^* \in R$) bir \hat{t} anında bir önceki bölümden,

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q}_0 &= (1 - \hat{t})\hat{P}_0 + \hat{t}\hat{P}_1 \\ \hat{Q}_1 &= (1 - \hat{t})\hat{P}_1 + \hat{t}\hat{P}_2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

yazılabilir. O halde Kuadratik Bezier eğrisi \hat{t} anında

$$\hat{B}(\hat{t}) = (1 - \hat{t})\hat{Q}_0 + \hat{t}\hat{Q}_1 \quad (32)$$

yazılır. Açıldığında ise

$$\hat{B}(\hat{t}) = (1 - \hat{t})^2\hat{P}_0 + 2(1 - \hat{t})\hat{t}\hat{P}_1 + \hat{t}^2\hat{P}_2 \quad (33)$$

yazılır. Bu ifadeler Reel ve Dual kısımlarına ayrıldığında,

$$\begin{aligned} \hat{B}(\hat{t}) &= \hat{B}(t + \varepsilon t^*) \\ &= (1 - \hat{t})^2\hat{P}_0 + 2(1 - \hat{t})\hat{t}\hat{P}_1 + \hat{t}^2\hat{P}_2 \\ &= [(1 - t)^2 + \varepsilon(-2(1 - t)t^*)](P_0 + \varepsilon P_0^*) + [2(1 - t)t + \varepsilon(2(1 - t)t^* - 2tt^*)](P_1 + \varepsilon P_1^*) + [t^2 + \varepsilon 2tt^*](P_2 + \varepsilon P_2^*) \\ &= [(1 - \hat{t})^2\hat{P}_0 + 2(1 - \hat{t})\hat{t}\hat{P}_1 + \hat{t}^2\hat{P}_2] + \varepsilon[(1 - t)^2P_0^* + 2(1 - t)tP_1^* + t^2P_2^*] \\ &= [(1 - t)^2P_0 + 2(1 - t)tP_1 + t^2P_2] + \\ &+ \varepsilon[(1 - t)^2P_0^* + 2(1 - t)tP_1^* + t^2P_2^*] + 2t^*[(P_1 - P_0) + t((P_2 - P_1) - (P_1 - P_0))] \end{aligned} \quad (34)$$

olduğu görülür.

Dikkat edildiğinde bu ifade

$$\hat{B}(\hat{t}) = B(t) + \varepsilon[B^*(t) + 2t^*(\Delta P_0 + t(\Delta P_1 - \Delta P_0))] \quad (35)$$

olarak değerienebilir. Burada $B(t)$, Kontrol noktaları P_0, P_1, P_2 olan $B^*(t)$, Kontrol noktaları P_0^*, P_1^*, P_2^* olan reel Bezier eğrileri $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$ dir.

Burada (35) ifadesinde geçen $\Delta P_0 + t(\Delta P_1 - \Delta P_0)$ ifadesi kontrol noktaları ΔP_0 ve ΔP_1 olan bir lineer Bezier eğrisidir ve $B_{1,\Delta}(t)$ ile gösterilirse Kuadratik dual Bezier eğrisi

$$\hat{B}(\hat{t}) = B(t) + \varepsilon(B^*(t) + 2t^*B_{1,\Delta}(t)) \quad (36)$$

ile ifade edilebilir.

3.1.3. Kübik Dual Bezier Eğrisi

Kontrol noktaları $\hat{P}_0 = P_0 + \varepsilon P_0^*$, $\hat{P}_1 = P_1 + \varepsilon P_1^*$, $\hat{P}_2 = P_2 + \varepsilon P_2^*$ ve $\hat{P}_3 = P_3 + \varepsilon P_3^*$ olan kübik dual bezier eğrisi yukarıda olduğu gibi

$$\hat{B}(\hat{t}) = (1 - \hat{t})^3 \hat{P}_0 + 3(1 - \hat{t})^2 \hat{t} \hat{P}_1 + 3(1 - \hat{t}) \hat{t}^2 \hat{P}_2 + \hat{t}^3 \hat{P}_3 \quad (37)$$

biçiminde yazabiliriz. Bu ifade açıldığında,

$$\begin{aligned} \hat{B}(\hat{t}) = \hat{B}(t + \varepsilon t^*) = & [(1 - t)^3 P_0 + 3(1 - t)^2 t P_1 + 3(1 - t) t^2 P_2 + t^3 P_3] + \\ & \varepsilon [(1 - t)^3 P_0^* + 3(1 - t)^2 t P_1^* + 3(1 - t) t^2 P_2^* + t^3 P_3^*] + \\ & 3t^* [(1 - t)^2 [P_1 - P_0] + 2t(1 - t)[P_2 - P_1] + t^2 [P_3 - P_2]] \end{aligned} \quad (38)$$

olarak yazılabilir. Yine dikkat edildiğinde (38) ifadesi

$$\hat{B}(\hat{t}) = B(t) + \varepsilon [B^*(t) + 3t^* (B_{2,\Delta}(t))] \quad (39)$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre kübik dual Bezier eğrisi, dual ve reel kısımlarına ayrıldığında $B(t)$, kontrol noktaları P_0, P_1, P_2, P_3 olan ve $B^*(t)$, kontrol noktaları $P_0^*, P_1^*, P_2^*, P_3^*$ olan kübik reel Bezier eğrileridir. $B_{2,\Delta}(t)$ ise kontrol noktaları $\Delta P_0, \Delta P_1$ ve ΔP_2 olan ($\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$) Kuadratik Bezier eğrisidir.

3.1.4. Genel Bezier Eğrisi

Yukarıdaki metod genişletildiğinde kontrol noktaları $\hat{P}_0 = P_0 + \varepsilon P_0^*$, $\hat{P}_1 = P_1 + \varepsilon P_1^*$, $\hat{P}_2 = P_2 + \varepsilon P_2^*$, ..., $\hat{P}_n = P_n + \varepsilon P_n^*$ olan dual n.nci derece Bezier eğrisi

$$\hat{B}(\hat{t}) = \sum_{i=0}^n \hat{B}_i^n(\hat{t}) \hat{P}_i \quad (40)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\hat{B}_i^n(\hat{t})$, dual Bernstein taban polinomlarıdır.

$$\hat{B}_i^n(\hat{t}) = \begin{cases} \binom{n}{i}(1-\hat{t})^{n-i}\hat{t}^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

biçimindedir. Bu ifadeler (40) ifadesi açıldığında ve reel ve dual kısımlara ayrıldığında

$$\begin{aligned} \hat{B}(\hat{t}) &= \sum_{i=0}^n \hat{B}_i^n(\hat{t})\hat{P}_i + \varepsilon[\sum_{i=0}^n B_i^n(t)P_i^* + nt^* \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)\Delta P_i] \\ &= B(t) + \varepsilon[B^*(t) + nt^*B_{(n-1),\Delta}(t)] \end{aligned} \quad (41)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

biçimindeki Bernstein taban polinomları, $P_i, P_i^* \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0,1], t^* \in \mathbb{R}$ $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$ dir.

$B_{(n-1),\Delta}(t)$ de kontrol noktaları $\Delta P_0, \dots, \dots, \Delta P_{n-1}$ olan (n-1). dereceden Reel Bezier eğrisidir.

Teorem 10: $\hat{B}(\hat{t}) = \hat{B}(t + \varepsilon t^*)$ eğrisi n.dereceden Dual Bezier eğrisi olsun. (Kontrol noktaları $\hat{P}_0 = P_0 + \varepsilon P_0^*$, $\hat{P}_1 = P_1 + \varepsilon P_1^*$, $\dots, \dots, \dots, \hat{P}_n = P_n + \varepsilon P_n^*$ olan) Bu takdirde

$$\text{i) } \hat{B}|_{\hat{t}=0} = P_0 + \varepsilon P_0^* = \hat{P}_0 \quad (42)$$

$$\text{ii) } \hat{B}|_{t^*=0} = B(t) + \varepsilon B^*(t) \quad (43)$$

$$\text{iii) } \hat{B}|_{\hat{t}=1} = P_n + \varepsilon(P_n^* + nt^*\Delta P_{n-1}) = \hat{P}_n + \varepsilon nt^*\Delta P_{n-1} \quad (44)$$

dir. Burada $\Delta P_{n-1} = P_n - P_{n-1}$ dir.

İspat: Bezier eğrilerinin son nokta interpolasyon özellikleri dikkate alındığında yukarıdaki eşitlikle çok kolayca görülür.

Burada dikkat edilmesi gereken bir husus ii) şıkında verilen ifadeyle $t^*=0$ durumunda Dual Bezier eğrisinin İncesu (2022) de verilen reel değişkenli dual Bezier eğrisiyle çakıştığıdır.

Teorem 11: $\hat{B}(\hat{t})$ n.dereceden dual Bezier eğrisi olsun. Kontrol noktaları da $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$, ($i = 0, \dots, \dots, n$) olarak verilsin. Bu takdirde

$$\frac{d(\hat{B}(\hat{t}))}{d\hat{t}} = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{B}_i^{n-1}(\hat{t})\hat{P}_i^{(1)}$$

dir. Burada $\hat{P}_i^{(1)} = n(\hat{P}_{i+1} - \hat{P}_i)$ dir.

İspat: Reel Bezier eğrilerinde olduğu gibidir.

Teorem 12: $\hat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ ($i = 0, \dots, n$) olan n derece dua Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde

$$\hat{B}'(\hat{t}) = B'(t) + \varepsilon (B^{*'}(t) + t^* B''(t)) \quad (45)$$

dir. Burada $B(t)$, kontrol noktaları P_i ler olan, $B^*(t)$ de kontrol noktaları P_i^* olan n.derece Reel Bezier eğrisidir.

İspat:

$$\begin{aligned} \hat{B}'(\hat{t}) &= \sum_{i=0}^{n-1} \hat{B}_i^{n-1} \hat{P}_i^{(1)} \\ &= \hat{B}_0^{n-1}(\hat{t}) \hat{P}_0^{(1)} + \hat{B}_1^{n-1}(\hat{t}) \hat{P}_1^{(1)} + \hat{B}_{n-1}^{n-1}(\hat{t}) \hat{P}_{n-1}^{(1)} \\ &= [(1 - \hat{t})^{n-1}]n(\hat{P}_1 - \hat{P}_0) + ((n - 1)(1 - \hat{t})^{n-2} \hat{t})n(\hat{P}_2 - \hat{P}_1) + \dots + \\ &\quad \hat{t}^{n-1}n(\hat{P}_n - \hat{P}_{n-1}) \\ &= n[(1 - t)^{n-1} + (-\varepsilon t^*(n - 1)(1 - t)^{n-2})](P_1 - P_0) + \varepsilon(P_1^* - P_0^*) \\ &\quad + n[(n - 1)(1 - t)^{n-2}t + \varepsilon t^*[-(n - 1)(n - 2)(1 - t)^{n-3}t + \\ &\quad (n - 1)(1 - t)^{n-2}]](P_2 - P_1) + \varepsilon(P_2^* - P_1^*) + \dots + n[t^{n-1} + \\ &\quad \varepsilon t^*(n - 1)t^{n-2}](P_n - P_{n-1}) + \varepsilon(P_n^* - P_{n-1}^*) \\ &= n[(1 - t)^{n-1}(P_1 - P_0) + \varepsilon t^*[-(n - 1)(n - 2)(1 - t)^{n-3}t + \\ &\quad (n - 1)(1 - t)^{n-2}(P_1 - P_0)]] + n[(n - 1)(1 - t)^{n-2}t(P_2 - P_1) + \\ &\quad \varepsilon[(n - 1)(1 - t)^{n-2}t(P_2^* - P_1^*)] + t^*[(n - 1)(1 - t)^{n-2} - (n - \\ &\quad 1)(n - 2)(1 - t)^{n-3}](P_2 - P_1)] + \dots + n[t^{n-1}(P_n - P_{n-1}) + \\ &\quad \varepsilon(t^{n-1}(P_n^* - P_{n-1}^*) + t^*(n - 1)t^{n-2}(P_n - P_{n-1}))] \\ &= n[(1 - t)^{n-1}(P_1 - P_0) + (n - 1)(1 - t)^{n-2}t(P_2 - P_1) + \dots + \\ &\quad t^{n-1}(P_n - P_{n-1})] + n\varepsilon \left[[(1 - t)^{n-1}(P_1^* - P_0^*) + (n - 1)(1 - t)^{n-2}t(P_2^* - \\ &\quad P_1^*) + \dots + t^{n-1}(P_n^* - P_{n-1}^*)] + t^*[-(n - 1)(1 - t)^{n-2}(P_1 - P_0) + \right. \\ &\quad \left. ((n - 1)(1 - t)^{n-2} - (n - 1)(n - 2)(1 - t)^{n-3}t)(P_2 - P_1) + \dots + \right. \\ &\quad \left. (n - 1)t^{n-2}(P_n - P_{n-1}) \right] \\ &= \left[B_0^{n-1}P_0^{(1)} + B_1^{n-1}P_1^{(1)} + \dots + B_{n-1}^{n-1}P_{n-1}^{(1)} \right] \\ &\quad + \varepsilon \left[\left(B_0^{n-1}P_0^{*(1)} + B_1^{n-1}P_1^{*(1)} + \dots + B_{n-1}^{n-1}P_{n-1}^{*(1)} \right) + t^* \left(B_0^{n-2}P_0^{(2)} + \dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. B_{n-2}^{n-2}P_{n-2}^{(2)} \right) \right] \\ \hat{B}'(\hat{t}) &= B'(t) + \varepsilon (B^{*'}(t) + t^* B''(t)) \end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

Teorem 13: Kontrol noktaları $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$, ($i = 0, \dots, n$) olan n.derece dual Bezier eğrisinin ikinci türevi

$$\frac{d^2 (\hat{B}(\hat{t}))}{d\hat{t}} = \sum_{i=0}^{n-2} \hat{P}_i^{(2)} \hat{B}_i^{n-2}(\hat{t})$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} \hat{P}_i^{(2)} &= n(n-1) \cdot (\hat{P}_{i+2} - 2\hat{P}_{i+1} + \hat{P}_i) \\ &= n(n-1) \cdot [(\hat{P}_{i+2} - \hat{P}_{i+1}) - (\hat{P}_{i+1} - \hat{P}_i)] \\ &= n(n-1) \cdot [\Delta\hat{P}_{i+1} - \Delta\hat{P}_i] \text{ dir.} \\ (\Delta\hat{P}_j &= \hat{P}_{j+1} - \hat{P}_j) \text{ dir.} \end{aligned}$$

İspat: Reel Bezier eğrilerinde olduğu gibidir. İncesu (2003)

Teorem 14: $\hat{B}(\hat{t})$, Kontrol noktaları $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ olan n.nci derece dual Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \hat{B}'(\hat{t} = t + \varepsilon t^*) \Big|_{t=0, t^*=0} &= n(P_1 - P_0) = n\Delta P_0 = P_0^{(1)} \\ \hat{B}'(\hat{t} = t + \varepsilon t^*) \Big|_{t=0, t^* \in R} &= n(P_1 - P_0) + \varepsilon t^* (n(n-1)(\Delta P_2 - \Delta P_1)) \\ &= n\Delta P_0 + \varepsilon t^* P_0^{(2)} = P_0^{(1)} + \varepsilon t^* P_0^{(2)} \\ \hat{B}'(\hat{t} = t + \varepsilon t^*) \Big|_{t=1, t^*=0} &= n(P_n - P_{n-1}) = n\Delta P_{n-1} = P_{n-1}^{(1)} \\ \hat{B}'(\hat{t} = t + \varepsilon t^*) \Big|_{t=1, t^* \in R} &= n(P_n - P_{n-1}) + \varepsilon t^* (n(n-1)(\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2})) \\ &= n\Delta P_{n-1} + \varepsilon t^* P_{n-2}^{(2)} = P_{n-1}^{(1)} + \varepsilon t^* P_{n-2}^{(2)} \end{aligned}$$

Burada; $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$, $P_i^{(1)} = n(P_{i+1} - P_i)$, $P_i^{(2)} = n(n-1)(P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i)$ dir.

İspat:

$$\hat{B}'(\hat{t}) = B'(t) + \varepsilon [B^{*'}(t) + (n-1)t^* B_{(n-2), \Delta^{(2)}}(t)]$$

olduğundan gerekli koşullar verildiğinde ispat tamamlanır.

Sonuç 1: $\hat{B}(\hat{t})$, Kontrol noktaları $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ olan n.nci derece dual Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde

$$\hat{B}''(\hat{t}) = B''(t) + \varepsilon [B^{*''}(t) + t^* B'''(t)]$$

Sonuç 2: $\hat{B}(\hat{t})$, Kontrol noktaları $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ olan n.nci derece dual Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde

$$\hat{B}^{(n)}(\hat{t}) = B^{(n)}(t) + \varepsilon [B^{*(n)}(t) + t^* B^{(n+1)}(t)]$$

Teorem 15: $\hat{B}(\hat{t})$, Kontrol noktaları $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ olan n.nci derece dual Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde

$$i) \hat{B}''(\hat{t})|_{t=0, t^*=0} = P_0^{(2)}$$

$$ii) \hat{B}''(\hat{t})|_{t=1, t^*=0} = P_{n-1}^{(2)}$$

$$iii) \hat{B}''(\hat{t})|_{t=0, t^* \in R} = P_0^{(2)} + \varepsilon [P_0^{*(2)} + t^* P_0^{(3)}]$$

$$iv) \hat{B}''(\hat{t})|_{t=1, t^* \in R} = P_{n-2}^{(2)} + \varepsilon [P_{n-2}^{*(2)} + t^* P_{n-3}^{(3)}]$$

dir.

İspat:

Bezier eğrilerinin son nokta interpolasyon ve son nokta teğet özellikleri kullanılarak ispat kolayca görülür.

3.2. Dual Bezier Eğrilerinde Frenet Çatısı

$\hat{B}(\hat{t})$ Kontrol noktaları $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde herhangi bir $\hat{t} = t + \varepsilon t^*$ noktanında eğri üzerindeki Frenet-Seret çatısını inşa edelim.

$\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ dual Bezier eğrisi üzerindeki dual Frenet vektör alanları olmak üzere $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ üçlüsünü oluşturalım. Bunun için

$$\hat{T} = \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|}$$

O halde

$$\hat{T} = \frac{B' + \varepsilon(B^{*'} + t^* B'')}{\|B' + \varepsilon(B^{*'} + t^* B'')\|}$$

olacaktır.

$$\hat{T} = \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} = \frac{B'}{\|B'\|} + \varepsilon \left[\frac{B^{*'} + t^* B''}{\|B'\|} - \frac{\langle B', B^{*'} + t^* B'' \rangle}{\|B'\|^3} B' \right]$$

olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde Binormal vektör alanı

$$\hat{B} = \frac{\hat{B}' \times \hat{B}''}{\|\hat{B}' \times \hat{B}''\|}$$

olacağından, binormal vektör alanı

$$\hat{B} = \frac{(B' + \varepsilon(B^{*'} + t^* B'')) \times (B'' + \varepsilon(B^{*''} + t^* B'''))}{\|(B' + \varepsilon(B^{*'} + t^* B'')) \times (B'' + \varepsilon(B^{*''} + t^* B'''))\|}$$

olur. Bu ifade açıldığında pay kısmı

$$(B' \times B'') + \varepsilon [B^{*'} \times B'' + B' \times B^{*''} + t^* B' \times B''']$$

olacağından birnormal vektör alanı:

$$\widehat{\mathbf{B}} = \frac{B' \times B''}{\|B' \times B''\|} + \varepsilon \left[\begin{array}{c} \frac{(B^{*'} + B^{*''} + B' \times B^{*'''} + t^* B' \times B^{*''''})}{\|B' \times B''\|} \\ - \frac{\langle (B' \times B''), (B^{*'} \times B^{*''} + B' \times B^{*'''} + t^* B' \times B^{*''''}) \rangle}{\|B' \times B''\|^3} \cdot B' \times B'' \end{array} \right]$$

olur. İç çarpım hesaplandığında,

$$\begin{aligned} \langle B' \times B'', B^{*'} \times B^{*''} \rangle &= \langle B', B^{*'} \rangle \langle B'', B^{*''} \rangle - \langle B', B^{*''} \rangle \langle B^{*'}, B'' \rangle \\ \langle B' \times B'', B' \times B^{*'''} \rangle &= \langle B', B' \rangle \langle B'', B^{*'''} \rangle - \langle B', B^{*'''} \rangle \langle B', B'' \rangle \\ t^* [\langle B' \times B'', B' \times B^{*''''} \rangle] &= t^* [\langle B', B' \rangle \langle B'', B^{*''''} \rangle - \langle B', B^{*''''} \rangle \langle B', B'' \rangle] \end{aligned}$$

eşitlikleri hesaplanır. Yerine yazıldığında binormal vektör alanı

$$\widehat{\mathbf{B}} = \frac{B' \times B''}{\|B' \times B''\|} + \varepsilon \left[\begin{array}{c} \frac{(B^{*'} \times B^{*''} + B' \times B^{*'''} + t^* B' \times B^{*''''})}{\|B' \times B''\|} \\ - \left[\frac{[\langle B', B^{*'} \rangle \|B''\|^2 + \langle B'', B^{*''} \rangle \|B'\|^2 - \langle B', B'' \rangle (\langle B', B^{*'''} \rangle + \langle B^{*'}, B'' \rangle)]}{\|B' \times B''\|^3} \right. \\ \left. + \frac{t^* (\|B'\|^2 \langle B'', B^{*'''} \rangle - \langle B', B'' \rangle \langle B' B^{*''''} \rangle)}{\|B' \times B''\|^3} \right] \cdot B' \times B'' \end{array} \right]$$

olur.

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{N}} &= \widehat{\mathbf{B}} \times \widehat{\mathbf{T}} \\ &= \left[\frac{B' \times B''}{\|B' \times B''\|} \right] \times \left[\frac{B'}{\|B'\|} \right] \\ &= \left[\frac{(B' + \varepsilon(B^{*'} + t^* B^{*''})) \times (B'' + \varepsilon(B^{*''} + t^* B^{*'''}))}{\|(B' + \varepsilon(B^{*'} + t^* B^{*''})) \times (B'' + \varepsilon(B^{*''} + t^* B^{*'''}))\|} \right] \times \left[\frac{(B' + \varepsilon(B^{*'} + t^* B^{*''}))}{\|(B' + \varepsilon(B^{*'} + t^* B^{*''}))\|} \right] \\ &= \left[\left(\frac{B' \times B''}{\|B' \times B''\|} \right) + \varepsilon \left[\begin{array}{c} \frac{B^{*'} \times B^{*''} + B' \times B^{*'''} + t^* B' \times B^{*''''}}{\|B' \times B''\|} \\ - \frac{\langle (B' \times B''), (B^{*'} \times B^{*''} + B' \times B^{*'''} + t^* B' \times B^{*''''}) \rangle}{\|B' \times B''\|^3} \cdot B' \times B'' \end{array} \right] \right] \\ &\quad \times \left[\frac{B'}{\|B'\|} + \varepsilon \left[\frac{B^{*'} + t^* B^{*''}}{\|B'\|} - \frac{\langle B', B^{*'} + t^* B^{*''} \rangle}{\|B'\|^3} \cdot B' \right] \right] \\ &= \frac{(B' \times B'') \times B'}{\|B' \times B''\| \cdot \|B'\|} + \\ &\quad + \varepsilon \left[\begin{array}{c} \frac{(B' \times B'') \times (B^{*'} + t^* B^{*''})}{\|B' \times B''\| \cdot \|B'\|} - \frac{\langle B', B^{*'} + t^* B^{*''} \rangle}{\|B'\|^3 \|B' \times B''\|} ((B' \times B'') \times B') \\ + \frac{[B^{*'} \times B^{*''} + B' \times B^{*'''} + t^* B' \times B^{*''''}] \times B'}{\|B' \times B''\| \cdot \|B'\|} \\ - \frac{\langle (B' \times B''), (B^{*'} \times B^{*''} + B' \times B^{*'''} + t^* B' \times B^{*''''}) \rangle}{\|B'\|^3 \|B' \times B''\|^3} (B' \times B'') \times B' \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\langle B', B' \rangle B'' - \langle B', B'' \rangle B'}{\|B'\| \|B' \times B''\|} + \\
&+ \varepsilon \left[\begin{aligned} &\frac{\langle B', B^{*'} \rangle B'' - \langle B^{*'}, B'' \rangle B' + t^* [\langle B', B'' \rangle B'' - \langle B'', B'' \rangle B']}{\|B' \times B''\| \cdot \|B'\|} \\ &- \frac{(\langle B', B^{*'} + t^* B'' \rangle) [\langle B', B' \rangle B'' - \langle B'', B' \rangle B']}{\|B'\|^3 \cdot \|B' \times B''\|} \\ &+ \frac{\langle B^{*'}, B' \rangle B'' - \langle B'', B' \rangle B^{*'} + \langle B', B' \rangle B^{*''} - \langle B^{*''}, B' \rangle B' + t^* (\langle B', B' \rangle B^{*''} - \langle B^{*''}, B' \rangle B')}{\|B' \times B''\| \cdot \|B'\|} \\ &- \frac{[(\langle B' \times B'' \rangle), (B^{*'} \times B'' + B' \times B^{*''} + t^* B' \times B^{*''})]}{\|B' \times B''\|^3 \cdot \|B'\|} (\langle B', B' \rangle B'' - \langle B'', B' \rangle B') \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Dual eğrilik ise aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\hat{\kappa} &= \frac{\|\hat{B}' \times \hat{B}''\|}{\|\hat{B}'\|^3} \\
\hat{\kappa} &= \left[\frac{\| [B' + \varepsilon(B^{*'} + t^* B'')] \times [B'' + \varepsilon(B^{*''} + t^* B''')]] \|}{\|\hat{B}'\|^3} \right] \\
\hat{\kappa} &= \frac{\| B' \times B'' + \varepsilon (B' \times B^{*''} + t^* B' \times B^{*''} + B^{*'} \times B'') \|}{\|B'\|^3 + 3\varepsilon \langle B', B^{*'} + t^* B'' \rangle} \\
&= \frac{\| B' \times B'' \| + \varepsilon \frac{\langle B' \times B'', B' \times B^{*''} + t^* B' \times B^{*''} + B^{*'} \times B'' \rangle}{\|B' \times B''\|}}{\|B'\|^3 + 3\varepsilon \langle B', B^{*'} + t^* B'' \rangle} \\
&= \frac{\|B' \times B''\|^2 + \varepsilon \langle B' \times B'', B' \times B^{*''} + t^* B' \times B^{*''} + B^{*'} \times B'' \rangle}{\|B' \times B''\| [\|B'\|^3 + 3\varepsilon \langle B', B^{*'} + t^* B'' \rangle]} \\
&= \frac{1}{\|B' \times B''\|} \left[\frac{1}{\|B'\|^3} - \varepsilon \frac{3\varepsilon \langle B', B^{*'} + t^* B'' \rangle}{\|B'\|^6} \right] [\|B' \times B''\|^2 + \varepsilon \langle B' \times B'', B' \times B^{*''} + t^* B' \times B^{*''} + B^{*'} \times B'' \rangle] \\
\hat{\kappa} &= \frac{\|B' \times B''\|}{\|B'\|^3} + \\
&+ \varepsilon \left[\frac{\langle B' \times B'', B' \times B^{*''} + t^* B' \times B^{*''} + B^{*'} \times B'' \rangle}{\|B' \times B''\| \cdot \|B'\|^3} - \frac{3\|B' \times B''\|}{\|B'\|^6} \cdot \langle B', B^{*'} + t^* B'' \rangle \right]
\end{aligned}$$

Dual torsiyonu bulabilmek için öncelikle şu ifadeyi bulalım:

$$\begin{aligned}
&\det(\hat{B}', \hat{B}'', \hat{B}''') \\
&= \det \left[(B' + \varepsilon(B^{*'} + t^* B'')), (B'' + \varepsilon(B^{*''} + t^* B''')), (B^{*''} + \varepsilon(B^{*''} + t^* B''')) \right] \\
&= \det(B', B'', B''') + \\
&+ \varepsilon [\det(B^{*'}, B'', B''') + \det(B', B^{*''}, B''') + \det(B', B'', B^{*''}) + t^* \det(B', B'', B''')]
\end{aligned}$$

bulunur. O halde dual torsiyon ise

$$\begin{aligned}
\hat{\tau} &= \frac{\det(\hat{B}', \hat{B}'', \hat{B}''')}{\|\hat{B}' \times \hat{B}''\|^2} \\
&= \frac{\det \left[(B' + \varepsilon(B^{*'} + t^* B'')), (B'' + \varepsilon(B^{*''} + t^* B''')), (B^{*''} + \varepsilon(B^{*''} + t^* B''')) \right]}{\| (B' + \varepsilon(B^{*'} + t^* B'')) \times (B'' + \varepsilon(B^{*''} + t^* B''')) \|^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\det(B', B'', B''') + \varepsilon \left[\det(B', B'', B''') + \det(B', B''', B''') \right]}{\|B' \times B'' + \varepsilon(B' \times B'' + B' \times B'' + t^* B' \times B''')\|^2} \\
&= \frac{\det(B', B'', B''') + \varepsilon \left[\det(B', B'', B''') + \det(B', B''', B''') \right]}{\left[\|B' \times B''\| + \varepsilon \frac{\langle B' \times B'', B' \times B'' + B' \times B'' + t^* B' \times B'''\rangle}{\|B' \times B''\|} \right]^2} \\
\hat{t} &= \frac{\det(B', B'', B''')}{\|B' \times B''\|^2} + \\
&+ \varepsilon \left[\begin{aligned} &\frac{\left(\det(B', B'', B''') + \det(B', B''', B''') \right)}{\|B' \times B''\|^2} \\ &- \frac{2 \det(B', B'', B''')}{\|B' \times B''\|^4} \langle B' \times B'', B' \times B'' + B' \times B'' + t^* B' \times B'''\rangle \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bunlarla birlikte aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 16: $\hat{B}(\hat{t}) = B(t) + \varepsilon(B^*(t) + t^*B'(t))$ eğrisi, kontrol noktaları $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ ($i = 0, \dots, n$) olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu takdirde $\hat{t} = t + \varepsilon t^* \in D$ noktasında eğrinin Frenet vektör alanları $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ ve dual eğrilikleri $\{\hat{\kappa}, \hat{\tau}\}$ aşağıdaki gibidir:

a) Dual Teğet Vektör Alanı,

$$\hat{T} = \frac{B'}{\|B'\|} + \varepsilon \left[\frac{B^{*'} + t^* B''}{\|B'\|} - \frac{\langle \hat{B}', B^{*'} + t^* B'' \rangle}{\|B'\|^3} B' \right]$$

b) Dual Binormal Vektör Alanı,

$$\begin{aligned}
\hat{B} &= \frac{B' \times B''}{\|B' \times B''\|} \\
&+ \varepsilon \left[\begin{aligned} &\frac{(B^{*'} \times B'' + B' \times B^{*''} + t^* B' \times B''')}{\|B' \times B''\|} \\ &- \left[\frac{[\langle B', B^{*'} \rangle \|B''\|^2 + \langle B'', B^{*''} \rangle \|B'\|^2 - \langle B', B'' \rangle (\langle B', B^{*''} \rangle + \langle B^{*'}, B'' \rangle)]}{\|B' \times B''\|^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t^* (\|B'\|^2 \langle B'', B'''\rangle - \langle B', B'' \rangle \langle B' B'''\rangle)}{\|B' \times B''\|^3} \right] B' \times B'' \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

c) Dual Normal Vektör Alanı,

$$\hat{N} = \frac{\langle B', B' \rangle B'' - \langle B', B'' \rangle B'}{\|B'\| \|B' \times B''\|} +$$

$$+\varepsilon \left[\begin{array}{l} \frac{\langle B', B^{*'} \rangle B'' - \langle B^{*'}, B'' \rangle B' + t^* [\langle B', B'' \rangle B'' - \langle B'', B'' \rangle B']}{\|B' \times B''\| \cdot \|B'\|} \\ - \frac{(\langle B', B^{*'} + t^* B'' \rangle) [\langle B', B' \rangle B'' - \langle B'', B' \rangle B']}{\|B'\|^3 \cdot \|B' \times B''\|} \\ + \frac{\langle B^{*'}, B' \rangle B'' - \langle B'', B' \rangle B^{*'} + \langle B', B' \rangle B^{*''} - \langle B^{*''}, B' \rangle B' + t^* (\langle B', B' \rangle B''' - \langle B''', B' \rangle B')}{\|B' \times B''\| \cdot \|B'\|} \\ - \frac{[(\langle B' \times B'' \rangle), (B^{*'} \times B'' + B' \times B^{*''} + t^* B' \times B''')]] (\langle B', B' \rangle B'' - \langle B'', B' \rangle B')}{\|B' \times B''\|^3 \cdot \|B'\|} \end{array} \right]$$

d) Dual Eğrilik Alanı

$$\hat{\kappa} = \frac{\|B' \times B''\|}{\|B'\|^3} + \varepsilon \left[\frac{\langle B' \times B'', B' \times B^{*''} + t^* B' \times B''' + B^{*'} \times B'' \rangle}{\|B' \times B''\| \cdot \|B'\|^3} - \frac{3\|B' \times B''\|}{\|B'\|^6} \cdot \langle B', B^{*'} + t^* B'' \rangle \right]$$

e) Dual Torsiyon Alanı

$$\hat{\tau} = \frac{\det(B', B'', B''')}{\|B' \times B''\|^2} + \varepsilon \left[\begin{array}{l} \frac{(\det(B', B'', B^{*''}) + \det((B', B^{*''}, B'''))) + \det(B^{*'}, B'', B''') + t^* \det(B', B'', B''v)}{\|B' \times B''\|^2} \\ - \frac{2\det(B', B'', B''')}{\|B' \times B''\|^4} \langle B' \times B'', B' \times B^{*''} + B^{*'} \times B'' + t^* B' \times B'' \rangle \end{array} \right]$$

dir.

3.3. Dual De Casteljau Algoritması

Reel Bezier eğrilerinde olduğu gibi dual Bezier eğrilerinde de herhangi bir $\hat{t}_0 = t_0 + \varepsilon t_0^* \in D$ noktanında Del casteljau algoritması uygulanacak $\hat{B}(\hat{t})$ eğrisine subdivision uygulanabilir. Bunun için aşağıdaki gibi bir algoritma uygulanabilir.

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{P}_0^0 = \hat{P}_0 & \hat{P}_1^0 = \hat{P}_1 & \hat{P}_2^0 = \hat{P}_2 & \dots & \dots & \hat{P}_n^0 = \hat{P}_n \\ \hat{P}_0^1 & \hat{P}_1^1 & \hat{P}_2^1 & & & \hat{P}_{n-1}^1 \\ \hat{P}_0^2 & \hat{P}_1^2 \dots & \hat{P}_{n-1}^2 & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \hat{P}_0^n & & & & & \\ \hat{P}_i^j = (1 - \hat{t})\hat{P}_i^{j-1} + \hat{t}\hat{P}_{i+1}^{j-1} & & & & & \end{array}$$

şeklinde yazılabilir. Bu şekilde elde edilen kontrol noktalarını reel ve dual kısımlarına ayıracak olursak

$$\hat{P}_0^0 = \hat{P}_0 \quad \hat{P}_1^0 = \hat{P}_1 \quad \hat{P}_2^0 = \hat{P}_2 \quad \dots \dots \quad \hat{P}_n^0 = \hat{P}_n$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \hat{P}_0^1 &= (1 - \hat{t})\hat{P}_0^0 + \hat{t}\hat{P}_1^0 = [(1 - t) - \varepsilon t^*](P_0 + \varepsilon P_0^*) + (t + \varepsilon t^*)(P_1 + \varepsilon P_1^*) \\ &= [(1 - t)P_0 + tP_1] + \varepsilon[(1 - t)P_0^* + tP_1^*] + t^*(P_1 - P_0) \\ &= P_0^1 + \varepsilon(P_0^{*1} + t^*\Delta P_0) \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \hat{P}_1^1 &= P_1^1 + \varepsilon(P_1^{*1} + t^*\Delta P_1) \\ \hat{P}_2^1 &= P_2^1 + \varepsilon(P_2^{*1} + t^*\Delta P_2) \\ \hat{P}_3^1 &= P_3^1 + \varepsilon(P_3^{*1} + t^*\Delta P_3) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

devam edildiğinde

$$\hat{P}_{n-1}^1 = P_{n-1}^1 + \varepsilon(P_{n-1}^{*1} + t^*\Delta P_{n-1})$$

olur.

Burada kullanacağımız bazı notasyonları açıklamamız gerekecek.

$$\begin{aligned} (\Delta P)_j^0 &= \Delta P_j = P_{j+i} - P_j \\ (\Delta P)_j^1 &= (1 - t)\Delta P_j + tP_{j+i} \\ (\Delta P)_j^1 &= (1 - t)(\Delta P)_j^{i-1} + t(\Delta P)_{j+i}^{i-1} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Ayrıca

$$\Delta(P_j^i) = P_{j+i}^i - P_j^i$$

olarak tanımlanır. Burada P_j^i noktaları, Reel Bezier eğrilerinde tanımlanan De Casteljau algoritması ile elde edilen kontrol noktalarıdır.

Şimdi dual De Casteljau algoritması için ikinci basamak kontrol noktalarını verelim.

$$\begin{aligned} \hat{P}_0^2 &= (1 - \hat{t})\hat{P}_0^1 + \hat{t}\hat{P}_1^1 \\ &= (1 - t - \varepsilon t^*)[P_0^1 + \varepsilon(P_0^{*1} + t^*\Delta P_0)] + (t + \varepsilon t^*)[P_1^1 + \varepsilon(P_1^{*1} + t^*\Delta P_1)] \\ &= [(1 - t)P_0^1 + tP_1^1] + \varepsilon[(1 - t)P_0^{*1} + tP_1^{*1}] + t^*[(1 - t)\Delta P_0 - P_0^1 + \\ &\quad t\Delta P_1 + P_1^1] \\ &= P_0^2 + \varepsilon[P_0^{*2} + t^*((\Delta P)_0^1 + \Delta(P_0^1))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_1^2 &= (1 - \hat{t})\hat{P}_1^1 + \hat{t}\hat{P}_2^1 \\ &= (1 - t - \varepsilon t^*)[P_1^1 + \varepsilon(P_1^{*1} + t^*\Delta P_1)] + (t + \varepsilon t^*)[P_2^1 + \varepsilon(P_2^{*1} + t^*\Delta P_2)] \\ &= [(1 - t)P_1^1 + tP_2^1] + \varepsilon[(1 - t)P_1^{*1} + tP_2^{*1}] + t^*[(1 - t)\Delta P_1 + t\Delta P_2 + \\ &\quad P_2^1 - P_1^1] \\ &= P_1^2 + \varepsilon[P_1^{*2} + t^*((\Delta P)_1^1 + \Delta(P_1^1))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{P}_2^2 &= (1 - \hat{t})\hat{P}_2^1 + \hat{t}\hat{P}_3^1 \\
&= (1 - t - \varepsilon t^*)[P_2^1 + \varepsilon(P_2^{*1} + t^*\Delta P_2)] + (t + \varepsilon t^*)[P_3^1 + \varepsilon(P_3^{*1} + t^*\Delta P_3)] \\
&= [(1 - t)P_2^1 + tP_3^1] + \varepsilon[(1 - t)P_2^{*1} + tP_3^{*1}] + t^*[(1 - t)\Delta P_2 + t\Delta P_3 + \\
&\quad P_3^1 - P_2^1] \\
&= P_2^2 + \varepsilon[P_2^{*2} + t^*((\Delta P)_2^1 + \Delta(P_2^1))]
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\hat{P}_3^2 &= (1 - \hat{t})\hat{P}_3^1 + \hat{t}\hat{P}_4^1 \\
&= P_3^2 + \varepsilon[P_3^{*2} + t^*((\Delta P)_3^1 + \Delta(P_3^1))]
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Üçüncü adımdan da bir iki örnek verelim.

$$\begin{aligned}
\hat{P}_0^3 &= (1 - \hat{t})\hat{P}_0^2 + \hat{t}\hat{P}_1^2 \\
&= (1 - t - \varepsilon t^*)[P_0^2 + \varepsilon(P_0^{*2} + t^*(\Delta P)_0^1 + \Delta(P_0^1))] \\
&\quad + (t + \varepsilon t^*)[P_1^2 + \varepsilon(P_1^{*2} + t^*((\Delta P)_1^1 + \Delta(P_1^1)))] \\
&= [(1 - t)P_0^2 + tP_1^2] + \varepsilon[(1 - t)P_0^{*2} + tP_1^{*2}] \\
&\quad + t^*[(1 - t)[(\Delta P)_0^1 + \Delta(P_0^1)] + t[(\Delta P)_1^1 + \Delta(P_1^1)] + P_1^2 - P_0^2 \\
&= P_0^3 + \varepsilon[P_0^{*3} + t^*((\Delta P)_0^2 + \Delta(P_0^2))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{P}_1^3 &= (1 - \hat{t})\hat{P}_1^2 + \hat{t}\hat{P}_2^2 \\
&= (1 - t - \varepsilon t^*)[P_1^2 + \varepsilon(P_1^{*2} + t^*(\Delta P)_1^1 + \Delta(P_1^1))] \\
&\quad + (t + \varepsilon t^*)[P_2^2 + \varepsilon(P_2^{*2} + t^*((\Delta P)_2^1 + \Delta(P_2^1)))] \\
&= [(1 - t)P_1^2 + tP_2^2] + \varepsilon[(1 - t)P_1^{*2} + tP_2^{*2}] \\
&\quad + t^*[(1 - t)[(\Delta P)_1^1 + \Delta(P_2^1)] + (1 - t)[\Delta(P_1^1) + t\Delta(P_2^1)] + P_2^2 - P_1^2 \\
&= P_1^3 + \varepsilon[P_1^{*3} + t^*((\Delta P)_1^2 + \Delta(P_1^2))]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece genelleme yapabiliriz. Sonuç olarak

$$\hat{P}_j^i = P_j^i + \varepsilon [P_j^{*i} + t^*((\Delta P)_j^{i-1} + \Delta(P_j^{i-1}))]$$

olarak ifade edilebilir. Bu sonucu aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz.

Teorem 17: $\hat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ ($i = 0, \dots, n$) olarak verilen dual bezier eğrisi olsun. Bu Bezier eğrisine $\hat{t} = t + \varepsilon t^* \in D$ noktasında ($t \in [0,1], t^* \in R$) dual De Casteljau algoritması uyguladığımızda

$$\begin{aligned}
\hat{P}_i^0 &= \hat{P}_i \text{ ve} \\
\hat{P}_i^j &= (1 - \hat{t})P_i^{j-1} + \hat{t}P_{i+1}^{j-1}
\end{aligned}$$

noktaları elde edilir. Bu noktalar reel ve dual kısımlarına ayrıldığında

$$\hat{P}_j^i = P_j^i + \varepsilon \left(P_j^{*i} + t^* \left((\Delta P)_j^{i-1} + \Delta(P_j^{i-1}) \right) \right)$$

olarak yazılabilir. Burada P_j^i reel de Casteljau algoritmasının (P_0, \dots, P_n) noktalarına uygulanmasıyla elde edilen kontrol noktaları; P_j^{*i} ler de aynı algoritmanın (P_0^*, \dots, P_n^*) kontrol noktalarına uygulanmasıyla elde edilen kontrol noktalarıdır. Ayrıca $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (\Delta P)_j^0 &= \Delta P_j = P_{j+1} - P_j \\ (\Delta P)_j^1 &= (1-t)P_j + tP_{j+1} \\ (\Delta P)_j^i &= (1-t)\Delta P_j^{i-1} + t(\Delta P)_{j+1}^{i-1} \text{ dir.} \end{aligned}$$

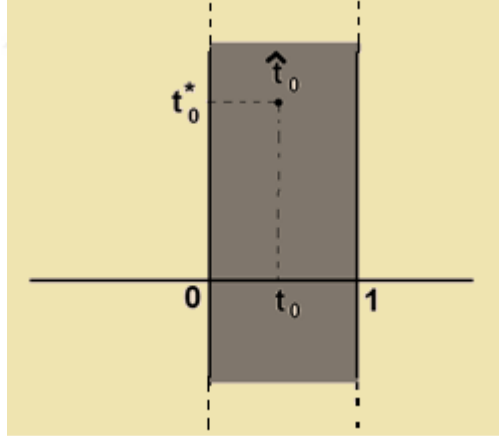
ve

$$\Delta(P_j^i) = P_{j+1}^i - P_j^i$$

dir.

Şimdi bir $\hat{B}(\hat{t})$ eğrisi verildiğinde herhangi bir $\hat{t}_0 = t_0 + \varepsilon t_0^*$ ($t_0 \in [0,1]$, $t_0^* \in R$) noktasında eğriye dual de casteljau algoritmasını uyguladığımızda şunu görürüz:

$\hat{B}(\hat{t})$ eğrisi $\hat{t}_0 = t_0 + \varepsilon t_0^*$ $\varepsilon \in [0,1] \times R \subseteq D$ bölgesinde tanımlı bir eğridir. Yani tanım bölgesi,



Şekil 3.2. Dual Değişkenli Bezier Eğrilerinin D deki tanım bölgesi

grafığı ile verilen bölgedir. $\hat{t}_0 = t_0 + \varepsilon t_0^*$ noktasında $\hat{B}(\hat{t})$ eğrisine dual de casteljau algoritması uygulandığında $\hat{B}(\hat{t})$ eğrisi iki ayrı parçaya bölünecektir. Bunlardan biri $\hat{B}_{sol}(\hat{t})$, diğeri $\hat{B}_{sağ}(\hat{t})$ eğrisidir. Bu eğriler sırasıyla $[0, t_0] \times R$ ve $[t_0, 1] \times R$ bölgelerinde tanımlı olacaktır. Her iki eğriyi de $[0,1] \times R$ aralığında yeniden parametrize ederek, $\hat{B}_{sol}(\hat{t})$, eğrisinin kontrol noktaları dual de Casteljau algoritması ile

elde edilen $\{\hat{P}_0, \hat{P}_0^1, \hat{P}_0^2, \dots, \hat{P}_0^n\}$ noktaları, $\hat{B}_{\text{sağ}}(\hat{t})$ eğrisinin kontrol noktaları da $\{\hat{P}_0, \hat{P}_1^{n-1}, \dots, \hat{P}_n\}$ noktalarıdır.

Teorem 18: $\hat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\{\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_n\}$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu eğrinin teğet vektör alanının özel konumları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 a) \quad \hat{T}|_{t=0, t^*=0} &= \frac{\Delta P_0}{\|\Delta P_0\|} + \varepsilon \left[\frac{\Delta P_0^*}{\|\Delta P_0\|} - \frac{\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* \rangle}{\|\Delta P_0\|^3} \Delta P_0 \right] \\
 b) \quad \hat{T}|_{t=1, t^*=0} &= \frac{\Delta P_{n-1}}{\|\Delta P_{n-1}\|} + \varepsilon \left[\frac{\Delta P_{n-1}^*}{\|\Delta P_{n-1}\|} - \frac{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1}^* \rangle}{\|\Delta P_{n-1}\|^3} \Delta P_{n-1} \right] \\
 c) \quad \hat{T}|_{t=0, t^* \in R} &= \frac{\Delta P_0}{\|\Delta P_0\|} + \varepsilon \left[\frac{\frac{\Delta P_0^* + t^*(n-1)[\Delta P_1 - \Delta P_0]}{\|\Delta P_0\|}}{-\frac{\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* + t^*(n-1)[\Delta P_1 - \Delta P_0] \rangle}{\|\Delta P_0\|^3}} \Delta P_0 \right] \\
 d) \quad \hat{T}|_{t=1, t^* \in R} &= \frac{\Delta P_{n-1}}{\|\Delta P_{n-1}\|} + \varepsilon \left[\frac{\frac{\Delta P_{n-1}^* + t^*(n-1)[\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2}]}{\|\Delta P_{n-1}\|}}{-\frac{\langle \Delta P_{n-1}, \Delta P_{n-1}^* + t^*(n-1)[\Delta P_{n-1} - \Delta P_{n-2}] \rangle (n-1)}{\|\Delta P_{n-1}\|^3}} \Delta P_{n-1} \right] \\
 e) \quad \hat{T}|_{\hat{t}=t_0 + \varepsilon t_0^*} &= \frac{(\Delta P)_0^n}{\|(\Delta P)_0^n\|} + \varepsilon \left[\frac{\frac{(\Delta P)_0^{*n} + t^*(n-1)[(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n]}{\|(\Delta P)_0^n\|}}{-\frac{\langle (\Delta P)_0^n, (\Delta P)_0^{*n} + t^*(n-1)[(\Delta P)_1^{n-1} - (\Delta P)_0^n] \rangle \cdot (\Delta P)_0^n}{\|(\Delta P)_0^n\|^3}} \right]
 \end{aligned}$$

dir. Burada $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$; $\Delta P_i^* = P_{i+1}^* - P_i^*$; P_i^j ve P_i^{*j} noktaları da Kontrol noktaları $\{P_0, \dots, P_n\}$ ve $\{P_0^*, \dots, P_n^*\}$ olan Reel Bezier eğrisine uygulanan de Casteljau algoritmasıyla elde edilen yeni kontrol noktalarıdır.

$$\begin{aligned}
 (\Delta P)_j^0 &= \Delta P_j; \quad (\Delta P)_j^1 = (1-t)\Delta P_j + t\Delta P_{j+1} \\
 (\Delta P)_j^i &= (1-t)(\Delta P)_j^{i-1} + t(\Delta P)_{j+1}^{i-1}; \quad \Delta(P_j^i) = P_{j+1}^i - P_j^i \quad (i \neq 0)
 \end{aligned}$$

dır.

İspat: Bezier eğrilerinin son nokta interpolasyon özellikleri yardımıyla kolayca görülür.

Teorem 19: $\hat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\{\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_n\}$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu eğrinin binormal vektör alanının özel konumları aşağıdaki gibidir.

a) $t=0, t^*=0$ durumunda,

$$\hat{B}|_{\hat{t}=0} = \frac{\Delta b_0 \times \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|} +$$

$$+\varepsilon \left[\begin{array}{c} \frac{\Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0) + \Delta b_0 \times (\Delta b_1^* - \Delta b_0^*)}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|} - \\ \left[\frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle \|\Delta b_1 - \Delta b_0\|^2 + \langle \Delta b_1 - \Delta b_0, \Delta b_1^* - \Delta b_0^* \rangle \|\Delta b_0\|^2 -}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3} \right. \\ \left. \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle [\langle \Delta b_0, \Delta b_1^* - \Delta b_0^* \rangle + \langle \Delta b_0^*, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle]}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3} \right] \cdot (\Delta b_0 \times \Delta b_1) \end{array} \right]$$

b) $\hat{t} = 1 \Rightarrow (t = 1, t^* = 0)$

$$\widehat{\mathbb{B}}|_{\hat{t}=1} = \frac{\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}\|} +$$

$$+\varepsilon \left[\begin{array}{c} \frac{\Delta b_{n-1}^* \times (\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}) + \Delta b_{n-1} \times (\Delta b_{n-1}^* - \Delta b_{n-2}^*)}{\|\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}\|} - \\ \left[\frac{\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}^* \rangle \|\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}\|^2 + \langle \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1}^* - \Delta b_{n-2}^* \rangle \|\Delta b_{n-1}\|^2 -}{\|\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}\|^3} \right. \\ \left. \frac{\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2} \rangle [\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}^* - \Delta b_{n-2}^* \rangle + \langle \Delta b_{n-1}^*, \Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2} \rangle]}{\|\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}\|^3} \right] \cdot (\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}) \end{array} \right]$$

c) $\hat{t} = t_0 \in (0,1), t^* = 0$

$$\widehat{\mathbb{B}}|_{\hat{t}=t_0} = \frac{(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|} +$$

$$+\varepsilon \left[\begin{array}{c} \frac{(\Delta b^*)_0^n \times ((\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n) + (\Delta b)_0^n \times ((\Delta b^*)_1^{n-1} - (\Delta b^*)_0^n)}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|} - \\ \left[\frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_0^n \rangle \|(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n\|^2 + \langle (\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_1^{n-1} - (\Delta b^*)_0^n \rangle \|(\Delta b)_0^n\|^2 -}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|^3} \right. \\ \left. \frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n \rangle [\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_1^{n-1} - (\Delta b^*)_0^n \rangle + \langle (\Delta b^*)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n \rangle]}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|^3} \right] \cdot ((\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}) \end{array} \right]$$

d) $t_0=0, t_0^* \in \mathbb{R}$

$$\widehat{\mathbb{B}}|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*} = \frac{\Delta b_0 \times \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|} +$$

$$+\varepsilon \left[\begin{array}{c} \frac{\Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0) + \Delta b_0 \times (\Delta b_1^* - \Delta b_0^*)}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|} - \\ \left[\frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle \|\Delta b_1 - \Delta b_0\|^2 + \langle \Delta b_1 - \Delta b_0, \Delta b_1^* - \Delta b_0^* \rangle \|\Delta b_0\|^2 -}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3} \right. \\ \left. \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle [\langle \Delta b_0, \Delta b_1^* - \Delta b_0^* \rangle + \langle \Delta b_0^*, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle]}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3} \right] \cdot (\Delta b_0 \times \Delta b_1) \\ - t_0^* \left[\frac{\|\Delta b_0\|^2 \langle (\Delta b_1 - \Delta b_0), (\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0) \rangle -}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3} \right. \\ \left. \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle \langle \Delta b_0, \Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0 \rangle}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3} \right] \cdot (\Delta b_0 \times \Delta b_1) \end{array} \right]$$

e) $\hat{t} = t_0 + \varepsilon t_0^*$ durumunda ($t_0 \in [0,1], t_0^* \in \mathbb{R}$)

$$\widehat{B}\Big|_{\hat{t}=t_0+\varepsilon t_0^*} = \frac{(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|} +$$

$$+\varepsilon \left[\begin{array}{l} \frac{(\Delta b^*)_0^n \times ((\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n) + (\Delta b)_0^n \times ((\Delta b^*)_1^{n-1} - (\Delta b^*)_0^n)}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|} - \\ \frac{\left[\frac{\langle (\Delta b)_0^n (\Delta b^*)_0^n \rangle \|(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n\|^2 + \langle (\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_1^{n-1} - (\Delta b^*)_0^n \rangle \|(\Delta b)_0^n\|^2}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|^3} - \right]}{\frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n \rangle \langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_1^{n-1} - (\Delta b^*)_0^n \rangle + \langle (\Delta b^*)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n \rangle}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|^3}} \cdot ((\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}) \\ -t_0^* \left[\frac{\left[\frac{\|(\Delta b)_0^n\|^2 \langle (\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_2^{n-2} - 2(\Delta b)_1^{n-1} + (\Delta b)_0^n \rangle}{\|(\Delta b)_0^n - (\Delta b)_1^{n-1}\|^3} - \right]}{\frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n \rangle \langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_2^{n-2} - 2(\Delta b)_1^{n-1} + (\Delta b)_0^n \rangle}{\|(\Delta b)_0^n - (\Delta b)_1^{n-1}\|^3}} \cdot ((\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}) \right] \end{array} \right]$$

elde edilir.

Teorem 20: $\widehat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\{\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_n\}$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu eğrinin asli normal vektör alanının özel konumları aşağıdaki gibidir.

a) $\hat{t} = 0$ için

$$\widehat{N} = \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} +$$

$$+\varepsilon \left[\begin{array}{l} \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0^*, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} - \\ \frac{\langle (\Delta b_0, \Delta b_0^*) \rangle \langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\|^3 \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ + \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0^* + \langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*] - \langle [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*], \Delta b_0 \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ - \frac{\langle (\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]), (\Delta b_0^* \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]) + \Delta b_0 \times [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*] \rangle}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|^3} \cdot \beta \end{array} \right]$$

dir. Burada

$$\beta = (\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0)$$

biçimindedir.

b) $\hat{t} = 1$ için

$$\widehat{N}\Big|_{\hat{t}=1} = \frac{\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1} \rangle [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] - \langle \Delta b_{n-1}, [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \rangle n \Delta b_{n-1}}{\|n \Delta b_{n-1}\| \|n \Delta b_{n-1} \times n(n-1) [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|} +$$

$$+\varepsilon \left[\begin{array}{l} \frac{\langle n \Delta b_{n-1}, n \Delta b_{n-1}^* \rangle n(n-1) [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] - \langle \Delta b_{n-1}^*, [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \rangle \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\| \|\Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|} - \\ \frac{\langle (\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}^*) \rangle \langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1} \rangle [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] - \langle \Delta b_{n-1}, [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \rangle \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|^3 \|\Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|} \\ + \frac{\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}^* \rangle [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] - \langle \Delta b_{n-1}, [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \rangle \Delta b_{n-1}^* + \langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1} \rangle [\Delta b_{n-1}^* - \Delta b_{n-2}^*] - \langle [\Delta b_{n-1}^* - \Delta b_{n-2}^*], \Delta b_{n-1} \rangle \Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\| \|\Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|} \\ - \frac{\langle (\Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]), (\Delta b_{n-1}^* \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]) + \Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1}^* - \Delta b_{n-2}^*] \rangle}{\|\Delta b_{n-1}\| \|\Delta b_{n-1} \times [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}]\|^3} \cdot \beta \end{array} \right]$$

dir. Burada,

$$\beta = (\langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1} \rangle [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] - \langle \Delta b_{n-1}, [\Delta b_{n-1} - \Delta b_{n-2}] \rangle \Delta b_{n-1})$$

biçimindedir.

c) $\hat{t} = t_0 \in (0,1)$, $t^* = 0$ için

$$\hat{N} = \frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_0^n \rangle [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] - \langle (\Delta b)_0^n, [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle (\Delta b)_0^n}{\|(\Delta b)_0^n\| \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|} +$$

$$+ \varepsilon \left[\begin{aligned} & \frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_0^n \rangle [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] - \langle (\Delta b^*)_0^n, [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle (\Delta b)_0^n}{\|(\Delta b)_0^n\| \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|} \\ & - \frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_0^n \rangle [(\Delta b)_0^n, (\Delta b)_0^n] [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] - \langle (\Delta b)_0^n, [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle (\Delta b)_0^n}{\|(\Delta b)_0^n\|^3 \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|} \\ & + \frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_0^n \rangle [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] - \langle (\Delta b)_0^n, [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle (\Delta b^*)_0^n}{\|(\Delta b)_0^n\| \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|} \\ & + \frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_0^n \rangle [\Delta (b^*)_1^{n-1} - (b^*)_0^n] - \langle [(\Delta b)_1^{n-1} - (b^*)_0^n], (\Delta b)_0^n \rangle (\Delta b)_0^n}{\|(\Delta b)_0^n\| \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|} \\ & - \frac{[\langle (\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle, \langle (\Delta b^*)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] + (\Delta b)_0^n \times [(\Delta b^*)_1^{n-1} - (\Delta b^*)_0^n] \rangle]}{\|(\Delta b)_0^n\| \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|^3} \cdot \beta \end{aligned} \right]$$

dir. Burada

$$\beta = (\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_0^n \rangle [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] - \langle (\Delta b)_0^n, [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle (\Delta b)_0^n)$$

biçimindedir.

d) $(t_0 = 0, t_0^* \in R)$ $\hat{t} = \varepsilon t_0^*$ ise

$$\hat{N} = \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} +$$

$$+ \varepsilon \left[\begin{aligned} & \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0^*, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0 + A}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ & - \frac{(\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* + \frac{n-1}{n} t^* (\Delta b_1 - \Delta b_0) \rangle) [\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0]}{\|\Delta b_0\|^3 \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ & + \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0^* +}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ & + \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*] - \langle [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*], \Delta b_0 \rangle \Delta b_0 + B}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ & - \frac{[\langle \Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle, \langle \Delta b_0^* \times [\Delta b_1 - \Delta b_0] + \Delta b_0 \times [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*] + C \rangle]}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|^3} \cdot \beta \end{aligned} \right]$$

dir. Burada

$$A = (n-1)t^* [\langle \Delta b_0, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle (\Delta b_1 - \Delta b_0) - \|\Delta b_1 - \Delta b_0\|^2 \Delta b_0]$$

$$B = (n-2)t^* [\|\Delta b_0\|^2 [\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0] - \langle [\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0], \Delta b_0 \rangle \Delta b_0]$$

$$C = (n-2)t^* [(\Delta b_0 \times \Delta b_2) - 2(\Delta b_0 \times \Delta b_1)]$$

$$\beta = (\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0)$$

biçimindedir.

e) ($t_0 = 0, t_0^* \in R$) $\hat{t} = \varepsilon t_0^*$ ise

$$\hat{N} = \frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_0^n \rangle [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] - \langle (\Delta b)_0^n, [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle (\Delta b)_0^n}{\|(\Delta b)_0^n\| \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|} +$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_0^n \rangle [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] - \langle (\Delta b^*)_0^n, [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle (\Delta b)_0^n + A}{\|(\Delta b)_0^n\| \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|} \\ \frac{(\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_0^n \rangle + \frac{n-1}{n} t^* \langle (\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n \rangle) [\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_0^n \rangle [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] - \langle (\Delta b)_0^n, [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle (\Delta b)_0^n]}{\|(\Delta b)_0^n\|^3 \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|} \\ + \frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_0^n \rangle [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] - \langle (\Delta b)_0^n, [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle (\Delta b^*)_0^n +}{\|(\Delta b)_0^n\| \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|} \\ + \frac{\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_0^n \rangle [(\Delta b^*)_1^{n-1} - (\Delta b^*)_0^n] - \langle [(\Delta b^*)_1^{n-1} - (\Delta b^*)_0^n], (\Delta b)_0^n \rangle (\Delta b)_0^n + B}{\|(\Delta b)_0^n\| \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|} \\ - \frac{[\langle (\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle, (\Delta b^*)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] + (\Delta b)_0^n \times [(\Delta b^*)_1^{n-1} - (\Delta b^*)_0^n] + C]}{\|(\Delta b)_0^n\| \|(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n]\|^3} \cdot \beta \end{array} \right]$$

dir. Burada

$$A = (n-1)t^* [\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n \rangle \langle (\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n \rangle - \|(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n\|^2 (\Delta b)_0^n]$$

$$B = (n-2)t^* [\|(\Delta b)_0^n\|^2 [(\Delta b)_2^{n-2} - 2(\Delta b)_1^{n-1} + (\Delta b)_0^n] - \langle [(\Delta b)_2^{n-2} - 2(\Delta b)_1^{n-1} + (\Delta b)_0^n], (\Delta b)_0^n \rangle (\Delta b)_0^n]$$

$$C = (n-2)t^* [\langle (\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_2^{n-2} \rangle - 2 \langle (\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1} \rangle]$$

$$\beta = (\langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b)_0^n \rangle [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] - \langle (\Delta b)_0^n, [(\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n] \rangle (\Delta b)_0^n)$$

Teorem 21: $\hat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\{\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_n\}$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu eğrinin eğrilik vektör alanının özel konumları aşağıdaki gibidir.

$$a) \quad \hat{\kappa}|_{\hat{t}=0} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^3} \left[1 + \varepsilon \left[\frac{\langle \Delta b_0 \times \Delta b_1, \Delta b_0 (\Delta b_1^* - \Delta b_0^*) + \Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0) \rangle}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} - \frac{3 \langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle}{n \|\Delta b_0\|^3} \right] \right]$$

$$b) \quad \hat{\kappa}|_{\hat{t}=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^3} \left[1 + \varepsilon \left[\frac{\langle \Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1} (\Delta b_{n-2}^* - \Delta b_{n-1}^*) + \Delta b_{n-1}^* \times (\Delta b_{n-2} - \Delta b_{n-1}) \rangle}{\|\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}\|^2} - \frac{3 \langle \Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-1}^* \rangle}{n \|\Delta b_{n-1}\|^3} \right] \right]$$

$$c) \quad \hat{\kappa}|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*} = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^3} \left[1 + \varepsilon \left[\frac{\langle \Delta b_0 \times \Delta b_1, \Delta b_0 (\Delta b_1^* - \Delta b_0^*) + \Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0) \rangle}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} - \frac{3 \langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle}{n \|\Delta b_0\|^3} + t_0^* (n-2) [\Delta b_0 \times [\Delta b_2 - 2\Delta b_1]] \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
\text{d)} \quad \hat{\kappa}|_{\hat{t}=t_0} &= \frac{n-1}{n} \frac{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|}{\|(\Delta b)_0^n\|^3} \left[1 + \right. \\
&\left. \varepsilon \left[\frac{\langle (\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_0^n (\Delta b_1^*)^{n-1} - (\Delta b_1^*)^n + (\Delta b_0^*)^n \times ((\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n) \rangle}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|^2} - \frac{3 \langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b_1^*)^n \rangle}{n \|(\Delta b)_0^n\|^3} \right] \right] \\
\text{e)} \quad \hat{\kappa}|_{\hat{t}=t_0 + \varepsilon t_0^*} &= \frac{n-1}{n} \frac{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|}{\|(\Delta b)_0^n\|^3} \left[1 + \right. \\
&\left. \varepsilon \left[\frac{\langle (\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_0^n ((\Delta b_1^*)^{n-1} - (\Delta b_0^*)^n) + (\Delta b_0^*)^n \times ((\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}) \rangle}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{3 \langle (\Delta b)_0^n, (\Delta b_1^*)^n \rangle}{n \|(\Delta b)_0^n\|^3} + t_0^* (n-2) \left[(\Delta b)_0^n \times [(\Delta b)_2^{n-2} - 2(\Delta b)_1^{n-1}] \right] \right] \right]
\end{aligned}$$

Teorem 22: $\hat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\{\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_n\}$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu eğrinin dual burulma vektör alanının özel konumları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad \hat{\tau}|_{\hat{t}=0} &= \frac{n-2}{n \|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} \left[\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2) + \varepsilon \left[\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2^*) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \det(\Delta b_0, \Delta b_1^*, \Delta b_2) + \det(\Delta b_0^*, \Delta b_1, \Delta b_2) - \frac{2 \det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} \langle \Delta b_0 \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \Delta b_1, \Delta b_0 \times (\Delta b_1^* - \Delta b_0^*) + \Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0) \rangle \right] \right] \\
\text{b)} \quad \hat{\tau}|_{\hat{t}=1} &= \frac{n-2}{n \|\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}\|^2} \left[\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3}) + \right. \\
&\quad \varepsilon \left[\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3}^*) + \det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}^*, \Delta b_{n-3}) + \right. \\
&\quad \left. \det(\Delta b_{n-1}^*, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3}) - \frac{2 \det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}\|^2} \langle \Delta b_{n-1} \times \right. \\
&\quad \left. \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-1} \times (\Delta b_{n-2}^* - \Delta b_{n-1}^*) + \Delta b_{n-1}^* \times (\Delta b_{n-2} - \Delta b_{n-1}) \rangle \right] \Big] \\
\text{c)} \quad \hat{\tau}|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*} &= \frac{n-2}{n \|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} \left[\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2) + \varepsilon \left[\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2^*) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \det(\Delta b_0, \Delta b_1^*, \Delta b_2) + \det(\Delta b_0^*, \Delta b_1, \Delta b_2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. t^* (n-3) [\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_3 - 3\Delta b_2)] - \frac{2 \det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} \langle \Delta b_0 \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \Delta b_1, \Delta b_0 \times (\Delta b_1^* - \Delta b_0^*) + \Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0) \rangle \right] \right] \\
\text{d)} \quad \hat{\tau}|_{\hat{t}=t_0} &= \frac{n-2}{n \|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} \left[\det((\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2}) + \right. \\
&\quad \varepsilon \left[\det((\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b_2^*)^{n-2}) + \right. \\
&\quad \det((\Delta b)_0^n, (\Delta b_1^*)^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2}) + \\
&\quad \det((\Delta b_0^*)^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2}) - \\
&\quad \left. \frac{2 \det((\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2})}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|^2} \langle (\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_0^n \times ((\Delta b_1^*)^{n-1} - \right. \\
&\quad \left. (\Delta b_1^*)^n) + (\Delta b_0^*)^n \times ((\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n) \rangle \right] \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e) \quad \hat{t}|_{\hat{t}=t_0+\varepsilon t_0^*} &= \frac{n-2}{n\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} \left[\det((\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2}) + \right. \\
&\quad \varepsilon \left[\det((\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b^*)_2^{n-2}) + \right. \\
&\quad \det((\Delta b)_0^n, (\Delta b^*)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2}) + \\
&\quad \det((\Delta b^*)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2}) + \\
&\quad t^*(n-3)[\det((\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_3^{n-3} - 3(\Delta b)_2^{n-2})] - \\
&\quad \frac{2\det \det((\Delta b)_0^n, (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_2^{n-2})}{\|(\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}\|^2} \langle (\Delta b)_0^n \times (\Delta b)_1^{n-1}, (\Delta b)_0^n \times \\
&\quad ((\Delta b^*)_1^{n-1} - (\Delta b^*)_0^n) + (\Delta b^*)_0^n \times ((\Delta b)_1^{n-1} - (\Delta b)_0^n) + \\
&\quad \left. \left. t_0^*(n-2)[(\Delta b)_0^n \times ((\Delta b)_2^{n-2} - 2(\Delta b)_1^{n-1})] \right] \right]
\end{aligned}$$

Örnek:

$\hat{B}(t)$ eğrisi, Dual Kuartik Bezier eğrisi olsun. Kontrol noktaları $\hat{P}_0 = (1, -1, 0) + \varepsilon(1, 1, 2)$, $\hat{P}_1 = (2, 3, 1) + \varepsilon(-1, 2, 4)$, $\hat{P}_2 = (-1, 2, 3) + \varepsilon(1, 2, -2)$, $\hat{P}_3 = (0, 1, 2) + \varepsilon(1, -2, -1)$, $\hat{P}_4 = (1, -1, 1) + \varepsilon(0, 1, -2)$. Then the control points P_i and P_i^* are $P_0 = (1, -1, 0)$, $P_1 = (2, 3, 1)$, $P_2 = (-1, 2, 3)$, $P_3 = (0, 1, 2)$, $P_4 = (1, -1, 1)$ ve $P_0^* = (1, 1, 2)$, $P_1^* = (-1, 2, 4)$, $P_2^* = (1, 2, -2)$, $P_3^* = (1, -2, -1)$, $P_4^* = (1, -1, 1)$ sırasıyla. Bezier eğrileri için, $t \in [0, 1]$

$\hat{B}(\hat{t}) = B(t) + \varepsilon(B^*(t)) + t^*B'(t)$ dir. O halde tanıma göre

$$\begin{aligned}
B(t) &= (1-t)^4 P_0 + 4(1-t)^3 t P_1 + 6(1-t)^2 t^2 P_2 + 4(1-t) t^3 P_3 + t^4 P_4 \\
&= [(1-t)^4 + 8t(1-t)^3 - 6t^2(1-t)^2 + (t)^4, -(1-t)^4 + \\
&\quad 12t(1-t)^3 + 12t^2(1-t)^2 + 4t^3(1-t) - t^4, 4t(1-t)^3 + \\
&\quad 18t^2(1-t)^2 + 8t^3(1-t) + t^4] \\
&= [1 + 4t - 24t^2 + 32t^3 - 12t^4, -116t - 30t^2 + 20t^3 - 6t^4, 4t + \\
&\quad 6t^2 - 16t^3 + 7t^4]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^*(t) &= (1-t)^4 P_0^* + 4(1-t)^3 t P_1^* + 6(1-t)^2 t^2 P_2^* + 4(1-t) t^3 P_3^* + t^4 P_4^* \\
&= [(1-t)^4 + 8t(1-t)^3 - 6t^2(1-t)^2 + (t)^4, -(1-t)^4 + \\
&\quad 12t(1-t)^3 + 12t^2(1-t)^2 + 4t^3(1-t) - t^4, 4t(1-t)^3 + \\
&\quad 18t^2(1-t)^2 + 8t^3(1-t) + t^4]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^*(t) &= ((1-t)^4 - 4t(1-t)^3 + 6(1-t)^2 t^2 + 4t^3(1-t), (1-t)^4 + \\
&\quad 8t(1-t)^3 + 12t^2(1-t)^2 - 8t^3(1-t) + t^4, 2(1-t)^4 + \\
&\quad 16t(1-t)^3 - 12t^2(1-t)^2 - 4(1-t)t^3 - 2t^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^*(t) &= (1 - 8t + 24t^2 - 24t^3 + 7t^4, 1 + 4t - 6t^2 - 12t^3 + 14t^4, 2 + \\
&\quad 8t - 48t^2 + 60t^3 - 24t^4)
\end{aligned}$$

Bu durumda dual bezier eğrisi

$$\begin{aligned} \hat{B}(t + \varepsilon t^*) = & (1 + 4t - 24t^2 + 32t^3 - 12t^4, -1 + 16t - 30t^2 + \\ & 20t^3 - 6t^4, 4t + 6t^2 - 16t^3 + 7t^4) + \varepsilon [1 - 8t + 24t^2 - \\ & 24t^3 + 7t^4 + t^*(4 - 48t + 96t^2 - 48t^3), -1 + 4t - 6t^2 - \\ & 12t^3 + 14t^4 + t^*(16 - 60t + 60t^2 - 24t^3), 2 + 8t - 48t^2 + \\ & 60t^3 - 24t^4 + t^*(4 + 12t - 48t^2 + 28t^3)] \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şimdi bu eğrinin keyfi $\hat{t} = t + \varepsilon t^*$ noktasındaki teğet vektör alanını bulalım.

$$\hat{T} = \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} = \frac{B'}{\|B'\|} + \varepsilon \left[\frac{B^{*'} + t^* B''}{\|B'\|} - \frac{\langle B', B^{*'} + t^* B'' \rangle}{\|B'\|^3} B' \right]$$

olduğunda,

$$\begin{aligned} B' &= (4 - 48t + 96t^2 - 48t^3, 16 - 60t + 60t^2 - 24t^3, 4 + 12t - 48t^2 + \\ & 28t^3) \\ \|B'\| &= 4\sqrt{229t^6 - 924t^5 + 1455t^4 - 1156t^3 + 522t^2 - 138t + 18} \\ B^{*'} &= (-8 + 48t - 72t^2 + 28t^3, 4 - 12t - 36t^2 + 56t^3, 8 - 96t + 180t^2 - \\ & 96t^3) \\ B'' &= (48 + 192t - 144t^2, -60 + 120t - 72t^2, 12 - 96t + 84t^2) \\ B^{*'} + t^* B'' &= (-8 + 48t - 72t^2 + 28t^3 + t^*(-48 + 192t - 144t^2), 4 - \\ & 12t - 36t^2 + 56t^3 + t^*(-60 + 120t - 72t^2), 8 - 96t + \\ & 180t^2 - 96t^3 + t^*(12 - 96t + 84t^2)) \\ \langle B', B^{*'} + t^* B'' \rangle &= -5376t^6 + 20016t^5 - 28272t^4 + 17408t^3 - 3792t^2 - \\ & 144t + 64 + t^*(10992t^5 - 36960t^4 + 46560t^3 - \\ & 27744t^2 + 8352t - 1104) \end{aligned}$$

Ve

$$\begin{aligned} \|B'\|^3 &= 64(229t^6 - 924t^5 + 1455t^4 - 1156t^3 + 522t^2 - 138t + \\ & 18)\sqrt{229t^6 - 924t^5 + 1455t^4 - 1156t^3 + 522t^2 - 138t + 18} \\ \frac{\langle B', B^{*'} + t^* B'' \rangle}{\|B'\|^3} &= -336t^6 - 1251t^5 + 1767t^4 - 1088t^3 + 237t^2 + 9t - 4 \\ & - \frac{t^*(-687t^5 + 2310t^4 - 2910t^3 + 1734t^2 - 522t + 69)}{4\sqrt{(229t^6 - 924t^5 + 1455t^4 - 1156t^3 + 522t^2 - 138t + 18)^3}} = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{T} &= (1 - 12t + 24t^2 - 12t^3, 4 - 15t + 15t^2 - 6t^3, 1 + 3t - 12t^2 + 7t^3) \\ &+ \varepsilon \left[\begin{array}{l} (-2 + 12t - 18t^2 + 7t^3 + t^*(-12 + 48t - 36t^2), 1 - 3t - 9t^2 + 14t^3 + t^*(-15 + 30t - 18t^2), \\ \frac{\sqrt{229t^6 - 924t^5 + 1455t^4 - 1156t^3 + 522t^2 - 138t + 18}}{2 - 24t + 45t^2 - 24t^3 + t^*(3 - 24t + 21t^2)} \\ \frac{\sqrt{229t^6 - 924t^5 + 1455t^4 - 1156t^3 + 522t^2 - 138t + 18}}{-336t^6 - 1251t^5 + 1767t^4 - 1088t^3 + 237t^2 + 9t - 4} \\ - \frac{t^*(-687t^5 + 2310t^4 - 2910t^3 + 1734t^2 - 522t + 69)}{4\sqrt{(229t^6 - 924t^5 + 1455t^4 - 1156t^3 + 522t^2 - 138t + 18)^3}} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Şimdi bu eğrinin keyfi $\hat{t} = t + \varepsilon t^*$ noktasındaki binormal vektör alanını bulalım

$$\widehat{B} = \frac{B' \times B''}{\|B' \times B''\|} + \varepsilon \left[- \frac{\left(\frac{(B^{*'} \times B'' + B' \times B^{*''} + t^* B' \times B''')}{\|B' \times B''\|} \right)}{\left[\frac{(\langle B', B^{*'} \rangle \|B''\|^2 + \langle B'', B^{*''} \rangle \|B'\|^2 - \langle B', B'' \rangle (\langle B', B^{*''} \rangle + \langle B^{*'}, B'' \rangle))}{\|B' \times B''\|^3} + \frac{t^* (\|B'\|^2 \langle B'', B^{*''} \rangle - \langle B', B'' \rangle \langle B', B^{*''} \rangle)}{\|B' \times B''\|^3} \right]} \right] \cdot B' \times B''$$

olduğunda,

$$B' = (4 - 48t + 96t^2 - 48t^3, 16 - 60t + 60t^2 - 24t^3, 4 + 12t - 48t^2 + 28t^3)$$

$$B'' = (48 + 192t - 144t^2, -60 + 120t - 72t^2, 12 - 96t + 84t^2)$$

$$B''' = (192 - 288t, 120 - 144t, -96 + 168t)$$

$$\|B' \times B''\| =$$

$$48\sqrt{329t^8 - 3260t^7 + 15214t^6 - 32872t^5 + 35684t^4 - 21864t^3 + 9768t^2 - 3240t + 531}$$

$$B^{*'} = (-8 + 48t - 72t^2 + 28t^3, 4 - 12t - 36t^2 + 56t^3, 8 - 96t + 180t^2 - 96t^3)$$

$$B^{*''} = (48 - 144t + 84t^2, -12 - 72t + 168t^2, -96 + 360t - 288t^2)$$

$$\widehat{B} = \overrightarrow{p(t)} + \varepsilon(q(t, t^*) + r(t, t^*))\overrightarrow{m(t)}$$

yazılabilir. Burada

$$\overrightarrow{p(t)} =$$

$$= \left(\frac{(528t^4 - 2784t^3 + 3792t^2 - 2016t + 432, -384t^4 + 4224t^3 - 6672t^2 + 2304t + 144, 576t^4 - 1152t^3 - 864t^2 + 3168t - 1008)}{48\sqrt{329t^8 - 3260t^7 + 15214t^6 - 32872t^5 + 35684t^4 - 21864t^3 + 9768t^2 - 3240t + 531}} \right)$$

$$q(t, t^*) =$$

$$= \left(\frac{(-2208t^5 + 16080t^4 - 31152t + 23952t^2 - 7248t + 528, 1472t^5 - 35616t^4 + 32496t - 400t^2 - 4416t + 480, 6048t^5 - 7392t^4 - 11280t^3 + 15264t^2 - 4032t + 288)}{48\sqrt{329t^8 - 3260t^7 + 15214t^6 - 32872t^5 + 35684t^4 - 21864t^3 + 9768t^2 - 3240t + 531}} + \frac{(2208t^5 - 15840t^4 + 36048t^3 - 32352t^2 + 11952t - 1488, -11472t^3 + 36864t^4 - 43728t^3 + 23952t^2 - 6048t + 576, -6048t^5 + 11088t^4 + 432t^3 - 9888t^2 + 5472t - 816)}{48\sqrt{329t^8 - 3260t^7 + 15214t^6 - 32872t^5 + 35684t^4 - 21864t^3 + 9768t^2 - 3240t + 531}} \right)$$

$$r(t, t^*) =$$

$$= \frac{\left[\frac{(-5376t^6 + 20016t^5 - 28272t^4 + 17408t^3 - 3792t^2 - 144t + 64)(144(229t^4 - 616t^3 + 398t^2 + 12t + 42))}{+(-4838t^4 + 120096t^3 - 94464t^2 + 18720t + 1872)(16(229t^6 - 924t^5 + 1455t^4 - 1156t^3 + 522t^2 - 138t + 18))} \right]}{48\sqrt{329t^8 - 3260t^7 + 15214t^6 - 32872t^5 + 35684t^4 - 21864t^3 + 9768t^2 - 3240t + 531}} \left[\frac{(10992t^5 - 36960t^4 + 41952t^3 - 18528t^2 + 3744t - 720)(-16128t^5 + 50688t^4 - 57696t^3 + 25920t^2 - 3024t - 384)}{+(-16128t^5 + 49392t^4 - 52704t^3 + 19392t^2 + 48t - 528)} \right]$$

$$- t \cdot \frac{\left[\frac{48\sqrt{329t^8 - 3260t^7 + 15214t^6 - 32872t^5 + 35684t^4 - 21864t^3 + 9768t^2 - 3240t + 531}}{(16(229t^6 - 924t^5 + 1455t^4 - 1156t^3 + 522t^2 - 138t + 18)), (65952t^3 - 133056t^2 + 57312t + 864)} \right]}{\|(2112t^3 - 835t^2 + 758t - 2016, -1536t^3 + 460t^2 - 4128t + 115, 2304t^3 - 10368t^2 + 9792t - 2592)(21984t^4 - 59136t^3 + 54720t^2 - 20352t + 2304)\|}$$

ve

$$\overrightarrow{m(t)} = (528t^4 - 2784t^3 + 3792t^2 - 2016t + 432, -384t^4 + 4224t^3 - 6672t^2 + 2304t + 144, 576t^4 - 1152t^3 - 864t^2 + 3168t - 1008)$$

Buradan da görüldüğü gibi Frenet çatısına $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ vektör alanları ve $\{\hat{\kappa}, \hat{t}\}$ eğrilik alanlarının t, t^* gibi değişkenler ile ifadeleri oldukça güç hesaplanmaktadır. Bunun yerine bu vektör alanlarının özel durumlarına eşit vektörleri hesaplamak daha kolay olacaktır.

Teorem 23: Verilen sayısal örnekte

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \hat{T}|_{\hat{t}=0} &= \frac{\Delta P_0}{\|\Delta P_0\|} + \varepsilon \left[\frac{\Delta P_0^*}{\|\Delta P_0\|} - \frac{\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* \rangle}{\|\Delta P_0\|^3} \right] \\
 &= \frac{(1,4,1)}{\sqrt{18}} + \varepsilon \left[\frac{(-2,1,2)}{\sqrt{18}} - \frac{(-2+4+2)}{18\sqrt{18}} (1,4,1) \right] \\
 &= \frac{(1,4,1)}{\sqrt{18}} + \varepsilon \left[\frac{(-36,18,36)}{18\sqrt{18}} - \frac{(4,16,4)}{18\sqrt{18}} \right] \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}} \right) + \varepsilon \left[\left(\frac{-40}{18\sqrt{18}}, \frac{2}{18\sqrt{18}}, \frac{32}{18\sqrt{18}} \right) \right] \\
 \text{b) } \hat{T}|_{\hat{t}=1} &= \frac{\Delta P_3}{\|\Delta P_3\|} + \varepsilon \left[\frac{\Delta P_3^*}{\|\Delta P_3\|} - \frac{\langle \Delta P_3, \Delta P_3^* \rangle}{\|\Delta P_3\|^3} \cdot \Delta P_3 \right] \\
 &= \frac{(1,-2,-1)}{\sqrt{6}} + \varepsilon \left[\frac{(-1,3,-1)}{\sqrt{6}} - \frac{(-1-6+1)}{6\sqrt{6}} (1,-2,-1) \right] \\
 &= \frac{(1,-2,-1)}{\sqrt{6}} + \varepsilon \left[\frac{(-6,18,-6)}{6\sqrt{6}} - \frac{(-6,12,6)}{6\sqrt{6}} \right] \\
 &= \frac{(1,-2,-1)}{\sqrt{6}} + \varepsilon \left[\frac{(0,6,-12)}{6\sqrt{6}} \right] \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) + \varepsilon \left[0, \frac{6}{6\sqrt{6}}, -\frac{12}{6\sqrt{6}} \right] \\
 \text{c) } \hat{T}|_{\hat{t}=t_0^*} &= \frac{\Delta P_0}{\|\Delta P_0\|} + \varepsilon \left[\frac{\Delta P_0^* + t^*(n-1)[\Delta P_1 - \Delta P_0]}{\|\Delta P_0\|} - \frac{\langle \Delta P_0, \Delta P_0^* + t^*(n-1)[\Delta P_1 - \Delta P_0] \rangle}{\|\Delta P_0\|^3} \cdot \Delta P_0 \right] \\
 &= \frac{(1,4,1)}{\sqrt{18}} + \varepsilon \left[\frac{(-2,1,2) + 3t^*[-4,-5,1]}{\sqrt{18}} - \frac{\langle (1,4,1), (-2,1,2) + 3t^*[-4,-5,1] \rangle}{18\sqrt{18}} \cdot (1,4,1) \right] \\
 \text{d) } \hat{T}|_{\hat{t}=1, t^* \in R} &= \frac{\Delta P_3}{\|\Delta P_3\|} + \varepsilon \left[\frac{\Delta P_3^* + 3t^*[\Delta P_3 - \Delta P_2]}{\|\Delta P_3\|} - \frac{\langle \Delta P_3, \Delta P_3^* + 3t^*[\Delta P_3 - \Delta P_2] \rangle}{\|\Delta P_3\|^3} \cdot \Delta P_3 \right] \\
 &= \frac{(1,-2,-1)}{\sqrt{18}} + \varepsilon \left[\frac{(-1,3,-1) + 3t^*[(1,-1,0)]}{\sqrt{6}} - \frac{\langle (1,-2,-1), (-1,3,-1) + 3t^*[(1,-2,-1) - (0,-1,-1)] \rangle}{18\sqrt{18}} \cdot (1,-2,-1) \right] \\
 \text{e) } \hat{T}|_{\hat{t}=t_0 + \varepsilon t_0^*} \text{ ve } \left(t_0 = \frac{1}{2}, t_0^* = 1 \right) &= \frac{(\Delta P)_0^4}{\|(\Delta P)_0^4\|} + \varepsilon \left[\frac{(\Delta P^*)_0^4 + 3t^*[(\Delta P)_1^3 - (\Delta P)_0^4]}{\|(\Delta P)_0^4\|} - \frac{\langle (\Delta P)_0^4, (\Delta P^*)_0^4 + 3t^*[(\Delta P)_1^3 - (\Delta P)_0^4] \rangle}{\|(\Delta P)_0^4\|^3} \cdot (\Delta P)_0^4 \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1653}} (4,26,31) + \varepsilon \left[\frac{1}{1653\sqrt{1653}} (-4598, -5092, 4864) \right]
 \end{aligned}$$

Teorem 24:

$$\begin{aligned}
\text{a) } \hat{B}|_{\hat{t}=0} &= \frac{\Delta b_0 \times \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|} + \varepsilon \left[\frac{\frac{\Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0) + \Delta b_0 \times (\Delta b_1^* - \Delta b_0^*)}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|} - \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle \|\Delta b_1 - \Delta b_0\|^2 + \langle \Delta b_1 - \Delta b_0, \Delta b_1^* - \Delta b_0^* \rangle \|\Delta b_0\|^2 - \langle \Delta b_0, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle [\langle \Delta b_0, \Delta b_1^* - \Delta b_0^* \rangle + \langle \Delta b_0^*, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle]}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3}}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3} \right] (\Delta b_0 \times \Delta b_1) \\
&= \frac{(9, -5, 11)}{\sqrt{227}} + \varepsilon \left[\frac{\frac{(11, -6, 14) + (-31, 12, -17)}{\sqrt{227}}}{(\sqrt{227})^3} \right] (9, -5, 11) \\
&= \left(\frac{9}{\sqrt{227}}, \frac{-5}{\sqrt{227}}, \frac{11}{\sqrt{227}} \right) + \varepsilon \left(\frac{-512}{227\sqrt{227}}, \frac{1887}{227\sqrt{227}}, \frac{-1836}{227\sqrt{227}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \hat{B}|_{\hat{t}=1} &= \frac{\Delta b_3 \times \Delta b_2}{\|\Delta b_3 \times \Delta b_2\|} + \varepsilon \left[\frac{\frac{\Delta b_3^* \times (\Delta b_3 - \Delta b_2) + \Delta b_3 \times (\Delta b_3^* - \Delta b_2^*)}{\|\Delta b_3 \times \Delta b_2\|} - \frac{\langle \Delta b_3, \Delta b_3^* \rangle \|\Delta b_3 - \Delta b_2\|^2 + \langle \Delta b_3 - \Delta b_2, \Delta b_3^* - \Delta b_2^* \rangle \|\Delta b_3\|^2 - \langle \Delta b_3, \Delta b_3 - \Delta b_2 \rangle [\langle \Delta b_3, \Delta b_3^* - \Delta b_2^* \rangle + \langle \Delta b_3^*, \Delta b_3 - \Delta b_2 \rangle]}{\|\Delta b_3 \times \Delta b_2\|^3}}{\|\Delta b_3 \times \Delta b_2\|^3} \right] (\Delta b_3 \times \Delta b_2) \\
&= \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} + \varepsilon \left[\frac{\frac{(-1, 0, 1) + (11, 3, 5)}{\sqrt{2}}}{(\sqrt{2})^3} \right] (1, 0, 1) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \varepsilon \left[\frac{36}{2\sqrt{2}}, \frac{6}{2\sqrt{2}}, \frac{28}{2\sqrt{2}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \hat{B}|_{\hat{t}=t_0} &= \frac{(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|} + \varepsilon \left[\frac{\frac{(\Delta b^*)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] + (\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b^*)_1^3 - (\Delta b^*)_0^4]}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|} - \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b^*)_0^4 \rangle \|(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4\|^2 + \langle (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4, (\Delta b^*)_1^3 - (\Delta b^*)_0^4 \rangle \|(\Delta b)_0^4\|^2 - \langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4 \rangle [\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b^*)_1^3 - (\Delta b^*)_0^4 \rangle + \langle (\Delta b^*)_0^4, (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4 \rangle]}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^3}}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^3} \right] ((\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3) \\
&= \left(\frac{101}{\sqrt{16761}}, \frac{-68}{\sqrt{16761}}, \frac{44}{\sqrt{16761}} \right) + \varepsilon \left[\frac{-4059308}{16761\sqrt{16761}}, \frac{-3701731}{16761\sqrt{16761}}, \frac{3597100}{16761\sqrt{16761}} \right]
\end{aligned}$$

d) $t_0=0, t_0^* \in R$

$$\hat{B}|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*} = \frac{\Delta b_0 \times \Delta b_1}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|} +$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned} & \frac{\Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0) + \Delta b_0 \times (\Delta b_1^* - \Delta b_0^*)}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|} \\ & \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle \|\Delta b_1 - \Delta b_0\|^2 + \langle \Delta b_1 - \Delta b_0, \Delta b_1^* - \Delta b_0^* \rangle \|\Delta b_0\|^2 - \|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3} \\ & \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle \langle \Delta b_0, \Delta b_1^* - \Delta b_0^* \rangle + \langle \Delta b_0^*, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3} \end{aligned} \right] \cdot (\Delta b_0 \times \Delta b_1) \\
+ \varepsilon & \left[\begin{aligned} & \frac{\|\Delta b_0\|^2 \langle (\Delta b_1 - \Delta b_0), (\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0) \rangle - \|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3} \\ & \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle \langle \Delta b_0, \Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0 \rangle}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^3} \end{aligned} \right] \cdot (\Delta b_0 \times \Delta b_1) \\
= & \left(\frac{9}{\sqrt{227}}, \frac{-5}{\sqrt{227}}, \frac{11}{\sqrt{227}} \right) + \varepsilon \left[\frac{-798}{227\sqrt{227}}, \frac{-843}{227\sqrt{227}}, \frac{4170}{227\sqrt{227}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } \hat{B} \Big|_{\hat{t}=t_0} &= \frac{(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|} + \\
& \left[\begin{aligned} & \frac{(\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] + (\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4]}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|} \\ & \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3 \rangle \|\Delta b_1^3 - (\Delta b)_0^4\|^2 + \langle (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4 \rangle \|\Delta b_0^4\|^2 - \|\Delta b_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^3}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^3} \\ & \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4 \rangle \langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4 \rangle + \langle (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4 \rangle}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^3} \end{aligned} \right] \cdot ((\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3) - \\
& \left[\begin{aligned} & \frac{\|(\Delta b)_0^4\|^2 \langle (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_2^2 - 2(\Delta b)_1^3 + (\Delta b)_0^4 \rangle - \|\Delta b_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^3}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^3} \\ & \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4 \rangle \langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_2^2 - 2(\Delta b)_1^3 + (\Delta b)_0^4 \rangle}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^3} \end{aligned} \right] \cdot ((\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3) \\
= & \left(\frac{101}{\sqrt{16761}}, \frac{-68}{\sqrt{16761}}, \frac{44}{\sqrt{16761}} \right) + \varepsilon \left(\frac{-12803931}{16761\sqrt{16761}}, \frac{-1571767}{16761\sqrt{16761}}, \frac{2218888}{16761\sqrt{16761}} \right)
\end{aligned}$$

Teorem 25:

$$\begin{aligned}
\text{a) } \hat{N} &= \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle \langle \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle - \langle \Delta b_0, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} + \\
& \left[\begin{aligned} & \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle \langle \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle - \langle \Delta b_0, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} - \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle \langle \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle - \langle \Delta b_0, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ & \frac{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} + \frac{\|\Delta b_0\|^3 \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ & \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle \langle \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle - \langle \Delta b_0, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle \Delta b_0^* + \langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle \langle \Delta b_1^* - \Delta b_0^* \rangle - \langle \Delta b_1^* - \Delta b_0^* \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\ & \frac{\langle (\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]), (\Delta b_0^* \times [\Delta b_1 - \Delta b_0] + \Delta b_0 \times [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*]) \rangle}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|^3} \cdot (\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle \langle \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0) \end{aligned} \right] \\
= & \left(\frac{-49}{\sqrt{4086}}, \frac{2}{\sqrt{4086}}, \frac{41}{\sqrt{4086}} \right) + \varepsilon \left(\frac{-190030}{4086\sqrt{4086}}, \frac{-86722}{4086\sqrt{4086}}, \frac{-206734}{4086\sqrt{4086}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \hat{N} \Big|_{\hat{t}=1} &= \frac{\langle \Delta b_3, \Delta b_3 \rangle \langle \Delta b_3 - \Delta b_2 \rangle - \langle \Delta b_3, \Delta b_3 - \Delta b_2 \rangle \Delta b_3}{\|4\Delta b_3\| \|4\Delta b_3 \times 4.3[\Delta b_3 - \Delta b_2]\|} + \\
& \left[\begin{aligned} & \frac{\langle 4\Delta b_3, 4\Delta b_3 \rangle \langle 4.3[\Delta b_3 - \Delta b_2] \rangle - \langle \Delta b_3^*, [\Delta b_3 - \Delta b_2] \rangle \Delta b_3}{\|4\Delta b_3\| \|\Delta b_3 \times [\Delta b_3 - \Delta b_2]\|} - \frac{\langle \Delta b_3, \Delta b_3^* \rangle \langle \Delta b_3, \Delta b_3 \rangle \langle \Delta b_3 - \Delta b_2 \rangle - \langle \Delta b_3, [\Delta b_3 - \Delta b_2] \rangle \Delta b_3}{\|4\Delta b_3\|^3 \|\Delta b_3 \times [\Delta b_3 - \Delta b_2]\|} \\ & \frac{\langle \Delta b_3, \Delta b_3^* \rangle \langle \Delta b_3 - \Delta b_2 \rangle - \langle \Delta b_3, [\Delta b_3 - \Delta b_2] \rangle \Delta b_3^* + \langle \Delta b_3, \Delta b_3 \rangle \langle \Delta b_3^* - \Delta b_2^* \rangle - \langle [\Delta b_3^* - \Delta b_2^*], \Delta b_3 \rangle \Delta b_3}{\|4\Delta b_3\| \|\Delta b_3 \times [\Delta b_3 - \Delta b_2]\|} \\ & \frac{\langle (\Delta b_3 \times [\Delta b_3 - \Delta b_2]), (\Delta b_3^* \times [\Delta b_3 - \Delta b_2] + \Delta b_3 \times [\Delta b_3^* - \Delta b_2^*]) \rangle}{\|4\Delta b_3\| \|\Delta b_3 \times [\Delta b_3 - \Delta b_2]\|^3} \cdot (\langle \Delta b_3, \Delta b_3 \rangle \langle \Delta b_3 - \Delta b_2 \rangle - \langle \Delta b_3, [\Delta b_3 - \Delta b_2] \rangle \Delta b_3) \end{aligned} \right] \\
= & \left(\frac{-8}{48}, \frac{10}{48}, \frac{8}{48} \right) + \varepsilon \left[\frac{-44}{12\sqrt{2}}, \frac{13372}{12\sqrt{2}}, \frac{-28}{12\sqrt{2}} \right]
\end{aligned}$$

$$\text{c) } \hat{N} \Big|_{\hat{t}=t_0 \in (0,1), t^*=0} = \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_0^4 \rangle \langle (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4 \rangle - \langle (\Delta b)_0^4, [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] \rangle (\Delta b)_0^4}{\|(\Delta b)_0^4\| \|\Delta b_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4]\|} +$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b^*)_0^4 \rangle [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] - \langle (\Delta b^*)_0^4, [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] \rangle (\Delta b)_0^4}{\|(\Delta b)_0^4\| \|(\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4]\|} \\
& - \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b^*)_0^4 \rangle \langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_0^4 \rangle [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] - \langle (\Delta b)_0^4, [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] \rangle (\Delta b)_0^4}{\|(\Delta b)_0^4\|^3 \|(\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4]\|} \\
& + \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b^*)_0^4 \rangle [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] - \langle (\Delta b)_0^4, [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] \rangle (\Delta b^*)_0^4 +}{\|(\Delta b)_0^4\| \|(\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4]\|} \\
& \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_0^4 \rangle [(\Delta b^*)_1^3 - (\Delta b^*)_0^4] - \langle [(\Delta b^*)_1^3 - (\Delta b^*)_0^4], (\Delta b)_0^4 \rangle (\Delta b)_0^4}{\|(\Delta b)_0^4\| \|(\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4]\|} \\
& - \frac{[\langle (\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4], (\Delta b^*)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] + (\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b^*)_1^3 - (\Delta b^*)_0^4] \rangle]}{\|(\Delta b)_0^4\| \|(\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4]\|^3} \cdot \beta
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\beta = \langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_0^4 \rangle [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] - \langle (\Delta b)_0^4, [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] \rangle (\Delta b)_0^4$$

biçimindedir.

$$= \frac{1}{256} \left[\frac{-6504}{16}, \frac{-5910}{16}, \frac{5796}{16} \right] + \varepsilon \left[\frac{20873456124}{16761\sqrt{2762163}}, \frac{14091329103}{16761\sqrt{2762163}}, \frac{26740743024}{16761\sqrt{2762163}} \right]$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \widehat{N} \Big|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*, (t_0=0, t_0^* \in R)} &= \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} + \\
& \left[\begin{aligned}
& \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0^*, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0 + \mathbf{A}}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\
& - \frac{\left(\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* + \frac{3}{4} t^* (\Delta b_1 - \Delta b_0) \rangle \right) [\langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0]}{\|\Delta b_0\|^3 \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\
& + \frac{\langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0^* +}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\
& \frac{+ \langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*] - \langle [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*], \Delta b_0 \rangle \Delta b_0 + \mathbf{B}}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|} \\
& - \frac{[\langle (\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]), (\Delta b_0^* \times [\Delta b_1 - \Delta b_0] + \Delta b_0 \times [\Delta b_1^* - \Delta b_0^*]) + \mathbf{C} \rangle]}{\|\Delta b_0\| \|\Delta b_0 \times [\Delta b_1 - \Delta b_0]\|^3} \cdot \beta
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\mathbf{A} = (3)t^* [\langle \Delta b_0, \Delta b_1 - \Delta b_0 \rangle (\Delta b_1 - \Delta b_0) - \|\Delta b_1 - \Delta b_0\|^2 \Delta b_0]$$

$$\mathbf{B} = (2)t^* [\|\Delta b_0\|^2 [\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0] - \langle [\Delta b_2 - 2\Delta b_1 + \Delta b_0], \Delta b_0 \rangle \Delta b_0]$$

$$\mathbf{C} = (2)t^* [(\Delta b_0 \times \Delta b_2) - 2(\Delta b_0 \times \Delta b_1)]$$

$$\beta = \langle \Delta b_0, \Delta b_0 \rangle [\Delta b_1 - \Delta b_0] - \langle \Delta b_0, [\Delta b_1 - \Delta b_0] \rangle \Delta b_0$$

biçimindedir.

$$= \left(\frac{-49}{\sqrt{4086}}, \frac{2}{\sqrt{4086}}, \frac{41}{\sqrt{4086}} \right) + \varepsilon \left[\frac{-3155743}{16344\sqrt{4086}}, \frac{-3183782}{16344\sqrt{4086}}, \frac{1201247}{16344\sqrt{4086}} \right]$$

$$e) \hat{N} \Big|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*, (t_0=0, t_0^* \in R)} = \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_0^4 \rangle [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] - \langle (\Delta b)_0^4, [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] \rangle (\Delta b)_0^4}{\|(\Delta b)_0^4\| \|(\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4]\|} +$$

$$+ \varepsilon \left[\frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b^*)_0^4 \rangle [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] - \langle (\Delta b^*)_0^4, [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] \rangle (\Delta b)_0^4 + A}{\|(\Delta b)_0^4\| \|(\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4]\|} \right.$$

$$\left. - \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b^*)_0^4 \rangle + \frac{3}{4} t^* \langle (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4 \rangle}{\|(\Delta b)_0^4\|^3} \left[\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_0^4 \rangle [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] - \langle (\Delta b)_0^4, [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] \rangle (\Delta b)_0^4 \right] \right.$$

$$+ \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b^*)_0^4 \rangle [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] - \langle (\Delta b)_0^4, [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] \rangle (\Delta b^*)_0^4 +}{\|(\Delta b)_0^4\| \|(\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4]\|}$$

$$+ \frac{\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_0^4 \rangle [(\Delta b^*)_1^3 - (\Delta b^*)_0^4] - \langle (\Delta b^*)_0^4, [(\Delta b^*)_1^3 - (\Delta b^*)_0^4] \rangle (\Delta b)_0^4 + B}{\|(\Delta b)_0^4\| \|(\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4]\|}$$

$$\left. - \frac{[\langle (\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] \rangle, (\Delta b^*)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] + (\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b^*)_1^3 - (\Delta b^*)_0^4] + C]}{\|(\Delta b)_0^4\| \|(\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4]\|^3} \right] \beta$$

dir. Burada

$$A = (3)t^* [\langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4 \rangle \langle (\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4 \rangle - \|(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4\|^2 (\Delta b)_0^4]$$

$$B = (2)t^* [\|(\Delta b)_0^4\|^2 [(\Delta b)_2^2 - 2(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] - \langle [(\Delta b)_2^2 - 2(\Delta b)_1^3 + (\Delta b)_0^4], (\Delta b)_0^4 \rangle (\Delta b)_0^4]$$

$$C = (2)t^* [\langle (\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_2^2 \rangle - 2 \langle (\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3 \rangle]$$

$$\beta = \langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b)_0^4 \rangle [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] - \langle (\Delta b)_0^4, [(\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4] \rangle (\Delta b)_0^4$$

$$= \left(\frac{-3252}{\sqrt{27705933}}, \frac{-2955}{\sqrt{27705933}}, \frac{2898}{\sqrt{27705933}} \right) + \varepsilon \left[\frac{-6758,38367}{\sqrt{27705933}}, \frac{-7514,0498}{\sqrt{27705933}}, \frac{-20496,5372}{\sqrt{27705933}} \right]$$

Teorem 26: $\hat{B}(\hat{t})$, kontrol noktaları $\{\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_n\}$ olan dual Bezier eğrisi olsun. Bu eğrinin eğrilik vektör alanının özel konumları aşağıdaki gibidir.

$$a) \hat{\kappa} \Big|_{\hat{t}=0} = \frac{3}{4} \frac{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^3} \left[1 + \varepsilon \left[\frac{\langle \Delta b_0 \times \Delta b_1, \Delta b_0(\Delta b_1^* - \Delta b_0^*) + \Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0) \rangle}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} - \frac{3 \langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle}{4 \|\Delta b_0\|^3} \right] \right]$$

$$\hat{\kappa} \Big|_{\hat{t}=0} = \frac{\sqrt{227}}{24\sqrt{18}} \left[1 + \varepsilon \left[\frac{-243}{227} - \frac{1}{6\sqrt{18}} \right] \right]$$

$$b) \hat{\kappa} \Big|_{\hat{t}=1} = \frac{3}{4} \frac{\|\Delta b_3 \times \Delta b_2\|}{\|\Delta b_3\|^3} \left[1 + \varepsilon \left[\frac{\langle \Delta b_3 \times \Delta b_2, \Delta b_3(\Delta b_2^* - \Delta b_3^*) + \Delta b_3^* \times (\Delta b_2 - \Delta b_3) \rangle}{\|\Delta b_3 \times \Delta b_2\|^2} - \frac{3 \langle \Delta b_3, \Delta b_3^* \rangle}{4 \|\Delta b_3\|^3} \right] \right]$$

$$\hat{\kappa} \Big|_{\hat{t}=1} = \frac{\sqrt{3}}{24} \left[1 + \varepsilon \left[-8 + \frac{\sqrt{6}}{8} \right] \right]$$

$$c) \hat{\kappa} \Big|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*} = \frac{3}{4} \frac{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^3} \left[1 + \varepsilon \left[\frac{\langle \Delta b_0 \times \Delta b_1, \Delta b_0(\Delta b_1^* - \Delta b_0^*) + \Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0) \rangle}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} - \frac{3 \langle \Delta b_0, \Delta b_0^* \rangle}{4 \|\Delta b_0\|^3} + t_0^*(2) [\Delta b_0 \times [\Delta b_2 - 2\Delta b_1]] \right] \right]$$

$$\hat{\kappa} \Big|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*} = \frac{\sqrt{227}}{24\sqrt{18}} \left[1 + \varepsilon \left[-\frac{252}{227} - \frac{1}{6\sqrt{18}} + t_0^*(-42,20, -38) \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
d) \quad \hat{\kappa}|_{\hat{t}=t_0} &= \frac{3}{4} \frac{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|}{\|(\Delta b)_0^4\|^3} \left[1 + \right. \\
&\quad \left. \varepsilon \left[\frac{\langle (\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_0^4 (\Delta b_1^*)^3 - (\Delta b_0^*)^4 + (\Delta b_0^*)^4 \times ((\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4 \rangle}{\|(\Delta b)_1^3 \times (\Delta b)_0^4\|^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{3 \langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b_0^*)^4 \rangle}{4 \|(\Delta b)_0^4\|^3} \right] \right] \\
\hat{\kappa}|_{\hat{t}=t_0} &= \frac{8\sqrt{16761}}{551\sqrt{1653}} \left[1 + \varepsilon \left[\frac{34051}{16761} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e) \quad \hat{\kappa}|_{\hat{t}=t_0+\varepsilon t_0^*} &= \frac{3}{4} \frac{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|}{\|(\Delta b)_0^4\|^3} \left[1 + \right. \\
&\quad \left. \varepsilon \left[\frac{\langle (\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_0^4 (\Delta b_1^*)^3 - (\Delta b_0^*)^4 + (\Delta b_0^*)^4 \times ((\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3) \rangle}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{3 \langle (\Delta b)_0^4, (\Delta b_0^*)^4 \rangle}{4 \|(\Delta b)_0^4\|^3} + t_0^*(2) [(\Delta b)_0^4 \times [(\Delta b)_2^2 - 2(\Delta b)_1^3]] \right] \right] \\
\hat{\kappa}|_{\hat{t}=t_0+\varepsilon t_0^*} &= \frac{8\sqrt{16761}}{551\sqrt{1653}} \left[1 + \varepsilon \left[\frac{34051}{16761} + t_0^* \left[\frac{7}{16}, \frac{9}{8}, -1 \right] \right] \right]
\end{aligned}$$

Theorem 27:

$$\begin{aligned}
a) \quad \hat{\tau}|_{\hat{t}=0} &= \frac{2}{4\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} \left[\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2) + \varepsilon \left[\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2^*) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \det(\Delta b_0, \Delta b_1^*, \Delta b_2) + \det(\Delta b_0^*, \Delta b_1, \Delta b_2) - \frac{2 \det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} \langle \Delta b_0 \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \Delta b_1, \Delta b_0 \times (\Delta b_1^* - \Delta b_0^*) + \Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0) \rangle \right] \right] \\
\hat{\tau}|_{\hat{t}=0} &= \frac{1}{454} \left[3 + \varepsilon \left[\frac{3274}{227} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \quad \hat{\tau}|_{\hat{t}=1} &= \frac{2}{4\|\Delta b_3 \times \Delta b_2\|^2} \left[\det(\Delta b_3, \Delta b_2, \Delta b_1) + \varepsilon \left[\det(\Delta b_3, \Delta b_2, \Delta b_1^*) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \det(\Delta b_3, \Delta b_2^*, \Delta b_1) + \det(\Delta b_3^*, \Delta b_2, \Delta b_1) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{2 \det(\Delta b_3, \Delta b_2, \Delta b_1)}{\|\Delta b_3 \times \Delta b_2\|^2} \langle \Delta b_3 \times \Delta b_2, \Delta b_3 \times (\Delta b_2^* - \Delta b_2) + \Delta b_3^* \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (\Delta b_2 - \Delta b_3) \rangle \right] \right] \\
\hat{\tau}|_{\hat{t}=1} &= \frac{1}{4} [-1 + \varepsilon [33]]
\end{aligned}$$

$$c) \quad \hat{t}|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*} = \frac{2}{4\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} \left[\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2) + \varepsilon \left[\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2^*) + \det(\Delta b_0, \Delta b_1^*, \Delta b_2) + \det(\Delta b_0^*, \Delta b_1, \Delta b_2) + t^*(1) [\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_3 - 3\Delta b_2)] - \frac{2\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2} \langle \Delta b_0 \times \Delta b_1, \Delta b_0 \times (\Delta b_1^* - \Delta b_0^*) + \Delta b_0^* \times (\Delta b_1 - \Delta b_0) \rangle \right] \right]$$

$$\hat{t}|_{\hat{t}=\varepsilon t_0^*} = \frac{1}{227} \left[3 + \varepsilon \left[\frac{3047}{227} \right] \right]$$

$$d) \quad \hat{t}|_{\hat{t}=t_0} = \frac{2}{4\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^2} \left[\det((\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_2^2) + \varepsilon \left[\det((\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_2^*) + \det((\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^*, (\Delta b)_2^2) + \det((\Delta b)_0^*, (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_2^2) - \frac{2\det((\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_2^2)}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^2} \langle (\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_0^4 \times ((\Delta b)_1^* - (\Delta b)_1^3) + (\Delta b)_0^* \times ((\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4) \rangle \right] \right]$$

$$\hat{t}|_{\hat{t}=t_0} = \frac{8192}{16761} \left[\frac{37}{128} + \varepsilon \left[-\frac{1746299}{231936} \right] \right]$$

$$e) \quad \hat{t}|_{\hat{t}=t_0+\varepsilon t_0^*} = \frac{2}{4\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^2} \left[\det((\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_2^2) + \varepsilon \left[\det((\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_2^*) + \det((\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^*, (\Delta b)_2^2) + \det((\Delta b)_0^*, (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_2^2) + t^*(1) [\det((\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_3^4 - 3(\Delta b)_2^2)] - \frac{2\det((\Delta b)_0^4, (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_2^2)}{\|(\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3\|^2} \langle (\Delta b)_0^4 \times (\Delta b)_1^3, (\Delta b)_0^4 \times ((\Delta b)_1^* - (\Delta b)_1^3) + (\Delta b)_0^* \times ((\Delta b)_1^3 - (\Delta b)_0^4) + t_0^*(2) [(\Delta b)_0^4 \times ((\Delta b)_2^2 - 2(\Delta b)_1^3] \rangle \right] \right]$$

$$\hat{t}|_{\hat{t}=t_0+\varepsilon t_0^*} = \frac{8192}{16761} \left[\frac{37}{128} + \varepsilon \left[-\frac{215555}{231936} \right] \right]$$

3.4. Dual Küresel Bezier Eğrileri ve Regle Yüzey Kompleksler

Kontrol noktaları $\{\hat{P}_i\}$ $i = 0, \dots, n$ olan $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ dual Bezier eğrisi verilsin. Bu eğri de gördük ki

$$\hat{B}(\hat{t}) = B + \varepsilon(B^* + t^*B') \quad (46)$$

dir. Burada B , kontrol noktaları $\{\hat{P}_i\}$ olan reel Bezier eğrisi, B^* da kontrol noktaları $\{P_i^*\}$ olan reel Bezier eğrisidir. Bu eğrinin küresel izdüşüm eğrisi yani, birim dual küre üzerine olan izdüşüm eğrisi

$$\bar{B}(\hat{t}) = \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} = \frac{B}{\|B\|} + \varepsilon \left[\frac{B^* + t^* B'}{\|B\|} - \frac{\langle B, B^* + t^* B' \rangle}{\|B\|^3} B \right]$$

olarak yazılabilir. Bu eğri

$$\bar{B}(\hat{t}) = \frac{B}{\|B\|} + \varepsilon \left[\frac{B^*}{\|B\|} - \frac{\langle B, B^* \rangle}{\|B\|^3} B + t^* \left(\frac{B'}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|^3} B \right) \right] \quad (47)$$

biçiminde yazılabilir. (47) eğrisinde $t^* = 0$ seçildiğinde reel parametrelili İncesu (2022) deki eğriyle çakışır.

Şimdi bu (47) eğrisinin reel karşılığı olan Regle yüzeyler sistemi (ışın kompleksi)

$$\mathcal{X}(t, t^*, \mu) = \alpha(t, t^*) + \mu\beta(t, t^*) \quad (48)$$

Biçiminde yazılabilir. Bu ifadede α , kompleksin dayanak yüzeyi, β ise doğrultmandır. Doğrultman küresel Bezier eğrisinin reel vektörü olacağından

$$\mathcal{B}(t, t^*) = \frac{B}{\|B\|} \quad (49)$$

dir. Görüleceği gibi \mathcal{B} yalnızca t parametresine bağlıdır. O halde

$$\mathcal{B}(t) = \frac{B}{\|B\|} \text{ dir.} \quad (50)$$

α , dayanak yüzeyini bulmak için İncesu (2022) deki gibi süreç işletildiğinde

$$\begin{aligned} \alpha(t, t^*) &= \frac{B}{\|B\|} \times \left[\frac{B^*}{\|B\|} - \frac{\langle B, B^* \rangle}{\|B\|^3} B + t^* \left(\frac{B'}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|^3} B \right) \right] \\ \alpha(t, t^*) &= \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} \times t^* \frac{B \times B'}{\|B\|^2} \end{aligned} \quad (51)$$

olarak elde edilir. Buna göre (47) küresel izdüşüm Bezier eğrisine karşılık gelen Regle yüzeyler sistemi (kompleksi)

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t, t^*, \mu) &= \alpha(t, t^*) + \mu\beta(t) \\ &= \left[\frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + t^* \frac{B \times B'}{\|B\|^2} + \mu \frac{B}{\|B\|} \right] \end{aligned} \quad (52)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Teorem 28: Kontrol noktaları $\{\hat{P}_i\}$ $i = 0, \dots, n$ olan dual parametrelili dual Bezier eğrisi verilsin. Bu eğriye karşılık gelen regle yüzey kompleksi:

$$\mathcal{X}(t, t^*, \vartheta) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + t^* \frac{B \times B'}{\|B\|^2} + \vartheta \frac{B}{\|B\|}$$

dir. Burada $B = B(t)$, kontrol noktaları $\{P_i\}$ olan reel Bezier eğrisi, $B^* = B^*(t)$ kontrol noktaları $\{P_i^*\}$ olan reel Bezier eğrisidir. Bu regle yüzey kompleksinin dayanak yüzeyi $\alpha(t, t^*) = \frac{B \times B^*}{\|B\|^2} + t^* \frac{B \times B'}{\|B\|^2}$ dir. Doğrultmanı ise $\frac{B}{\|B\|}$ dir.

Teorem 29: Kontrol noktaları $\{\hat{P}_i\}$ olan dual parametrelili dual Bezier eğrisi verilsin. Bu eğrinin karşılık geldiği regle yüzey kompleksi $\mathcal{X}(t, t^*, \vartheta)$ olsun. Buna göre

$$a) \mathcal{X}(0, t^*, \vartheta) = \frac{P_0 \times P_0^*}{\|P_0\|^2} + t^* n \frac{P_0 \times P_1}{\|P_0\|^2} + \vartheta \frac{P_0}{\|P_0\|} \text{ dir.}$$

$$b) \mathcal{X}(0, 0, \vartheta) = \frac{P_0 \times P_0^*}{\|P_0\|^2} + \vartheta \frac{P_0}{\|P_0\|}$$

$$c) \mathcal{X}(1, t^*, \vartheta) = \frac{P_n \times P_n^*}{\|P_n\|^2} - t^* n \frac{P_n \times P_{n-1}}{\|P_n\|^2} + \vartheta \frac{P_n}{\|P_n\|}$$

$$d) \mathcal{X}(0, t^*, 0) = \frac{P_0 \times P_0^*}{\|P_0\|^2} + t^* \frac{P_0 \times P_1}{\|P_0\|^2}$$

$$e) \mathcal{X}(1, t^*, 0) = \frac{P_n \times P_n^*}{\|P_n\|^2} - t^* n \frac{P_{n-1} \times P_n}{\|P_n\|^2}$$

olarak ifade edilir.

3.5. Dual Değişkenli Bezier Eğrilerinde Blashke Çatı

Dual değişkenli ve kontrol noktaları $\hat{P}_i = P_i + \varepsilon P_i^*$ olan bir Bezier eğrisi,

$$\hat{B}(t + \varepsilon t^*) = B(t) + \varepsilon (B^*(t) + t^* B'(t))$$

olarak tanımlanmıştır. Bu eğrinin dual birim küre üzerine izdüşümü eğrisi;

$$\bar{B}(t + \varepsilon t^*) = \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|}$$

$$\bar{B}(\hat{t}) = \frac{B(t)}{\|B(t)\|} + \varepsilon \left[\frac{B^*(t)}{\|B(t)\|} - \frac{\langle B(t), B'(t) \rangle}{\|B(t)\|^3} B(t) + t^* \left[\frac{B'(t)}{\|B(t)\|} - \frac{\langle B(t), B'(t) \rangle}{\|B(t)\|^3} B(t) \right] \right]$$

olduğu ifade edilmiştir.

Şimdi bu eğri üzerinde Blashke Çatısını ifade edelim;

$$A_1 = \bar{B}$$

$$A_2 = \frac{A_1'}{\|A_1'\|}$$

$$A_3 = A_1 \times A_2$$

olarak tanımlanmıştır. O halde eğriyi hatırlayarak başlayalım:

$$\hat{B} = B + \varepsilon (B^* + t^* B')$$

$$\hat{B}' = B' + \varepsilon (B^{*'} + t^* B'')$$

$$\hat{B}'' = B'' + \varepsilon (B^{*''} + t^* B''')$$

$$\hat{B}''' = B''' + \varepsilon(B^{*'''} + t^*B'^{\vartheta})$$

dir. O halde Blashke çatıyı oluşturalım:

Önce $\|\hat{B}\|'$ ifadesini bulalım;

$$\|\hat{B}\|' = \left(\sqrt{\langle \hat{B}, \hat{B} \rangle}\right)' = \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{2\sqrt{\langle \hat{B}, \hat{B} \rangle}} = \frac{2\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{2\|\hat{B}\|} = \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|}$$

olduğu görülür. O halde \bar{B}' ifadesi:

$$\begin{aligned} \bar{B}' &= \left[\frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|}\right]' = \frac{\hat{B}' \cdot \|\hat{B}\| - \hat{B} \cdot \|\hat{B}\|'}{\|\hat{B}\|^2} \\ &= \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B} \\ &= \frac{\hat{B}' \|\hat{B}\|^2 - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\|^3} \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \bar{B}' &= \frac{[B' + \varepsilon(B^{*'} + t^*B'')] \cdot \left[\|B\| + \varepsilon \frac{\langle B, B^* + t^*B' \rangle}{\|B\|}\right] - \langle [B + \varepsilon(B^* + t^*B')], [B' + \varepsilon(B^{*'} + t^*B'')] \rangle B}{\left[\|B\| + \varepsilon \frac{\langle B, B^* + t^*B' \rangle}{\|B\|}\right]^3} \\ &= \frac{[B' + \varepsilon(B^{*'} + t^*B'')] \cdot [\|B\|^2 + 2\varepsilon \langle B, B^* + t^*B' \rangle] - [\langle B, B' \rangle + \varepsilon(\langle B, B^{*'} + t^*B'' \rangle + \langle B^* + t^*B' \rangle, B')]}{\|B\|^3 + 3\|B\|\varepsilon \langle B, B^* + t^*B' \rangle} \\ &= \frac{[B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B] + \varepsilon \left[\begin{array}{l} 2\langle B, B^* \rangle B' + \|B\|^2 B^{*'} - \langle B, B' \rangle B^* - (\langle B, B^{*'} \rangle + \langle B^*, B' \rangle) B \\ + t^* [2\langle B', B \rangle B' + \|B\|^2 B'' - \langle B, B' \rangle B' - (\langle B, B'' \rangle + \|B'\|^2) B] \end{array} \right]}{\|B\|[\|B\|^2 + 3\varepsilon \langle B, B^* + t^*B' \rangle]} \\ &= \left[\frac{B'}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle B}{\|B\|^3} \right] + \varepsilon \left[\begin{array}{l} -\frac{\langle B, B^* \rangle B'}{\|B\|^3} + \frac{B^{*'}}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle B^*}{\|B\|^3} + \left(\frac{3\langle B, B^* \rangle \langle B, B' \rangle}{\|B\|^5} - \frac{\langle B, B^{*'} \rangle + \langle B^*, B' \rangle}{\|B\|^3} \right) B \\ + t^* \left[\frac{-2\langle B, B' \rangle B'}{\|B\|^3} + \frac{B''}{\|B\|} + \left(\frac{3\langle B, B' \rangle^2}{\|B\|^5} - \frac{\langle B, B'' \rangle + \|B'\|^2}{\|B\|^3} \right) B \right] \end{array} \right] \end{aligned}$$

Bu ifade normuna bölünürse Blashke Çatısının ikinci birim vektörü

$$A_2 = \left[\frac{B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B \times (B' \times B)\|} \right] + \frac{\varepsilon}{\|B \times (B' \times B)\|} \left[\begin{array}{l} -\langle B, B^* \rangle B' + \|B\|^2 B^{*'} - \langle B, B' \rangle B^* + \left(\frac{3\langle B, B^* \rangle \langle B, B' \rangle}{\|B\|^2} - \langle B, B^{*'} \rangle - \langle B^*, B' \rangle \right) B \\ + t^* \left(-2\langle B, B' \rangle B' + \|B\|^2 B'' + \left(\frac{3\langle B, B' \rangle^2}{\|B\|^2} - \langle B, B'' \rangle - \|B'\|^2 \right) B \right) \\ + \frac{1}{\|B \times (B' \times B)\|^3} \left[\begin{array}{l} \|B\|^5 \|B'\|^2 \langle B, B' \rangle - \|B\|^7 \langle B', B^{*'} \rangle + \|B\|^5 \langle B, B' \rangle \langle B^*, B' \rangle \\ - 2\|B\|^3 \langle B, B' \rangle^2 \langle B, B' \rangle + \|B\|^5 \langle B, B' \rangle \langle B, B^{*'} \rangle \\ + t^* [2\langle B, B' \rangle \|B'\|^2 \|B\|^5 - \|B\|^7 \langle B', B'' \rangle - 2\langle B, B' \rangle^3 \|B\|^3 \\ + \|B\|^5 \langle B, B' \rangle \langle B, B^* \rangle] \left[\frac{\|B\|^2 B' - \langle B, B' \rangle B}{\|B\|^3} \right] \end{array} \right] \end{array} \right]$$

olur. Sadeleştirirsek ;

$$A_2 = \left[\frac{B' \|B\|^2 - \langle B, B' \rangle B}{\|B \times (B' \times B)\|} + \frac{\varepsilon}{\|B \times (B' \times B)\|} \left[\begin{aligned} & -\langle B, B^* \rangle B' + \|B\|^2 B^{*'} - \langle B, B' \rangle B^* + \left(\frac{3\langle B, B^* \rangle \langle B, B' \rangle}{\|B\|^2} - \langle B, B^* \rangle' - \langle B^*, B' \rangle \right) B \\ & \frac{\|B\|^2}{\|B \times (B' \times B)\|^2} \left[\begin{aligned} & \|B'\|^2 \langle B, B^* \rangle - \|B\|^2 \langle B', B^{*'} \rangle + \langle B, B' \rangle \langle B^*, B' \rangle \\ & - \frac{2\langle B, B' \rangle^2 \langle B, B^* \rangle}{\|B\|^2} + \langle B, B' \rangle \langle B, B^{*'} \rangle \end{aligned} \right] \|B\|^2 B' - \langle B, B' \rangle B \end{aligned} \right] + t^* \left[\begin{aligned} & -2\langle B, B' \rangle B' + \|B\|^2 B'' + \left(\frac{3\langle B, B' \rangle^2}{\|B\|^2} - \langle B, B'' \rangle - \|B'\|^2 \right) B \\ & + \frac{\|B\|^2}{\|B \times (B' \times B)\|^2} \left[2\langle B, B' \rangle \|B'\|^2 - \|B\|^2 \langle B', B'' \rangle - \frac{2\langle B, B' \rangle^3}{\|B\|^2} + \langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle \right] \|B\|^2 B' - \langle B, B' \rangle B \end{aligned} \right] \right]$$

olur. Böylece

$$A_3 = A_1 \times A_2$$

olacağından,

$$= \frac{\|B\|}{\|B \times (B' \times B)\|} (B \times B') + \frac{\varepsilon}{\|B \times (B' \times B)\|} \left[\begin{aligned} & \left[\frac{-2\langle B, B^* \rangle}{\|B\|} + \frac{\|B\|^3}{\|B \times (B' \times B)\|^2} \left(\|B'\| \langle B, B^* \rangle - \|B\|^2 \langle B', B^{*'} \rangle + \langle B, B' \rangle \langle B^*, B' \rangle \right) \right. \\ & \quad \left. + \langle B, B' \rangle \langle B, B^{*'} \rangle - \frac{2\langle B, B' \rangle^2 \langle B, B^* \rangle}{\|B\|^2} \right] B \times B' \\ & + t^* \left[\|B\| (B \times B'') + \left[\frac{-2\langle B, B' \rangle}{\|B\|} + \frac{\|B\|^3}{\|B \times (B' \times B)\|^2} \left(2\langle B, B' \rangle \|B'\|^2 - \|B\|^2 \langle B', B'' \rangle \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{2\langle B, B' \rangle^3}{\|B\|^2} + \langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle \right) \right] B \times B' \end{aligned} \right]$$

olur.

3.6. Türev Denklemleri

$$\begin{aligned} A_1' &= \overline{B}' = \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B} \\ &= \left[\frac{B'}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|^3} \right] + \varepsilon \left[\begin{aligned} & \frac{-\langle B, B^* \rangle}{\|B\|^3} B' + \frac{B^{*'}}{\|B\|} - \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|^3} B^* \\ & + \left(\frac{3\langle B, B^* \rangle \langle B, B' \rangle}{\|B\|^5} - \frac{\langle B, B^{*'} \rangle + \langle B^*, B' \rangle}{\|B\|^3} \right) B \\ & + t^* \left[\frac{-2\langle B, B' \rangle B'}{\|B\|^3} + \frac{B''}{\|B\|} + \left(\frac{3\langle B, B' \rangle^2}{\|B\|^5} - \frac{\langle B, B'' \rangle + \|B\|^2}{\|B\|^3} \right) B \right] \end{aligned} \right] \\ &= p_{A_1} A_1 + q_{A_1} A_2 + r_{A_1} A_3 \end{aligned}$$

Yazıldığında

$$p_{A_1} = \langle A_1', A_1 \rangle$$

$$q_{A_1} = \langle A_1', A_2 \rangle$$

$$r_{A_1} = \langle A_1', A_3 \rangle$$

olur. O halde;

$$\begin{aligned} p_{A_1} &= \left\langle \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B}, \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}\|} \right\rangle \\ &= \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B}\|^4} \\ &= \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{A_1} &= \langle A'_1, A_2 \rangle \\
&= \left\langle \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^3} \hat{B}, \left(\frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^3} \hat{B} \right) \left\| \frac{1}{\|\hat{A}\| - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^3}} \right\| \right\rangle \\
&= \frac{\frac{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B}'\|^4} - \frac{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B}'\|^4}}{\left\| \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^3} \hat{B} \right\|} = \frac{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B}'\|^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{A_1} &= \frac{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B}'\|^4} \\
&= \frac{\|(BxB') + \varepsilon \left((BxB^{*'}) + (B^*xB') + t^*(BxB'') \right)\|}{\|B\| + \langle tB, B^* + t^*B' \rangle} \\
&= \|BxB'\| + \varepsilon \left[\frac{\langle BxB', BxB^{*'} + B^*xB' + t^*(BxB'') \rangle}{\|BxB'\|} \right] \\
&= \|BxB'\| + \varepsilon \left(\frac{\langle BxB', BxB^{*'} + B^*xB' + t^*(BxB'') \rangle}{\|BxB'\|} \right) \\
q_{A_1} &= \frac{\|BxB'\| + \frac{\varepsilon}{\|BxB'\|} \left[\|B'\|^2 \langle B, B^* \rangle + \|B'\|^2 \langle B', B^{*'} \rangle - \langle B, B' \rangle \langle B, B^{*'} \rangle + \langle B', B^* \rangle \right. \\
&\quad \left. + t^* [\|B\|^2 \langle B', B'' \rangle - \langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle] \right]}{\|B\| + \varepsilon \langle B, B^* + t^*B' \rangle}
\end{aligned}$$

olur.

$$q_{A_1} = \frac{\|BxB'\|}{\|B\|} + \varepsilon \left[\frac{\|B'\|^2 \langle B, B^* \rangle + \|B\| \langle B', B^{*'} \rangle - \frac{\langle B, B' \rangle}{\|B\|} (\langle B, B^{*'} \rangle + \langle B', B^* \rangle)}{+ t^* \left[\|B\| \langle B', B'' \rangle - \frac{\langle B, B' \rangle \langle B, B'' \rangle}{\|B\|} \right]} \right] - \frac{\|BxB'\|}{\|B\|^2} \langle B, B^* \rangle$$

$$\begin{aligned}
r_{A_1} &= \langle A'_1, A_3 \rangle = \langle A'_1, A_1xA_2 \rangle \\
&= \left\langle \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^3} \hat{B}, \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} x \left(\frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^3} \hat{B} \right) \right\rangle \\
&= \left[\frac{\|\hat{B}x\hat{B}'\|}{\|\hat{B}'\|^2} \right]^{-1} \left\langle \frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^3} \hat{B}, \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} x \left(\frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^3} \hat{B} \right) \right\rangle \\
&= \frac{\|\hat{B}\|^2}{\hat{B}x\hat{B}'\| \|\hat{B}'\|^3} \left\langle \hat{B}' - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^2} \hat{B}, \hat{B}x \left(\hat{B}' - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^2} \hat{B} \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \left[\hat{B}' - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^2} \hat{B}, \hat{B}x\hat{B}' - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^2} \hat{B}x\hat{B} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi ;

$$A'_2 = \left[\frac{\frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}'\|^3} \hat{B}}{\frac{\|\hat{B}x\hat{B}'\|}{\|\hat{B}'\|^2}} \right]' = \left[\frac{\hat{B}'\|\hat{B}'\|}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}'\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \right]'$$

yazılabilir. Burada öncelikle bazı türevleri alalım.

$$\|\hat{B}\|' = \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|} \quad \text{idi.}$$

$$\begin{aligned} \|\hat{B}x\hat{B}'\|' &= \frac{\langle \hat{B}x\hat{B}', (\hat{B}x\hat{B}')' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} = \frac{\langle \hat{B}x\hat{B}', \hat{B}'x\hat{B}' + \hat{B}x\hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} \\ &= \frac{\langle \hat{B}x\hat{B}', \hat{B}x\hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} = \frac{\langle \hat{B}, \hat{B} \rangle \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle - \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} \quad \text{olur. O halde;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2' &= \frac{\left(\hat{B}'' \cdot \|\hat{B}\| + \hat{B}' \cdot \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|} \right) \|\hat{B}x\hat{B}'\| - \hat{B}' \|\hat{B}\| \cdot \left[\frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} \right]}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} \\ &\quad - \frac{\left[(\|\hat{B}'\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle) \hat{B} + \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}' \right] \|\hat{B}\| \cdot \|\hat{B}x\hat{B}'\|}{\|\hat{B}\|^2 \cdot \|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\|^2 \cdot \|\hat{B}x\hat{B}'\|^2} \cdot k \end{aligned}$$

olur. Burada $k = \left[\frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|} \|\hat{B}x\hat{B}'\| + \|\hat{B}\| \cdot \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} \right]$ dır. Sadeleştirirsek;

$$\begin{aligned} A_2' &= \frac{\hat{B}'' \|\hat{B}\| + \frac{\hat{B}' \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|}}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} - \frac{\hat{B}' \|\hat{B}\| \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} + \frac{\hat{B}' \|\hat{B}\| \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} \\ &\quad - \frac{(\|\hat{B}\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle) \hat{B} + \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}'}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2 \hat{B}}{\|\hat{B}\|^3 \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \\ &\quad + \left(\frac{\|\hat{B}x\hat{B}'\| [\|\hat{B}\| \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle]}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} \right) \hat{B} \\ &= \frac{\|\hat{B}\| \hat{B}''}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \left[\frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} - \frac{\|\hat{B}\|^3 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} + \frac{\|\hat{B}\| \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \right] \cdot \hat{B}' \\ &\quad + \left[\frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}\|}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} - \frac{(\|\hat{B}\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle)}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\|^3 \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \right] \hat{B} \end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$A_2' = p_{A_2} A_1 + q_{A_2} A_2 + r_{A_2} A_3$$

yazdığımızda;

$$\begin{cases} p_{A_2} = \langle A_2', A_1 \rangle \\ q_{A_2} = \langle A_2', A_2 \rangle \\ r_{A_2} = \langle A_2', A_3 \rangle \end{cases}$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} p_{A_2} = \langle A_2', A_1 \rangle &= \langle A_2', \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \rangle = \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|} - \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} \\ &\quad - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} - \frac{(\|\hat{B}\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle)}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \\ &= \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} - \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} (\langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle - \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle) - \frac{\|\hat{B}\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|} \\ &= \frac{-\|\hat{B}x\hat{B}'\|^4 - \|\hat{B}\|^4 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle - \|\hat{B}x\hat{B}'\|}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} = \frac{-\|\hat{B}x\hat{B}'\|}{\|\hat{B}\|^2} - \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} + \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} \end{aligned}$$

$$p_{A_2} = \frac{-\|\hat{B}x\hat{B}'\|}{\|\hat{B}\|^2} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B}x\hat{B}'\|^3} (\langle \hat{B} - \hat{B}', \hat{B}'' \rangle) \text{ bulunur.}$$

Şimdi q_{A_2}' yi bulalım:

$$\begin{aligned}
q_{A_2} &= \langle A_2', A_2 \rangle = \langle A_2', \frac{\|\hat{B}\|}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \hat{B} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\| \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \hat{B}' \rangle \\
&= \frac{\|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \langle \hat{B}', \hat{B}' \rangle + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \|\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} - \frac{\|\hat{B}\|^4 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} + \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} - \\
&\quad \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \|\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} - \frac{(\|\hat{B}'\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle)}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle + \\
&\quad \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} + \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} + \\
&\quad \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} + \frac{(\|\hat{B}'\|^2 + \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle)}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2 - \\
&\quad \frac{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2}{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3} \\
&= - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^3 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} + \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} + \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \\
&\quad - \frac{\|\hat{B}\|^4 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}'\|^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} + \frac{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}'\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} \\
&= \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} \left[\frac{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}'\|^2 - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \right] - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \\
&\quad + \frac{\langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} \left[\frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle^2 - \|\hat{B}\|^2 \|\hat{B}'\|^2}{-\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \right] + \frac{\langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \\
&= 0 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

O halde $q_{A_2} = 0$ dir. Şimdi r_{A_2} yi bulalım.

$$\begin{aligned}
r_{A_2} &= \langle A_2', A_3 \rangle = \langle A_1', A_1 \times A_2 \rangle \\
&= \langle A_2', \left[\frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \times \left(\frac{\frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\|^3} \right) \right] \rangle \\
&= \langle A_2', \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \times \left(\frac{\|\hat{B}\|^2 \hat{B}' - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\| \|\hat{B}\|^2 \hat{B}' - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}} \right) \rangle \\
&= \langle A_2', \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \times \left(\frac{\|\hat{B}\|^2 \hat{B}' - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\| \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \right) \rangle \\
&= \langle A_2', \frac{\hat{B} \times \hat{B}'}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \rangle \\
&= \frac{\|\hat{B}\|}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \det[\hat{B}, \hat{B}', \hat{B}']
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi p_{A_3} , q_{A_3} ve r_{A_3} katsayılarını bulalım. Bunun için A_3' elde etmeliyiz

$$\begin{aligned}
A_3' &= A_1' \times A_2 + A_1 \times A_2' \\
&= \left(\frac{\hat{B}'}{\|\hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^3} \hat{B} \right) \times \left(\frac{\|\hat{B}\|^2 \hat{B}' - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\| \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \right) + \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \times A_2' \\
&= \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B} \times \hat{B}'}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \hat{B} \times \hat{B}' + \frac{\hat{B} \times \hat{B}''}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \\
&\quad + \left[\frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} - \frac{\|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}', \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} + \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} - \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle}{\|\hat{B}\|^2 \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \right] \hat{B} \times \hat{B}' \\
&= \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}', \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} \hat{B} \times \hat{B}' = \frac{\langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle - \|\hat{B}\|^2 \langle \hat{B}, \hat{B}'' \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} \hat{B} \times \hat{B}'
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre katsayılar

$$p_{A_3} = \langle A'_3, A_1 \rangle$$

$$q_{A_3} = \langle A'_3, A_2 \rangle$$

$$r_{A_3} = \langle A'_3, A_3 \rangle$$

olacağından

$$p_{A_3} = \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}^*, \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B}\| \|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} \langle \hat{B} \times \hat{B}', \hat{B} \rangle = 0$$

bulunur. O halde; $p_{A_3} = 0$ olur.

$$\begin{aligned} q_{A_3} &= \langle A'_3, A_2 \rangle \\ &= \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}'', \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} \langle \hat{B} \times \hat{B}', \left[\frac{\|\hat{B}\|^2 \hat{B}' - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2 \|\hat{B}\|} \right] \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur ve son olarak ;

$$\begin{aligned} r_{A_3} &= \langle A'_3, A_3 \rangle = \langle A'_3, A_1 \times A_2 \rangle \\ &= \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}'', \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^3} \langle \hat{B} \times \hat{B}', \frac{\hat{B}}{\|\hat{B}\|} \times \frac{\|\hat{B}\|^2 \hat{B}' - \langle \hat{B}, \hat{B}' \rangle \hat{B}}{\|\hat{B}\| \|\hat{B} \times \hat{B}'\|} \rangle \\ &= \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}'', \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^4} \langle \hat{B} \times \hat{B}', \hat{B} \times \hat{B}' \rangle \\ &= \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}'', \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \end{aligned}$$

bulunur. O halde matris ile gösterelim:

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{A_1} & q_{A_1} & r_{A_1} \\ p_{A_2} & q_{A_2} & r_{A_2} \\ p_{A_3} & q_{A_3} & r_{A_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

yazıldığında;

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|}{\|\hat{B}\|^2} & 0 \\ -\frac{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|}{\|\hat{B}\|^2} + \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}' \rangle \|\hat{B}\|^2}{\|\hat{B}\|^3} \langle \hat{B} - \hat{B}', \hat{B}'' \rangle & 0 & \frac{\|\hat{B}\| \det[\hat{B}, \hat{B}', \hat{B}'']}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \\ 0 & 0 & \frac{\langle \hat{B} \times \hat{B}'', \hat{B}' \times \hat{B} \rangle}{\|\hat{B} \times \hat{B}'\|^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1. Sonuçlar

Bu tezde alınan **özgün sonuçlar** aşağıda özet olarak verilmiştir:

1) Bu tez çalışmasında dual uzayda tanımlı dual değişkenli bir Bezier eğrisinin denklemleri verilmiş ve bu eğrinin son nokta interpolasyon özellikleri **Teorem 10** ile ifade edilmiştir.

2) **Teorem 11** ile bir dual Bezier eğrisinin türev denkleminin yine bir Bezier eğrisi olduğu ve buna ait kontrol noktaları verilmiş, **Teorem 12** ile de bu türev eğrisinin reel ve dual kısımları verilmiştir.

3) Bir dual Bezier eğrisinin ikinci türevinin de yine bir Bezier eğrisi olduğu ve kontrol noktalarının ilk dual eğrinin kontrol noktaları cinsinden ifadesi **Teorem 13** ile verilmiş, bu eğrinin özel durumlarda değerlerinin kontrol noktaları ile ifadesi (son nokta interpolasyonu) **Teorem 14** ile verilmiştir.

4) Tezde sonuç 1 ve sonuç 2 ile bir dual Bezier eğrisinin n. nci dereceden türevi ifade edilerek genelleştirilmiştir.

5) **Teorem 15** ile bir dual Bezier eğrisinin ikinci türevlerinin interpolasyonu verilmiştir.

6) Tezin 3.2 bölümünde bir dual Bezier eğrisi üzerinde Frenet vektör alanları ve bunların dual ifadeleri hesaplanmış ve bunlar **Teorem 16** ile özetlenmiştir.

7) Tezin 3.3. bölümünde dual Bezier eğrisinin herhangi bir noktasındaki vektörel değeri hesaplayabilmek ve dual eğriyi verilen noktadan ikiye ayırabilmek ve ayrılan bu eğrilerin kontrol noktalarını bulabilmek için **dual de Casteljaou** algoritması verilerek **Teorem 17** ile bu algoritma ifade edilmiştir.

8) **Teorem 18, 19, 20, 21, 22** ile Frenet vektör alanlarının ve eğriliklerin belirli noktalardaki interpolasyonu ile keyfi bir dual büyüklük için karşılık geldiği değerleri, tezde elde edilen **dual de Casteljaou** algoritmasıyla bulunan kontrol noktaları cinsinden ifade edilmiştir.

9) Tezde elde ettiğimiz sonuçları bir sayısal örnek üzerinde görebilmek adına verilen örnek üzerinde alınan sonuçlar **Teorem 23, 24, 25, 26, 27** ile verilmiştir.

10) Tezin 3.4. bölümünde dual uzayda verilen bir Bezier eğrisinin birim dual küre üzerine izdüşüm eğrisi verilmiş ve bu eğriye karşılık gelen reel regle yüzey

kompleksleri ifade edilmiştir. Buradaki sonuçlar **Teorem 28** ve **Teorem 29** ile verilmiştir.

11) Tezin 3.5 bölümünde bir dual Bezier eğrisi üzerinde alınacak olan Blashke çatı vektör alanları $\{A_1, A_2, A_3\}$ ifade edilmiştir.

12) Tezin 3.6 bölümünde ise bir dual Bezier eğrisi üzerinde alınacak olan Blashke çatı vektör alanlarına $\{A_1, A_2, A_3\}$ ait türev denklemleri ifade edilmiştir.

4.2.Öneriler

Bu tezde alınan **özgün sonuçlar** ışığında bir sonraki çalışmalar için aşağıdaki öneriler yapılmıştır:

1) Dual değişkenli Bezier eğrileri yardımıyla bu eğrilere karşılık gelen ışın kongrüansları ve regle yüzey kompleksleri tam olarak incelenebilir.

2) Verilen dual Bezier eğrisinin kapalı bir eğri olması durumunda karşılık gelecek olan yürünge yüzey kompleksleri incelenebilir.

3) Yörünge yüzey komplekslerine ait drall, dağılma parametreleri, Gauss ve ortlalma eğrilikler, açılım açıları, açılım uzunlukları hesaplanabilir.

4) Dual Bezier eğrileri üzerinde Bishop türü çatılar inşa edilip eğrilikler karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Barnhill R. and Riesenfeld R. F. (1974), editors, Computer Aided Geometric Design, *Academic Press Inc.*, San Diago.
- Clifford W. K.,(1873) Preliminary sketch of bi-quaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1,381-395.
- Farin G.,(1990) Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design A Practical Guide, 2nd edition, *Academic Press Inc.*, San Diago.
- Farouki R., (1985) Exact offset procedures for simple solids. *Computer Aided Geometric Design*, 2 (4), 257-279.
- Farouki R. and Rajan V.T.,(1987) On the numerical conditionof polinomials in Bernstein form. *Computer Aided Geometric Design*, 4(3) ,191-216.
- Gray A., (1998) Modern Di_ifferential Geometry of curves and surfaces with Mathematica, 2nd edition, *CRC Press LCC, Boca Raton*, Florida.
- Gürsoy O., (1990), On Integral Invariant of A Closed Ruled Surface, *Journal of Geometry*, 39, 80-91.
- Hacısalihoglu, H. H. (1983). Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar Teorisi. *Gazi Üniversitesi yayınları*, Ankara.
- Hoschek J., (1985) Offset curves in the plane, *Computer Aided Design*, 17 (2) , 77-82.
- İncesu M., (2003) Bezier eğrileri, Bezier Yüzeyleleri ve Sayısal Algoritmalar, Yük. Lis. Tezi, *Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Trabzon.
- Incesu M, Gursoy, O. (2004) Bezier Yüzeylelerinde Esas Formlar ve eğrilikler, *XVII Ulusal Matematik Sempozyumu*, 146-157, Bolu, Turkey
- Incesu, M. (2022). The new characterization of ruled surfaces corresponding dual Bézier curves. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(18), 12030-12045.
- Lee E., (1987) The Rational Bezier Representation for Conics. In G. Farin, editor, Geometric Modeling: Algorithms and New Trends, 3-19, *SIAM*, Philadelphia.
- Liming R., (1944) Practical Analytic Geometry with Applications to Aircraft, *Macmillan*,
- Marsh D., (1999) Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, *Springer-Verlag London Berlin Heidelberg*, London,.

- Potmann H., Rational curves and surfaces with rational offsets, *Computer Aided Geometric Design*, 12, (1995) 175-192.
- Study E. (1891), Von den bewegungen und umlegungen. *Mathematische Annalen*, 39, 441-566
- Samancı, H. K., Celik, S., İncesu, M. (2015). The Bishop frame of Bézier curves. *Life Sci. J*, 12(6), 175-180.
- SAMANCI, H. K., & KAYA, S. (2015, August). THE DUAL-VARIABLE BERNSTEIN POLYNOMIALS. In *International Conference on Pure and Applied Mathematics* (p. 142).
- Samancı, H. K. (2016). GENERALIZED DUAL-VARIABLE BERNSTEIN POLYNOMIALS. *Konuralp Journal of Mathematics*, 5(1), 56-67.
- Samancı, H. K., & İncesu, M. (2020). Investigating a quadratic Bezier curve due to NCW and N-Bishop frames. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 12(2), 120-127.
- Samancı, H. K. (2021). THE SERRET-FRENET FRAME OF THE RATIONAL BEZIER CURVES IN THE EUCLIDEAN-3 SPACE BY ALGORITHM METHOD. *Journal of Science & Arts*, 21(3).
- Schoenberg I., (1953) On variation diminishing approximation methods. In R.E.Langer, editor, On Numerical Approximation, , *Univ. of Wisconsin Press*, 249-274.
- Weatherburn C.E. Çev: Z. Asuman ILGAZ,(1984) Üç Boyutlu diferensiyel geometri, *K.T.Ü. Yayınları, yayın No: 16, KTÜ Basımevi*, Trabzon.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Fadime TEKGÜL

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Atatürk Kız Lisesi YDA Battalgazi/MALATYA	13.06.2008
Üniversite	: İnönü Üniversitesi Battalgazi/MALATYA	01.06.2015
Yüksek Lisans	: Muş Alparslan Üniversitesi	2024
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
01.03.2016-15.08.2016	Necatibey Ortaokulu	Öğretmen
16.08.2016-15.09.2017	Atatürk Ortaokulu	Öğretmen
21.09.2017-22.01.2018	Sürgü Dursun Şahin Ortaokulu	Öğretmen
22.01.2018-20.11.2023	Polat Vaiz Şahin Ortaokulu	Öğretmen
20.11.2023- Halen	Necatibey Ortaokulu	Öğretmen