T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANYETİK EĞRİLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ FERMİ-WALKER TÜREVİ

Kadir ALTUNTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2023
MUŞ

T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANYETİK EĞRİLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ FERMİ-WALKER TÜREVİ

Kadir ALTUNTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

Şubat-2023
MUŞ

TEZ KABUL ve ONAYI

Kadir ALTUNTAŞ tarafından hazırlanan “Manyetik Eğrilerin Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi” adlı tez çalışması 10/02/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Dr. Öğr. Üyesi Ufuk KAYA Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..
Danışman	
Prof. Dr. Talat KÖRPINAR Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..
Üye	
Dr. Öğretim Üyesi Ahmet SAZAK Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü	…………………..

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu …../……/……. Tarih ve ………/……….. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Kadir ALTUNTAŞ

10/02/2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MANYETİK EĞRİLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ FERMİ-WALKER TÜREVİ

Kadir ALTUNTAŞ

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, öncelikle fiziksel kavram ve tanımlar verilmiştir ve daha sonra 3-boyutlu Öklid uzayındaki manyetik eğriler üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre T-manyetik, N-manyetik ve B-manyetik eğrilerin tanımlarına yer verilmiştir. Dördüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre T-manyetik, N-manyetik ve B-manyetik eğrilerin türevleri, Fermi-Walker türevleri, Normal Fermi-Walker türevleri, modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevleri hesaplanmıştır. Beşinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre T-manyetik, N-manyetik ve B-manyetik eğrilerin türevleri, genelleştirilmiş Fermi-Walker türevleri, genelleştirilmiş Normal Fermi-Walker türevleri ve genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevleri hesaplanmıştır. Altıncı bölümde ise 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre T-manyetik, N-manyetik ve B-manyetik eğrilerin türev yardımıyla enerjileri, genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri, genelleştirilmiş normal Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri ve genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri hesaplanmıştır.

2023, 98 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Enerji, Lorentz Kuvveti, Frenet Çatı, Fermi-Walker Türevi, Normal Fermi-Walker Türevi, Manyetik Eğriler.

ABSTRACT

MS THESIS

GENERALIZED FERMI-WALKER DERIVATIVE OF MAGNETIC CURVES

Kadir ALTUNTAŞ

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

This study consists of six chapters. The first chapter is the introduction part of the study. First the physical concepts and definitions are given, and then the information in the literature about the studies on magnetic curves in 3- dimensional Euclidean space is given. In the second part, the basic definitions and theorems used in our study are given. In the third chapter, definitions of T-magnetic, N-magnetic and B-magnetic curves are given according to Frenet frame in 3-dimensional Euclidean space. In the fourth chapter, derivatives of T-magnetic, N-magnetic and B-magnetic curves, Fermi-Walker derivatives, Normal Fermi-Walker derivatives, modified (bi-normal) Fermi-Walker derivatives are calculated according to Frenet frame in 3-dimensional Euclidean space. In the fifth chapter, derivatives of T-magnetic, N-magnetic and B-magnetic curves, generalized Fermi-Walker derivatives, generalized normal Fermi-Walker derivatives and generalized modified (bi-normal) Fermi-Walker derivatives are calculated according to Frenet frame in 3-dimensional Euclidean space. In the sixth part, the energies of the derivatives of T-magnetic, N-magnetic and B-magnetic curves, the energies of the generalized Fermi-Walker derivatives, the energies of the generalized normal Fermi-Walker derivatives and the energies of the generalized modified (bi-normal) Fermi-Walker derivatives are calculated according to Frenet frame in 3-dimensional Euclidean space.

2023, 98 Pages

Keywords: Energy, Frenet Frame, Fermi Walker Derivate, Lorentz Force, Normal Fermi-Walker Derivate, Magnetic Curves.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, çalışmamın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayıran saygıdeğer hocam Prof. Dr. Talat KÖRPINAR'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca bu süreç boyunca her daim yanımda olan değerli eşim Büşra ALTUNTAŞ'a teşekkür ederim.

Kadir ALTUNTAŞ
MUŞ-2023

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzay
(M,g)	: Riemann manifoldu
ϕ	: Lorentz kuvveti
$\mathbb{F}$	: Manyetik alan
$\mathbf{V}$	: Killing vektör alanı
$\{\mathbf{T}(s),\ \mathbf{N}(s),\ \mathbf{B}(s)\}$	: Frenet Çatı
$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{0}X$	: Fermi-Walker türevi
$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{0normal}X$	: Normal Fermi-Walker türevi
$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{0modified}X$	: Modifiye Fermi-Walker türevi
$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}X$	: Genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi
$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{normal}X$	: Genelleştirilmiş Normal Fermi-Walker türevi
$\widetilde{\nabla}_{\mathbf{T}}^{modified}X$	: Genelleştirilmiş Modifiye Fermi-Walker türevi
κ	: Eğrilik fonksiyonu
τ	: Burulma fonksiyonu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{E}^n$	: n boyutlu Öklid uzayı
∇	: Levi-Civita konneksiyonu
$\mathbf{T}(s)$	: Teğet vektör alanı
$\mathbf{N}(s)$	: Asli normal vektör alanı
$\mathbf{B}(s)$	: Binormal vektör alanı
ε	: Enerji

1. GİRİŞ

Fizik ve diferansiyel geometride bir çok uygulama alanına sahip ve bir çok alanda önemli sonuçlara sahip konulardan biri de manyetik alan ve manyetik eğrilerdir. Teknolojinin birçok alanında manyetik alan ile karşılaşırız. Örneğin, dünya manyetik alanını üretir ve bu manyetik alan sonucu pusulanın temel çalışma prensibini ortaya çıkar. Bununla beraber manyetik alan, jeneratörlerde ve elektrik motorlarında kullanılır. Benzer olarak teknolojinin birçok alanında kullanılır. Manyetik alan, temel parçacıklar tarafından, hareketli elektrik yükleri tarafından veya zamanla değişen elektrik alanlardan içsel olarak üretilen vektörel bir büyüklüktür. Bir noktadaki şiddeti ve yönüyle tanımlanır. Mıknatısların, mıknatıssal özelliğini gösterdiği alandır. Manyetik alan çizgileri mıknatısların etrafında oluşan çizgilere denir. Manyetik alan çizgilerinin yönleri kuzeyden güneye doğru olup $\mathbb{B}$ ile gösterilir ve birimi Tesla'dır (Synge, 1960).

Manyetik alan genel anlamda, hareketli elektrik yükünü etkileyen Lorentz kuvvetiyle tanımlanır. Bir yüklü parçacık $\mathbb{B}$ manyetik alanına girdiği zaman bu parçacığın Serret-Frenet vektörleri bu alandan etkilenirler ve bu etkiyle Lorentz kuvveti açığa çıkar. Lorentz kuvveti, fizikte özellikle elektromanyetizmada; elektromanyetik alanların oluşturduğu noktasal yük üzerindeki elektrik ve manyetik kuvvetlerin bileşkesidir. $\mathbf{E}$ elekrtiksel alan ve $\mathbb{B}$ manyetik alanda, $\mathbf{v}$ hızı ile hareket eden $\mathbf{q}$ yüklü parçacığı etkileyen Lorentz kuvveti şöyledir:

$$\mathbb{F} = \mathbf{q}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbb{B})$$

Lorentz kuvvet denklemi görüldüğü üzere, parçacığın hız vektörüne ve manyetik alan vektörüne diktir. $\mathbf{v}$ ve $\mathbb{B}$ arasında olan vektörel(çapraz) çarpmadan dolayı, parçacık manyetik alana paralel olarak hareket ederse, etkiyen manyetik kuvvet sıfır olur. Lorentz kuvveti iki vektörün birbirine dik($\perp$) olduğu zamanda en büyük değerini alır. Parçacığın hızı manyetik kuvvete her zaman dik olduğundan büyüklük etkilenmez, yalnızca yönü değişir. Böylece manyetik alanda yüklü bir parçacık çembersel hareketler yapar (Hacısalihoğlu, 2002; Synge, 1960).

Parçacık bu alan içerisinde bir yörünge izlemeye başlar. Bu yörüngeye manyetik eğri adı verilir. Manyetik eğriler, farklı disiplinler için doğal bir çalışma ve araştırma konusu olduğundan, yıllardır çalışılmaktadır (Munteanu, 2013).

Riemann manifoldunda (M, g) kapalı 2-form $\mathbf{F}$, manyetik alan olarak tanımlanabilir. Riemann manifoldundaki manyetik eğriler, bir $\mathbf{F}$ manyetik alan etkisinde hareket eden yüklü parçacık ile karakterize edilen bir yörüngedir. Bu yüklü parçacıklar manyetik alanda Lorentz kuvveti olarak tanımlanan bir kuvvete maruz kalırlar. Her γ yörüngesi,

$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \phi(\gamma')$

Lorentz kuvvet denkleminin çözümüyle bulunur; burada ϕ, $\mathbf{F}$'ye karşılık gelen Lorentz kuvvetidir ve ∇, g'nin Levi Civita koneksiyonudur. Lorentz kuvvetleri, Riemann manifoldu (M, g) üzerindeki (1, 1) tipi bir tensör alanıdır ve $g(\phi(X), Y) = \mathbf{F}(X, Y)$, $\forall X, Y \in \chi(M)$'yi sağlar. Lorentz kuvvet denklemi $\phi(X) = \mathbf{V} \times X$ ile tanımlanır. Ayrıca F manyetik alanlarının manyetik yörüngeleri şu şekilde verilmektedir:

$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \phi(\mathbf{T}) = \mathbf{V} \times \mathbf{T}.$

Elde edilen $\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = 0$ genelleştirilmiş Lorentz denkleminin geodeziklerinden verilmiştir (Barros, 2001; Fermi, 1922; Kazan ve Karadağ, 2017; Körpinar ve Demirkol, 2017).

Bir yüklü parçacık, manyetik alandaki eğri boyunca hareket eder, böylece manyetik alana maruz kalır. Homojen uzay $\mathbf{S^2} \times \mathbf{R}$ tarafından modellenen bir alanda hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleri bilim adamları tarafından incelenmiştir (Bükcü ve Karacan, 2009). Bazı araştırmacılar yarı-Riemann manifoldlarını düzenlemiş ve $\mathbf{T}$-manyetik, $\mathbf{N}$-manyetik ve $\mathbf{B}$-manyetik eğriler ve bazı karakterizasyonlar geliştirmiştir (Bükcü ve Karacan, 2008a; 2008b; 2009; Büyükkütük ve Budak, 2015; Frenet, 1975; Yılmaz ve Turgut, 2010).

Araştırmacılar, Serret-Frenet yasalarını dikkate alarak eğrilerin yerel teorisini araştırmışlardır. Paralel vektör alanı veya eğrilerin alternatif paralel çatısını tanımlamanın yolu, Frenet çatısıdır. Son yıllarda, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısı ile birçok çalışma yapılmıştır (Hacısalihoğlu, 2002; Hawking, 1973; Takeuchi, 2004).

Cismin hareketini ve konumunu incelemek amacıyla fiziksel deneylerde cisim ile aynı hareketi yapan P gözlemcisinden faydalanılır. Bu cismin t zamanındaki hareketinin geometrik açıdan yorumlanabilmesi için bu gözlemcinin hareket ettiği eğri boyunca sabit yönleri ve merkezi olan bir çatı seçimine ihtiyaç vardır. Eğer bu cisim serbest düşme yapıyorsa, P gözlemcisi Levi-Civita paralelliği yardımıyla uzayda hareket ettirilir. İvmelenen (hızlanan) cisimler için ise gözlemcinin hareket ettiği uzayda Levi-Civita paralelliğinden faydalanılamaz. Bu sebepten ötürü Fermi 1922 yılında, ivmelenen gözlemcilerde kullanılmak amacıyla Fermi türevini tanımlamıştır. Sonrasında 1932 yılında Walker hiperyüzeyler üstündeki herhangi β eğrisinde (gözlemcinin üstünde hareket edip eğri çizdiği rota) kullanılmak amacıyla Fermi-

Walker türevini, Fermi türevinin uzay eğrilerine genişletilmiş hali olarak tanımlamıştır (Balakrishnan, 2005; Dandolof, 1989; Fermi, 1922; Hehl ve Lemke, 1991).

Sadece hızlanan gözlemciler için geçerli olan Fermi-Walker türevi sınırlıdır. Ve aynı zamanda eğrinin geodezik olması halinde Levi-Civita türevi ile Fermi-Walker türevi çakışır. Bu sebepten ötürü hem ivmelenen hem de ivmelenmeyen (hızlanmayan) gözlemciler için geçerliliğini sağlayabilecek bir türev ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Buradan hareketle Manoff 1998 yılında Fermi-Walker türevi için genelleştirmeler yapmıştır. Sonrasında 1999 ve 2000 yıllarında yaptığı çalışmalarda Pripoae, hem ivmelenen hem de ivmelenmeyen gözlemciler için geçerlilik sağlayan genelleştirilmiş Fermi-Walker türevini tanımlamıştır.Manyetik alan içerisindeki manyetik eğrilerin geodezik eğrilerinin genelleştirilmiş olması halinden hareketle manyetik eğriler için Fermi-Walker türevinin ve genelleştirilmiş Fermi-Walker türevinin hesaplanması önemli rol oynamaktadır. Bununla beraber manyetik eğrilerin Fermi-Walker türevlerinin enerjilerinin hesaplanması ile, hareket-enerji ve kütle-enerji gibi temelde kullanılan tanım ve kavramların anlaşılması daha kolay ve daha iyi olmuştur. Bunu baz alarak, 2017 yılında Körpınar vd. uzayda yüklü parçacığın enerjisini karakterize etmişlerdir (Fermi, 1922; Karakuş ve Yaylı 2012; Manoff, 1998; Pripoae, 1999; Thorpe, 1979).

Ayrıca Muntenau sabit bir enerji seviyesinde belirli bir manyetik alan için eğrilerin analizinde çeşitli yöntemler araştırmıştır. Son zamanlarda enerji, birçok alanda uygulama alanı bulmuştur. Geometrik eksiklikler, yapısına bağlı olarak bilim ve mühendisliğin çeşitli alanlarında ve belirli bir vektörün enerjisini hesaplama çalışmalarında son yıllarda bu kadar dikkat çekmiştir. Farklı yöntemler kullanarak enerji ile ilgili çalışmalar birçok bilim insanı tarafından kabul edilmiştir (Bozkurt, Gök ve Yaylı 2014; Munteanu, 2013; Özdemir, Gök ve Yaylı, 2015; Sabuncuoğlu, 2010; Uçar, 2019).

Bu çalışmada, 3-boyutlu uzayda Frenet çatısına göre **T**, **N**, **B** manyetik eğrilerinin türevlerini, genelleştirilmiş Fermi-Walker türevlerini, genelleştirilmiş Normal Fermi-Walker türevlerini ve genelleştirilmiş Modifiye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevlerini hesaplayarak Frenet çatısıyla ilgili bazı vektör alanlarının enerji denklemlerini elde ediyoruz.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

Tanım 2.1 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_i \in \mathbb{R}\}$ vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, y_2, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan

$\langle , \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to \langle x, y \rangle$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona $\mathbb{R}^n$ uzayının **Öklid iç çarpım** ya da **doğal iç çarpım** denir.

$x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{2.2}$$

eşitliğinde,

$\|,\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$

$x \quad \to \quad \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$\mathbb{R}^n$ uzayındaki bu fonksiyon bir normdur. $\mathbb{R}^n$ uzayına normlu vektör uzayı denir.

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan , $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Böylece $\mathbb{R}^n$ metrik uzay olur. Genelde $\mathbb{E}^n$ ile gösterilen bu uzaya **Öklid uzayı** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.2 $\mathbb{R}^n$ uzayında bir **eğri,**

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığında diferensiyellenebilir bir β dönüşümüne denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.3 $\beta: I \to \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için β nın $\beta(t)$ noktasındaki

$$\dot{\beta}(t) = \frac{d\beta}{dt}|_t = (\frac{d\beta_1}{dt}(t), \ldots, \frac{d\beta_n}{dt}(t)) \tag{2.4}$$

vektörüne, β eğrisinin $\beta(t)$ noktasındaki **hız vektörü** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.4 Bir

$\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$

$s \to \alpha(s)$

eğrisi için, $\|\beta'(s)\| = 1$, $\forall s \in I$ ise β eğrisine **birim hızlı eğri** denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** adı verilir [12], (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.5 $\beta: I \to E^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için β nın $\beta(t)$ noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise, β eğrisine **regüler bir eğri** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.6 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için ,

$$\mathbf{T}(s) = \beta'(s) \tag{2.5}$$

eşitliğiyle belirli $\mathbf{T}(s)$ vektörüne, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir. **T** vektör alanına, β eğrisinin **teğet vektör alanı** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.7 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için ,$\kappa: I \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| \tag{2.6}$$

fonksiyonuna β eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\beta(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.8 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için ,

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\boldsymbol{\kappa}(s)}\mathbf{T}'(s) \tag{2.7}$$

eşitliği ile belirli $\mathbf{N}(s)$ vektörüne, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki **birinci dik vektörü (asli normali)** denir. **N** vektör alanına, α eğrisinin **birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı)** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.9 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için ,

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) \tag{2.8}$$

eşitliği ile tanımlı $\mathbf{B}(s)$ vektörüne, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki **ikinci dik vektörü (binormali)** denir. **B** vektör alanına, β eğrisinin **ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı)** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.10 $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ vektörlerine, $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki **Serret-Frenet vektörleri** denir. $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ kümesine, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir ve **T**, **N**, **B** vektör alanlarına, β eğrisi üzerinde **Frenet vektör alanları** adı verilir (Sabuncuoğlu, 2001) .

Tanım 2.11 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları **T**, **N**, **B** ve $\tau: I \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\tau(s) = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \tag{2.9}$$

fonksiyonuna, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki torsiyonu (burulması) denir (Sabuncuoğlu, 2001).

Teorem 2.1 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları **T**, **N**, **B** ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla κ ve τ olmak üzere

$$\nabla_T \mathbf{T} = \kappa \mathbf{N},$$
$$\nabla_T \mathbf{N} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \quad (2.10)$$
$$\nabla_T \mathbf{B} = -\tau \mathbf{N}$$

dır (Sabuncuoğlu, 2001).

Teorem 2.2 Birim hızlı olmayan,

$\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,$

$u \to \beta(u)$

eğrisini göz önüne alalım. Frenet vektör alanları **T**, **N**, **B** ve bu eğrinin eğrilik ve burulması sırasıyla κ ve τ olmak üzere,

$$\mathbf{T} = \frac{\beta'}{\|\beta'\|},\ \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T},\ \mathbf{B} = \frac{\beta' \times \beta''}{\|\beta' \times \beta''\|},$$

ve

$$\kappa = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} \ ve \tau = \frac{\langle \beta' \times \beta'', \beta''' \rangle}{\|\beta' \times \beta''\|^2}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2001).

Tanım 2.12 Bir C^∞-manifold M, M üstündeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve C^∞ fonksiyonların cebiri $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$<,>: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa, bu dönüşüme M üzerinde Riemann metriği yada metrik tensör denir.

$i)$ $<,>$ dönüşümü 2-lineerdir,

$ii)$ $<,>$ dönüşümü simetriktir,

$iii)$ $< X, X >> 0, < X, X >= 0 \Leftrightarrow X = 0, X \in \chi(M)$.

Üzerinde Riemann metriği tanımlanmış olan C^∞-manifolda, **Riemann manifoldu** denir(Hacısalihoğlu, 2002).

Tanım 2.13 M bir C^∞-manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve C^∞ fonksiyonların cebiri $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$<,>: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$

operatörü aşağıdaki özellikleri sağlarsa M ye bir **yarı-Riemann manifoldu** denir (Hacısalihoğlu, 2002).

$i)$ $<,>$ dönüşümü 2-lineerdir,

$ii)$ $<,>$ dönüşümü simetriktir,

$iii)$ $\forall Y \in \chi(M)$ için $< X, Y >= 0 \Rightarrow X = 0$ (Hacısalihoğlu, 2002).

Tanım 2.14 M, n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^{∞}vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$,

$(X, Y) \to \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$

dönüşümü, $\forall X, Y. Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için,

$i)\ \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

$ii)\ \nabla_{fX+gY} Z = f(\nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z)$

$iii) \nabla_X(fY) = f(\nabla_X Y) + X(f)Y$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya M üzerinde bir **afin koneksiyon** adı verilir (Hacısaliloğlu, 2000).

Tanım 2.15 (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olmak üzere $\forall X, Y. Z \in \chi(M)$ için

$i)\ \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

$ii)\ X_g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ şartlarını sağladığında ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyonu veya M nin **Levi-Civita koneksiyonu** denir (Hacısalihoğlu, 2002) .

Tanım 2.16 (M, g), n-boyutlu semi-Riemann manifoldu olsun. M üzerinde **F** kapalı 2-formu manyetik alandır ve (M, g) manifoldu üzerindeki **F** manyetik alanın Lorentz kuvveti Φ, herhangi $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için,

$$g(\phi(X), Y) = \mathbf{F}(X, Y) \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir (Kazan ve Karadağ, 2017).

Tanım 2.17 Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki manyetik eğriler, **F** manyetik alanın etkisi altında M üzerinde hareket eden yüklü parçacıkların yörüngeleridir. Yani **F** nin manyetik yörüngeleri, Lorentz denklemindeki M nin eğrileridir. Buradan,

$$\nabla_{\beta'} \beta' = \phi(\beta') \tag{2.12}$$

olur. M nin jeodeziklerinden elde edilen genelleştirilmiş Lorentz denklemi de,

$$\nabla_{\beta'} \beta' = 0 \tag{2.13}$$

dır (Hacısalihoğlu, 2002).

Tanım 2.18 3-boyutlu Semi-Riemann manifoldunda sapma içermeyen bir vektör alanı, manyetik alanı tanımlar. $\mathbf{V} \in \chi(M^n)$ nin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart,

$$L_{\mathbf{V}} g = 0 \tag{2.14}$$

olmasıdır ya da eşdeğer olarak, tüm $p \in M^n$ noktalarında $\nabla\mathbf{V}(p)$, $T_P(M^n)$ de ters-simetrik bir operatördür.

Yani, üç boyutta manyetik alanlar sapma içermeyen vektör alanları kullanılarak tanımlanabilir. Killing vektör alanlarının sıfır sapması olduğu için, Killing manyetik alan adı verilen özel bir manyetik alan sınıfı tanımlanabilir (Barros, 2007).

$\mathbf{F_V}$ nin Lorentz kuvveti;

$$\phi(X) = \mathbf{V} \times X \tag{2.15}$$

dir. (2.18) ve (2.22) denklemlerinden,

$$\nabla_{\beta'}\beta' = \mathbf{V} \times \beta' \tag{2.16}$$

yazılır (Munteanu**,** 2013; Özdemir ve ark., 2015).

Tanım 2.19 n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ parametre eğrisi boyunca bir **X** vektör alanı için Öklid türev $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$ olmak üzere,

$$\nabla\mathbf{X} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = 0 \tag{2.17}$$

ise **X** vektör alanına β eğrisi boyunca **Öklid anlamında paraleldir**, denir (Hacısalihoğlu 2000) .

Tanım2.20 $\mathbb{E}^{n+1}$ de M hiperyüzeyi üzerinde $\beta: I \subset \mathbb{R} \to M$ birim hızlı eğri olsun. X, β boyunca yüzeye teğet ve her yerde β eğrisine dik bir vektör alanı olsun. ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\frac{\delta X}{\delta s} = \nabla_T X - \langle \nabla_T X, \mathbf{T} \rangle \mathbf{T} \tag{2.18}$$

şeklinde tanımlanan $\frac{\delta X}{\delta s}$ türevine **X** vektör alanının **Fermi türevi** denir (Thorpe, 1979).

Tanım2.21 X, s yay parametreli $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere;

$$\widetilde{\nabla}_T^0 X = \nabla_T X - \langle \mathbf{T}, X \rangle \nabla_T \mathbf{T} + \langle \nabla_T \mathbf{T}, X \rangle \mathbf{T} \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}_T^0 X$ türevine $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **Fermi-Walker Türevi** denir. Burada $\mathbf{T} = \frac{d\beta}{ds}$, $\nabla_T \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}$ (Benn ve Tucker 1989).

Tanım 2.22 X, s yay parametreli $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere, eğri boyunca vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T^0 X = 0 \tag{2.20}$$

ise X vektör alanına $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca **Fermi-Walker anlamında paraleldir,** denir (Benn ve Tucker 1989).

Tanım2.23 X, s yay parametreli $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle \mathbf{T}, X\rangle \nabla_T \mathbf{T} + \langle \nabla_T \mathbf{T}, X\rangle \mathbf{T} + \mathbf{A}(\mathbf{X}) \tag{2.21}$$

yani

$$\widetilde{\nabla}_T X = \widetilde{\nabla}_T^0 X + \mathbf{A}(\mathbf{X})$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}_T X$ türevine $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi** denir. Burada $\mathbf{T} = \frac{d\beta}{ds}$,$\nabla_T \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}$ (Benn ve Tucker 1989).

Tanım 2.24 X, s yay parametreli $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere, eğri boyunca vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T X = 0 \tag{2.22}$$

ise X vektör alanına $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca **genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paraleldir,** denir (Benn ve Tucker 1989).

Tanım2.25 X, s yay parametreli $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere;

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} X = \nabla_T X - \langle \mathbf{N}, X\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, X\rangle \mathbf{N} \tag{2.23}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}_T^{0normal} X$ türevine $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **normal Fermi-Walker Türevi** denir. Burada $\mathbf{N} = \frac{d\beta}{ds}$,$\nabla_T \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{N}}{ds}$ (Fermi, 1922).

Tanım 2.26 X, s yay parametreli $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere, eğri boyunca vektör alanının normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} X = 0 \tag{2.24}$$

ise X vektör alanına $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca **normal Fermi-Walker anlamında paraleldir,** denir (Fermi, 1922).

Tanım2.27 X, s yay parametreli $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal} X = \nabla_T X - \langle \mathbf{N}, X\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, X\rangle \mathbf{N} + \mathbf{A}(\mathbf{X}), \tag{2.25}$$

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal} X = \widetilde{\nabla}_T^{0normal} X + \mathbf{A}(\mathbf{X}),$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}_T^{normal} X$ türevine $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **genelleştirilmiş normal Fermi-Walker Türevi** denir. Burada $\mathbf{N} = \frac{d\beta}{ds}$,$\nabla_T \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{N}}{ds}$ (Fermi, 1922).

Tanım 2.28 X, s yay parametreli $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere, eğri boyunca vektör alanının normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal} X = 0 \tag{2.26}$$

ise X vektör alanına $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca **genelleştirilmiş normal Fermi-Walker anlamında paraleldir,** denir (Fermi, 1922).

Tanım2.29 X, s yay parametreli $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere;

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} X = \nabla_T X - \langle \mathbf{B}, X \rangle \nabla_T \mathbf{B} + \langle \nabla_T \mathbf{B}, X \rangle \mathbf{B} \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}_T^{0modified} X$ türevine $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **modifiye(bi-normal) Fermi-Walker Türevi** denir. Burada $\mathbf{B} = \frac{d\beta}{ds}, \nabla_T \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}}{ds}$.

Tanım 2.30 X, s yay parametreli $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere, eğri boyunca vektör alanının modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} X = 0 \tag{2.28}$$

ise X vektör alanına $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca **modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paraleldir,** denir.

Tanım2.31 X, s yay parametreli $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified} X = \nabla_T X - \mathbf{B}, X \rangle \nabla_T \mathbf{B} + \langle \nabla_T \mathbf{B}, X \rangle \mathbf{B} + \mathbf{A}(\mathbf{X}), \tag{2.29}$$

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified} X = \widetilde{\nabla}_T^{0modified} X + \mathbf{A}(\mathbf{X}),$$

tanımlanan $\widetilde{\nabla}_T^{modified} X$, $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker Türevi** dir. Burada $\mathbf{B} = \frac{d\beta}{ds}, \nabla_T \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}}{ds}$.

Tanım 2.32 X, s yay parametreli $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere, eğri boyunca vektör alanının modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified} X = 0 \tag{2.30}$$

ise X vektör alanına $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca **genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paraleldir,** denir.

Tanım 2.33 X, s yay parametreli $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı ve $\langle X, X \rangle_\beta = \langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle + \langle \nabla_T X, \nabla_T X \rangle$ olmak üzere

$$\varepsilon(X) = \frac{1}{2} \int_\beta \langle X, X \rangle_\beta ds = \frac{1}{2} \int_\beta (1 + \langle \nabla_T X, \nabla_T X \rangle) ds \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanan $\varepsilon(X)$ ifadesine X vektör alanının **Sasakian metrik yardımıyla tanımlanan enerjisi** denir (Chacon ve Naveira, 2001; Chacon ve Naveira, 2004).

3. UZAYDAKİ FRENET ÇATISINA GÖRE MANYETİK EĞRİLER

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında, Frenet çatısına göre **T**-manyetik, **N**-manyetik ve **B**-manyetik eğrileri tanımlayacağız.

3.1 Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Manyetik Eğriler

3.1.1 Uzaydaki Frenet çatısına göre T-manyetik eğriler

3-boyutlu Öklid uzayında, Frenet çatısı ile verilen bir eğri $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbf{F_V}$ de, $\mathbb{R}^3$ de manyetik bir alan olsun. Eğer Frenet çatısına göre **T** teğet vektör alanı, Lorentz kuvveti denklemi olan

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \phi(\mathbf{T}) = \mathbf{V} \times \mathbf{T} \tag{3.1}$$

eşitliğini sağlarsa, α eğrisine Frenet çatısına göre **T -manyetik eğri** denir.

Teorem 3.1.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre Lorentz kuvvetleri

$$\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \\ \phi(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \Omega \\ 0 & -\Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

olarak elde edilir.Burada Ω fonksiyonu, $\Omega = g(\phi(\mathbf{N}), \mathbf{B})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.1.2 Uzaydaki Frenet çatısına göre N-manyetik eğriler

3-boyutlu Öklid uzayında, Frenet çatısı ile verilen bir eğri $\beta: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbf{F_V}$ de, $\mathbb{R}^3$ bir de manyetik alan olsun. Eğer Frenet çatısına göre **N** vektör alanı Lorentz kuvveti denklemi olan

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{N} = \phi(\mathbf{N}) = \mathbf{V} \times \mathbf{N} \tag{3.3}$$

eşitliğini sağlarsa, β eğrisine Frenet çatısına göre **N -manyetik eğri** denir (Kazan ve Karadağ, 2017).

Teorem 3.1.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre Lorentz kuvvetleri

$$\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \\ \phi(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & \alpha \\ -\kappa & 0 & \tau \\ -\alpha & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

olarak elde edilir. Burada α fonksiyonu, $\alpha = g(\phi(\mathbf{T}), \mathbf{B})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.1.3 Uzaydaki Frenet çatısına göre B-manyetik eğriler

3-boyutlu Öklid uzayında, Frenet çatısı ile verilen bir eğri $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbf{F_V}$ de, $\mathbb{R}^3$ de manyetik bir alan olsun. Eğer Frenet çatısına göre **B** vektör alanı, Lorentz kuvveti denklemi olan

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{B} = \phi(\mathbf{B}) = \mathbf{V} \times \mathbf{B} \tag{3.5}$$

eşitliğini sağlarsa, β eğrisine Frenet çatısına göre **B -manyetik eğri** denir (Kazan ve Karadağ, 2017).

Teorem 3.1.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre Lorentz kuvvetleri

$$\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{T}) \\ \phi(\mathbf{N}) \\ \phi(\mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_2 & 0 \\ -\Omega_2 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

olarak elde edilir. Burada Ω_2 fonksiyonu, $\Omega_2 = g(\phi(\mathbf{T}), \mathbf{N})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.2 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Lorentz Kuvvetleri

3.2.1 T-manyetik eğrilerin uzaydaki Frenet çatısına göre Lorentz kuvvetleri

Teorem 3.2.1 β, Frenet çatısında **T**-Manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetleri ve **V** manyetik alanı

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{T}) &= k\mathbf{N}, \\ \phi(\mathbf{N}) &= -\kappa\mathbf{T} + \Omega\mathbf{B}, \\ \phi(\mathbf{B}) &= -\Omega\mathbf{N}, \\ \mathbf{V} &= \Omega\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B} \end{aligned} \tag{3.7}$$

olarak elde edilir. Burada Ω fonksiyonu, $\Omega = g(\phi(\mathbf{N}), \mathbf{B})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.2.2 N-manyetik eğrilerin uzaydaki Frenet çatısına göre Lorentz kuvvetleri

Teorem 3.2.2 β, Frenet çatısında **N**-Manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetleri ve **V** manyetik alanı

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{T}) &= k\mathbf{N} + \alpha\mathbf{B}, \\ \phi(\mathbf{N}) &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \\ \phi(\mathbf{B}) &= -\alpha\mathbf{T} - \tau\mathbf{N}, \\ \mathbf{V} &= \tau\mathbf{T} - \alpha\mathbf{N} + \kappa\mathbf{B} \end{aligned} \tag{3.8}$$

olarak elde edilir. Burada α fonksiyonu, $\alpha = g(\phi(\mathbf{T}), \mathbf{B})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

3.2.3 B-manyetik eğrilerin uzaydaki Frenet çatısına göre Lorentz kuvvetleri

Teorem 3.2.3 β, Frenet çatısında **B**-Manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetleri ve $\mathbf{V}$ manyetik alanı

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{T}) &= \Omega_2 \mathbf{N}, \\ \phi(\mathbf{N}) &= -\Omega_2 \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \\ \phi(\mathbf{B}) &= -\tau \mathbf{N}, \\ \mathbf{V} &= \tau \mathbf{T} + \Omega_2 \mathbf{B} \end{aligned} \tag{3.9}$$

olarak elde edilir. Burada Ω_2 fonksiyonu, $\Omega_2 = g(\phi(\mathbf{T}), \mathbf{N})$ ile tanımlanan belirli bir fonksiyondur (Kazan ve Karadağ, 2017).

4. MANYETİK EĞRİLERİN UZAYDAKİ FRENET ÇATISINA GÖRE ÇEŞİTLİ TÜREVLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında; Frenet çatısına göre **T**-manyetik, **N**-manyetik ve **B**-manyetik eğrilerinin türevlerini, Fermi-Walker türevlerini, normal Fermi-Walker türevlerini ve modifiye Fermi-Walker türevlerini inceleyeceğiz.

4.1 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Türevi

Teorem 4.1.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\nabla_T\phi(\mathbf{T}) = -\kappa^2\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B},\\
&\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + (-\kappa^2 - \tau\Omega)\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B},\\
&\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = \Omega\kappa\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{N} - \Omega\tau\mathbf{B},\\
&\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + (\Omega\kappa - \kappa\tau)\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

dir.

Teorem 4.1.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = -\kappa^2\mathbf{T} + (\kappa' - \alpha\tau)\mathbf{N} + (\kappa\tau + \alpha')\mathbf{B},\\
&\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + (-\kappa^2 - \tau^2)\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},\\
&\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = (-\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{T} + (-\alpha\kappa - \tau')\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B},\\
&\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = (\tau' + \alpha\kappa)\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} + (-\alpha\tau + \kappa')\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

dir.

Teorem 4.1.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{T}) = -\Omega_2\kappa\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\tau\mathbf{B},\\
&\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} + (-\Omega_2\kappa - \tau^2)\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},\\
&\nabla_{\mathbf{T}}\phi(\mathbf{B}) = \tau\kappa\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B},\\
&\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + (\tau\kappa - \Omega_2\tau)\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

dir.

4.2 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Fermi- Walker Türevi

Teorem 4.2.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{T}) &= \kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}, \\ \widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{N}) &= -\kappa'\mathbf{T} - \Omega\tau\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B}, \\ \widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{B}) &= -\Omega'\mathbf{N} - \Omega\tau\mathbf{B}, \\ \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{V} &= \Omega'\mathbf{T} - \kappa\tau\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} \end{aligned} \tag{4.4}$$

dir.

Teorem 4.2.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{T}) &= (\kappa' - \alpha\tau)\mathbf{N} + (\kappa\tau + \alpha')\mathbf{B}, \\ \widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{N}) &= -\kappa'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}, \\ \widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{B}) &= -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}, \\ \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{V} &= \tau'\mathbf{T} + (-\alpha' - \tau\kappa)\mathbf{N} + (-\alpha\tau + \kappa')\mathbf{B} \end{aligned} \tag{4.5}$$

dir.

Teorem 4.2.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{T}) &= \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\tau\mathbf{B}, \\ \widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{N}) &= -\Omega_2'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}, \\ \widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{B}) &= -\tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}, \\ \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{V} &= \tau'\mathbf{T} - \Omega_2\tau\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B} \end{aligned} \tag{4.6}$$

dir.

4.3 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Normal Fermi- Walker Türevi

Teorem 4.3.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Normal Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

dir.

Teorem 4.3.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Normal Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

dir.

Teorem 4.3.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Normal Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

dir.

4.4 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Modifiye (Bi-Normal) Fermi- Walker Türevi

Teorem 4.4.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Modifiye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{T}) = -\kappa^2\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{B}) = \Omega\kappa\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

dir.

Teorem 4.4.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Modifiye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{T}) = -\kappa^2\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{B}) = (-\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{T} + (-\alpha\kappa - \tau')\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{V} = (\tau' + \alpha\kappa)\mathbf{T} + (\tau\kappa - \alpha')\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

dir.

Teorem 4.4.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $\phi(\mathbf{T})$, $\phi(\mathbf{N})$, $\phi(\mathbf{B})$ Lorentz kuvvetlerinin ve **V** manyetik alanının Modifiye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevi sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{T}) = -\Omega_2\kappa\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{B}) = \tau\kappa\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N},\\
&\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

dir.

5. MANYETİK EĞRİLERİN UZAYDAKİ FRENET ÇATISINA GÖRE ÇEŞİTLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREVLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında; Frenet çatısına göre **T**-manyetik, **N**-manyetik ve **B**-manyetik eğrilerinin genelleştirilmiş Fermi-Walker türevlerini, genelleştirilmiş normal Fermi-Walker türevlerini ve genelleştirilmiş modifiye Fermi-Walker türevlerini inceleyeceğiz.

5.1 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi

Teorem 5.1.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T}))$, $A(\phi(\mathbf{N}))$, $A(\phi(\mathbf{B}))$ ve $A(\mathbf{V})$ alanları sırasıyla

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B},$$
$$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} + \Omega\tau\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B}, \tag{5.1}$$
$$A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega'\mathbf{N} + \Omega\tau\mathbf{B},$$
$$A(\mathbf{V}) = -\Omega'\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. Frenet çatısına göre Fermi-Walker türevinin

$$\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B},$$
$$\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B} - \Omega\tau\mathbf{N},$$
$$\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} - \Omega\tau\mathbf{B},$$
$$\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B} - \kappa\tau\mathbf{N}$$

şeklinde ifade edildiğini Teorem 4.2.1.'den biliyoruz. $\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}$ Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{T})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{T}))$ Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Sonuç olarak

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B} - \Omega\tau\mathbf{N}$ Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{N})) = -\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{N})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{N}))$ Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\phi(\mathbf{N})) = -(-\kappa'\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B} - \Omega\tau\mathbf{N})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} + \Omega\tau\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} - \Omega\tau\mathbf{B}$ Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{B})) = -\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{B})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{B}))$ Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\phi(\mathbf{B})) = -(-\Omega'\mathbf{N} - \Omega\tau\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega'\mathbf{N} + \Omega\tau\mathbf{B}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B} - \kappa\tau\mathbf{N}$ Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\mathbf{V}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{V}$

dır. Dolayısıyla $A(\mathbf{V})$ Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Dolayısıyla

$A(\mathbf{V}) = -(\Omega'\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B} - \kappa\tau\mathbf{N})$

ya da

$A(\mathbf{V}) = -\Omega'\mathbf{T} + \kappa\tau\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}$

elde edilir.

Teorem 5.1.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T}))$, $A(\phi(\mathbf{N}))$, $A(\phi(\mathbf{B}))$ ve $A(\mathbf{V})$ alanları sırasıyla

$$
\begin{aligned}
A(\phi(\mathbf{T})) &= (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{N} + (-\kappa\tau - \alpha')\mathbf{B},\\
A(\phi(\mathbf{N})) &= \kappa'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B},\\
A(\phi(\mathbf{B})) &= \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B},\\
A(\mathbf{V}) &= -\tau'\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N} + (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. Frenet çatısına göre Fermi-Walker türevinin

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{T}) &= (\kappa' - \alpha\tau)\mathbf{N} + (\kappa\tau + \alpha')\mathbf{B},\\
\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{N}) &= -\kappa'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},\\
\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{B}) &= -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B},\\
\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{V} &= (\tau')\mathbf{T} + (-\alpha' - \tau\kappa)\mathbf{N} + (-\alpha\tau + \kappa')\mathbf{B}
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edildiğini Teorem 4.2.2.'den biliyoruz. $\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{T}) = (\kappa' - \alpha\tau)\mathbf{N} + (\kappa\tau + \alpha')\mathbf{B}$ Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{T})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{T}))$ Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -((\kappa' - \alpha\tau)\mathbf{N} + (\kappa\tau + \alpha')\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{T})) = (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{N} + (-\kappa\tau - \alpha')\mathbf{B}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}$ Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{N})) = -\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{N})$$

dır. Dolayısıyla $\mathbf{A}(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{N}))$ Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Sonuç olarak

$$A(\phi(\mathbf{N})) = -(-\kappa'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}$$

elde edilir.

Benzer şekilde$\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}$ Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$A(\phi(\mathbf{B})) = -\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{B})$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{B}))$ Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{B})) = -(-\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{V} = (\tau')\mathbf{T} + (-\alpha' - \tau\kappa)\mathbf{N} + (-\alpha\tau + \kappa')\mathbf{B}$ Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\mathbf{V}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{V}$

dır. Dolayısıyla $\mathbf{A}(\mathbf{V})$ Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\mathbf{V}) = -((\tau')\mathbf{T} + (-\alpha' - \tau\kappa)\mathbf{N} + (-\alpha\tau + \kappa')\mathbf{B})$

ya da

$A(\mathbf{V}) = (-\tau')\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N} + (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B}$

elde edilir.

Teorem 5.1.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T}))$, $A(\phi(\mathbf{N}))$, $A(\phi(\mathbf{B}))$ ve $A(\mathbf{V})$ alanları sırasıyla

$$\begin{aligned} A(\phi(\mathbf{T})) &= -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}, \\ A(\phi(\mathbf{N})) &= \Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}, \\ A(\phi(\mathbf{B})) &= \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}, \\ A(\mathbf{V}) &= -\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.3}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre Fermi-Walker türevinin

$$\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\tau\mathbf{B},$$

$$\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},$$

$$\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B},$$

$$\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} - \Omega_2\tau\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}$$

şeklinde ifade edildiğini Teorem 4.2.1.'den biliyoruz. $\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\tau\mathbf{B}$ Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{T})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{T}))$ Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -(\Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\tau\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}$ Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{N})) = -\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{N})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{N}))$ Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\phi(\mathbf{N})) = -(-\Omega_2'\mathbf{T} - \tau^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B}$ Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{B})) = -\widetilde{\nabla}_T^0\phi(\mathbf{B})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{B}))$ Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\phi(\mathbf{B})) = -(-\tau'\mathbf{N} - \tau^2\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{B})) = \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} - \Omega_2\tau\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}$ Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^0\mathbf{X}$$

dır. Dolayısıyla $A(\mathbf{V})$ Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\mathbf{V}) = -(\tau'\mathbf{T} - \Omega_2\tau\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\mathbf{V}) = -\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}$$

elde edilir.

5.2 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Genelleştirilmiş Normal Fermi-Walker Türevi

Teorem 5.2.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T}))$, $A(\phi(\mathbf{N}))$, $A(\phi(\mathbf{B}))$ ve $A(\mathbf{V})$ alanları sırasıyla

$$\begin{aligned} &A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N}, \\ &A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B}, \\ &A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega'\mathbf{N}, \\ &A(\mathbf{V}) = -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.4}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre normal Fermi-Walker türevinin

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N},$$
$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B},$$
$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N},$$
$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B}$$

şeklinde ifade edildiğini Teorem 4.3.1.'den biliyoruz. $\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N}$ normal Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{T})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{T}))$ normal Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -(\kappa'\mathbf{N})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B}$ normal Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\boldsymbol{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\boldsymbol{X} + A(\boldsymbol{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş normal Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{N})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{N})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{N}))$ normal Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\phi(\mathbf{N})) = -(-\kappa'\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N}$ normal Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş normal Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{B})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{B})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{B}))$ normal Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\phi(\mathbf{B})) = -(-\Omega'\mathbf{N})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega'\mathbf{N}$$

elde edilir.

Benzer şekilde$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B}$ normal Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş normal Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\mathbf{V}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{V}$$

dır. Dolayısıyla $A(\mathbf{V})$ normal Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\mathbf{V}) = -(\Omega'\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\mathbf{V}) = -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B}$$

elde edilir.

Teorem 5.2.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T}))$, $A(\phi(\mathbf{N}))$, $A(\phi(\mathbf{B}))$ ve $A(\mathbf{V})$ alanları sırasıyla

$$\begin{aligned} A(\phi(\mathbf{T})) &= -\kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}, \\ A(\phi(\mathbf{N})) &= \kappa'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}, \\ A(\phi(\mathbf{B})) &= \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}, \\ A(\mathbf{V}) &= -\tau'\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.5}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre normal Fermi-Walker türevinin

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{T}) &= \kappa'\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B}, \\ \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{N}) &= -\kappa'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B}, \\ \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{B}) &= -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N}, \\ \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{V} &= \tau'\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edildiğini Teorem 4.3.2.'den biliyoruz. $\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B}$ normal Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{T})$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{T}))$ normal Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{T})) = -(\kappa'\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{B})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B}$ normal Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş normal Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\phi(\mathbf{N})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{N})$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{N}))$ normal Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{N})) = -(-\kappa'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{B}) = -\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N}$ normal Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş normal Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\phi(\mathbf{B})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{B})$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{B}))$ normal Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{B})) = -(-\alpha'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{N})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}$ normal Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş normal Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\mathbf{V}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{V}$

dır. Dolayısıyla $A(\mathbf{V})$ normal Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\mathbf{V}) = -(\tau'\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B})$

ya da

$A(\mathbf{V}) = -\tau'\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}$

elde edilir.

Teorem 5.2.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T}))$, $A(\phi(\mathbf{N}))$, $A(\phi(\mathbf{B}))$ ve $A(\mathbf{V})$ alanları sırasıyla

$$\begin{aligned} &A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2'\mathbf{N}, \\ &A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}, \\ &A(\phi(\mathbf{B})) = \tau'\mathbf{N}, \\ &A(\mathbf{V}) = -\tau'\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.6}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre normal Fermi-Walker türevinin

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N},$

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B},$

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N},$

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{B}$

şeklinde ifade edildiğini Teorem 4.3.3.'den biliyoruz. $\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N}$ normal Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{T})$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{T}))$ normal Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{T})) = -(\Omega_2'\mathbf{N})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2'\mathbf{N}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B}$ normal Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş normal Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\phi(\mathbf{N})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{N})$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{N}))$ normal Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{N})) = -(-\Omega_2'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{B})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N}$ normal Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle \mathbf{X}, \mathbf{N}\rangle \nabla_T\mathbf{N} + \langle \nabla_T\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{N} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş normal Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\phi(\mathbf{B})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\phi(\mathbf{B})$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{B}))$ normal Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{B})) = -(-\tau'\mathbf{N})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{B})) = \tau'\mathbf{N}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{B}$ normal Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle \mathbf{X}, \mathbf{N}\rangle \nabla_T\mathbf{N} + \langle \nabla_T\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{N} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş normal Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T^{normal}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\mathbf{V}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{V}$

dır. Dolayısıyla $A(\mathbf{V})$ genelleştirilmiş normal Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\mathbf{V}) = -(\tau'\mathbf{T} + \Omega_2'\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\mathbf{V}) = -\tau'\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{B}$$

elde edilir.

5.3 Manyetik Eğrilerin Uzaydaki Frenet Çatısına Göre Genelleştirilmiş Modifiye(Bi-Normal) Fermi-Walker Türevi

Teorem 5.3.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T}))$, $A(\phi(\mathbf{N}))$, $A(\phi(\mathbf{B}))$ ve $A(\mathbf{V})$ alanları sırasıyla

$$\begin{aligned} A(\phi(\mathbf{T})) &= \kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N}, \\ A(\phi(\mathbf{N})) &= \kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B}, \\ A(\phi(\mathbf{B})) &= -\Omega\kappa\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{N}, \\ A(\mathbf{V}) &= -\Omega'\mathbf{T} - \Omega\kappa\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B} \end{aligned} \tag{5.7}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T},$$

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B},$$

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} + \Omega\kappa\mathbf{T},$$

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}$$

şeklinde ifade edildiğini Teorem 4.4.1.'den biliyoruz. $\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T}$ modifiye(bi-Normal) Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{T})$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{T}))$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{T})) = -(\kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{T})) = \kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B}$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\phi(\mathbf{N})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{N})$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{N}))$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{N})) = -(-\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \Omega'\mathbf{B})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{B}) = -\Omega'\mathbf{N} + \Omega\kappa\mathbf{T}$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{B})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{B})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{B}))$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\phi(\mathbf{B})) = -(-\Omega'\mathbf{N} + \Omega\kappa\mathbf{T})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{B})) = -\Omega\kappa\mathbf{T} + \Omega'\mathbf{N}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{V} = \Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\mathbf{V}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{V}$$

dır. Dolayısıyla $A(\mathbf{V})$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\mathbf{V}) = -(\Omega'\mathbf{T} + \Omega\kappa\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\mathbf{V}) = -\Omega'\mathbf{T} - \Omega\kappa\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}$$

elde edilir.

Teorem 5.3.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T}))$, $A(\phi(\mathbf{N}))$, $A(\phi(\mathbf{B}))$ ve $A(\mathbf{V})$ alanları sırasıyla

$$
\begin{aligned}
&A(\phi(\mathbf{T})) = \kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B},\\
&A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B},\\
&A(\phi(\mathbf{B})) = (\alpha' - \tau\kappa)\mathbf{T} + (\alpha\kappa + \tau')\mathbf{N},\\
&A(\mathbf{V}) = (-\tau' - \alpha\kappa)\mathbf{T} + (-\tau\kappa + \alpha')\mathbf{N} + (-\kappa')\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{B},$$

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},$$

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{B}) = (-\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{T} + (-\alpha\kappa - \tau')\mathbf{N},$$

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{V} = (\tau' + \alpha\kappa)\mathbf{T} + (\tau\kappa - \alpha')\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}$$

şeklinde ifade edildiğini Teorem 4.4.2.'den biliyoruz. $\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{T}) = \kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{B}$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{T})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{T}))$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -(\kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T} - \alpha'\mathbf{B}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{N}) = -\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{N})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{N})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{N}))$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\phi(\mathbf{N})) = -(-\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{B}) = (-\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{T} + (-\alpha\kappa - \tau')\mathbf{N}$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi için

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B} + A(\mathbf{X})$$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\phi(\mathbf{B})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{B})$$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{B}))$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{B})) = -((-\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{T} + (-\alpha\kappa - \tau')\mathbf{N})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{B})) = (\alpha' - \tau\kappa)\mathbf{T} + (\alpha\kappa + \tau')\mathbf{N}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{V} = (\tau' + \alpha\kappa)\mathbf{T} + (\tau\kappa - \alpha')\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B}$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\mathbf{V}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{V}$

dır. Dolayısıyla $A(\mathbf{V})$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\mathbf{V}) = -((\tau' + \alpha\kappa)\mathbf{T} + (\tau\kappa - \alpha')\mathbf{N} + \kappa'\mathbf{B})$

ya da

$A(\mathbf{V}) = (-\tau' - \alpha\kappa)\mathbf{T} + (-\tau\kappa + \alpha')\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}$

elde edilir.

Teorem 5.3.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T}))$, $A(\phi(\mathbf{N}))$, $A(\phi(\mathbf{B}))$ ve $A(\mathbf{V})$ alanları sırasıyla

$$\begin{aligned} A(\phi(\mathbf{T})) &= \Omega_2\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{N}, \\ A(\phi(\mathbf{N})) &= \Omega_2'\mathbf{T} + \Omega_2\kappa\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}, \qquad (5.9) \\ A(\phi(\mathbf{B})) &= -\tau\kappa\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}, \\ A(\mathbf{V}) &= -\tau'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B} \end{aligned}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde Frenet çatısına göre modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\kappa\mathbf{T},$

$\tilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B},$

$\tilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T},$

$\tilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}$

şeklinde ifade edildiğini Teorem 4.4.3.'den biliyoruz. $\tilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{T}) = \Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\kappa\mathbf{T}$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi için

$\tilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\tilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \tilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\tilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\tilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\tilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{T})$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{T}))$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{T})) = -(\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\kappa\mathbf{T})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2'\mathbf{N} + \Omega_2\kappa\mathbf{T}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\tilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{N}) = -\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B}$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi için

$\tilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\tilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \tilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\tilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\tilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\phi(\mathbf{N})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{N})$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{N}))$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{N})) = -(-\Omega_2'\mathbf{T} - \Omega_2\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{B})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2'\mathbf{T} + \Omega_2\kappa\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{B}) = -\tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T}$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paralel olması

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = 0$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}$

eşitliği yazılabilir. Ve

$A(\phi(\mathbf{B})) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\phi(\mathbf{B})$

dır. Dolayısıyla $A(\phi(\mathbf{B}))$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$A(\phi(\mathbf{B})) = -(-\tau'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{T})$

ya da

$A(\phi(\mathbf{B})) = -\tau\kappa\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}$

elde edilir.

Benzer şekilde $\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{V} = \tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B}$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi için

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \nabla_T\mathbf{X} - \langle\mathbf{X},\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B} + A(\mathbf{X})$

formülü ile hesaplanır. Aynı zamanda

$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = \widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} + A(\mathbf{X})$

şeklinde de yazılabilir. Burada genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker anlamında paralel olması

$$\widetilde{\nabla}_T^{modified}\mathbf{X} = 0$$

denklemine bağlıdır. Bu durumda

$$A(\mathbf{X}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}$$

eşitliği yazılabilir. Ve

$$A(\mathbf{V}) = -\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{V}$$

dır. Dolayısıyla $A(\mathbf{V})$ modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevinin negatifine eşit olur. Ve

$$A(\mathbf{V}) = -(\tau'\mathbf{T} + \tau\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\mathbf{B})$$

ya da

$$A(\mathbf{V}) = -\tau'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}$$

elde edilir.

6. MANYETİK EĞRİLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ FERMİ-WALKER TÜREVİ YARDIMIYLA ENERJİLERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında; Frenet çatısına göre **T**-manyetik, **N**-manyetik ve **B**-manyetik eğrilerinin türev yardımıyla enerjilerini, genelleştirilmiş Fermi-Walker türev yardımıyla enerjilerini, genelleştirilmiş Normal Fermi-Walker türev yardımıyla enerjilerini ve genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türev yardımıyla enerjilerini inceleyeceğiz.

6.1 Manyetik Eğrilerin Türev Yardımıyla Enerjileri

Teorem 6.1.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{B})), A(\mathbf{V})$ alanlarının türev yardımıyla enerjileri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\varepsilon(A(\phi(\mathbf{T}))) &= \tfrac{1}{2}\int_{\beta} ((\kappa')^2 + \kappa^2\tau^2 + (\kappa'')^2 \\
&-2\kappa''\kappa\tau^2 + (\kappa')^2\kappa^2 + (\kappa')^2\tau^2 + \kappa^2(\tau')^2 \\
&+4(\kappa')^2\tau^2 + 4\kappa\kappa'\tau\tau' + \kappa^2\tau^4)ds, \\
\varepsilon(A(\phi(\mathbf{N}))) &= \tfrac{1}{2}\int_{\beta} ((\kappa')^2 + (\Omega')^2 + \Omega^2\tau^2 \\
&+(\kappa'')^2 + \Omega^2\tau^2\kappa^2 - 2\kappa''\Omega\tau\kappa + (\kappa')^2\kappa^2 \\
&+4(\Omega')^2\tau^2 + \Omega^2(\tau')^2 + 4\kappa'\kappa\Omega'\tau + 2\kappa'\kappa\Omega\tau' \\
&+4\Omega'\Omega\tau'\tau + (\Omega'')^2 + \Omega^2\tau^4 - 2\Omega''\Omega\tau^2)ds, \\
\varepsilon(A(\phi(\mathbf{B}))) &= \tfrac{1}{2}\int_{\beta} ((\Omega')^2 + \Omega^2\tau^2 + (\Omega'')^2 \\
&+\Omega^2\tau^4 - 2\Omega''\Omega\tau^2 + (\Omega')^2\kappa^2 + 4(\Omega')^2\tau^2 \\
&+\Omega^2(\tau')^2 + 4\Omega'\Omega\tau'\tau)ds, \\
\varepsilon(A(\mathbf{V})) &= \tfrac{1}{2}\int_{\beta} ((\Omega')^2 + (\kappa')^2 + \kappa^2\tau^2 + (\Omega'')^2 \\
&+\kappa^4\tau^2 + 2\Omega''\kappa^2\tau + (\Omega')^2\kappa^2 + 4(\kappa')^2\tau^2 \\
&+\kappa^2(\tau')^2 - 4\Omega'\kappa\kappa'\tau - 2\Omega'\kappa^2\tau' + 2\kappa'\tau'\tau \\
&+4\kappa'\kappa\tau'\tau + (\kappa'')^2 + \kappa^2\tau^4 - 2\kappa''\kappa\tau^2)ds
\end{aligned} \tag{6.1}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B},$$

$$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B} + \Omega\tau\mathbf{N},$$

$A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega'\mathbf{N} + \Omega\tau\mathbf{B},$

$A(\mathbf{V}) = -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B} + \kappa\tau\mathbf{N}$

'dir ve Teorem 5.1.1' de hesaplanmıştır. Buradan $A(\phi(\mathbf{T}))$ nin türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B})$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \kappa'\nabla_T\mathbf{N}$

$-\kappa'\tau\mathbf{B} - \kappa\tau'\mathbf{B} - \kappa\tau\nabla_T\mathbf{B}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \kappa'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$-\kappa'\tau\mathbf{B} - \kappa\tau'\mathbf{B} - \kappa\tau(-\tau\mathbf{N})$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = \kappa\kappa'\mathbf{T} - \kappa''\mathbf{N} - 2\kappa'\tau\mathbf{B}$

$-\kappa\tau'\mathbf{B} + \kappa\tau^2\mathbf{N}$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = \kappa\kappa'\mathbf{T} + (-\kappa'' + \kappa\tau^2)\mathbf{N}$

$+(-2\kappa'\tau - \kappa\tau')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{T}))\rangle$

$+\langle\nabla_{\mathbf{T}}A(\phi(\mathbf{T})), \nabla_{\mathbf{T}}A(\phi(\mathbf{T}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B}, -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B}\rangle$

$+\langle\kappa\kappa'\mathbf{T} + (-\kappa'' + \kappa\tau^2)\mathbf{N} + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau')\mathbf{B},$

$\kappa\kappa'\mathbf{T} + (-\kappa'' + \kappa\tau^2)\mathbf{N} + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + \kappa^2\tau^2$

$+\kappa^2(\kappa')^2 + (\kappa'')^2 + \kappa^2\tau^4 - 2\kappa''\kappa\tau^2$

$+4(\kappa')^2\tau^2 + \kappa^2(\tau')^2 + 4\kappa\kappa'\tau\tau')ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{N}))$ nin türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X}))$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B} + \Omega\tau\mathbf{N})$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} - \Omega''\mathbf{B}$

$-\Omega'(-\tau\mathbf{N}) + \Omega'\tau\mathbf{N} + \Omega\tau'\mathbf{N} + \Omega\tau(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} - \Omega''\mathbf{B}$

$+2\Omega'\tau\mathbf{N} + \Omega\tau'\mathbf{N} - \Omega\tau\kappa\mathbf{T} + \Omega\tau^2\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{N}))\rangle$

$+\langle\nabla_{\mathbf{T}} A(\phi(\mathbf{N})), \nabla_{\mathbf{T}} A(\phi(\mathbf{N}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B} + \Omega\tau\mathbf{N}, \kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B}$

$+\Omega\tau\mathbf{N}\rangle + \langle\kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} - \Omega''\mathbf{B} + 2\Omega'\tau\mathbf{N} + \Omega\tau'\mathbf{N}$

$-\Omega\tau\kappa\mathbf{T} + \Omega\tau^2\mathbf{B}, \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} - \Omega''\mathbf{B} + 2\Omega'\tau\mathbf{N}$

$+\Omega\tau'\mathbf{N} - \Omega\tau\kappa\mathbf{T} + \Omega\tau^2\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + (\Omega')^2 + \Omega^2\tau^2 + (\kappa'')^2$

$+\Omega^2\tau^2\kappa^2 - 2\kappa''\Omega\tau\kappa + (\kappa')^2\kappa^2 + 4(\Omega')^2\tau^2$

$+\Omega^2(\tau')^2 + 4\kappa'\kappa\Omega'\tau + 2\kappa'\kappa\Omega\tau' + 4\Omega'\Omega\tau'\tau$

$+(\Omega'')^2 + \Omega^2\tau^4 - 2\Omega''\Omega\tau^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{B}))$ nin türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X}))$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\Omega'\mathbf{N} + \Omega\tau\mathbf{B})$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega''\mathbf{N} + \Omega'\nabla_T\mathbf{N}$

$+\Omega'\tau\mathbf{B}+\Omega\tau'\mathbf{B}+\Omega\tau\nabla_T\mathbf{B}$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B}))=\Omega''\mathbf{N}-\Omega'\kappa\mathbf{T}$

$+\mathbf{2}\Omega'\tau\mathbf{B}+\Omega\tau'\mathbf{B}-\Omega\tau^2\mathbf{N}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{B})))=\frac{1}{2}\int_\beta\,(\langle A(\phi(\mathbf{B})),A(\phi(\mathbf{B}))\rangle$

$+\langle\nabla_\mathbf{T}A(\phi(\mathbf{B})),\nabla_\mathbf{T}A(\phi(\mathbf{B}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{B})))=\frac{1}{2}\int_\beta\,(\langle\Omega'\mathbf{N}+\Omega\tau\mathbf{B},\Omega'\mathbf{N}+\Omega\tau\mathbf{B}\rangle$

$+\langle\Omega''\mathbf{N}-\Omega'\kappa\mathbf{T}+\mathbf{2}\Omega'\tau\mathbf{B}+\Omega\tau'\mathbf{B}-\Omega\tau^2\mathbf{N},$

$\Omega''\mathbf{N}-\Omega'\kappa\mathbf{T}+\mathbf{2}\Omega'\tau\mathbf{B}+\Omega\tau'\mathbf{B}-\Omega\tau^2\mathbf{N}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{B})))=\frac{1}{2}\int_\beta\,((\Omega')^2+\Omega^2\tau^2+(\Omega'')^2$

$+\Omega^2\tau^4-2\Omega''\Omega\tau^2+(\Omega')^2\kappa^2$

$+4(\Omega')^2\tau^2+\Omega^2(\tau')^2+4\Omega'\Omega\tau'\tau)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\mathbf{V})$’nin türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X}=\nabla_\mathbf{T}\mathbf{X}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X}))=\nabla_T A(\phi(\mathbf{X}))$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V})=\nabla_\mathbf{T}(-\Omega'\mathbf{T}-\kappa'\mathbf{B}+\kappa\tau\mathbf{N})$

dır. Dolayısıyla

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V})=-\Omega''\mathbf{T}-\Omega'\nabla_T\mathbf{T}-\kappa''\mathbf{B}$

$-\kappa'\nabla_T\mathbf{B}+\kappa'\tau\mathbf{N}+\kappa\tau'\mathbf{N}+\kappa\tau\nabla_T\mathbf{N}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V})=-\Omega''\mathbf{T}-\Omega'\kappa\mathbf{N}-\kappa''\mathbf{B}+2\kappa'\tau\mathbf{N}$

$+\kappa\tau'\mathbf{N}-\kappa^2\tau\mathbf{T}+\kappa\tau^2\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon(A(\mathbf{V}))=\frac{1}{2}\int_\beta\,(\langle A(\mathbf{V}),A(\mathbf{V})\rangle+\langle\nabla_\mathbf{T}A(\mathbf{V}),\nabla_\mathbf{T}A(\mathbf{V})\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(A(\mathbf{V}))=\frac{1}{2}\int_\beta\langle-\Omega'\mathbf{T}-\kappa'\mathbf{B}+\kappa\tau\mathbf{N},-\Omega'\mathbf{T}$
$-\kappa'\mathbf{B}+\kappa\tau\mathbf{N}\rangle+\langle-\Omega''\mathbf{T}-\Omega'\kappa\mathbf{N}-\kappa''\mathbf{B}$
$+2\kappa'\tau\mathbf{N}+\kappa\tau'\mathbf{N}-\kappa^2\tau\mathbf{T}+\kappa\tau^2\mathbf{B},$
$-\Omega''\mathbf{T}-\Omega'\kappa\mathbf{N}-\kappa''\mathbf{B}+2\kappa'\tau\mathbf{N}$
$+\kappa\tau'\mathbf{N}-\kappa^2\tau\mathbf{T}+\kappa\tau^2\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon(A(\mathbf{V}))=\frac{1}{2}\int_\beta((\Omega')^2+(\kappa')^2+\kappa^2\tau^2+(\Omega'')^2$
$+\kappa^4\tau^2+2\Omega''\kappa^2\tau+(\Omega')^2\kappa^2+4(\kappa')^2\tau^2$
$+\kappa^2(\tau')^2-4\Omega'\kappa\kappa'\tau-2\Omega'\kappa^2\tau'+2\kappa'\tau'\tau$
$+4\kappa'\kappa\tau'\tau+(\kappa'')^2+\kappa^2\tau^4-2\kappa''\kappa\tau^2)ds$

elde edilir.

Teorem 6.1.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{B})), A(\mathbf{V})$ alanlarının türev yardımıyla enerjileri sırasıyla

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{T})))=\frac{1}{2}\int_\beta((\kappa')^2+\alpha^2\tau^2-2\kappa'\alpha\tau+\kappa^2\tau^2$
$+(\alpha')^2+2\kappa\tau\alpha'+(\kappa')^2\kappa^2+\alpha^2\tau^2\kappa^2-2\kappa'\kappa^2\alpha\tau$
$+(\kappa'')^2+4(\alpha')^2\tau^2+\alpha^2(\tau')^2+\kappa^2\tau^4-4\kappa''\alpha'\tau$
$-2\kappa''\alpha\tau'-2\kappa''\kappa\tau^2+4\alpha'\tau\alpha\tau'+4\alpha'\tau^3\kappa+2\alpha\tau'\kappa\tau^2$
$+4(\kappa')^2(\tau)^2+\alpha^2\tau^4+\kappa^2(\tau')^2+(\alpha'')^2+4\kappa'\kappa\tau'\tau$
$-4\kappa'\alpha\tau^3+4\kappa'\tau\alpha''-2\alpha\tau^2\kappa\tau'-2\alpha\tau^2\alpha''+2\kappa\tau'\alpha'')ds,$

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{N})))=\frac{1}{2}\int_\beta((\kappa')^2+\tau^4+(\tau')^2+(\kappa'')^2$
$+\tau^4\boldsymbol{\kappa}^2-2\kappa''\tau^2\boldsymbol{\kappa}(\kappa')^2\kappa^2+6\kappa'\kappa\tau\tau' \qquad (6.2)$
$+9\tau^2(\tau')^2+\boldsymbol{\tau}^6-2\boldsymbol{\tau}^3\tau''+(\tau'')^2)ds,$

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{B})))=\frac{1}{2}\int_\beta((\alpha')^2+(\tau')^2+\tau^4+(\alpha'')^2$
$-2\alpha''\kappa\tau'+\kappa^2(\tau')^2+(\alpha')^2\kappa^2+(\tau'')^2+\tau^6$
$+2\alpha'\kappa\tau''-2\tau''\tau^3-2\tau^3\alpha'\kappa+9\tau^2(\tau')^2)ds,$

$\varepsilon(A(\mathbf{V}))=\frac{1}{2}\int_\beta((\tau')^2+(\alpha')^2+\tau^2\kappa^2+2\alpha'\tau\kappa$
$+\alpha^2\tau^2+(\kappa')^2-2\alpha\tau\kappa'+(\tau'')^2+(\alpha')^2\kappa^2+\tau^2\kappa^4$
$+2\tau''\alpha'\kappa+2\tau''\tau\kappa^2+2\alpha'\kappa^3\tau+4\tau^2(\kappa')^2+(\alpha'')^2$
$+\alpha^2\tau^4+4\alpha''\kappa'\tau-2\alpha''\alpha\tau^2-4\tau^3\alpha\kappa'+4(\alpha')^2\tau^2$
$+\tau^4\kappa^2+\alpha^2(\tau')^2+(\kappa'')^2+4\alpha'\tau^3\kappa+4\alpha'\tau\alpha\tau'$

$-4\alpha'\tau\kappa'' + 2\tau^2\kappa\alpha\tau' - 2\tau^2\kappa\kappa'' - 2\alpha\tau'\kappa'')ds$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{B} + \alpha\tau\mathbf{N},$

$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B},$

$A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B},$

$A(\mathbf{V}) = -\tau'\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N} + (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B}$

'dir veTeorem 5.1.2' de hesaplanmıştır. Buradan $A(\phi(\mathbf{T}))$ nin türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{B} + \alpha\tau\mathbf{N})$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \kappa'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \kappa'\tau\mathbf{B}$

$-\kappa\tau'\mathbf{B} - \kappa\tau(-\tau\mathbf{N}) - \alpha''\mathbf{B} - \alpha'(-\tau\mathbf{N})$

$+\alpha'\tau\mathbf{N} + \alpha\tau'\mathbf{N} + \alpha\tau(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve buradan gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} + \kappa'\kappa\mathbf{T} - 2\kappa'\tau\mathbf{B} + 2\alpha'\tau\mathbf{N}$

$+\alpha\tau'\mathbf{N} - \alpha\tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\tau^2\mathbf{B} - \kappa\tau'\mathbf{B} + \kappa\tau^2\mathbf{N} - \alpha''\mathbf{B}$

elde edilir.

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{T}))\rangle$

$+\langle \nabla_{\mathbf{T}} A(\phi(\mathbf{T})), \nabla_{\mathbf{T}} A(\phi(\mathbf{T}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\kappa'\mathbf{N} + \alpha\tau\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{B},$

$-\kappa'\mathbf{N} + \alpha\tau\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{B}\rangle + \langle -\kappa''\mathbf{N} + \kappa'\kappa\mathbf{T} - 2\kappa'\tau\mathbf{B}$

$+2\alpha'\tau\mathbf{N} + \alpha\tau'\mathbf{N} - \alpha\tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\tau^2\mathbf{B} - \kappa\tau'\mathbf{B} + \kappa\tau^2\mathbf{N}$

$-\alpha''\mathbf{B}, -\kappa''\mathbf{N} + \kappa'\kappa\mathbf{T} - 2\kappa'\tau\mathbf{B} + 2\alpha'\tau\mathbf{N} + \alpha\tau'\mathbf{N}$

$-\alpha\tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\tau^2\mathbf{B} - \kappa\tau'\mathbf{B} + \kappa\tau^2\mathbf{N} - \alpha''\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + \alpha^2\tau^2 - 2\kappa'\alpha\tau + \kappa^2\tau^2$

$+(\alpha')^2 + 2\kappa\tau\alpha' + (\kappa')^2\kappa^2 + \alpha^2\tau^2\kappa^2 - 2\kappa'\kappa^2\alpha\tau$

$+(\kappa'')^2 + 4(\alpha')^2\tau^2 + \alpha^2(\tau')^2 + \kappa^2\tau^4 - 4\kappa''\alpha'\tau$

$-2\kappa''\alpha\tau' - 2\kappa''\kappa\tau^2 + 4\alpha'\tau\alpha\tau' + 4\alpha'\tau^3\kappa + 2\alpha\tau'\kappa\tau^2$

$+4(\kappa')^2(\tau)^2 + \alpha^2\tau^4 + \kappa^2(\tau')^2 + (\alpha'')^2 + 4\kappa'\kappa\tau'\tau$

$-4\kappa'\alpha\tau^3 + 4\kappa'\tau\alpha'' - 2\alpha\tau^2\kappa\tau' - 2\alpha\tau^2\alpha'' + 2\kappa\tau'\alpha'')ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{N}))$ nin türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\kappa'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B})$

bulunur. Ve buradan gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\nabla_T\mathbf{T} + (\tau^2)'\mathbf{N}$

$+\tau^2\nabla_T\mathbf{N} - \tau''\mathbf{B} - \tau'\nabla_T\mathbf{B}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} + (\tau^2)'\mathbf{N}$

$+\tau^2(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \tau''\mathbf{B} - \tau'(-\tau\mathbf{N})$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = (\kappa'' - \tau^2\kappa)\mathbf{T}$

$+(\kappa'\kappa + 3\tau\tau')\mathbf{N} + (\tau^3 - \tau'')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{N}))\rangle$

$+\langle\nabla_{\mathbf{T}}A(\phi(\mathbf{N})), \nabla_{\mathbf{T}}A(\phi(\mathbf{N}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\kappa'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}, \kappa'\mathbf{T}$

$+\tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}\rangle + \langle(\kappa'' - \tau^2\kappa)\mathbf{T} + (\kappa'\kappa$

$+3\tau\tau')\mathbf{N} + (\tau^3 - \tau'')\mathbf{B}, (\kappa'' - \tau^2\kappa)\mathbf{T}$

$+(\kappa'\kappa + 3\tau\tau')\mathbf{N} + (\tau^3 - \tau'')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + \tau^4 + (\tau')^2$

$+(\kappa'')^2 + \tau^4\boldsymbol{\kappa}^2 - 2\kappa''\tau^2\boldsymbol{\kappa}(\kappa')^2\kappa^2 + 6\kappa'\kappa\tau\tau'$

$+9\tau^2(\tau')^2 + \boldsymbol{\tau}^6 - 2\boldsymbol{\tau}^3\tau'' + (\tau'')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{B}))$ nin türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X}))$

elde edilir ve

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B})$

bulunur. Ve buradan gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha''\mathbf{T} + \alpha'\nabla_T\mathbf{T} + \tau''\mathbf{N}$

$+\tau'\nabla_T\mathbf{N} + (\tau^2)'\mathbf{B} + \tau^2\nabla_T\mathbf{B}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha''\mathbf{T} + \alpha'\kappa\mathbf{N} + \tau''\mathbf{N}$

$+\tau'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + (\tau^2)'\mathbf{B} + \tau^2(-\tau\mathbf{N})$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = (\alpha'' - \kappa\tau')\mathbf{T}$

$+(\alpha'\kappa + \tau'' - \tau^3)\mathbf{N} + 3\tau\tau'\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{B})), A(\phi(\mathbf{B}))\rangle$

$+\langle\nabla_{\mathbf{T}} A(\phi(\mathbf{B})), \nabla_{\mathbf{T}} A(\phi(\mathbf{B}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}, \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}$

$+\tau^2\mathbf{B}\rangle + \langle(\alpha'' - \kappa\tau')\mathbf{T} + (\alpha'\kappa + \tau'' - \tau^3)\mathbf{N} + 3\tau\tau'\mathbf{B},$

$(\alpha'' - \kappa\tau')\mathbf{T} + (\alpha'\kappa + \tau'' - \tau^3)\mathbf{N} + 3\tau\tau'\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\alpha')^2 + (\tau')^2 + \tau^4 + (\alpha'')^2$

$-2\alpha''\kappa\tau' + \kappa^2(\tau')^2 + (\alpha')^2\kappa^2 + (\tau'')^2 + \tau^6$

$+2\alpha'\kappa\tau'' - 2\tau''\tau^3 - 2\tau^3\alpha'\kappa + 9\tau^2(\tau')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\mathbf{V})$'nin türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X}))$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\tau'\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N}$

$+(\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B})$

bulunur. Ve buradan gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\nabla_T\mathbf{T} + \alpha''\mathbf{N} + \alpha'\nabla_T\mathbf{N}$

$+\tau'\kappa\mathbf{N} + \tau\kappa'\mathbf{N} + \tau\kappa\nabla_T\mathbf{N} + \alpha'\tau\mathbf{B}$

$+\alpha\tau'\mathbf{B} + \alpha\tau\nabla_T\mathbf{B} - \kappa''\mathbf{B} - \kappa'\nabla_T\mathbf{B}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\kappa\mathbf{N} + \alpha''\mathbf{N} + \alpha'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$+\tau'\kappa\mathbf{N} + \tau\kappa'\mathbf{N} + \tau\kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \alpha'\tau\mathbf{B}$

$+\alpha\tau'\mathbf{B} + \alpha\tau(-\tau\mathbf{N}) - \kappa''\mathbf{B} - \kappa'(-\tau\mathbf{N})$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = (-\tau'' - \alpha'\kappa - \kappa^2\tau)\mathbf{T} + (\alpha'' + 2\tau\kappa' - \alpha\tau^2)\mathbf{N}$

$+(2\alpha'\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^2\kappa + \alpha\tau' - \kappa'')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle A(\mathbf{V}), A(\mathbf{V})\rangle + \langle \nabla_{\mathbf{T}} A(\mathbf{V}), \nabla_{\mathbf{T}} A(\mathbf{V})\rangle\right) ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\tau'\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{N} + \alpha\tau\mathbf{B} - \kappa'\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T}$

$+\alpha'\mathbf{N} + \tau\kappa\mathbf{N} + \alpha\tau\mathbf{B} - \kappa'\mathbf{B}\rangle + \langle(-\tau'' - \alpha'\kappa - \kappa^2\tau)\mathbf{T}$

$+(\alpha'' + 2\tau\kappa' - \alpha\tau^2)\mathbf{N} + (2\alpha'\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^2\kappa + \alpha\tau' - \kappa'')\mathbf{B},$

$(-\tau'' - \alpha'\kappa - \kappa^2\tau)\mathbf{T} + (\alpha'' + 2\tau\kappa' - \alpha\tau^2)\mathbf{N}$

$+(2\alpha'\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^2\kappa + \alpha\tau' - \kappa'')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + (\alpha')^2 + \tau^2\kappa^2 + 2\alpha'\tau\kappa + \alpha^2\tau^2$

$+(\kappa')^2 - 2\alpha\tau\kappa' + (\tau'')^2 + (\alpha')^2\kappa^2 + \tau^2\kappa^4$

$+2\tau''\alpha'\kappa + 2\tau''\tau\kappa^2 + 2\alpha'\kappa^3\tau + 4\tau^2(\kappa')^2$

$+(\alpha'')^2 + \alpha^2\tau^4 + 4\alpha''\kappa'\tau - 2\alpha''\alpha\tau^2 - 4\tau^3\alpha\kappa'$

$+4(\alpha')^2\tau^2 + \tau^4\kappa^2 + \alpha^2(\tau')^2 + (\kappa'')^2 + 4\alpha'\tau^3\kappa$

$+4\alpha'\tau\alpha\tau' - 4\alpha'\tau\kappa'' + 2\tau^2\kappa\alpha\tau' - 2\tau^2\kappa\kappa'' - 2\alpha\tau'\kappa'')ds$

elde edilir.

Teorem 6.1.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{B})), A(\mathbf{V})$ alanlarının türev yardımıyla enerjileri sırasıyla

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega_2')^2 + \Omega_2^2\tau^2 + (\Omega_2')^2\kappa^2$

$+(\Omega_2'')^2 + \Omega_2^2\tau^4 - 2\Omega_2''\Omega_2\tau^2$

$+4(\Omega_2')^2\tau^2 + 4\Omega_2'\tau\Omega_2\tau' + \Omega_2^2(\tau')^2)ds,$

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega_2')^2 + \tau^4 + (\tau')^2$

$+(\Omega_2'')^2 + \tau^4\kappa^2 - 2\Omega_2''\tau^2\kappa + (\Omega_2')^2\kappa^2$

$+9\tau^2(\tau')^2 + 6\tau\tau'\Omega_2'\kappa + \tau^6 + (\tau'')^2 - 2\tau^3\tau'')ds,$

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + \tau^4 + (\tau')^2\kappa^2$ (6.3)

$+(\tau'')^2 + \tau^6 - 2\tau''\tau^3 + 9\tau^2(\tau')^2)ds,$

$\varepsilon(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + \Omega_2^2\tau^2 + (\Omega_2')^2 + (\tau'')^2$

$+\Omega_2^2\tau^2\kappa^2 + 2\tau''\Omega_2\tau\kappa + (\tau')^2\kappa^2 + 4(\Omega_2')^2\tau^2$

$+\Omega_2^2(\tau')^2 - 4\tau'\kappa\Omega_2'\tau - 2(\tau')^2\kappa\Omega_2 + 4\Omega_2'\tau\Omega_2\tau'$

$+\Omega_2^2\tau^4 + (\Omega_2'')^2 - 2\Omega_2''\Omega_2\tau^2)ds$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B},$

$A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B},$

$A(\phi(\mathbf{B})) = \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B},$

$A(\mathbf{V}) = -\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}$

dir ve Teorem 5.1.3' de hesaplanmıştır. Buradan $A(\phi(\mathbf{T}))$ nin türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_\mathbf{T}(-\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B})$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2''\mathbf{N} - \Omega_2'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$-\Omega_2'\tau\mathbf{B} - \Omega_2\tau'\mathbf{B} - \Omega_2\tau(-\tau\mathbf{N})$

bulunur ve gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = (\Omega_2'\kappa)\mathbf{T} + (-\Omega_2'' + \Omega_2\tau^2)\mathbf{N}$

$+(-2\Omega_2'\tau - \Omega_2\tau')\mathbf{B}$

elde edilir.

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{T}))\rangle$

$+\langle \nabla_\mathbf{T} A(\phi(\mathbf{T})), \nabla_\mathbf{T} A(\phi(\mathbf{T}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}, -\Omega_2'\mathbf{N}$

$-\Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle + \langle(\Omega_2'\kappa)\mathbf{T} + (-\Omega_2'' + \Omega_2\tau^2)\mathbf{N}$

$+(-2\Omega_2'\tau - \Omega_2\tau')\mathbf{B}, (\Omega_2'\kappa)\mathbf{T} + (-\Omega_2''$

$+\Omega_2\tau^2)\mathbf{N} + (-2\Omega_2'\tau - \Omega_2\tau')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega_2')^2 + \Omega_2^2\tau^2 + (\Omega_2')^2\kappa^2$

$+(\Omega_2'')^2 + \Omega_2^2\tau^4 - 2\Omega_2''\Omega_2\tau^2$

$+4(\Omega_2')^2\tau^2 + 4\Omega_2'\tau\Omega_2\tau' + \Omega_2^2(\tau')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{N}))$ nin türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X}))$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B})$

bulunur. Ve buradan gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2''\mathbf{T} + \Omega_2'\nabla_T\mathbf{T} + (\tau^2)'\mathbf{N}$

$+\tau^2\nabla_T\mathbf{N} - \tau''\mathbf{B} - \tau'\nabla_T\mathbf{B}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2''\mathbf{T} + \Omega_2'\kappa\mathbf{N} + (\tau^2)'\mathbf{N}$

$+\tau^2(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \tau''\mathbf{B} - \tau'(-\tau\mathbf{N})$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = (\Omega_2'' - \tau^2\kappa)\mathbf{T}$

$+(\Omega_2'\kappa + 3\tau\tau')\mathbf{N} + (\tau^3 - \tau'')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{N}))\rangle$

$+\langle\nabla_{\mathbf{T}}A(\phi(\mathbf{N})), \nabla_{\mathbf{T}}A(\phi(\mathbf{N}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}, \Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N}$

$-\tau'\mathbf{B}\rangle + \langle(\Omega_2'' - \tau^2\kappa)\mathbf{T} + (\Omega_2'\kappa + 3\tau\tau')\mathbf{N} + (\tau^3 - \tau'')\mathbf{B},$

$(\Omega_2'' - \tau^2\kappa)\mathbf{T} + (\Omega_2'\kappa + 3\tau\tau')\mathbf{N} + (\tau^3 - \tau'')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_{\beta} ((\Omega_2')^2 + \tau^4 + (\tau')^2 + (\Omega_2'')^2$

$+\tau^4\kappa^2 - 2\Omega_2''\tau^2\kappa + (\Omega_2')^2\kappa^2 + 9\tau^2(\tau')^2$

$+6\tau\tau'\Omega_2'\kappa + \tau^6 + (\tau'')^2 - 2\tau^3\tau'')ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{B}))$ nin türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X}))$

elde edilir ve

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B})$

bulunur. Ve buradan gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \tau''\mathbf{N} + \tau'\nabla_T\mathbf{N} + (\tau^2)'\mathbf{B} + \tau^2\nabla_T\mathbf{B}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = (-\tau'\kappa)\mathbf{T} + (\tau'' - \tau^3)\mathbf{N} + (3\tau\tau')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle A(\phi(\mathbf{B})), A(\phi(\mathbf{B}))\rangle$

$+\langle\nabla_{\mathbf{T}}A(\phi(\mathbf{B})), \nabla_{\mathbf{T}}A(\phi(\mathbf{B}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle\tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}, \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}\rangle$

$+\langle(-\tau'\kappa)\mathbf{T} + (\tau'' - \tau^3)\mathbf{N} + (3\tau\tau')\mathbf{B},$

$(-\tau'\kappa)\mathbf{T} + (\tau'' - \tau^3)\mathbf{N} + (3\tau\tau')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_{\beta} ((\tau')^2 + \tau^4 + (\tau')^2\kappa^2$

$+(\tau'')^2 + \tau^6 - 2\tau''\tau^3 + 9\tau^2(\tau')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\mathbf{V})$'nin türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X}))$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B})$

veya

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\nabla_T\mathbf{T} + \Omega_2'\tau\mathbf{N}$
$+\Omega_2\tau'\mathbf{N} + \Omega_2\tau\nabla_T\mathbf{N} - \Omega_2''\mathbf{B} - \Omega_2'\nabla_T\mathbf{B}$

bulunur. Ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = (-\tau'' - \Omega_2\tau\kappa)\mathbf{T} + (-\tau'\kappa$
$+2\Omega_2'\tau + \Omega_2\tau')\mathbf{N} + (\Omega_2\tau^2 - \Omega_2'')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\mathbf{V}), A(\mathbf{V})\rangle$
$+\langle \nabla_\mathbf{T} A(\mathbf{V}), \nabla_\mathbf{T} A(\mathbf{V})\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T}$
$+\Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}\rangle + \langle (-\tau'' - \Omega_2\tau\kappa)\mathbf{T}$
$+(-\tau'\kappa + 2\Omega_2'\tau + \Omega_2\tau')\mathbf{N} + (\Omega_2\tau^2 - \Omega_2'')\mathbf{B},$
$(-\tau'' - \Omega_2\tau\kappa)\mathbf{T} + (-\tau'\kappa + 2\Omega_2'\tau + \Omega_2\tau')\mathbf{N}$
$+(\Omega_2\tau^2 - \Omega_2'')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + \Omega_2^2\tau^2 + (\Omega_2')^2 + (\tau'')^2$
$+\Omega_2^2\tau^2\kappa^2 + 2\tau''\Omega_2\tau\kappa + (\tau')^2\kappa^2 + 4(\Omega_2')^2\tau^2$
$+\Omega_2^2(\tau')^2 - 4\tau'\kappa\Omega_2'\tau - 2(\tau')^2\kappa\Omega_2 + 4\Omega_2'\tau\Omega_2\tau'$
$+\Omega_2^2\tau^4 + (\Omega_2'')^2 - 2\Omega_2''\Omega_2\tau^2)ds$

elde edilir.

6.2 Manyetik Eğrilerin Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi Yardımıyla Enerjileri

Teorem 6.2.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{B})), A(\mathbf{V})$ alanlarının genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + \kappa^2\tau^2 + (\kappa'')^2 + \kappa^2\tau^4$
$-2\kappa''\kappa\tau^2 + 4(\kappa')^2\tau^2 + \kappa^2(\tau')^2 + 4\kappa'\tau\kappa\tau')ds,$

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + (\Omega')^2 + \Omega^2\tau^2$
$+(\kappa'')^2 + 4(\Omega')^2\tau^2 + \Omega^2(\tau')^2 + 4\Omega'\tau\Omega\tau'$ (6.4)
$+(\Omega'')^2 + \Omega^2\tau^4 - 2\Omega''\Omega\tau^2)ds,$

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_{\beta} ((\Omega')^2 + \Omega^2\tau^2 + (\Omega'')^2 + \Omega^2\tau^4$

$-2\Omega''\Omega\tau^2 + (4(\Omega')^2\tau^2 + \Omega^2(\tau')^2 + 4\Omega'\tau\Omega\tau')ds,$

$\varepsilon^{fermi}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_{\beta} ((\Omega')^2 + (\kappa')^2 + \kappa^2\tau^2 + (\Omega'')^2$

$+4(\kappa')^2\tau^2 + \kappa^2(\tau')^2 + 4\kappa'\tau\kappa\tau' + \kappa^2\tau^4$

$+(\kappa'')^2 - 2\kappa\tau^2\kappa'')ds$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B},$

$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'T - \Omega'B + \Omega\tau N,$

$A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega'\mathbf{N} + \Omega\tau\mathbf{B},$

$A(\mathbf{V}) = -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B} + \kappa\tau\mathbf{N}$

dir ve Teorem 5.1.1' de hesaplanmıştır. Buradan $A(\phi(\mathbf{T}))$ nin Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B}) - \langle\mathbf{T}, -\kappa'\mathbf{N}$

$-\kappa\tau\mathbf{B}\rangle\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T}, -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B}) - \langle\mathbf{T}, -\kappa'\mathbf{N}$

$-\kappa\tau\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle\kappa\mathbf{N}, -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

bulunur. İç çarpım işlemleri yapılarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \kappa'\nabla_T\mathbf{N} - \kappa'\tau\mathbf{B}$

$-\kappa\tau'\mathbf{B} - \kappa\tau\nabla_T\mathbf{B} - \kappa\kappa'\mathbf{T}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \kappa'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$-\kappa'\tau\mathbf{B} - \kappa\tau'\mathbf{B} - \kappa\tau(-\tau\mathbf{N}) - \kappa\kappa'\mathbf{T}$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - 2\kappa'\tau\mathbf{B} - \kappa\tau'\mathbf{B} + \kappa\tau^2\mathbf{N}$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = (-\kappa'' + \kappa\tau^2)\mathbf{N} + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})),\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B}, -\kappa'\mathbf{N}$

$-\kappa\tau\mathbf{B}\rangle + \langle(-\kappa'' + \kappa\tau^2)\mathbf{N} + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau')\mathbf{B},$

$(-\kappa'' + \kappa\tau^2)\mathbf{N} + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + \kappa^2\tau^2 + (\kappa'')^2 + \kappa^2\tau^4$

$-2\kappa''\kappa\tau^2 + 4(\kappa')^2\tau^2 + \kappa^2(\tau')^2 + 4\kappa'\tau\kappa\tau')ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{N}))$ nin Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X})) - \langle\mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\nabla_T\mathbf{T}$

$+\langle\nabla_T\mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\mathbf{T}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_\mathbf{T}(\kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B} + \Omega\tau\mathbf{N}) - \langle\mathbf{T}, \kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B}$

$+\Omega\tau\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T}, \kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B} + \Omega\tau\mathbf{N}\rangle\mathbf{T}$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} - \Omega''\mathbf{B} - \Omega'(-\tau\mathbf{N}) + \Omega'\tau\mathbf{N}$

$+\Omega\tau'\mathbf{N} + \Omega\tau(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \kappa'\kappa\mathbf{N} + \kappa\Omega\tau\mathbf{T}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \mathbf{2}\Omega'\tau\mathbf{N} + \Omega\tau'\mathbf{N} - \Omega''\mathbf{B} + \Omega\tau^2\mathbf{B}$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - 2\kappa'\tau\mathbf{B} - \kappa\tau'\mathbf{B} + \kappa\tau^2\mathbf{N}$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = (\kappa'')\mathbf{T} + (\mathbf{2}\Omega'\boldsymbol{\tau} + \Omega\tau')\mathbf{N} + (-\boldsymbol{\Omega}'' + \Omega\tau^2)\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\kappa'T - \Omega'B + \Omega\tau N,$

$\kappa'T - \Omega'B + \Omega\tau N\rangle + \langle(\kappa'')\mathbf{T} + (\mathbf{2}\Omega'\boldsymbol{\tau} + \Omega\tau')\mathbf{N}$

$+(-\Omega'' + \Omega\tau^2)\mathbf{B}, (\kappa'')\mathbf{T}$

$+(\mathbf{2}\Omega'\tau + \Omega\tau')\mathbf{N} + (-\boldsymbol{\Omega}'' + \Omega\tau^2)\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + (\Omega')^2 + \Omega^2\tau^2$

$+(\kappa'')^2 + 4(\Omega')^2\tau^2 + \Omega^2(\tau')^2 + 4\Omega'\boldsymbol{\tau}\Omega\tau'$

$+(\Omega'')^2 + \Omega^2\tau^4 - 2\Omega''\Omega\tau^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{B}))$ nin Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X}))$

$-\langle\mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\mathbf{T}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_\mathbf{T}(\Omega'\mathbf{N} + \Omega\tau\mathbf{B})$

$-\langle\mathbf{T}, \Omega'\mathbf{N} + \Omega\tau\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T}, \Omega'\mathbf{N} + \Omega\tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega''\mathbf{N} + \Omega'\nabla_T\mathbf{N} + \Omega'\tau\mathbf{B}$

$+\Omega\tau'\mathbf{B} + \Omega\tau\nabla_T\mathbf{B} + \langle\kappa\mathbf{N}, \Omega'\mathbf{N} + \Omega\tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega''\mathbf{N} - \Omega\tau^2\mathbf{N} + 2\Omega'\tau\mathbf{B} + \Omega\tau'\mathbf{B}$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = (\Omega'' - \Omega\tau^2)\mathbf{N} + (2\Omega'\tau + \Omega\tau')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\Omega'\mathbf{N} + \Omega\tau\mathbf{B}, \Omega'\mathbf{N}$

$+\Omega\tau\mathbf{B}\rangle + \langle(\Omega'' - \Omega\tau^2)\mathbf{N} + (2\Omega'\tau + \Omega\tau')\mathbf{B},$

$(\Omega'' - \Omega\tau^2)\mathbf{N} + (2\Omega'\tau + \Omega\tau')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega')^2 + \Omega^2\tau^2 + (\Omega'')^2 + \Omega^2\tau^4$

$-2\Omega''\Omega\tau^2 + (4(\Omega')^2\tau^2 + \Omega^2(\tau')^2 + 4\Omega'\tau\Omega\tau')ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\mathbf{V})$'nin Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{T}, \mathbf{X}\rangle \nabla_T\mathbf{T} + \langle \nabla_T\mathbf{T}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{T}$$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X})) - \langle \mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle \nabla_T\mathbf{T}$$
$$+\langle \nabla_T\mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle \mathbf{T}$$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B} + \kappa\tau\mathbf{N}) - \langle \mathbf{T}, -\Omega'\mathbf{T}$$
$$-\kappa'\mathbf{B} + \kappa\tau\mathbf{N}\rangle \kappa\mathbf{N} + \langle \kappa\mathbf{N}, -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B} + \kappa\tau\mathbf{N}\rangle \mathbf{T}$$

bulunur.

$$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} - \Omega'\nabla_T\mathbf{T} - \kappa''\mathbf{B} - \kappa'\nabla_T\mathbf{B} + \kappa'\tau\mathbf{N}$$
$$+\kappa\tau'\mathbf{N} + \kappa\tau\nabla_T\mathbf{N} - \langle \mathbf{T}, -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B} + \kappa\tau\mathbf{N}\rangle \kappa\mathbf{N}$$
$$+\langle \kappa\mathbf{N}, -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B} + \kappa\tau\mathbf{N}\rangle \mathbf{T}$$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_T A((\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} - \Omega'\kappa\mathbf{N} - \kappa''\mathbf{B} - \kappa'(-\tau\mathbf{N}) + \kappa'\tau\mathbf{N}$$
$$+\kappa\tau'\mathbf{N} + \kappa\tau(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \langle \mathbf{T}, -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B} + \kappa\tau\mathbf{N}\rangle \kappa\mathbf{N}$$
$$+\langle \kappa\mathbf{N}, -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B} + \kappa\tau\mathbf{N}\rangle \mathbf{T}$$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve ortak çarpan parantezine alırsak

$$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} - \Omega'\kappa\mathbf{N} - \kappa''\mathbf{B} + \kappa'\tau\mathbf{N} + \kappa'\tau\mathbf{N}$$
$$+\kappa\tau'\mathbf{N} - \kappa^2\tau\mathbf{T} + \kappa\tau^2\mathbf{B} + \Omega'\boldsymbol{\kappa}\mathbf{N} + \kappa^2\tau\mathbf{T}$$

ya da

$$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} - \kappa^2\tau\mathbf{T} + \boldsymbol{\kappa}^2\boldsymbol{\tau}\mathbf{T} - \Omega'\kappa\mathbf{N} + \boldsymbol{\Omega}'\boldsymbol{\kappa}\mathbf{N}$$
$$+\kappa'\tau\mathbf{N} + \kappa'\tau\mathbf{N} + \kappa\tau'\mathbf{N} + \kappa\tau^2\mathbf{B} - \kappa''\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')\mathbf{N} + (\kappa\tau^2 - \kappa'')\mathbf{B}$$

elde edilir. Ve

$$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$$
$$+\langle \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\varepsilon^{fermi}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B} + \kappa\tau\mathbf{N}, -\Omega'\mathbf{T}$$
$$-\kappa'\mathbf{B} + \kappa\tau\mathbf{N}\rangle + \langle -\Omega''\mathbf{T} + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')\mathbf{N} + (\kappa\tau^2 - \kappa'')\mathbf{B},$$
$$-\Omega''\mathbf{T} + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')\mathbf{N} + (\kappa\tau^2 - \kappa'')\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$$\varepsilon^{fermi}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega')^2 + (\kappa')^2 + \kappa^2\tau^2 + (\Omega'')^2$$
$$+4(\kappa')^2\tau^2 + \kappa^2(\tau')^2 + 4\kappa'\tau\kappa\tau' + \kappa^2\tau^4 + (\kappa'')^2 - 2\kappa\tau^2\kappa'')ds$$

elde edilir.

Teorem 6.2.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun $A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{B})), A(\mathbf{V})$ alanlarının genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + \alpha^2\tau^2 - 2\kappa'\alpha\tau$$
$$+\kappa^2\tau^2 + (\alpha')^2 + 2\alpha'\kappa\tau + (\kappa'')^2 + 4(\alpha')^2\tau^2$$
$$+\alpha^2(\tau')^2 + \kappa^2\tau^4 - 4\kappa''\alpha'\tau - 2\kappa''\alpha\tau'$$
$$-2\kappa''\kappa\tau^2 + 4\alpha'\tau\alpha\tau' + 4\alpha'\kappa\tau^3 + 2\alpha\tau'\kappa\tau^2$$
$$+4(\kappa')^2\tau^2 + \kappa^2(\tau')^2 + (\alpha'')^2 + \alpha^2\tau^4$$
$$+4\kappa'\tau\kappa\tau' + 4\kappa'\tau\alpha'' - 4\kappa'\alpha\tau^3$$
$$+2\kappa\tau'\alpha'' - 2\kappa\tau'\alpha\tau^2 - 2\alpha''\alpha\tau^2)ds,$$
$$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + \tau^4 + (\tau')^2 + (\kappa'')^2 \tag{6.5}$$
$$+9(\tau')^2\tau^2 + \tau^6 + (\tau'')^2 - 2\tau''\tau^3)ds,$$
$$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\alpha')^2 + (\tau')^2 + \tau^4 + (\alpha'')^2$$
$$+(\tau'')^2 + 9\tau^2(\tau')^2 + \tau^6 - 2\tau''\tau^3)ds,$$
$$\varepsilon^{fermi}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + (\alpha')^2 + \tau^2\kappa^2 + 2\alpha'\tau\kappa$$
$$+\alpha^2\tau^2 + (\kappa')^2 + 2\kappa'\alpha\tau + (-\tau'')^2 + (\alpha'')^2 + \tau^2(\kappa')^2$$
$$+\alpha^2\tau^4 + 2\alpha''\tau\kappa' - 2\alpha''\alpha\tau^2 - 2\kappa'\alpha\tau^3 + 4\tau^2(\alpha')^2$$
$$+\tau^4\kappa^2 + \alpha^2(\tau')^2 + (\kappa'')^2 + 4\alpha'\tau^3\kappa + 4\tau\alpha'\alpha\tau'$$
$$-4\tau\alpha'\kappa'' + 2\tau^2\kappa\alpha\tau' - 2\tau^2\kappa\kappa'' - 2\alpha\tau'\kappa'')ds$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde

$$A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{B} + \alpha\tau\mathbf{N},$$
$$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B},$$
$$A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B},$$
$$A(\mathbf{V}) = -\tau'\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N} + (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B}$$

dir ve Teorem 5.1.2' de hesaplanmıştır. Buradan $A(\phi(\mathbf{T}))$ nin Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{B} + \alpha\tau\mathbf{N})$

$-\langle\mathbf{T}, -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{B} + \alpha\tau\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{T}$

$+\langle\nabla_T\mathbf{T}, -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{B} + \alpha\tau\mathbf{N}\rangle\mathbf{T}$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \kappa'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \kappa'\tau\mathbf{B} - \kappa\tau'\mathbf{B}$

$-\kappa\tau(-\tau\mathbf{N}) - \alpha''\mathbf{B} - \alpha'(-\tau\mathbf{N}) + \alpha'\tau\mathbf{N} + \alpha\tau'\mathbf{N}$

$+\alpha\tau(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle\kappa\mathbf{N}, -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{B} + \alpha\tau\mathbf{N}\rangle\mathbf{T}$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve buradan gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - 2\kappa'\tau\mathbf{B} - \kappa\tau'\mathbf{B} + \kappa\tau^2\mathbf{N} - \alpha''\mathbf{B}$

$+2\alpha'\tau\mathbf{N} + \alpha\tau'\mathbf{N} + \alpha\tau^2\mathbf{B}$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = (-\kappa'' + 2\alpha'\tau + \alpha\tau' + \kappa\tau^2)\mathbf{N}$

$+(-2\kappa'\tau - \kappa\tau' - \alpha'' + \alpha\tau^2)\mathbf{B}$

elde edilir.

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır. Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\kappa'\mathbf{N} - \kappa\tau\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{B} + \alpha\tau\mathbf{N}, -\kappa'\mathbf{N}$

$-\kappa\tau\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{B} + \alpha\tau\mathbf{N}\rangle + \langle(-\kappa'' + 2\alpha'\tau + \alpha\tau' + \kappa\tau^2)\mathbf{N}$

$+(-2\kappa'\tau - \kappa\tau' - \alpha'' + \alpha\tau^2)\mathbf{B}, (-\kappa'' + 2\alpha'\tau + \alpha\tau'$

$+\kappa\tau^2)\mathbf{N} + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau' - \alpha'' + \alpha\tau^2)\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + \alpha^2\tau^2 - 2\kappa'\alpha\tau + \kappa^2\tau^2$

$+(\alpha')^2 + 2\alpha'\kappa\tau + (\kappa'')^2 + 4(\alpha')^2\tau^2 + \alpha^2(\tau')^2$

$+\kappa^2\tau^4 - 4\kappa''\alpha'\tau - 2\kappa''\alpha\tau' - 2\kappa''\kappa\tau^2$

$+4\alpha'\tau\alpha\tau' + 4\alpha'\kappa\tau^3 + 2\alpha\tau'\kappa\tau^2 + 4(\kappa')^2\tau^2$

$+\kappa^2(\tau')^2 + (\alpha'')^2 + \alpha^2\tau^4 + 4\kappa'\tau\kappa\tau' + 4\kappa'\tau\alpha''$

$-4\kappa'\alpha\tau^3 + 2\kappa\tau'\alpha'' - 2\kappa\tau'\alpha\tau^2 - 2\alpha''\alpha\tau^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{N}))$ nin Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T \mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T} \mathbf{X} - \langle \mathbf{T}, \mathbf{X} \rangle \nabla_T \mathbf{T} + \langle \nabla_T \mathbf{T}, \mathbf{X} \rangle \mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X})) - \langle \mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X})) \rangle \nabla_T \mathbf{T}$

$+\langle \nabla_T \mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X})) \rangle \mathbf{T}$

yerine yazılırsa

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_\mathbf{T}(\kappa' \mathbf{T} + \tau^2 \mathbf{N} - \tau' \mathbf{B}) - \langle \mathbf{T}, \kappa' \mathbf{T}$

$+\tau^2 \mathbf{N} - \tau' \mathbf{B} \rangle \nabla_T \mathbf{T} + \langle \nabla_T \mathbf{T}, \kappa' \mathbf{T} + \tau^2 \mathbf{N} - \tau' \mathbf{B} \rangle \mathbf{T}$

bulunur. Ve buradan gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'' \mathbf{T} + \kappa' \nabla_T \mathbf{T} + (\tau^2)' \mathbf{N} + \tau^2 \nabla_T \mathbf{N}$

$-\tau'' \mathbf{B} - \tau' \nabla_T \mathbf{B} - \langle \mathbf{T}, \kappa' \mathbf{T} + \tau^2 \mathbf{N} - \tau' \mathbf{B} \rangle \nabla_T \mathbf{T}$

$+\langle \nabla_T \mathbf{T}, \kappa' \mathbf{T} + \tau^2 \mathbf{N} - \tau' \mathbf{B} \rangle \mathbf{T}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'' \mathbf{T} + \kappa' \kappa \mathbf{N} + (\tau^2)' \mathbf{N} + \tau^2 (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B})$

$-\tau'' \mathbf{B} - \tau' (-\tau \mathbf{N}) - \langle \mathbf{T}, \kappa' \mathbf{T} + \tau^2 \mathbf{N} - \tau' \mathbf{B} \rangle \boldsymbol{\kappa} \mathbf{N}$

$+\langle \boldsymbol{\kappa} \mathbf{N}, \kappa' \mathbf{T} + \tau^2 \mathbf{N} - \tau' \mathbf{B} \rangle \mathbf{T}$

elde edilir. İç çarpım işlemleri ve gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'' \mathbf{T} + \kappa' \kappa \mathbf{N} + (2\tau' \tau \mathbf{N} - \kappa \tau^2 \mathbf{T}$

$+\tau^3 \mathbf{B} - \tau'' \mathbf{B} + \tau' \tau \mathbf{N} - \kappa' \boldsymbol{\kappa} \mathbf{N} + \kappa \tau^2 \mathbf{T}$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'' \mathbf{T} + 3\tau' \tau \mathbf{N} + (\tau^3 - \tau'') \mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2} \int_\beta \left(\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X})) \rangle \right.$

$\left. +\langle \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) \rangle \right) ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2} \int_\beta \left(\langle \kappa' \mathbf{T} + \tau^2 \mathbf{N} - \tau' \mathbf{B}, \right.$

$\kappa' \mathbf{T} + \tau^2 \mathbf{N} - \tau' \mathbf{B} \rangle + \langle \kappa'' \mathbf{T} + 3\tau' \tau \mathbf{N}$

$\left. +(\tau^3 - \tau'') \mathbf{B}, \kappa'' \mathbf{T} + 3\tau' \tau \mathbf{N} + (\tau^3 - \tau'') \mathbf{B} \rangle \right) ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2} \int_\beta \left((\kappa')^2 + \tau^4 + (\tau')^2 + (\kappa'')^2 \right.$

$\left. +9(\tau')^2 \tau^2 + \tau^6 + (\tau'')^2 - 2\tau'' \tau^3 \right) ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{B}))$ nin Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T \mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{X} - \langle \mathbf{T}, \mathbf{X} \rangle \nabla_T \mathbf{T} + \langle \nabla_T \mathbf{T}, \mathbf{X} \rangle \mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X})) - \langle \mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X})) \rangle \nabla_T \mathbf{T}$

$+\langle \nabla_T \mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X})) \rangle \mathbf{T}$

elde edilir ve

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\alpha' \mathbf{T} + \tau' \mathbf{N} + \tau^2 \mathbf{B})$

$-\langle \mathbf{T}, \alpha' \mathbf{T} + \tau' \mathbf{N} + \tau^2 \mathbf{B} \rangle \nabla_T \mathbf{T}$

$+\langle \nabla_T \mathbf{T}, \alpha' \mathbf{T} + \tau' \mathbf{N} + \tau^2 \mathbf{B} \rangle \mathbf{T}$

bulunur. Ve buradan gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha'' \mathbf{T} + \alpha' \nabla_T \mathbf{T} + \tau'' \mathbf{N} + \tau' \nabla_T \mathbf{N}$

$+(\tau^2)' \mathbf{B} + \tau^2 \nabla_T \mathbf{B} - \langle \mathbf{T}, \alpha' \mathbf{T} + \tau' \mathbf{N} + \tau^2 \mathbf{B} \rangle \nabla_T \mathbf{T}$

$+\langle \nabla_T \mathbf{T}, \alpha' \mathbf{T} + \tau' \mathbf{N} + \tau^2 \mathbf{B} \rangle \mathbf{T}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha'' \mathbf{T} + \alpha' \kappa \mathbf{N} + \tau'' \mathbf{N} + \tau'(-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B})$

$+(\tau^2)' \mathbf{B} + \tau^2(-\tau \mathbf{N}) - \langle \mathbf{T}, \alpha' \mathbf{T} + \tau' \mathbf{N} + \tau^2 \mathbf{B} \rangle \kappa \mathbf{N}$

$+\langle \kappa \mathbf{N}, \alpha' \mathbf{T} + \tau' \mathbf{N} + \tau^2 \mathbf{B} \rangle \mathbf{T}$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha'' \mathbf{T} + \alpha' \kappa \mathbf{N} + \tau'' \mathbf{N} - \kappa \tau' \mathbf{T}$

$+\tau \tau' \mathbf{B} + 2\tau \tau' \mathbf{B} - \tau^3 \mathbf{N} - \langle \mathbf{T}, \alpha' \mathbf{T} + \tau' \mathbf{N} + \tau^2 \mathbf{B} \rangle \kappa \mathbf{N}$

$+\langle \kappa \mathbf{N}, \alpha' \mathbf{T} + \tau' \mathbf{N} + \tau^2 \mathbf{B} \rangle \mathbf{T}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha'' \mathbf{T} + \alpha' \kappa \mathbf{N} + \tau'' \mathbf{N} - \kappa \tau' \mathbf{T} + \tau \tau' \mathbf{B}$

$+2\tau \tau' \mathbf{B} - \tau^3 \mathbf{N} - \alpha' \kappa \mathbf{N} + \kappa \tau' \mathbf{T}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha'' \mathbf{T} + \tau'' \mathbf{N} + 3\tau \tau' \mathbf{B} - \tau^3 \mathbf{N}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2} \int_\beta \left(\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X})) \rangle \right.$

$\left. +\langle \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) \rangle \right) ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2} \int_\beta \left(\langle \alpha' \mathbf{T} + \tau' \mathbf{N} + \tau^2 \mathbf{B}, \right.$

$\alpha' \mathbf{T} + \tau' \mathbf{N} + \tau^2 \mathbf{B} \rangle + \langle \alpha'' \mathbf{T} + \tau'' \mathbf{N} + 3\tau \tau' \mathbf{B} - \tau^3 \mathbf{N},$

$\left. \alpha'' \mathbf{T} + \tau'' \mathbf{N} + 3\tau \tau' \mathbf{B} - \tau^3 \mathbf{N} \rangle \right) ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_{\beta} ((\alpha')^2 + (\tau')^2 + \tau^4 + (\alpha'')^2$$
$$+(\tau'')^2 + 9\tau^2(\tau')^2 + \tau^6 - 2\tau''\tau^3)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\mathbf{V})$'nin Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{T}, \mathbf{X}\rangle \nabla_T\mathbf{T} + \langle \nabla_T\mathbf{T}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{T}$$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X})) - \langle \mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle \nabla_T\mathbf{T}$$
$$+\langle \nabla_T\mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle \mathbf{T}$$

ya da

$$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\tau'\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N} + (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B})$$
$$-\langle \mathbf{T}, -\tau'\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N} + (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}$$
$$+\langle \nabla_T\mathbf{T}, -\tau'\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N} + (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B}\rangle \mathbf{T}$$

bulunur. Ve buradan gerekli işlemlerle

$$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\nabla_T\mathbf{T} + \alpha''\mathbf{N} + \alpha'\nabla_T\mathbf{N} + \tau'\kappa\mathbf{N}$$
$$+\tau\kappa'\mathbf{N} + \tau\kappa\nabla_T\mathbf{N} + \alpha'\tau\mathbf{B} + \alpha\tau'\mathbf{B} + \alpha\tau\nabla_T\mathbf{B}$$
$$-\kappa''\mathbf{B} - \kappa'\nabla_T\mathbf{B} - \langle \mathbf{T}, -\tau'\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N}$$
$$+(\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B}\rangle \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + \langle \nabla_T\mathbf{T}, -\tau'\mathbf{T}$$
$$+(\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N} + (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B}\rangle \mathbf{T}$$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\kappa\mathbf{N} + \alpha''\mathbf{N} + \alpha'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$
$$+\tau'\kappa\mathbf{N} + \tau\kappa'\mathbf{N} + \tau\kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \alpha'\tau\mathbf{B}$$
$$+\alpha\tau'\mathbf{B} + \alpha\tau(-\tau\mathbf{N}) - \kappa''\mathbf{B} - \kappa'(-\tau\mathbf{N})$$
$$-\langle \mathbf{T}, -\tau'\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N} + (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B}\rangle \kappa\mathbf{N} + \langle \kappa\mathbf{N},$$
$$-\tau'\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N} + (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B}\rangle \mathbf{T}$$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve ortak çarpan parantezine alırsak

$$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\kappa\mathbf{N} + \alpha''\mathbf{N} - \kappa\alpha'\mathbf{T} + \tau\alpha'\mathbf{B} + \tau'\kappa\mathbf{N}$$
$$+\tau\kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\tau\mathbf{T} + \tau^2\kappa\mathbf{B} + \alpha'\tau\mathbf{B} + \alpha\tau'\mathbf{B} - \alpha\tau^2\mathbf{N} - \kappa''\mathbf{B}$$
$$+\kappa'\tau\mathbf{N} - \langle \mathbf{T}, -\tau'\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N} + (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B}\rangle \kappa\mathbf{N}$$
$$+\langle \kappa\mathbf{N}, -\tau'\mathbf{T} + (\alpha' + \tau\kappa)\mathbf{N} + (\alpha\tau - \kappa')\mathbf{B}\rangle \mathbf{T}$$

ya da

$$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\kappa\mathbf{N} + \alpha''\mathbf{N} - \kappa\alpha'\mathbf{T} + \tau\alpha'\mathbf{B}$$
$$+\tau'\kappa\mathbf{N} + \tau\kappa'\mathbf{N} - \kappa^2\tau\mathbf{T} + \tau^2\kappa\mathbf{B} + \alpha'\tau\mathbf{B} + \alpha\tau'\mathbf{B}$$

$-\alpha\tau^2\mathbf{N}-\kappa''\mathbf{B}+\kappa'\tau\mathbf{N}-\tau'\kappa\mathbf{N}+\alpha'\kappa\mathbf{T}+\tau\kappa^2\mathbf{T}$

yada

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V})=-\tau''\mathbf{T}+\alpha''\mathbf{N}+\tau\kappa'\mathbf{N}-\alpha\tau^2\mathbf{N}$

$+2\tau\alpha'\mathbf{B}+\tau^2\kappa\mathbf{B}+\alpha\tau'\mathbf{B}-\kappa''\mathbf{B}$

dır. Ortak çarpan parantezine alınırsa

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V})=(-\tau'')\mathbf{T}+(\alpha''+\tau\kappa'-\alpha\tau^2)\mathbf{N}$

$+(2\tau\alpha'+\tau^2\kappa+\alpha\tau'-\kappa'')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{X})))=\frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})),A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})),\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{fermi}(A(\mathbf{V}))=\frac{1}{2}\int_\beta (\langle-\tau'\mathbf{T}+(\alpha'+\tau\kappa)\mathbf{N}+(\alpha\tau-\kappa')\mathbf{B},$

$-\tau'\mathbf{T}+(\alpha'+\tau\kappa)\mathbf{N}+(\alpha\tau-\kappa')\mathbf{B}\rangle+\langle(-\tau'')\mathbf{T}$

$+(\alpha''+\tau\kappa'-\alpha\tau^2)\mathbf{N}+(2\tau\alpha'+\tau^2\kappa$

$+\alpha\tau'-\kappa'')\mathbf{B},(-\tau'')\mathbf{T}+(\alpha''+\tau\kappa'-\alpha\tau^2)\mathbf{N}$

$+(2\tau\alpha'+\tau^2\kappa+\alpha\tau'-\kappa'')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{fermi}(A(\mathbf{V}))=\frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2+(\alpha')^2+\tau^2\kappa^2+2\alpha'\tau\kappa+\alpha^2\tau^2$

$+(\kappa')^2+2\kappa'\alpha\tau+(-\tau'')^2+(\alpha'')^2+\tau^2(\kappa')^2+\alpha^2\tau^4$

$+2\alpha''\tau\kappa'-2\alpha''\alpha\tau^2-2\kappa'\alpha\tau^3+4\tau^2(\alpha')^2+\tau^4\kappa^2$

$+\alpha^2(\tau')^2+(\kappa'')^2+4\alpha'\tau^3\kappa+4\tau\alpha'\alpha\tau'-4\tau\alpha'\kappa''$

$+2\tau^2\kappa\alpha\tau'-2\tau^2\kappa\kappa''-2\alpha\tau'\kappa'')ds$

elde edilir.

Teorem 6.2.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T})),A(\phi(\mathbf{N})),A(\phi(\mathbf{B})),A(\mathbf{V})$ alanlarının genelleştirilmiş Fermi-Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{T})))=\frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega_2')^2+\Omega_2^2\tau^2+(\Omega_2'')^2+\Omega_2^2\tau^4$

$-2\Omega_2''\Omega_2\tau^2+4(\Omega_2')^2\tau^2+\Omega_2^2(\tau')^2+4\Omega_2'\tau\Omega_2\tau')ds,$

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{N})))=\frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega_2')^2+\tau^4+(\tau')^2+(\Omega_2'')^2$ (6.6)

$+9(\tau')^2\tau^2+\tau^6+(\tau'')^2-2\tau''\tau^3)ds,$

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{B})))=\frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2+\tau^4+(\tau'')^2$

$+\tau^6 - 2\tau''\tau^3 + 9\tau^2(\tau')^2)ds,$

$\varepsilon^{fermi}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + \Omega_2^2\tau^2 + (\Omega_2')^2$

$+(\tau'')^2 + 4(\Omega_2')^2\tau^2 + \Omega_2^2(\tau')^2 + 4\Omega_2'\tau\Omega_2\tau'$

$+\Omega_2^2\tau^4 + (\Omega_2'')^2 - 2\Omega_2\tau^2\Omega_2'')ds$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B},$

$A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B},$

$A(\phi(\mathbf{B})) = \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B},$

$A(\mathbf{V}) = -\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}$

Teorem 5.1.3' de hesaplanmıştır. Buradan $A(\phi(\mathbf{T}))$ nin Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T},\mathbf{X}\rangle\mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B})$

$-\langle\mathbf{T}, -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T}, -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

veya

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2''\mathbf{N} - \Omega_2'\nabla_T\mathbf{N} - \Omega_2'\tau\mathbf{B} - \Omega_2\tau'\mathbf{B}$

$-\Omega_2\tau\nabla_T\mathbf{B} - \langle\mathbf{T}, -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{T}$

$+\langle\nabla_T\mathbf{T}, -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

veya

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2''\mathbf{N} - \Omega_2'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \Omega_2'\tau\mathbf{B}$

$-\Omega_2\tau'\mathbf{B} - \Omega_2\tau(-\tau\mathbf{N}) - \langle\mathbf{T}, -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N}$

$+\langle\kappa\mathbf{N}, -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

bulunur ve gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2''\mathbf{N} - \Omega_2'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \Omega_2'\tau\mathbf{B}$

$-\Omega_2\tau'\mathbf{B} - \Omega_2\tau(-\tau\mathbf{N}) - \langle\mathbf{T}, -\Omega_2'\mathbf{N}$

$-\Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle\kappa\mathbf{N}, -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2''\mathbf{N} + \Omega_2'\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\tau\mathbf{B}$

$-\Omega_2'\tau\mathbf{B} - \Omega_2\tau'\mathbf{B} + \Omega_2\tau^2\mathbf{N} - \langle\mathbf{T}, -\Omega_2'\mathbf{N}$

$-\Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle\kappa\mathbf{N}, -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve ortak çarpan parantezine alırsak

$$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2''\mathbf{N} + \Omega_2'\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\tau\mathbf{B}$$
$$-\Omega_2'\tau\mathbf{B} - \Omega_2\tau'\mathbf{B} + \Omega_2\tau^2\mathbf{N} - \kappa\Omega_2'\mathbf{T}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{T})) = (-\Omega_2'' + \Omega_2\tau^2)\mathbf{N} + (-2\Omega_2'\tau - \Omega_2\tau')\mathbf{B}$$

elde edilir.

$$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$$
$$+\langle \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}, -\Omega_2'\mathbf{N} - \Omega_2\tau\mathbf{B}\rangle$$
$$+\langle (-\Omega_2'' + \Omega_2\tau^2)\mathbf{N} + (-2\Omega_2'\tau - \Omega_2\tau')\mathbf{B},$$
$$(-\Omega_2'' + \Omega_2\tau^2)\mathbf{N} + (-2\Omega_2'\tau - \Omega_2\tau')\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega_2')^2 + \Omega_2^2\tau^2 + (\Omega_2'')^2 + \Omega_2^2\tau^4$$
$$-2\Omega_2''\Omega_2\tau^2 + 4(\Omega_2')^2\tau^2 + \Omega_2^2(\tau')^2 + 4\Omega_2'\tau\Omega_2\tau')ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{N}))$ nin Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{T}, \mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle \nabla_T\mathbf{T}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{T}$$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X})) - \langle \mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\nabla_T\mathbf{T}$$
$$+\langle \nabla_T\mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\mathbf{T}$$

ya da

$$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B})$$
$$-\langle \mathbf{T}, \Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{T}$$
$$+\langle \nabla_T\mathbf{T}, \Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$$

bulunur. Ve buradan gerekli işlemlerle

$$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2''\mathbf{T} + \Omega_2'\nabla_T\mathbf{T} + (\tau^2)'\mathbf{N}$$
$$+\tau^2\nabla_T\mathbf{N} - \tau''\mathbf{B} - \tau'\nabla_T\mathbf{B} - \langle \mathbf{T}, \Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N}$$
$$-\tau'\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle \nabla_T\mathbf{T}, \Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2''\mathbf{T} + \Omega_2'\kappa\mathbf{N} + (\tau^2)'\mathbf{N}$$
$$+\tau^2(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \tau''\mathbf{B} - \tau'(-\tau\mathbf{N}) - \langle \mathbf{T}, \Omega_2'\mathbf{T}$$
$$+\tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle \kappa\mathbf{N}, \Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$$

elde edilir. İç çarpım işlemleri ve gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2''\mathbf{T} + \Omega_2'\kappa\mathbf{N} + 2\tau'\tau\mathbf{N} - \tau^2\kappa\mathbf{T}$

$+\tau^3\mathbf{B} - \tau''\mathbf{B} + \tau'\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\kappa\mathbf{N} + \kappa\tau^2\mathbf{T}$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2''\mathbf{T} + 3\tau'\tau\mathbf{N} + (\tau^3 - \tau'')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}, \Omega_2'\mathbf{T} + \tau^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}\rangle$

$+\langle\Omega_2''\mathbf{T} + 3\tau'\tau\mathbf{N} + (\tau^3 - \tau'')\mathbf{B}, \Omega_2''\mathbf{T} + 3\tau'\tau\mathbf{N} + (\tau^3 - \tau'')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega_2')^2 + \tau^4 + (\tau')^2 + (\Omega_2'')^2$

$+9(\tau')^2\tau^2 + \tau^6 + (\tau'')^2 - 2\tau''\tau^3)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{B}))$ nin Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{T}, \mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X}))$

$-\langle\mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\mathbf{T}$

elde edilir ve

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B})$

$-\langle\mathbf{T}, \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T}, \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

bulunur. Ve buradan gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \tau''\mathbf{N} + \tau'\nabla_T\mathbf{N} + (\tau^2)'\mathbf{B} + \tau^2\nabla_T\mathbf{B}$

$-\langle\mathbf{T}, \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{T} + \langle\nabla_T\mathbf{T}, \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \tau''\mathbf{N} + \tau'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + (\tau^2)'\mathbf{B}$

$+\tau^2(-\tau\mathbf{N}) - \langle\mathbf{T}, \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle\kappa\mathbf{N}, \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = \tau''\mathbf{N} + -\kappa\tau'\mathbf{T} + \tau'\tau\mathbf{B} + 2\tau\tau'\mathbf{B}$

$-\tau^3\mathbf{N}) - \langle\mathbf{T}, \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}\rangle\kappa\mathbf{N} + \langle\kappa\mathbf{N}, \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}\rangle\mathbf{T}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{B})) = (\tau'' - \tau^3)\mathbf{N} + 3\tau\tau'\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\right.$

$\left.+\langle \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\right)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}, \tau'\mathbf{N} + \tau^2\mathbf{B}\rangle\right.$

$\left.+\langle (\tau'' - \tau^3)\mathbf{N} + 3\tau\tau'\mathbf{B}, (\tau'' - \tau^3)\mathbf{N} + 3\tau\tau'\mathbf{B}\rangle\right)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left((\tau')^2 + \tau^4 + (\tau'')^2\right.$

$\left.+\tau^6 - 2\tau''\tau^3 + 9\tau^2(\tau')^2\right)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\mathbf{V})$'nin Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T \mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{T}, \mathbf{X}\rangle \nabla_T \mathbf{T} + \langle \nabla_T \mathbf{T}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{T}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{X}))$

$-\langle \mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle \nabla_T \mathbf{T} + \langle \nabla_T \mathbf{T}, A(\phi(\mathbf{X}))\rangle \mathbf{T}$

veya

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}) - \langle \mathbf{T}, -\tau'\mathbf{T}$

$+\Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}\rangle \nabla_T \mathbf{T} + \langle \nabla_T \mathbf{T}, -\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}\rangle \mathbf{T}$

veya

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\nabla_T \mathbf{T} + \Omega_2'\tau\mathbf{N} + \Omega_2\tau'\mathbf{N}$

$+\Omega_2\tau\nabla_T \mathbf{N} - \Omega_2''\mathbf{B} - \Omega_2'\nabla_T \mathbf{B} - \langle \mathbf{T}, -\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N}$

$-\Omega_2'\mathbf{B}\rangle \nabla_T \mathbf{T} + \langle \nabla_T \mathbf{T}, -\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}\rangle \mathbf{T}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\tau\mathbf{N} + \Omega_2\tau'\mathbf{N}$

$+\Omega_2\tau(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \Omega_2''\mathbf{B} - \Omega_2'(-\tau\mathbf{N}) - \langle \mathbf{T}, -\tau'\mathbf{T}$

$+\Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}\rangle \kappa\mathbf{N} + \langle \kappa\mathbf{N}, -\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}\rangle \mathbf{T}$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\kappa\mathbf{N} + \Omega_2'\tau\mathbf{N} + \Omega_2\tau'\mathbf{N} - \kappa\Omega_2\tau\mathbf{T}$

$+\Omega_2\tau^2\mathbf{B} - \Omega_2''\mathbf{B} + \Omega_2'\tau\mathbf{N} + \tau'\kappa\mathbf{N} + \kappa\Omega_2\tau\mathbf{T}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} + (2\Omega_2'\tau + \Omega_2\tau')\mathbf{N} + (\Omega_2\tau^2 - \Omega_2'')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{fermi}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır. Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{fermi}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T} + \Omega_2\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}\rangle$

$+\langle -\tau''\mathbf{T} + (2\Omega_2'\tau + \Omega_2\tau')\mathbf{N} + (\Omega_2\tau^2 - \Omega_2'')\mathbf{B}, -\tau''\mathbf{T}$

$+(2\Omega_2'\tau + \Omega_2\tau')\mathbf{N} + (\Omega_2\tau^2 - \Omega_2'')\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{fermi}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + \Omega_2^2\tau^2 + (\Omega_2')^2 + (\tau'')^2 + 4(\Omega_2')^2\tau^2$

$+\Omega_2^2(\tau')^2 + 4\Omega_2'\tau\Omega_2\tau' + \Omega_2^2\tau^4 + (\Omega_2'')^2 - 2\Omega_2\tau^2\Omega_2'')ds$

elde edilir.

6.3 Manyetik Eğrilerin Genelleştirilmiş Normal Fermi-Walker Türevi Yardımıyla Enerjileri

Teorem 6.3.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{B})), A(\mathbf{V})$ alanlarının genelleştirilmiş normal Fermi- Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + (\kappa'')^2)ds,$

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa')^2 + (\Omega')^2 + (\kappa'')^2 + (\Omega'')^2)ds,$ (6.7)

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega')^2 + (\Omega'')^2)ds,$

$\varepsilon^{normal}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(\Omega')^2 + (\kappa')^2 + (\Omega'')^2 + (\kappa'')^2)ds$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N},$

$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B},$

$A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega'\mathbf{N},$

$A(\mathbf{V}) = -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B}$

Teorem 5.2.1' de hesaplanmıştır. Buradan $A(\phi(\mathbf{T}))$ nin Normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_{\mathbf{T}} A(\phi(\mathbf{T}))$

$-\langle \mathbf{N}, (-\kappa'\mathbf{N})\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, (-\kappa'\mathbf{N})\rangle \mathbf{N})$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\kappa'\mathbf{N}) - \langle \mathbf{N}, (-\kappa'\mathbf{N})\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$+\langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), (-\kappa'\mathbf{N})\rangle \mathbf{N})$

bulunur. İç çarpım işlemleri yapılarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \kappa'\nabla_T \mathbf{N} - \langle \mathbf{N}, (-\kappa'\mathbf{N})\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$+\langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), (-\kappa'\mathbf{N})\rangle \mathbf{N})$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \kappa'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \kappa'\kappa\mathbf{T} + \kappa'\tau\mathbf{B}$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} + \kappa'\kappa\mathbf{T} - \kappa'\tau\mathbf{B} - \kappa'\kappa\mathbf{T} + \kappa'\tau\mathbf{B}$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{0normal}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\right.$

$\left.+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\right)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle -\kappa'\mathbf{N}, -\kappa'\mathbf{N}\rangle\right.$

$\left.+\langle -\kappa''\mathbf{N}, -\kappa''\mathbf{N}\rangle\right)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{T})) = \frac{1}{2}\int_\beta \left((\kappa')^2 + (\kappa'')^2\right)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{N}))$ nin normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_T A(\phi(\mathbf{N}) - \langle \mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{N}))\rangle \nabla_T \mathbf{N}$

$+\langle \nabla_T \mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{N}))\rangle \mathbf{N}$

türevler yerlerine yazılırsa

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B})$

$-\langle \mathbf{N}, (\kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B})\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, (\kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B})\rangle \mathbf{N}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\nabla_T\mathbf{T} - \Omega''\mathbf{B} - \Omega'\nabla_T\mathbf{B}$

$-\langle \mathbf{N}, (\kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B})\rangle \nabla_T\mathbf{N} + \langle \nabla_T\mathbf{N}, (\kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B})\rangle \mathbf{N}$

gerekli işlemlerle

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} - \Omega''\mathbf{B} - \Omega'(-\tau\mathbf{N}) - \langle \mathbf{N},$

$(\kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B})\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), (\kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B})\rangle\mathbf{N}$

dağılma özelliği ile

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} - \Omega''\mathbf{B}$

$+\Omega'\tau\mathbf{N} - \kappa\kappa'\mathbf{N} - \Omega'\tau\mathbf{N}$

bulunur ve

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} - \Omega''\mathbf{B}$

elde edilir. Ve enerji

$\varepsilon^{normal}(A(\phi\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \langle\kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B}), \kappa'\mathbf{T} - \Omega'\mathbf{B}\rangle$

$+\langle \kappa''\mathbf{T} - \Omega''\mathbf{B}, \kappa''\mathbf{T} - \Omega''\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa')^2 + (\Omega')^2$

$+(\kappa'')^2 + (\Omega'')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{B}))$ nin Normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_\mathbf{T} A(\phi(\mathbf{B})) - \langle \mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{B}))\rangle\nabla_T\mathbf{N}$

$+\langle\nabla_T\mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{B}))\rangle\mathbf{N}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_\mathbf{T}(\Omega'\mathbf{N}) - \langle \mathbf{N}, \mathbf{\Omega}'\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N}$

$+\langle\nabla_T\mathbf{N}, \Omega'\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega''\mathbf{N} + \Omega'\nabla_T\mathbf{N}$

$-\langle \mathbf{N}, \mathbf{\Omega}'\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N}, \mathbf{\Omega}'\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$

ya da

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega''\mathbf{N} + \Omega'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$

$$-\langle\mathbf{N},\Omega'\mathbf{N}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}),\Omega'\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega''\mathbf{N} - \Omega'\kappa\mathbf{T} + \Omega'\tau\mathbf{B} + \Omega'\kappa\mathbf{T} - \Omega'\tau\mathbf{B}$$

ya da

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega''\mathbf{N}$$

elde edilir. Ve

$$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$$

$$+\langle\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\Omega'\mathbf{N},\Omega'\mathbf{N}\rangle + \langle\Omega''\mathbf{N},\Omega''\mathbf{N}\rangle)ds$$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega')^2 + (\Omega'')^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\mathbf{V})$'nin normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\mathbf{V}) = \nabla_\mathbf{T}A(\mathbf{V}) - \langle\mathbf{N},A(\mathbf{V})\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},A(\mathbf{V})\rangle\mathbf{N}$$

ya da

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\mathbf{V}) = \nabla_\mathbf{T}(-\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B}) - \langle\mathbf{N},(-\boldsymbol{\Omega}'\mathbf{T}$$

$$-\boldsymbol{\kappa}'\mathbf{B})\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N}, -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$$

bulunur.

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} - \boldsymbol{\Omega}'\nabla_T\mathbf{T} - \boldsymbol{\kappa}''\mathbf{B} - \kappa'\nabla_T\mathbf{B}$$

$$-\langle\mathbf{N},(-\boldsymbol{\Omega}'\mathbf{T} - \boldsymbol{\kappa}'\mathbf{B})\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N}, -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} - \Omega'\kappa\mathbf{N} - \kappa''\mathbf{B} - \kappa'(-\tau\mathbf{N}) - \langle\mathbf{N},(-\Omega'\mathbf{T}$$

$$-\kappa'\mathbf{B})\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$$

bulunur. İç çarpım işlemlerinden sonra

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} - \Omega'\kappa\mathbf{N} - \kappa''\mathbf{B} + \kappa'\tau\mathbf{N} + \Omega'\kappa\mathbf{N} - \kappa'\tau\mathbf{N}$$

ya da

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} - \kappa''\mathbf{B}$$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{normal}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B}), -\Omega'\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{B}\rangle$

$+\langle -\Omega''\mathbf{T} - \kappa''\mathbf{B}, -\Omega''\mathbf{T} - \kappa''\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{normal}(\mathbf{A}(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(\Omega')^2 + (\kappa')^2 + (\Omega'')^2 + (\kappa'')^2)ds$

elde edilir.

Teorem 6.3.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{B})), A(\mathbf{V})$ alanlarının genelleştirilmiş normal Fermi- Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + (\alpha')^2 + (\kappa'')^2 + (\alpha'')^2)ds,\\
&\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + (\tau')^2 + (\kappa'')^2 + (\tau'')^2)ds, \qquad (6.8)\\
&\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\alpha')^2 + (\tau')^2 + (\alpha'')^2 + (\tau'')^2)ds,\\
&\varepsilon^{normal}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\tau')^2 + (\alpha')^2 + (\kappa')^2 + (\tau'')^2 + (\alpha'')^2 + (\kappa'')^2)ds
\end{aligned}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}$,

$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}$,

$A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}$,

$A(\mathbf{V}) = -\tau'\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}$

dir ve Teorem 5.2.1' de hesaplanmıştır. Buradan $A(\phi(\mathbf{T}))$ nin Normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_\mathbf{T} A(\phi(\mathbf{T}))$

$-\langle \mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{T}))\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{T}))\rangle \mathbf{N}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_\mathbf{T}(-\kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}) - \langle \mathbf{N}, (-\kappa'\mathbf{N}$

$-\alpha'\mathbf{B})\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N}, (-\kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B})\rangle\mathbf{N}$

bulunur. İç çarpım işlemleri yapılarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \kappa'\nabla_T\mathbf{N} - \alpha''\mathbf{B} - \alpha'\nabla_T\mathbf{B}$

$-\langle\mathbf{N}, (-\kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B})\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N}, (-\kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B})\rangle\mathbf{N}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \kappa'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$-\alpha''\mathbf{B} - \alpha'(-\tau\mathbf{N}) - \langle\mathbf{N}, (-\kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B})\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$+\langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), (-\kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B})\rangle\mathbf{N}$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} + \kappa'\kappa\mathbf{T} - \kappa'\tau\mathbf{B} - \alpha''\mathbf{B}$

$+\alpha'\tau\mathbf{N} - \kappa'\kappa\mathbf{T} + \kappa'\tau\mathbf{B} - \alpha'\tau\mathbf{N}$

bulunur ve

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \alpha''\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}, -\kappa'\mathbf{N}$

$-\alpha'\mathbf{B}\rangle + \langle -\kappa''\mathbf{N} - \alpha''\mathbf{B}, -\kappa''\mathbf{N} - \alpha''\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + (\alpha')^2$

$+(\kappa'')^2 + (\alpha'')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{N}))$ nin normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_\mathbf{T} A(\phi(\mathbf{N})$

$-\langle\mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{N}))\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{N}))\rangle\mathbf{N}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_\mathbf{T}(\kappa'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}) - \langle\mathbf{N}, \kappa'\mathbf{T}$

$-\tau'\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N}, \kappa'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\nabla_T\mathbf{T} - \tau''\mathbf{B} - \tau'\nabla_T\mathbf{B}$

$-\langle \mathbf{N}, \kappa'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle \nabla_T\mathbf{N}, \kappa'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} - \tau''\mathbf{B}$

$-\tau'(-\tau\mathbf{N}) - \langle \mathbf{N}, \kappa'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$+\langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), \kappa'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}\rangle\mathbf{N}$

veya

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} - \tau''\mathbf{B} + \tau'\tau\mathbf{N} - \kappa'\kappa\mathbf{N} - \tau'\tau\mathbf{N}$

bulunur ve

$\widetilde{\nabla}_T A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} - \tau''\mathbf{B}$

elde edilir. Ve enerji

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle \kappa'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}, \kappa'\mathbf{T} - \tau'\mathbf{B}\rangle$

$+\langle \kappa''\mathbf{T} - \tau''\mathbf{B}, \kappa''\mathbf{T} - \tau''\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + (\tau')^2$

$+(\kappa'')^2 + (\tau'')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{B}))$ nin normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle \nabla_T\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_{\mathbf{T}} A(\phi(\mathbf{B}))$

$-\langle \mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{B}))\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle \nabla_T\mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{B}))\rangle\mathbf{N}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N})$

$-\langle \mathbf{N}, \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle \nabla_T\mathbf{N}, \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha''\mathbf{T} + \alpha'\nabla_T\mathbf{T} + \tau''\mathbf{N} + \tau'\nabla_T\mathbf{N}$

$-\langle \mathbf{N}, \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle \nabla_T\mathbf{N}, \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha''\mathbf{T} + \alpha'\kappa\mathbf{N} + \tau''\mathbf{N} + \tau'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$-\langle\mathbf{N}, \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha''\mathbf{T} + \alpha'\kappa\mathbf{N} + \tau''\mathbf{N}$

$-\tau'\kappa\mathbf{T} + \tau'\tau\mathbf{B} + \tau'\kappa\mathbf{T} - \tau'\tau\mathbf{B} - \alpha'\kappa\mathbf{N}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha''\mathbf{T} + \tau''\mathbf{N}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}, \alpha'\mathbf{T} + \tau'\mathbf{N}\rangle$

$+\langle\alpha''\mathbf{T} + \tau''\mathbf{N}, \alpha''\mathbf{T} + \tau''\mathbf{N}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\alpha')^2 + (\tau')^2$

$+(\alpha'')^2 + (\tau'')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\mathbf{V})$'nin normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\mathbf{V}) = \nabla_\mathbf{T} A(\mathbf{V}) - \langle\mathbf{N}, A(\mathbf{V})\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N}, A(\mathbf{V})\rangle\mathbf{N}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\mathbf{V}) = \nabla_\mathbf{T}(-\tau'\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B})$

$-\langle\mathbf{N}, (-\tau'\mathbf{T} + \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B})\rangle\nabla_T\mathbf{N}$

$+\langle\nabla_T\mathbf{N}, (-\tau'\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B})\rangle\mathbf{N}$

bulunur.

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \boldsymbol{\tau}'\nabla_T\mathbf{T} + \alpha''\mathbf{N} + \Omega'\nabla_T\mathbf{N}$

$-\kappa''\mathbf{B} - \kappa'\nabla_T\mathbf{B} - \langle\mathbf{N}, (-\tau'\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B})\rangle\nabla_T\mathbf{N}$

$+\langle\nabla_T\mathbf{N}, (-\tau'\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B})\rangle\mathbf{N}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \boldsymbol{\tau}'\kappa\mathbf{N} + \alpha''\mathbf{N} + \alpha'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$-\kappa''\mathbf{B} - \kappa'(-\tau\mathbf{N}) - \langle\mathbf{N}, (-\tau'\mathbf{T} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B})\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$+\langle(-\kappa\mathbf{T}+\tau\mathbf{B}),(-\tau'\mathbf{T}+\alpha'\mathbf{N}-\kappa'\mathbf{B})\rangle\mathbf{N}$

bulunur. İç çarpım işlemlerinden sonra

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\mathbf{V})=-\tau''\mathbf{T}-\tau'\kappa\mathbf{N}+\alpha''\mathbf{N}-\alpha'\kappa\mathbf{T}+\alpha'\tau\mathbf{B}$

$-\kappa''\mathbf{B}+\kappa'\tau\mathbf{N}+\alpha'\kappa\mathbf{T}-\alpha'\tau\mathbf{B}+\tau'\kappa\mathbf{N}-\kappa'\tau\mathbf{N}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\mathbf{V})=-\tau''\mathbf{T}+\alpha''\mathbf{N}-\kappa''\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{X})))=\frac{1}{2}\int_\beta(\langle A(\phi(\mathbf{X})),A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{X})),\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{normal}(A(\mathbf{V}))=\frac{1}{2}\int_\beta(-\tau'\mathbf{T}+\alpha'\mathbf{N}-\kappa'\mathbf{B},-\tau'\mathbf{T}+\alpha'\mathbf{N}$

$-\kappa'\mathbf{B}\rangle+\langle-\tau''\mathbf{T}+\alpha''\mathbf{N}-\kappa''\mathbf{B},-\tau''\mathbf{T}+\alpha''\mathbf{N}-\kappa''\mathbf{B}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{normal}(A(\mathbf{V}))=\frac{1}{2}\int_\beta(\tau')^2+(\alpha')^2+(\kappa')^2$

$+(\tau'')^2+(\alpha'')^2+(\kappa'')^2)ds$

elde edilir.

Teorem 6.3.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T})),A(\phi(\mathbf{N})),A(\phi(\mathbf{B})),A(\mathbf{V})$ alanlarının genelleştirilmiş normal Fermi- Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{T})))=\frac{1}{2}\int_\beta((\Omega_2')^2+(\Omega_2'')^2)ds,\\
&\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{N})))=\frac{1}{2}\int_\beta((\Omega_2')^2+(\tau')^2+(\Omega_2'')^2+(\tau'')^2)ds, \qquad (6.9)\\
&\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{B})))=\frac{1}{2}\int_\beta((\tau')^2+(\tau'')^2)ds,\\
&\varepsilon^{normal}(A(\mathbf{V}))=\frac{1}{2}\int_\beta(\langle(\tau')^2+(\Omega_2')^2+(\tau'')^2+(\Omega_2'')^2)ds
\end{aligned}$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde

$A(\phi(\mathbf{T}))=-\Omega_2'\mathbf{N},$

$A(\phi(\mathbf{N}))=\Omega_2'\mathbf{T}-\tau'\mathbf{B},$

$A(\phi(\mathbf{B}))=\tau'\mathbf{N},$

$A(\mathbf{V})=-\tau'\mathbf{T}-\Omega_2'\mathbf{B}$

dir ve Teorem 5.2.1' de hesaplanmıştır. Buradan $A(\phi(\mathbf{T}))$ nin normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_\mathbf{T}A(\phi(\mathbf{T}))$

$-\langle\mathbf{N},A(\phi(\mathbf{T}))\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},A(\phi(\mathbf{T}))\rangle\mathbf{N}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_\mathbf{T}(-\Omega_2'\mathbf{N})$

$-\langle\mathbf{N},(-\Omega_2'\mathbf{N})\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},(-\Omega_2'\mathbf{N})\rangle\mathbf{N}$

bulunur. İç çarpım işlemleri yapılarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2''\mathbf{N} - \Omega_2'\nabla_T\mathbf{N}$

$-\langle\mathbf{N},(-\Omega_2'\mathbf{N})\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},(-\Omega_2'\mathbf{N})\rangle\mathbf{N}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2''\mathbf{N} - \Omega_2'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$-\langle\mathbf{N},(-\Omega_2'\mathbf{N})\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}),(-\Omega_2'\mathbf{N})\rangle\mathbf{N}$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2''\mathbf{N} + \Omega_2'\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\tau\mathbf{B} - \Omega_2'\kappa\mathbf{T} + \Omega_2'\tau\mathbf{B}$

bulunur ve

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{T})) = -\Omega_2''\mathbf{N}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})),A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{X})),\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle-\Omega_2'\mathbf{N},-\Omega_2'\mathbf{N}\rangle$

$+\langle-\Omega_2''\mathbf{N},-\Omega_2''\mathbf{N}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega_2')^2 + (\Omega_2'')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{N}))$ nin normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle\nabla_T\mathbf{N},\mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_\mathbf{T}A(\phi(\mathbf{N})$

$-\langle \mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{N}))\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{N}))\rangle \mathbf{N}$

$A(\phi(\mathbf{N}))$ eşitliği yerine yazılır ve

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\Omega_2' \mathbf{T} - \tau' \mathbf{B})$

$-\langle \mathbf{N}, \Omega_2' \mathbf{T} - \tau' \mathbf{B}\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, \Omega_2' \mathbf{T} - \tau' \mathbf{B}\rangle \mathbf{N}$

veya

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2'' \mathbf{T} + \Omega_2' \nabla_T \mathbf{T} - \tau'' \mathbf{B} - \tau' \nabla_T \mathbf{B}$

$-\langle \mathbf{N}, \Omega_2' \mathbf{T} - \tau' \mathbf{B}\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, \Omega_2' \mathbf{T} - \tau' \mathbf{B}\rangle \mathbf{N}$

veya

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2'' \mathbf{T} + \Omega_2' \kappa \mathbf{N} - \tau'' \mathbf{B} - \tau'(-\tau \mathbf{N})$

$-\langle \mathbf{N}, \Omega_2' \mathbf{T} - \tau' \mathbf{B}\rangle (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) + \langle (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}), \Omega_2' \mathbf{T} - \tau' \mathbf{B}\rangle \mathbf{N}$

dağılma özelliğinden

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2'' \mathbf{T} + \Omega_2' \kappa \mathbf{N} - \tau'' \mathbf{B} + \tau' \tau \mathbf{N} + \Omega_2' \kappa \mathbf{N} - \tau' \tau \mathbf{N}$

bulunur ve

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2'' \mathbf{T} - \tau'' \mathbf{B}$

elde edilir. Ve enerji

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X}))\rangle) ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle \Omega_2' \mathbf{T} - \tau' \mathbf{B}, \Omega_2' \mathbf{T} - \tau' \mathbf{B}\rangle$

$+\langle \Omega_2'' \mathbf{T} - \tau'' \mathbf{B}, \Omega_2'' \mathbf{T} - \tau'' \mathbf{B}\rangle) ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega_2')^2 + (\tau')^2 + (\Omega_2'')^2 + (\tau'')^2) ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{B}))$ nin normal Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} \mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{N}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_{\mathbf{T}} A(\phi(\mathbf{B}))$

$-\langle \mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{B}))\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, A(\phi(\mathbf{B}))\rangle \mathbf{N}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\tau' \mathbf{N}) - \langle \mathbf{N}, \tau' \mathbf{N}\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, \tau' \mathbf{N}\rangle \mathbf{N}$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \tau'' \mathbf{N} + \tau' \nabla_T \mathbf{N} - \langle \mathbf{N}, \tau' \mathbf{N}\rangle \nabla_T \mathbf{N} + \langle \nabla_T \mathbf{N}, \tau' \mathbf{N}\rangle \mathbf{N}$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \tau''\mathbf{N} + \tau'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$
$$-\langle \mathbf{N}, \tau'\mathbf{N}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), \tau'\mathbf{N}\rangle\mathbf{N}$$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \tau''\mathbf{N} - \tau'\kappa\mathbf{T} + \tau'\tau\mathbf{B} + \tau'\kappa\mathbf{T} - \tau'\tau\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{B})) = \tau''\mathbf{N}$$

elde edilir. Ve

$$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\right.$$
$$\left.+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\right)ds$$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle \tau'\mathbf{N}, \tau'\mathbf{N}\rangle + \langle \tau''\mathbf{N}, \tau''\mathbf{N}\rangle\right)ds$$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left((\tau')^2 + (\tau'')^2\right)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\mathbf{V})$’nin normal Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle \nabla_T\mathbf{N}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{N}$$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{T}}A(\mathbf{V}) - \langle \mathbf{N}, A(\mathbf{V})\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle \nabla_T\mathbf{N}, A(\mathbf{V})\rangle\mathbf{N}$$

ya da

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\tau'\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{B}) - \langle \mathbf{N}, (-\tau'\mathbf{T}$$
$$-\Omega_2'\mathbf{B})\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle \nabla_T\mathbf{N}, (-\tau'\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{B})\rangle\mathbf{N}$$

bulunur.

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\nabla_T\mathbf{T} - \Omega_2''\mathbf{B} - \Omega_2'\nabla_T\mathbf{B}$$
$$-\langle \mathbf{N}, (-\tau'\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{B})\rangle\nabla_T\mathbf{N} + \langle \nabla_T\mathbf{N}, (-\tau'\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{B})\rangle\mathbf{N}$$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\boldsymbol{\kappa}\mathbf{N} - \Omega_2''\mathbf{B} - \Omega_2'(-\tau\mathbf{N})$$
$$-\langle \mathbf{N}, (-\tau'\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{B})\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$
$$+\langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), (-\tau'\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{B})\rangle\mathbf{N}$$

bulunur. İç çarpım işlemlerinden sonra

$$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\boldsymbol{\kappa}\mathbf{N} - \Omega_2''\mathbf{B} + \Omega_2'\tau\mathbf{N} + \tau'\kappa\mathbf{N} - \Omega_2'\tau\mathbf{N}$$

veya

$\widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \Omega_2''\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{normal}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0normal} A(\phi(\mathbf{X}))\rangle) ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{normal}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(-\tau'\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{B}), (-\tau'\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{B})\rangle$

$+\langle(-\tau''\mathbf{T} - \Omega_2''\mathbf{B}), (-\tau''\mathbf{T} - \Omega_2''\mathbf{B})\rangle) ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{normal}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(\tau')^2 + (\Omega_2')^2$

$+(\tau'')^2 + (\Omega_2'')^2) ds$

elde edilir.

6.4 Manyetik Eğrilerin Genelleştirilmiş Modifiye(bi-normal) Fermi-Walker Türevi Yardımıyla Enerjileri

Teorem 6.4.1 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{B})), A(\mathbf{V})$ alanlarının genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi- Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + \kappa^4 + (\kappa'')^2$

$+9\kappa^2(\kappa')^2 + \kappa^6 + 2\kappa''\kappa^3) ds,$

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + \kappa^4 + (\Omega')^2$ (6.10)

$+(\kappa'')^2 + \kappa^6 + 2\kappa''\kappa^3 + 9\kappa^2(\kappa')^2 + (\Omega'')^2) ds,$

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega')^2 + \Omega^2\kappa^2$

$+4(\Omega')^2\kappa^2 + \Omega^2(\kappa')^2 + (\Omega'')^2 + \Omega^2\kappa^4$

$+4\Omega'\kappa\Omega\kappa' - 2\Omega''\Omega\kappa^2) ds,$

$\varepsilon^{modified}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega')^2 + \Omega^2\kappa^2 + (\kappa')^2$

$+(\Omega'')^2 + \Omega^2\kappa^4 - 2\Omega''\Omega\kappa^2 + 4(\Omega')^2\kappa^2$

$+\Omega^2(\kappa')^2 + 4\Omega'\kappa\Omega\kappa' + (\boldsymbol{\kappa}'')^2) ds$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **T**-manyetik eğri olsun. O halde

$A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa'\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T},$

$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B},$

$A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega'\mathbf{N} - \Omega\kappa\mathbf{T},$

$A(\mathbf{V}) = -\Omega'\mathbf{T} - \Omega\kappa\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}$

dir ve Teorem 5.2.1' de hesaplanmıştır. Buradan $A(\phi(\mathbf{T}))$ nin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\kappa'\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T})$

$-\langle\mathbf{B}, -\kappa'\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B}, -\kappa'\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T}\rangle\mathbf{B}$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \kappa'\nabla_T\mathbf{N} + (\kappa^2)'\mathbf{T} + \kappa^2\nabla_T\mathbf{T}$

$-\langle\mathbf{B}, -\kappa'\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B}, -\kappa'\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T}\rangle\mathbf{B}$

bulunur. İç çarpım işlemleri yapılarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} - \kappa'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + 2\kappa\kappa'\mathbf{T}$

$+\kappa^2\kappa\mathbf{N} - \langle\mathbf{B}, -\kappa'\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T}\rangle(-\tau\mathbf{N})$

$+\langle(-\tau\mathbf{N}), -\kappa'\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T}\rangle\mathbf{B}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} + \kappa\kappa'\mathbf{T} - \kappa'\tau\mathbf{B}$

$+2\kappa\kappa'\mathbf{T} + \kappa^3\mathbf{N} + \tau\kappa'\mathbf{B}$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{T})) = -\kappa''\mathbf{N} + 3\kappa\kappa'\mathbf{T} + \kappa^3\mathbf{N}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\right.$

$\left.+\langle\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\right)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle -\kappa'\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T}, -\kappa'\mathbf{N} + \kappa^2\mathbf{T}\rangle\right.$

$\left.+\langle -\kappa''\mathbf{N} + 3\kappa\kappa'\mathbf{T} + \kappa^3\mathbf{N}, -\kappa''\mathbf{N} + 3\kappa\kappa'\mathbf{T} + \kappa^3\mathbf{N}\rangle\right)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left((\kappa')^2 + \kappa^4 + (\kappa'')^2\right.$

$\left.+9\kappa^2(\kappa')^2 + \kappa^6 + \mathbf{2}\kappa''\boldsymbol{\kappa}^3\right)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{N}))$ nin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \nabla_T \mathbf{B} + \langle \nabla_T \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_\mathbf{T}(\kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B})$$
$$-\langle \mathbf{B}, (\kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B})\rangle \nabla_T \mathbf{B}$$
$$+\langle \nabla_T \mathbf{B}, (\kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B})\rangle \mathbf{B}$$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\nabla_T\mathbf{T} + (\kappa^2)'\mathbf{N} + \kappa^2\nabla_T\mathbf{N}$$
$$-\boldsymbol{\Omega}''\mathbf{B} - \Omega'\nabla_T\mathbf{B} - \langle \mathbf{B}, (\kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B})\rangle \nabla_T \mathbf{B}$$
$$+\langle \nabla_T \mathbf{B}, -\kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B})\rangle \mathbf{B}$$

ya da

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} + (\kappa^2)'\mathbf{N} + \kappa^2(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$$
$$-\boldsymbol{\Omega}''\mathbf{B} - \Omega'(-\tau\mathbf{N}) - \langle \mathbf{B}, (\kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B})\rangle(-\tau\mathbf{N})$$
$$+\langle(-\tau\mathbf{N}), (\kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B})\rangle \mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} + 2\kappa\kappa'\mathbf{N} - \kappa^3\mathbf{T} + \kappa^2\tau\mathbf{B}$$
$$-\Omega''\mathbf{B} + \Omega'\tau\mathbf{N} - \langle \mathbf{B}, (\kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B})\rangle(-\tau\mathbf{N})$$
$$+\langle(-\tau\mathbf{N}), (\kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B})\rangle \mathbf{B}$$

bulunur ve

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} + 2\kappa\kappa'\mathbf{N} - \kappa^3\mathbf{T}$$
$$+\kappa^2\tau\mathbf{B} - \Omega''\mathbf{B} + \Omega'\tau\mathbf{N} - \Omega'\tau\mathbf{N} - \tau\kappa^2\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + 3\kappa\kappa'\mathbf{N} - \kappa^3\mathbf{T} - \Omega''\mathbf{B}$$

elde edilir. Ve enerji

$$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$$
$$+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle \kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B}, \kappa'\mathbf{T}$$
$$+\kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\mathbf{B}\rangle + \langle(\kappa'' - \kappa^{\mathbf{3}})\mathbf{T} + 3\kappa\kappa'\mathbf{N}$$
$$-\Omega''\mathbf{B}, (\kappa'' - \kappa^{\mathbf{3}})\mathbf{T} + 3\kappa\kappa'\mathbf{N} - \Omega''\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_{\beta} ((\kappa')^2 + \kappa^4 + (\Omega')^2$

$+(\kappa'')^2 + \kappa^6 + 2\kappa''\kappa^3 + 9\kappa^2(\kappa')^2 + (\Omega'')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{B}))$ nin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \nabla_T \mathbf{B} + \langle \nabla_T \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{B}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\Omega'\mathbf{N} - \Omega\kappa\mathbf{T})$

$-\langle \mathbf{B}, \Omega'\mathbf{N} - \Omega\kappa\mathbf{T}\rangle \nabla_T \mathbf{B} + \langle \nabla_T \mathbf{B}, \Omega'\mathbf{N} - \Omega\kappa\mathbf{T}\rangle \mathbf{B}$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega''\mathbf{N} + \Omega'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$

$-\langle \mathbf{N}, \Omega'\mathbf{N}\rangle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \langle(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}), \Omega'\mathbf{N}\rangle \mathbf{N}$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega''\mathbf{N} + \Omega'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \Omega'\kappa\mathbf{T} - \Omega\kappa'\mathbf{T}$

$-\Omega\kappa\kappa\mathbf{N} - \langle \mathbf{B}, \Omega'\mathbf{N} - \Omega\kappa\mathbf{T}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}), \Omega'\mathbf{N} - \Omega\kappa\mathbf{T}\rangle \mathbf{B}$

veya

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{B})) = \Omega''\mathbf{N} - \Omega'\kappa\mathbf{T} + \Omega'\tau\mathbf{B}$

$-\Omega'\kappa\mathbf{T} - \Omega\kappa'\mathbf{T} - \Omega\kappa^2\mathbf{N} - \Omega'\tau\mathbf{B}$

veya

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{B})) = (-2\Omega'\kappa - \Omega\kappa')\mathbf{T} + (\Omega'' - \Omega\kappa^2)\mathbf{N}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_{\beta} (\langle \Omega'\mathbf{N} - \Omega\kappa\mathbf{T}, \Omega'\mathbf{N}$

$-\Omega\kappa\mathbf{T}\rangle + \langle(-2\Omega'\kappa - \Omega\kappa')\mathbf{T} + (\Omega'' - \Omega\kappa^2)\mathbf{N},$

$(-2\Omega'\kappa - \Omega\kappa')\mathbf{T} + (\Omega'' - \Omega\kappa^2)\mathbf{N}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_{\beta} ((\Omega')^2 + \Omega^2\kappa^2$

$+4(\Omega')^2\kappa^2 + \Omega^2(\kappa')^2 + (\Omega'')^2$

$+\Omega^2\kappa^4 + 4\Omega'\kappa\Omega\kappa' - 2\Omega''\Omega\kappa^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\mathbf{V})$'nin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \nabla_T\mathbf{B} + \langle \nabla_T\mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\Omega'\mathbf{T} - \Omega\kappa\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B})$$
$$-\langle \mathbf{B}, -\Omega'\mathbf{T} - \Omega\kappa\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}\rangle \nabla_T\mathbf{B}$$
$$+\langle \nabla_T\mathbf{B}, -\Omega'\mathbf{T} - \Omega\kappa\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}\rangle \mathbf{B}$$

ya da

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} - \boldsymbol{\Omega}'\nabla_T\mathbf{T} - \Omega'\kappa\mathbf{N} - \Omega\kappa'\mathbf{N}$$
$$-\Omega\kappa\nabla_T\mathbf{N} - \boldsymbol{\kappa}''\mathbf{B} - \kappa'\nabla_T\mathbf{B} - \langle \mathbf{B}, -\Omega'\mathbf{T} - \Omega\kappa\mathbf{N}$$
$$-\kappa'\mathbf{B}\rangle \nabla_T\mathbf{B} + \langle \nabla_T\mathbf{B}, -\Omega'\mathbf{T} - \Omega\kappa\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}\rangle \mathbf{B}$$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} - \Omega'\kappa\mathbf{N} - \Omega'\kappa\mathbf{N} - \Omega\kappa'\mathbf{N}$$
$$-\Omega\kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \boldsymbol{\kappa}''\mathbf{B} - \kappa'(-\tau\mathbf{N})$$
$$-\langle \mathbf{B}, -\Omega'\mathbf{T} - \Omega\kappa\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}\rangle(-\tau\mathbf{N})$$
$$+\langle(-\tau\mathbf{N}), -\Omega'\mathbf{T} - \Omega\kappa\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}\rangle \mathbf{B}$$

bulunur. İç çarpım işlemlerinden sonra

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} - \Omega'\kappa\mathbf{N} - \Omega'\kappa\mathbf{N} - \Omega\kappa'\mathbf{N} + \Omega\kappa^2\mathbf{T}$$
$$-\Omega\kappa\tau\mathbf{B} - \boldsymbol{\kappa}''\mathbf{B} + \kappa'\tau\mathbf{N} - \kappa'\tau\mathbf{N} + \Omega\kappa\tau\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = -\Omega''\mathbf{T} + \Omega\kappa^2\mathbf{T} - 2\Omega'\kappa\mathbf{N} - \Omega\kappa'\mathbf{N} - \boldsymbol{\kappa}''\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = (-\Omega'' + \Omega\kappa^2)\mathbf{T} + (-2\Omega'\kappa - \Omega\kappa')\mathbf{N} + (-\boldsymbol{\kappa}'')\mathbf{B}$$

elde edilir. Ve

$$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$$
$$+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\varepsilon^{modified}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\Omega'\mathbf{T} - \Omega\kappa\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}, -\Omega'\mathbf{T}$$
$$-\Omega\kappa\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}\rangle + \langle(-\Omega'' + \Omega\kappa^2)\mathbf{T} + (-2\Omega'\kappa - \Omega\kappa')\mathbf{N}$$
$$+(-\boldsymbol{\kappa}'')\mathbf{B}, (-\Omega'' + \Omega\kappa^2)\mathbf{T} + (-2\Omega'\kappa - \Omega\kappa')\mathbf{N} + (-\boldsymbol{\kappa}'')\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$$\varepsilon^{modified}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega')^2 + \Omega^2\kappa^2 + (\kappa')^2 + (\Omega'')^2 + \Omega^2\kappa^4$$

$-2\Omega''\Omega\kappa^2 + 4(\Omega')^2\kappa^2 + \Omega^2(\kappa')^2 + 4\Omega'\kappa\Omega\kappa' + (\boldsymbol{\kappa}'')^2)ds$

elde edilir.

Teorem 6.4.2 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{B})), A(\mathbf{V})$ alanlarının genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi- Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\kappa^4 + (\kappa')^2 + (\alpha')^2$$
$$+9\kappa^2(\kappa')^2 + \kappa^6 + (\kappa'')^2 - 2\kappa^3\kappa'' + (\alpha'')^2)ds,$$
$$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + \kappa^4 + (\tau')^2$$
$$+(\kappa'')^2 + \kappa^6 + 2\kappa''\kappa^3 + \kappa^2(\kappa')^2 + (\tau'')^2)ds,$$
$$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\alpha')^2 + \tau^2\kappa^2 - 2\alpha'\tau\kappa \tag{6.11}$$
$$+\alpha^2\kappa^2 + (\tau')^2 + 2\alpha\kappa\tau' + (\alpha'')^2 + 4(\tau')^2\kappa^2$$
$$+\tau^2(\kappa')^2 + \alpha^2\kappa^4 - 4\alpha''\tau'\kappa - 2\alpha''\tau\kappa' - 2\alpha''\alpha\kappa^2$$
$$+4\tau'\kappa\tau\kappa' + 4\tau'\alpha\kappa^3 + 2\tau\kappa'\alpha\kappa^2 + 4(\alpha')^2\kappa^2$$
$$+\tau^2\kappa^4 + \alpha^2(\kappa')^2 + (\tau'')^2 - 4\alpha'\tau\kappa^3 + 4\alpha'\kappa\alpha\kappa'$$
$$+4\alpha'\kappa\tau'' - 2\tau\kappa^2\alpha\kappa' - 2\tau\kappa^2\tau'' + 2\alpha\kappa'\tau'')ds,$$
$$\varepsilon^{modified}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + \alpha^2\kappa^2 + 2\tau'\alpha\kappa + \tau^2\kappa^2$$
$$+(\alpha')^2 - 2\tau\kappa\alpha' + (\kappa')^2 + (\tau'')^2 + 4(\alpha')^2\kappa^2 + \alpha^2(\kappa')^2$$
$$+\tau^2\kappa^4 + 4\tau''\alpha'\kappa'' + 2\tau''\alpha\kappa' - 2\tau''\tau\kappa^2 + 4\alpha'\kappa\alpha\kappa'$$
$$-4\alpha'\tau\kappa^3 - 2\alpha\kappa'\tau\kappa^2 + 4(\tau')^2\kappa^2 + \alpha^2\kappa^4 + (\kappa')^2\tau^2$$
$$+(\alpha'')^2 + 4\tau'\alpha\kappa^3 + 4\tau'\kappa\kappa'\tau - 4\tau'\kappa\alpha''$$
$$+2\alpha\kappa^2\kappa'\tau - 2\alpha\kappa^2\alpha'' - 2\kappa'\tau\alpha'' + (\kappa'')^2)ds$$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **N**-manyetik eğri olsun. O halde

$$A(\phi(\mathbf{T})) = \kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B},$$
$$A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B},$$
$$A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{N},$$
$$A(\mathbf{V}) = -\tau'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}$$

dir ve Teorem 5.2.2' de hesaplanmıştır. Buradan $A(\phi(\mathbf{T}))$ nin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}) - \langle \mathbf{B}, \kappa^2\mathbf{T}$
$-\kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}\rangle \nabla_T \mathbf{B} + \langle \nabla_T \mathbf{B}, \kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}\rangle \mathbf{B}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{T})) = (\kappa^2)'\mathbf{T} + \kappa^2\nabla_T\mathbf{T} - \kappa''\mathbf{N} - \kappa'\nabla_T\mathbf{N}$
$-\alpha''\mathbf{B} - \alpha'\nabla_T\mathbf{B} - \langle \mathbf{B}, \kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}\rangle \nabla_T\mathbf{B}$
$+\langle \nabla_T\mathbf{B}, \kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}\rangle \mathbf{B}$

bulunur. İç çarpım işlemleri yapılarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{T})) = 2\kappa\kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\nabla_T\mathbf{T} - \kappa''\mathbf{N} - \kappa'\nabla_T\mathbf{N}$
$-\alpha''\mathbf{B} - \alpha'\nabla_T\mathbf{B} - \langle \mathbf{B}, \kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N}$
$-\alpha'\mathbf{B}\rangle \nabla_T\mathbf{B} + \langle \nabla_T\mathbf{B}, \kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}\rangle \mathbf{B}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{T})) = 2\kappa\kappa'\mathbf{T} + \kappa^2\kappa\mathbf{N} - \kappa''\mathbf{N} - \kappa'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B})$
$-\alpha''\mathbf{B} - \alpha'(-\tau\mathbf{N}) - \langle \mathbf{B}, \kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}\rangle(-\tau\mathbf{N})$
$+\langle(-\tau\mathbf{N}), \kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}\rangle \mathbf{B}$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{T})) = 2\kappa\kappa'\mathbf{T} + \kappa^3\mathbf{N} - \kappa''\mathbf{N} + \kappa'\kappa\mathbf{T} - \kappa'\tau\mathbf{B}$
$-\alpha''\mathbf{B} + \alpha'\tau\mathbf{N} - \alpha'\tau\mathbf{N} + \tau\kappa'\mathbf{B}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{T})) = (3\kappa\kappa')\mathbf{T} + (\kappa^3 - \kappa'')\mathbf{N} + (-\alpha'')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\right.$
$\left.+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{X}))\rangle\right) ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\langle \kappa^2\mathbf{T} - \kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}, \kappa^2\mathbf{T}\right.$
$-\kappa'\mathbf{N} - \alpha'\mathbf{B}\rangle + \langle (3\kappa\kappa')\mathbf{T} + (\kappa^3 - \kappa'')\mathbf{N}$
$\left.+(-\alpha'')\mathbf{B}, (3\kappa\kappa')\mathbf{T} + (\kappa^3 - \kappa'')\mathbf{N} + (-\alpha'')\mathbf{B}\rangle\right) ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta \left(\kappa^4 + (\kappa')^2 + (\alpha')^2\right.$
$\left.+9\kappa^2(\kappa')^2 + \kappa^6 + (\kappa'')^2 - 2\kappa^3\kappa'' + (\alpha'')^2\right) ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{N}))$ nin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \nabla_T \mathbf{B} + \langle \nabla_T \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}) - \langle \mathbf{B}, (\kappa'\mathbf{T}$$
$$\kappa^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B})\rangle \nabla_T \mathbf{B} + \langle \nabla_T \mathbf{B}, (\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B})\rangle \mathbf{B}$$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\nabla_T\mathbf{T} - (\kappa^2)'\mathbf{N}$$
$$-\kappa^2\nabla_T\mathbf{N} - \tau''\mathbf{B} - \tau'\nabla_T\mathbf{B}$$
$$-\langle \mathbf{B}, (\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B})\rangle \nabla_T\mathbf{B}$$
$$+\langle \nabla_T\mathbf{B}, (\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B})\rangle \mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} - 2\kappa\kappa'\mathbf{N}$$
$$-\kappa^2(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \tau''\mathbf{B} - \tau'(-\tau\mathbf{N})$$
$$-\langle \mathbf{B}, (\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B})\rangle (-\tau\mathbf{N})$$
$$+\langle (-\tau\mathbf{N}), (\kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B})\rangle \mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N})) = \kappa''\mathbf{T} + \kappa'\kappa\mathbf{N} - 2\kappa\kappa'\mathbf{N}$$
$$+\kappa^3\mathbf{T} - \kappa^2\tau\mathbf{B} - \tau''\mathbf{B} + \tau'\tau\mathbf{N} - \tau'\tau\mathbf{N} + \kappa^2\tau\mathbf{B}$$

bulunur ve

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N})) = (\kappa'' + \kappa^3)\mathbf{T} + (-\kappa\kappa')\mathbf{N} + (-\tau'')\mathbf{B}$$

elde edilir. Ve enerji

$$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$$
$$+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle \kappa'\mathbf{T} - \kappa^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}, \kappa'\mathbf{T}$$
$$-\kappa^2\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B}\rangle + \langle (\kappa'' + \kappa^3)\mathbf{T} + (-\kappa\kappa')\mathbf{N}$$
$$+(-\tau'')\mathbf{B}, (\kappa'' + \kappa^3)\mathbf{T} + (-\kappa\kappa')\mathbf{N} + (-\tau'')\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\kappa')^2 + \kappa^4 + (\tau')^2$$
$$+(\kappa'')^2 + \kappa^6 + 2\kappa''\kappa^3 + \kappa^2(\kappa')^2 + (\tau'')^2)ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{B}))$ nin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \nabla_T \mathbf{B} + \langle \nabla_T \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \mathbf{B}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_{\mathbf{T}}(\alpha'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{N})$

$-\langle \mathbf{B}, \alpha'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{N}\rangle \nabla_T \mathbf{B}$

$+\langle \nabla_T \mathbf{B}, \alpha'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{N}\rangle \mathbf{B}$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha''\mathbf{T} + \alpha'\nabla_T\mathbf{T} - \tau'\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa'\mathbf{T} - \tau\kappa\nabla_T\mathbf{T}$

$+\alpha'\kappa\mathbf{N} + \alpha\kappa'\mathbf{N} + \alpha\kappa\nabla_T\mathbf{N} + \tau''\mathbf{N} + \tau'\nabla_T\mathbf{N}$

$-\langle \mathbf{B}, \alpha'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{N}\rangle \nabla_T \mathbf{B}$

$+\langle \nabla_T \mathbf{B}, \alpha'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{N}\rangle \mathbf{B}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha''\mathbf{T} + \alpha'\kappa\mathbf{N} - \tau'\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa'\mathbf{T} - \tau\kappa\kappa\mathbf{N}$

$+\alpha'\kappa\mathbf{N} + \alpha\kappa'\mathbf{N} + \alpha\kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \tau''\mathbf{N}$

$+\tau'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \langle \mathbf{B}, \alpha'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\kappa\mathbf{N}$

$+\tau'\mathbf{N}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}), \alpha'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{N}\rangle \mathbf{B}$

dağılma özelliğinden

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha''\mathbf{T} + \alpha'\kappa\mathbf{N} - \tau'\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa'\mathbf{T} - \tau\kappa^2\mathbf{N}$

$+\alpha'\kappa\mathbf{N} + \alpha\kappa'\mathbf{N} - \alpha\kappa^2\mathbf{T} + \alpha\kappa\tau\mathbf{B}$

$+\tau''\mathbf{N} - \tau'\kappa\mathbf{T} + \tau'\tau\mathbf{B} - \alpha\kappa\tau\mathbf{B} - \tau'\tau\mathbf{B}$

yazlılır ve

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{B})) = \alpha''\mathbf{T} - 2\tau'\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa'\mathbf{T}$

$-\alpha\kappa^2\mathbf{T} + 2\alpha'\kappa\mathbf{N} - \tau\kappa^2\mathbf{N} + \alpha\kappa'\mathbf{N} + \tau''\mathbf{N}$

ortak çarpan parantezine alınırsa

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{B})) = (\alpha'' - 2\tau'\kappa - \tau\kappa' - \alpha\kappa^2)\mathbf{T}$

$+(\mathbf{2}\alpha'\kappa - \tau\kappa^2 + \alpha\kappa' + \tau'')\mathbf{N}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle \alpha'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\kappa\mathbf{N}$

$+\tau'\mathbf{N}, \alpha'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{T} + \alpha\kappa\mathbf{N} + \tau'\mathbf{N}\rangle$

$+\langle(\alpha'' - 2\tau'\kappa - \tau\kappa' - \alpha\kappa^2)\mathbf{T}$

$+(\mathbf{2}\alpha'\kappa - \tau\kappa^2 + \alpha\kappa' + \tau'')\mathbf{N}, (\alpha'' - 2\tau'\kappa$

$-\tau\kappa' - \alpha\kappa^2)\mathbf{T} + (\mathbf{2}\alpha'\kappa - \tau\kappa^2 + \alpha\kappa' + \tau'')\mathbf{N}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\alpha')^2 + \tau^2\kappa^2 - 2\alpha'\tau\kappa$

$+\alpha^2\kappa^2 + (\tau')^2 + 2\alpha\kappa\tau', +(\alpha'')^2 + 4(\tau')^2\kappa^2$

$+\tau^2(\kappa')^2 + \alpha^2\kappa^4 - 4\alpha''\tau'\kappa - 2\alpha''\tau\kappa' - 2\alpha''\alpha\kappa^2$

$+4\tau'\kappa\tau\kappa' + 4\tau'\alpha\kappa^3 + 2\tau\kappa'\alpha\kappa^2 + 4(\alpha')^2\kappa^2 + \tau^2\kappa^4$

$+\alpha^2(\kappa')^2 + (\tau'')^2 - 4\alpha'\tau\kappa^3 + 4\alpha'\kappa\alpha\kappa'$

$+4\alpha'\kappa\tau'' - 2\tau\kappa^2\alpha\kappa' - 2\tau\kappa^2\tau'' + 2\alpha\kappa'\tau'')ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\mathbf{V})$'nin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$\tilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\tilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = \nabla_\mathbf{T}(-\tau'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B})$

$-\langle\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B}$

$+\langle\nabla_T\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$

elde edilir.

$\tilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\nabla_T\mathbf{T} - \alpha'\kappa\mathbf{T} - \alpha\kappa'\mathbf{T} - \alpha\kappa\nabla_T\mathbf{T} - \tau'\kappa\mathbf{N}$

$-\tau\kappa'\mathbf{N} - \tau\kappa\nabla_T\mathbf{N} + \alpha''\mathbf{N} + \alpha'\nabla_T\mathbf{N} - \kappa''\mathbf{B} - \kappa'\nabla_T\mathbf{B}$

$-\langle\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},$

$-\tau'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\tilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\kappa\mathbf{N} - \alpha'\kappa\mathbf{T} - \alpha\kappa'\mathbf{T} - \alpha\kappa\kappa\mathbf{N} - \tau'\kappa\mathbf{N}$

$-\tau\kappa'\mathbf{N} - \tau\kappa(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) + \alpha''\mathbf{N} + \alpha'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \kappa''\mathbf{B}$

$-\kappa'(-\tau\mathbf{N}) - \langle\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}\rangle(-\tau\mathbf{N})$

$+\langle(-\tau\mathbf{N}), -\tau'\mathbf{T} - \alpha\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} + \alpha'\mathbf{N} - \kappa'\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$

bulunur. İç çarpım işlemlerinden sonra

$\tilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\kappa\mathbf{N} - \alpha'\kappa\mathbf{T} - \alpha\kappa'\mathbf{T} - \alpha\kappa^2\mathbf{N} - \tau'\kappa\mathbf{N}$

$-\tau\kappa'\mathbf{N} + \tau\kappa^2\mathbf{T} - \tau^2\kappa\mathbf{B} + \alpha''\mathbf{N} - \alpha'\kappa\mathbf{T} + \alpha'\tau\mathbf{B}$

$-\kappa''\mathbf{B} + \kappa'\tau\mathbf{N} - \kappa'\tau\mathbf{N} + \tau^2\kappa\mathbf{B} - \tau\alpha'\mathbf{B}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\mathbf{V}) = (-\tau'' - 2\alpha'\kappa - \alpha\kappa' + \tau\kappa^2)\mathbf{T}$

$+(-2\tau'\kappa - \alpha\kappa^2 - \kappa'\tau + \alpha'')\mathbf{N} + (-\kappa'')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0modified} A(\phi(\mathbf{X}))\rangle) ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{modified}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle(-\tau' - \alpha\kappa)\mathbf{T} + (-\tau\kappa + \alpha')\mathbf{N}$

$+(-\kappa')\mathbf{B}, (-\tau' - \alpha\kappa)\mathbf{T} + (-\tau\kappa + \alpha')\mathbf{N} + (-\kappa')\mathbf{B}\rangle$

$+\langle(-\tau'' - 2\alpha'\kappa - \alpha\kappa' + \tau\kappa^2)\mathbf{T} + (-2\tau'\kappa - \alpha\kappa^2 - \kappa'\tau + \alpha'')\mathbf{N} + (-\kappa'')\mathbf{B},$

$(-\tau'' - 2\alpha'\kappa - \alpha\kappa' + \tau\kappa^2)\mathbf{T} + (-2\tau'\kappa - \alpha\kappa^2 - \kappa'\tau + \alpha'')\mathbf{N} + (-\kappa'')\mathbf{B}\rangle) ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{modified}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + \alpha^2\kappa^2 + 2\tau'\alpha\kappa + \tau^2\kappa^2 + (\alpha')^2 - 2\tau\kappa\alpha'$

$+(\kappa')^2 + (\tau'')^2 + 4(\alpha')^2\kappa^2 + \alpha^2(\kappa')^2 + \tau^2\kappa^4 + 4\tau''\alpha'\kappa''$

$+2\tau''\alpha\kappa' - 2\tau''\tau\kappa^2 + 4\alpha'\kappa\alpha\kappa' - 4\alpha'\tau\kappa^3 - 2\alpha\kappa'\tau\kappa^2$

$+4(\tau')^2\kappa^2 + \alpha^2\kappa^4 + (\kappa')^2\tau^2 + (\alpha'')^2 + 4\tau'\alpha\kappa^3 + 4\tau'\kappa\kappa'\tau$

$-4\tau'\kappa\alpha'' + 2\alpha\kappa^2\kappa'\tau - 2\alpha\kappa^2\alpha'' - 2\kappa'\tau\alpha'' + (\kappa'')^2) ds$

elde edilir.

Teorem 6.4.3 β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. $A(\phi(\mathbf{T})), A(\phi(\mathbf{N})), A(\phi(\mathbf{B})), A(\mathbf{V})$ alanlarının genelleştirilmiş modifiye(bi-normal) Fermi- Walker türevi yardımıyla enerjileri sırasıyla

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\Omega_2^2\kappa^2 + (\Omega_2')^2 + 4(\Omega_2')^2\kappa^2$

$+\Omega_2^2(\kappa')^2 + 4\Omega_2'\kappa\Omega_2\kappa' + \Omega_2^2\kappa^4 + (\Omega_2'')^2 - 2\Omega_2\kappa^2\Omega_2'') ds,$

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega_2')^2 + \Omega_2^2\kappa^2$

$+(\tau')^2 + (\Omega_2'')^2 + \Omega_2^2\kappa^4 - 2\Omega_2''\Omega_2\kappa^2$ (6.12)

$+4(\Omega_2')^2\kappa^2 + \Omega_2^2(\kappa')^2 + 4\Omega_2'\kappa\Omega_2\kappa' + (\tau'')^2) ds,$

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + \tau^2\kappa^2 + 4(\tau')^2\kappa^2$

$+\tau^2(\kappa')^2 + 4\tau'\kappa\tau\kappa' + (\tau'')^2 + \tau^2\kappa^4 - 2\tau''\tau\kappa^2) ds,$

$\varepsilon^{modified}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + \tau^2\kappa^2 + (\Omega_2')^2$

$+(\tau'')^2 + \tau^2\kappa^4 - 2\tau''\tau\kappa^2 + 4(\tau')^2\kappa^2$

$+\tau^2(\kappa')^2 + 4\tau'\kappa\tau\kappa' + (\Omega_2'')^2) ds$

dir.

İspat: β, 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre birim hızlı **B**-manyetik eğri olsun. O halde

$A(\phi(\mathbf{T})) = \Omega_2\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{N},$

$A(\phi(\mathbf{N})) = \Omega_2'\mathbf{T} + \Omega_2\kappa\mathbf{N} - \tau'\mathbf{B},$

$A(\phi(\mathbf{B})) = \tau'\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{T},$

$A(\mathbf{V}) = -\tau'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}$

die ve Teorem 5.2.3' de hesaplanmıştır. Buradan $A(\phi(\mathbf{T}))$ nin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{T})) = \nabla_\mathbf{T}(\Omega_2\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{N})$

$-\langle\mathbf{B},\Omega_2\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\Omega_2\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{T})) = \Omega_2'\kappa\mathbf{T} + \Omega_2\kappa'\mathbf{T} + \Omega_2\kappa\nabla_T\mathbf{T} - \Omega_2''\mathbf{N}$

$-\Omega_2'\nabla_T\mathbf{N} - \langle\mathbf{B},\Omega_2\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{N}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\Omega_2\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$

bulunur. İç çarpım işlemleri yapılarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{T})) = \Omega_2'\kappa\mathbf{T} + \Omega_2\kappa'\mathbf{T} + \Omega_2\kappa\kappa\mathbf{N} - \Omega_2''\mathbf{N}$

$-\Omega_2'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \langle\mathbf{B},\Omega_2\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{N}\rangle(-\tau\mathbf{N})$

$+\langle(-\tau\mathbf{N}),\Omega_2\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{N}\rangle\mathbf{B}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{T})) = \Omega_2'\kappa\mathbf{T} + \Omega_2\kappa'\mathbf{T} + \Omega_2\kappa^2\mathbf{N}$

$-\Omega_2''\mathbf{N} + \Omega_2'\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\tau\mathbf{B} + \tau\Omega_2'\mathbf{B}$

bulunur ve ortak çarpan parantezine alırsak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{T})) = (2\Omega_2'\kappa + \Omega_2\kappa')\mathbf{T} + (\Omega_2\kappa^2 - \Omega_2'')\mathbf{N}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{T}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle\Omega_2\kappa\mathbf{T} - \Omega_2'\mathbf{N}, \Omega_2\kappa\mathbf{T}$

$-\Omega_2'\mathbf{N}\rangle + \langle(2\Omega_2'\kappa + \Omega_2\kappa')\mathbf{T} + (\Omega_2\kappa^2 - \Omega_2'')\mathbf{N},$

$(2\Omega_2'\kappa + \Omega_2\kappa')\mathbf{T} + (\Omega_2\kappa^2 - \Omega_2'')\mathbf{N}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{T})))=\frac{1}{2}\int_\beta\ (\Omega_2^2\kappa^2+(\Omega_2')^2+4(\Omega_2')^2\kappa^2$$
$$+\Omega_2^2(\kappa')^2+4\Omega_2'\kappa\Omega_2\kappa'+\Omega_2^2\kappa^4+(\Omega_2'')^2-2\Omega_2\kappa^2\Omega_2'')ds$$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{N}))$ nin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X}=\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}-\langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{B}+\langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N}))=\nabla_{\mathbf{T}}(\Omega_2'\mathbf{T}+\Omega_2\kappa\mathbf{N}-\tau'\mathbf{B})$$
$$-\langle\mathbf{B},\Omega_2'\mathbf{T}+\Omega_2\kappa\mathbf{N}-\tau'\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B}+\langle\nabla_T\mathbf{B},\Omega_2'\mathbf{T}+\Omega_2\kappa\mathbf{N}-\tau'\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$$

bulunur. İç çarpım işlemleri ve (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N}))=\Omega_2''\mathbf{T}+\Omega_2'\nabla_T\mathbf{T}+\Omega_2'\kappa\mathbf{N}+\Omega_2\kappa'\mathbf{N}$$
$$+\Omega_2\kappa\nabla_T\mathbf{N}-\tau''\mathbf{B}-\tau'\nabla_T\mathbf{B}-\langle\mathbf{B},\Omega_2'\mathbf{T}+\Omega_2\kappa\mathbf{N}$$
$$-\tau'\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B}+\langle\nabla_T\mathbf{B},\Omega_2'\mathbf{T}+\Omega_2\kappa\mathbf{N}-\tau'\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N}))=\Omega_2''\mathbf{T}+\Omega_2'\kappa\mathbf{N}+\Omega_2'\kappa\mathbf{N}+\Omega_2\kappa'\mathbf{N}$$
$$+\Omega_2\kappa(-\kappa\mathbf{T}+\tau\mathbf{B})-\tau''\mathbf{B}-\tau'(-\tau\mathbf{N})-\langle\mathbf{B},\Omega_2'\mathbf{T}$$
$$+\Omega_2\kappa\mathbf{N}-\tau'\mathbf{B}\rangle(-\tau\mathbf{N})+\langle(-\tau\mathbf{N}),\Omega_2'\mathbf{T}+\Omega_2\kappa\mathbf{N}-\tau'\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$$

veya

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N}))=\Omega_2''\mathbf{T}+2\Omega_2'\kappa\mathbf{N}+\Omega_2\kappa'\mathbf{N}-\Omega_2\kappa^2\mathbf{T}$$
$$+\Omega_2\kappa\tau\mathbf{B}-\tau''\mathbf{B}+\tau'\tau\mathbf{N}-\tau'\tau\mathbf{N}-\tau\Omega_2\kappa\mathbf{B}$$

bulunur ve

$$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{N}))=(\Omega_2''-\Omega_2\kappa^2)\mathbf{T}$$
$$+(2\Omega_2'\kappa+\Omega_2\kappa')\mathbf{N}+(-\tau'')\mathbf{B}$$

elde edilir. Ve enerji

$$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X})))=\frac{1}{2}\int_\beta\ (\langle A(\phi(\mathbf{X})),A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$$
$$+\langle\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X})),\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{N})))=\frac{1}{2}\int_\beta\ (\langle\Omega_2'\mathbf{T}+\Omega_2\kappa\mathbf{N}$$
$$-\tau'\mathbf{B},\Omega_2'\mathbf{T}+\Omega_2\kappa\mathbf{N}-\tau'\mathbf{B}\rangle+\langle(\Omega_2''-\Omega_2\kappa^2)\mathbf{T}$$
$$+(2\Omega_2'\kappa+\Omega_2\kappa')\mathbf{N}+(-\tau'')\mathbf{B},(\Omega_2''$$
$$-\Omega_2\kappa^2)\mathbf{T}+(2\Omega_2'\kappa+\Omega_2\kappa')\mathbf{N}+(-\tau'')\mathbf{B}\rangle)ds$$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{N}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\Omega_2')^2 + \Omega_2^2\kappa^2 + (\tau')^2$

$+(\Omega_2'')^2 + \Omega_2^2\kappa^4 - 2\Omega_2''\Omega_2\kappa^2 + 4(\Omega_2')^2\kappa^2$

$+\Omega_2^2(\kappa')^2 + 4\Omega_2'\kappa\Omega_2\kappa' + (\tau'')^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\phi(\mathbf{B}))$ nin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} = \nabla_\mathbf{T}\mathbf{X} - \langle \mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle \nabla_T\mathbf{B} + \langle \nabla_T\mathbf{B}, \mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{B})) = \nabla_\mathbf{T}(\tau'\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{T})$

$-\langle \mathbf{B}, \tau'\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{T}\rangle \nabla_T\mathbf{B} + \langle \nabla_T\mathbf{B}, \tau'\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{T}\rangle\mathbf{B}$

elde edilir. Burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{B})) = \tau''\mathbf{N} + \tau'\nabla_T\mathbf{N} - \tau'\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa'\mathbf{T} - \tau\kappa\nabla_T\mathbf{T}$

$-\langle \mathbf{B}, \tau'\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{T}\rangle \nabla_T\mathbf{B} + \langle \nabla_T\mathbf{B}, \tau'\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{T}\rangle\mathbf{B}$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{B})) = \tau''\mathbf{N} + \tau'(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) - \tau'\kappa\mathbf{T}$

$-\tau\kappa'\mathbf{T} - \tau\kappa\kappa\mathbf{N} - \langle \mathbf{B}, \tau'\mathbf{N}$

$-\tau\kappa\mathbf{T}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}), \tau'\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{T}\rangle\mathbf{B}$

veya

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{B})) = \tau''\mathbf{N} - \tau'\kappa\mathbf{T} + \tau'\tau\mathbf{B}$

$-\tau'\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa'\mathbf{T} - \tau\kappa^2\mathbf{N} - \tau'\tau\mathbf{B}$

veya

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{B})) = -2\tau'\kappa\mathbf{T} - \tau\kappa'\mathbf{T} + \tau''\mathbf{N} - \tau\kappa^2\mathbf{N}$

ortak çarpan parantezine alınırsa

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{B})) = (-2\tau'\kappa - \tau\kappa')\mathbf{T} + (\tau'' - \tau\kappa^2)\mathbf{N}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle \tau'\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{T}, \tau'\mathbf{N} - \tau\kappa\mathbf{T}\rangle$

$+\langle(-2\tau'\kappa - \tau\kappa')\mathbf{T} + (\tau'' - \tau\kappa^2)\mathbf{N},$

$(-2\tau'\kappa - \tau\kappa')\mathbf{T} + (\tau'' - \tau\kappa^2)\mathbf{N}\rangle)ds$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{B}))) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + \tau^2\kappa^2 + 4(\tau')^2\kappa^2$

$+\tau^2(\kappa')^2 + 4\tau'\kappa\tau\kappa' + (\tau'')^2 + \tau^2\kappa^4 - 2\tau''\tau\kappa^2)ds$

elde edilir.

Benzer şekilde $A(\mathbf{V})$'nin modifiye(bi-normal) Fermi-Walker türevi

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X} - \langle\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B},\mathbf{X}\rangle\mathbf{B}$

formülü ile hesaplanır.Buradan

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{T}}(-\tau'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}) - \langle\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T}$

$-\tau\kappa\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\nabla_T\mathbf{T} - \tau'\kappa\mathbf{N} - \tau\kappa'\mathbf{N}$

$-\tau\kappa\nabla_T\mathbf{N} - \Omega_2''\mathbf{B} - \Omega_2'\nabla_T\mathbf{B} - \langle\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N}$

$-\Omega_2'\mathbf{B}\rangle\nabla_T\mathbf{B} + \langle\nabla_T\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$

bulunur ve burada (2.10) eşitlikleri göz önüne alınarak

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - \tau'\kappa\mathbf{N} - \tau'\kappa\mathbf{N} - \tau\kappa'\mathbf{N} - \tau\kappa(-\kappa\mathbf{T}$

$+\tau\mathbf{B}) - \Omega_2''\mathbf{B} - \Omega_2'(-\tau\mathbf{N}) - \langle\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N}$

$-\Omega_2'\mathbf{B}\rangle(-\tau\mathbf{N}) + \langle(-\tau\mathbf{N}), -\tau'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}\rangle\mathbf{B}$

bulunur. İç çarpım işlemlerinden sonra

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = -\tau''\mathbf{T} - 2\tau'\kappa\mathbf{N} - \tau\kappa'\mathbf{N} + \tau\kappa^2\mathbf{T}$

$-\tau^2\kappa\mathbf{B} - \Omega_2''\mathbf{B} + \Omega_2'\tau\mathbf{N} - \Omega_2'\tau\mathbf{N} + \tau^2\kappa\mathbf{B}$

ya da

$\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\mathbf{V}) = (-\tau'' + \tau\kappa^2)\mathbf{T} + (-2\tau'\kappa - \tau\kappa')\mathbf{N} + (-\Omega_2'')\mathbf{B}$

elde edilir. Ve

$\varepsilon^{modified}(A(\phi(\mathbf{X}))) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle A(\phi(\mathbf{X})), A(\phi(\mathbf{X}))\rangle$

$+\langle\widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X})), \widetilde{\nabla}_T^{0modified}A(\phi(\mathbf{X}))\rangle)ds$

formülü ile hesaplanır.Burada eşitlikler yerlerine yazılırsa

$\varepsilon^{modified}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta (\langle -\tau'\mathbf{T} - \tau\kappa\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}, -\tau'\mathbf{T}$

$-\tau\kappa\mathbf{N} - \Omega_2'\mathbf{B}\rangle + \langle(-\tau'' + \tau\kappa^2)\mathbf{T} + (-2\tau'\kappa - \tau\kappa')\mathbf{N}$

$+(-\Omega_2'')\mathbf{B}, (-\tau'' + \tau\kappa^2)\mathbf{T} + (-2\tau'\kappa - \tau\kappa')\mathbf{N} + (-\Omega_2'')\mathbf{B}\rangle)d$

bulunur ve iç çarpım işlemlerinden sonra

$\varepsilon^{modified}(A(\mathbf{V})) = \frac{1}{2}\int_\beta ((\tau')^2 + \tau^2\kappa^2 + (\Omega_2')^2 + (\tau'')^2 + \tau^2\kappa^4$

$$-2\tau''\tau\kappa^2 + 4(\tau')^2\kappa^2 + \tau^2(\kappa')^2 + 4\tau'\kappa\tau\kappa' + (\Omega_2'')^2)ds$$

elde edilir.

7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

7.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, 3-boyutlu uzayda Frenet çatısına göre **T**, **N**, **B** manyetik eğrilerinin türevini, genelleştirilmiş Fermi-Walker türevini, genelleştirilmiş Normal Fermi-Walker türevini ve genelleştirilmiş Modifiye (Bi-Normal) Fermi-Walker türevini hesaplayarak Frenet çatısında bazı vektör alanlarının çeşitli türevleri yardımıyla enerji denklemleri elde edildi.

KAYNAKLAR

Balakrishnan, R. 2005. Space curves, anholonomy and nonlinearity. *Pramana Journal of Physics*, 64 (4), 607-615.

Barros, M., Cabrerizo, L., Fernandez, M., Romeo, A., 2007. Magnetic Vortex Filament Flows. *J Math Phys*, 48, 1-27.

Benn, I. M. and Tucker, R. W., 1989. Wave mechanics and inertial guidance, *The American Physical Society*, 39 (6), 1594-1601.

Bishop, R.L., 1975. There is more than one way to frame a curve. *Amer. Math. Monthly*, 82(3), 246-251.

Bozkurt, Z., Gök İ., Yaylı Y., Ekmekci F.N. 2014. A new approach for magnetic curves in 3D Riemannian manifolds, *Journal of Mathematical Physics*, 55 (5). 053501.

Bükcü, B., Karacan, M.K., 2008a. Special Bishop Motion and Bishop Darboux rotation axis of the space curve. *J. Dyn. Syst. Geom. Theor*., 6(1), 27-3.

Bükcü, B., Karacan, M.K., 2008b.On theSlant Helices According to Bishop Frame of the Timelike Curve in Lorentzian Space. *Tamkang J. Math*., 39(3), 255-262.

Bükcü, B., Karacan, M.K., 2009. The Slant Helices according to Bishop frame. *Int. J. Math. Comput. Sci*., 3(2), 67-70.

Büyükkütük, S., Öztürk, G., 2015. Constant Ratio Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3-Space . *Gen. Math. Notes*, Vol.28, no.1, pp.81-91. 3 E

Chacon, P.M., Naveira, A.M., Weston, J.M.: On the energy of distributions, with application to the quaternionic Hopf fibrations. *Monatsh. Math*. 133, 281–294 (2001)

Chacon, P. M., Naveira A. M., Corrected Energy of Distrubution on Riemannian Manifolds, *Osaka J. Math*., 41 (2004), 97–105.

Clain, C., Crasmareanu, M., 2015. Magnetic Curves in Three - Dimensional Quasi - Para - Sasakian Geometry. *Mediterr. J. Math*., DOI 10.1007/s00009-015-0570-y.

Dandolof, R. 1989. Berry's Phase and Fermi-Walker parallel transport, *Elsevier science publishers Physics Letters A*, 139 (1-2), 19-20.

Druta-Romaniuc, S.L., Inoguchi, J.I., Munteanu, M.I., Nistor, A.I., 2013. Magnetic Curves in Sasakian Manifolds. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol. 22, No. 3, 428-447.

Druta-Romaniuc, S.L., Munteanu, M.I., 2013. Killing Magnetic Curves in a Minkowski 3-Space. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 14, 383-396.

Fermi E., Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. *Fiz. Mat. Nat*., 31, 184 (1922) 306.

Hacısalihoğlu, H. H., 2002. Diferensiyel Geometri, *Fen Fakültesi yayınları*, Cilt 1. 269, Ankara.

Hawking S.W., Ellis G.F.R., The large scale structure of spacetime, *Cambridge Univ*. Press, 1973, § 4.1.

Hehl F.W., Lemke J., Mielke E.W., Two lectures on Fermions and Gravity, in Geometry and Theoretical Physics, *J. Debrus* and *A.C. Hirshfeld (eds.), Springer Verlag*, N.Y., (1991) 56- 140.

Karakuş, F., Yaylı, Y., 2012. On the Fermi-Walker derivative and non-rotating frame, *Journal of Geometric Methods in Modern Physics* 52

Kazan, A.,. Karadağ, H.B., 2017. Magnetic Curves According to Bishop Frame and Type-2 Bishop Frame in Euclidean 3-Space. *British J. Math*., 22(4), 1-18.

Körpinar, T., Demirkol, R.C., Asil, V., 2017. New Characterizations on the energy of parallel vector fields in Minkowski Space *Journal of Advanced Physics* 6(4), 562-569(8).

Manoff S., Fermi derivative and Fermi- Walker transports over (Ln, g)- spaces, Internat. *J. Modern Phys. A*, 13, No.25 (1998) 4289- 4308.

Munteanu, M.I., Nistor, A.I., 2012. The Classification of Killing Magnetic Curves in . *Journal of Geometry and Physics*, 62, 170-182. R □2 S

Munteanu, M.I., 2013. Magnetic Curves in a Euclidean Space: One example, Several Applications. *Publications de L'Institut Mathematique*, 94(108), 141-150.

Özdemir, Z., Gök, İ., Yaylı,Y., Ekmekçi, F.N., 2015. Notes on Magnetic Curves in 3D semi-Riemannian Manifolds. *Turk J. Math*., 39, 412-426.

Pripoae G.T., Generalized Fermi-Walker transport, *Libertas Math*., XIX (1999) 65-69.

Sabuncuoğlu, A., 2001. Diferensiyel Geometri. *Nobel Yayınları*, 522, Ankara.

Synge, J.L., 1960. Relativity: The General Theory. Amsterdam, *North Holland Pub*. Co.

Thorpe, J. A. 1979. Elementary Topics in Differential Geometry. *SpringerVerlag*, s. 45-52, Berlin.

Uçar, A. 2019. Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi Ve Geometrik Uygulamaları. *Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*. Sinop

Yılmaz, S., Turgut, M., 2010. A new Version of Bishop Frame and an Application to Spherical İmages. *J. Math. Anal. Appl*., 371, 764-776.